UNIREMINGTON®
CORPORACIÓN UNIVERSITARIA REMINGTON
RES. 2661 MEN JUNIO 21 DE 1996

MATEMÁTICAS III

INGENIERÍA DE SISTEMAS

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Vicerrectoría de Educación a Distancia y virtual

2016

AUTOR

Elkin Ceballos Gómez.
Ingeniero Electricista de la Universidad Nacional Diplomado en Diseño Curricular. Especialista en Matemáticas Aplicadas y Pensamiento Complejo
Docente de La Corporación Universitaria de Ciencia y Desarrollo Docente de matemáticas en educación básica y media en la Institución Educativa Kennedy Docente de la organización Rémington.
eceballos2@yahoo.com

Nota: el autor certificó (de manera verbal o escrita) No haber incurrido en fraude científico, plagio o vicios de autoría; en caso contrario eximió de toda responsabilidad a la Corporación Universitaria Remington, y se declaró como el único responsable.
Actualizaciones: fueron creadas a través de talleres didácticos de entrenamiento, ejercicios de aprendizaje, pistas de aprendizaje, mapa conceptual y pruebas iniciales

Pablo Emilio Botero Tobón
Tecnólogo en contable y tributaria
pbotero@remington.edu.co

RESPONSABLES

Jorge Mauricio Sepúlveda Castaño
Decano de la Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería
jsepulveda@uniremington.edu.co

Eduardo Alfredo Castillo Builes
Vicerrector modalidad distancia y virtual
ecastillo@uniremington.edu.co

Francisco Javier Álvarez Gómez
Coordinador CUR-Virtual
falvarez@uniremington.edu.co

GRUPO DE APOYO

Personal de la Unidad CUR-Virtual
EDICIÓN Y MONTAJE

Primera versión. Febrero de 2011.
Segunda versión. Marzo de 2012
Tercera versión. Enero de 2016

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

1 MAPA DE LA ASIGNATURA

MATEMÁTICAS III

PROPÓSITO GENERAL DEL MÓDULO

El cálculo es una herramienta de uso cotidiano en la elaboración de diseños y la implementación y desarrollo de proyectos. El manejo de la conceptualización y aplicación de este modelo permitirá un ejercicio versátil de la acción en las diferentes áreas del conocimiento.

OBJETIVO GENERAL

Analizar comprensivamente los elementos geométricos, algebraicos y analíticos asociados al modelo de representación de situaciones problémicas propuesto por el cálculo en su aproximación integral, Identificando las características de este modelo de representación con una claridad suficiente que permitan el desarrollo de habilidades y destrezas para la discretización de situaciones problémicas de su cotidianidad y puedan ser simuladas con este esquema de pensamiento, brindando, además, elementos del modelo que permitan la representación de otro grado de libertad del sistema dinámico no lineal conformado por la interacción de la persona y su entorno de objetos cotidianos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Definir la anti derivada y la integral indefinida, explicando y aplicando las fórmulas básicas de integración.
- Entender el concepto de la integral definida partiendo del cálculo del área bajo una curva.
- Calcular integrales indefinidas y definidas, usando los métodos de integración por partes e integración por fracciones parciales.

UNIDAD 1

Búsqueda de definiciones de situaciones problémicas cotidianas para ser representados por medio del modelo.
Estudio teórico-práctico de las características fundamentales del modelo.
Se explica las leyes básicas de integración, la integración con condiciones iniciales, las aplicaciones en economía y física y algunas técnicas de integración.

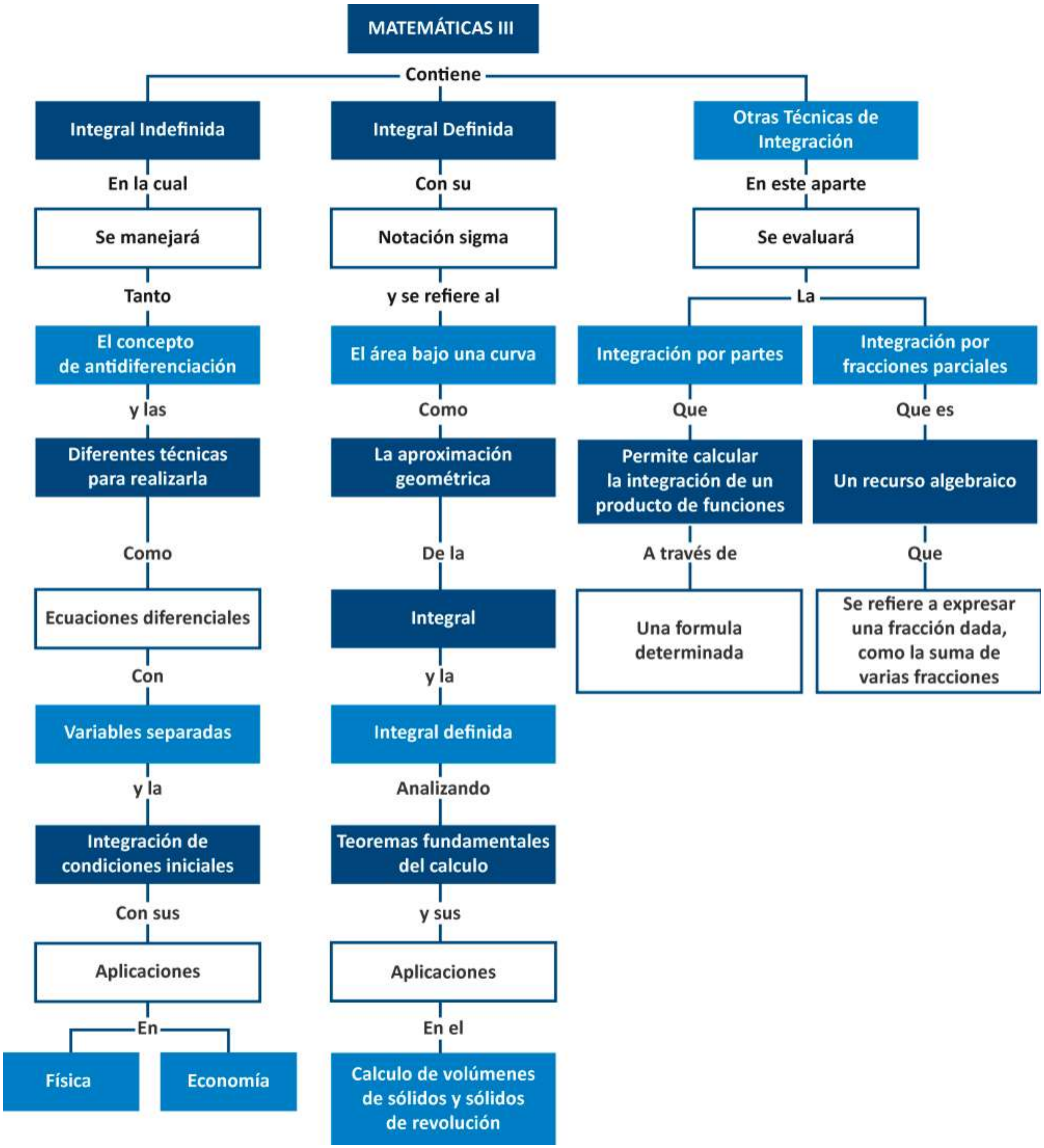
UNIDAD 2

Búsqueda de definiciones de situaciones problémicas cotidianas para ser representados por medio del modelo.
Estudio teórico-práctico de las características fundamentales del modelo.
Concepto de integral definida partiendo del área bajo una curva, teorema fundamental del cálculo y propiedades de la integral definida.

UNIDAD 3

Búsqueda de definiciones de situaciones problémicas cotidianas para ser representados por medio del modelo.
Estudio teórico-práctico de las características fundamentales del modelo.
Resolver integrales de funciones racionales mediante la transformación de la función racional propia en una suma de fracciones más simples.
esolver integrales que provienen de la derivada de un producto de funciones.

1.1.1 MAPA CONCEPTUAL DE LA ASIGNATURA



2 UNIDAD I INTEGRAL INDEFINIDA E INTEGRACIÓN

2.1.1 OBJETIVO GENERAL.

Definir la anti derivada y la integral indefinida, explicando y aplicando las fórmulas básicas de integración.

2.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Utilizar las leyes básicas de integración para encontrar un conjunto de funciones primitivas.
- Integración de funciones por el método de sustitución o cambio de variable.
- Efectuar integrales realizando división previa a la integral.

2.2 TEMA 1 INTEGRACIÓN

FUNCIONES	PRIMERA DERIVADA $y'(x) = f'(x)$	SEGUNDA DERIVADA $y''(x) = f''(x)$	TERCERA DERIVADA $y'''(x) = f'''(x)$
$f(x) = 8x^3 - 9x^2 - 5x + 7$			
$f(x) = \frac{3x^5}{2} + \frac{7x^3}{3} - \frac{3x}{2}$			
$f(x) = \frac{6}{2x-3}$			
$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^5} + 7$			
$f(x) = \left(3 - 5x^2\right) * (4x - 15)$			
$f(x) = e^{5x^3 - 6x + 4}$			
$f(x) = \ln(5x^3 - 2x^2 + 7)$			
$f(x) =$			

2.2.1 RESEÑA HISTÓRICA.

Los cimientos del Cálculo Infinitesimal fueron colocados por matemáticos como: Cavalieri, Torriceli, Fermat, Pascal y Barrow, entre otros. Y luego el cálculo fue desarrollado en forma independiente por Isaac Newton en Inglaterra y por Gottfried Leibniz en Alemania hacia el final de los años 1600 y comienzos de los años 1700 (entre

1660 y 1720). Y fue George Friedich Bernhard Riemann (1826-1866) quien proporcionó la definición moderna de la Integral definida.

Uno de los problemas que originó el desarrollo del Cálculo fue el problema del área. El concepto de área se tuvo desde muy temprano, prácticamente desde el desarrollo de la agricultura y la propiedad privada que hizo necesario idear métodos para medir los terrenos. Antes de los griegos se conocían fórmulas para calcular con bastante precisión el área de superficies poligonales de cualquier forma. Lo que no existía era una fórmula o un método para encontrar el área de una superficie cuyo borde exterior fuera una curva, la de un círculo por ejemplo.

Arquímedes (287-212 AC) resolvió el problema parcialmente, deduciendo la fórmula para hallar el área del círculo. El método de Arquímedes fue un avance importante, pero no satisfacía totalmente la necesidad de encontrar el área de una curva, problema que si resolvió el Cálculo.

Esta fue un de las necesidades por las cuales surgió el Cálculo. Hoy en día el Cálculo no solo se aplica para determinar áreas, sino también para el diseño de puentes, caminos, velocidad exacta que debe alcanzarse para colocar un satélite en una órbita alrededor de la tierra, para determinar modelos matemáticos bajo ciertas condiciones, entre otras aplicaciones. Tiene aplicación en todas las ramas del conocimiento, en Economía, Administración, Física y demás ciencias.

2.2.2 DEFINICIÓN DE INTEGRAL O ANTIDERIVADA.

La integral es una operación contraria a la derivada.

DEFINICIÓN: La integral de una función $\boldsymbol{f(x)}$, es otra función que $\boldsymbol{F(x)}$, siempre que se cumpla que:

$$\boldsymbol{F(x) = f(x)}$$

Para indicar que $\boldsymbol{F(x)}$ es una integral de $\boldsymbol{f(x)}$ utilizamos el siguiente símbolo:

$$\boldsymbol{F(x) = \int f(x)dx}: \ \boldsymbol{se\ llama\ Integral\ indefinida}$$

DEMOSTRACIÓN:

- Para hacer la demostración se parte de la condición:

$$\boldsymbol{F'(x) = f(x)} \ \textbf{Ecuación (1)}$$

- Otra notación para $\boldsymbol{F'(x)}$ puede ser:

$$\boldsymbol{F'(x) = \frac{d[F(x)]}{dx}} \ \textbf{Ecuación (2)}$$

- Reemplazando **2** en **1** se tiene:

$$\frac{d[F(x)]}{dx} = f(x)$$

- Multiplicando a ambos lados por dx queda:

$\frac{d[F(x)]}{dx} * dx = f(x) * dx$, Simplificando dx en el primer miembro de la igualdad:

$$d[F(x)] = f(x) * dx$$

- Para quitar el diferencial $d[F(x)]$, se integra en ambos lados:

$$\int d[F(x)] = \int f(x)dx$$

$F(x) = \int f(x)dx$, lo que se quería demostrar.

2.2.3 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Si $F(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6x$

- Derivando se tiene que:

$$F'(x) = 12x^2 + 10x + 6 = f(x)$$

- Aplicando la fórmula:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

- Se tiene que:

$$F(x) = \int (12x^2 + 10x + 6)dx = 4x^3 + 5x^2 + 6x$$

- Es decir, una integral de $12x^2 + 10x + 6$, es:

$$F(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6x$$

---

2. Si $F(x) = 5x^4$

- Derivando se tiene que:

$$F'(x) = 20x^3 = f(x)$$

- Aplicando la fórmula:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

- Se tiene que:

$$F(x) = \int 20x^3dx = 5x^4$$

- Es decir, una integral de $20x^3$, es:

$$F(x) = 5x^4$$

NOTA:
Siempre que se integre debe sumarse al resultado una constante de integración C que representa las cantidades que no tienen variable.

Revisando la nota anterior se tiene:

$F(x)$	$F'(x)$	$\int f(x)dx$
1. x^4	$4x^3$	x^4
2. x^4+10	$4x^3$	$Debería\ ser\ x^4+10$ *
3. x^4-5	$4x^3$	$Debería\ ser\ x^4-5$**

Revisando el cuadro:

Sí

1. $F(x)=x^4$, su derivada

$F'(x)=4x^3$, esto es:

$$F'(x)=4x^3$$

Entonces, se tiene que una integral de $4x^3$ es $F(x)=x^4$. Representando esta situación matemáticamente:

$$\int 4x^3dx = x^4$$

2 Pero que pasa sí $F(x)=x^4+10$, derivando podemos ver que:

$$F'(x)=4x^3$$

Se obtiene la misma derivada del ejercicio 1, por lo tanto:

$\int 4x^3dx,$ también debe ser igual a $F(x)=x^4+10$

3 Lo mismo sucede sí $F(x)=x^4-5$

Su derivada es igual a:

$$F'(x)=4x^3$$

Entonces, $\int 4x^3dx$ debe ser igual a $F(x)=x^4-5$

Tenemos entonces que: $\int 4x^3 dx$, debe ser igual a:

1. $F(x) = x^4$

---

2. $F(x) = x^4 + 10$ **

---

3. $F(x) = x^4 - 5$*

Como conclusión tenemos que estas tres funciones solo **difieren en una constante**, como no sabemos cuál número escribir, **siempre que se integre,** al resultado le escribimos una **constante C.**

- **LEYES BÁSICAS DE INTEGRACIÓN.**

- **Integral de una potencia**

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \text{ con } n \neq -1$$

2.2.4 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{x^4}{4} + c$

---

2. $\int \sqrt[5]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{5}} dx = \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + c = \frac{5}{7} * \sqrt[5]{x^7} + c =$

$\frac{5}{7} x * \sqrt[5]{x^2} + c$

3. $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3-1}}{-3-1} + c = \frac{x^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{4x^4} + c$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln x + c$$

$$\int dx = x + c$$

2.2.5 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $\int dz = z + c$

2. $\int dy = y + c$

3. $\int e^x\, dx = e^x + c$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c, a \epsilon R_e \; y \; a \neq 0$$

2.2.6 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $\int 5^x dx = \frac{1}{\ln 5} 5^x + c$

2. $\int 7^x dx = \frac{1}{\ln 7} 7^x + c$

$\int k * f(x)dx = k \int f(x)dx = kF(x) + c$

Donde **k** es una constante.

Podemos ver que se efectúa la integral de la función, el resultado se multiplica por la constante k y al final sólo se escribe una sola constante de integración.

2.2.7 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $\int 10\, dx = 10 \int dx = 10x + c$

---

2. $\int \frac{11}{x} dx = 11 \ln x + c$

---

3. $\int \frac{-4}{y} dy = -4 \ln y + c$

---

4. $\int \frac{8}{x} dx = 8 \int \frac{1}{x} dx = 8 \ln x + c$

---

5. $\int \sqrt{3} dx = \sqrt{3} \int dx = \sqrt{3}\, x + c$

---

6. $\int 9x^{1.3}dx = 9\int x^{1.3}dx = \frac{9\,x^{1.3+1}}{1.3+1} + c = \frac{9x^{2.3}}{2.3} + c$

7. $\int 6x^2dx = 6\int x^2dx = \frac{6x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{6x^3}{3} + c = 2x^3 + c$

8. $\int \frac{8}{x^5}dx = 8\int \frac{1}{x^5}dx = 8\int x^{-5}dx = \frac{8x^{-5+1}}{-5+1} + c = \frac{8x^{-4}}{-4} + c =$

$$-\frac{2}{x^4} + c$$

9. $\int 11e^x dx = 11\int e^x dx = 11e^x + c$

10. $\int \frac{3}{5}e^x dx = \frac{3}{5}\int e^x dx = \frac{3}{5}e^x + c$

11. $\int -8e^z dz = -8\int e^z dz = -8e^z + c$

12. $\int e\,dx = ex + c$ (Recuerde que e es una constante)

13. $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + c$

2.2.8 INTEGRAL DE UNA SUMA (DIFERENCIA)

La integral de una **suma (diferencia)** es igual a la suma (diferencia) de las integrales, esto es:

$$\int [f(x) \pm g(x) \pm h(x) \pm \cdots] = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \pm \int h(x)dx \pm \cdots$$

NOTA:

Para aplicar la ley, se efectúa cada integral independientemente y al final escribimos una sola constante de integración C.

2.2.9 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $\int (5x^2 + 6x - 10)dx = \int 5x^2dx + \int 6xdx - \int 10dx =$

$$5\int x^2dx + 6\int xdx - 10\int dx = 5\frac{x^{2+1}}{2+1} + 6\frac{x^{1+1}}{1+1} - 10x + c$$

Realizando las operaciones indicadas y simplificando:

$$\frac{5x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 10x + c = \frac{5x^3}{3} + 3x^2 - 10x + c$$

---

2. $\int (7x^4 - 3x^2 + 8x - 9)dx = \int 7x^4\,dx - \int 3x^2\,dx + \int 8xdx - \int 9dx =$

$$7\int x^4dx - 3\int x^2dx + 8\int xdx - 9\int dx = 7\frac{x^{4+1}}{4+1} - 3\frac{x^{2+1}}{2+1} + 8\frac{x^{1+1}}{1+1} - 9x + c$$

Realizando las operaciones indicadas y simplificando:

$$\frac{7x^5}{5} - \frac{3x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 9x + c = \frac{7x^5}{5} - x^3 + 4x^2 - 9x + c$$

---

3. $\int \frac{4x^5-6x^3+8x}{2x} dx$ Separando denominadores y aplicando la propiedad correspondiente, se tiene:

$$\int \frac{4x^5}{2x} dx - \int \frac{6x^3}{2x} dx + \int \frac{8x}{2x} dx$$

Simplificando, se tiene:

$$\int 2x^4 dx - \int 3x^3 dx + \int 4dx = 2\int x^4 dx - 3\int x^3 dx + 4\int dx =$$

$$\frac{2x^{4+1}}{4+1} - \frac{3x^{3+1}}{3+1} + 4x + c = \frac{2x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + 4x + c$$

---

4. $\int 5z^3 dx = 5z^3 \int dx = 5z^3 x + c$

Nota: Se debe esto a que se está integrando x y no Z, por lo tanto Z es una constante.

---

5. $\int \left(3q^2 - \frac{2}{3}q + 5\right) dq$

$$\int \left(3q^2 - \frac{2}{3}q + 5\right) dq = \int 3q^2 dq - \int \frac{2}{3} q dq + \int 5dq =$$

$$3\int q^2 dq - \frac{2}{3}\int q dq + 5\int dq = \frac{3q^{2+1}}{2+1} - \frac{2}{3} * \frac{q^{1+1}}{1+1} + 5q + c$$

Realizando las operaciones indicadas y simplificando, se tiene:

$$\frac{3q^3}{3} - \frac{2}{3} * \frac{q^2}{2} + 5q + c = q^3 - \frac{1}{3}q^2 + 5q + c$$

---

6. $\int y^2 \left(y + \frac{3}{2}\right) dy$

$\int y^2\left(y+\frac{3}{2}\right)dy,$ Se realiza el producto indicado:

$\int \left(y^3+\frac{3}{2}y^2\right)dy$, se aplica la propiedad correspondiente:

$$\int y^3dy+\int \frac{3}{2}y^2dy=\frac{y^{3+1}}{3+1}+\frac{3}{2}*\frac{y^{2+1}}{2+1}+c$$

Realizando las operaciones indicadas y simplificando, se tiene:

$$\frac{y^4}{4}+\frac{3}{2}*\frac{y^3}{3}+c=\frac{y^4}{4}+\frac{3}{2}*\frac{y^3}{3}+c=\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{2}y^3+c$$

---

7. $\int 3*2^x dx=3\int 2^x dx=3*\frac{2^x}{\ln 2}+c$

---

8. $\int \frac{5^x}{7}dx=\frac{1}{7}\int 5^x dx=\frac{1}{7}*\frac{5^x}{\ln 5}+c$

2.2.10 INTEGRACIÓN CON CONDICIONES INICIALES

Las condiciones iniciales nos permiten determinar el valor de la constante **C**. Es decir entre muchas funciones, nos permite determinar una única función.

2.2.11 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Sí. $f'(x)=5x$ y $f(1)=4$. Determine: $f(x)$

El procedimiento a seguir para resolver este tipo de integrales es el siguiente:

a. Se escribe una notación para la derivada que permita visualizar las dos variables.

$f'(x)$ o $\frac{d[f(x)]}{dx}$ o $\frac{dy}{dx}$ Esto es:

$$f'(x) = \frac{d[f(x)]}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Se utilizará la notación: $\frac{dy}{dx}$

- La ecuación que nos dan se llama una **ecuación diferencial** (porque es una ecuación que incluye derivadas).

$\frac{dy}{dx} = 5x$ De acuerdo a las condiciones dadas inicialmente

- Debemos independizar las dos variables. Todo la que tenga x a un lado (incluyendo el dx) y todo lo que tenga $y = f(x)$ al lado contrario.

Separando variables queda: $dy = 5x\ dx$

- Integrando en ambos lados (no es necesario colocar dos constantes de integración)

$$\int dy = \int 5x\ dx.$$

Se resuelve la integral:

$$y = \frac{5x^2}{2} + c *$$

Recuerde que: y es lo mismo $f(x)$ y $y = f(x)$

- Luego utilizamos la condición inicial o valor en la frontera para hallar **C**.

Para este caso la condición inicial es $f(1) = 4$. Esta condición quiere decir:

Para $x = 1, y = 4$

Se reemplazan estos valores en la ecuación:

$$y = \frac{5x^2}{2} + c *$$

$y = \frac{5x^2}{2} + c$ (Se reemplazan x, y en el modelo):

$$4 = \frac{5(1)^2}{2} + c \rightarrow c = 4 - \frac{5}{2} \rightarrow c = \frac{8-5}{2} \rightarrow c = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto, la función $y = \frac{5x^2}{2} + c$ queda:

$$y = \frac{5x^2}{2} + \frac{3}{2}$$

b. Con la función obtenida podemos encontrar valores de x o de y según se necesite.

$$f(x) = y = \frac{5x^2}{2} + \frac{3}{2}$$

Por ejemplo, hallar:

- $f(-3) = \frac{5(-3)^2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{45}{2} + \frac{3}{2} = \frac{48}{2} = 24$
- $f(2) = \frac{5(2)^2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{20}{2} + \frac{3}{2} = \frac{23}{2}$

- ¿Qué valor tiene x cuando $y = 7$

- Se reemplaza en la ecuación:

$$y = \frac{5x^2}{2} + \frac{3}{2} \rightarrow 7 = \frac{5x^2}{2} + \frac{3}{2}$$

- Se multiplica toda la ecuación por **2**, para eliminar los denominadores:

$$2 * 7 = 2 * \frac{5x^2}{2} + 2 * \frac{3}{2}$$

- Simplificando:

$$5x^2 + 3 = 14$$

- Resolviendo para x:

$$5x^2 = 14 - 3 \rightarrow 5x^2 = 11 \rightarrow x^2 = \frac{11}{5} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{11}{5}}$$

---

2. Si y es una función de x tal que $y' = 8x - 4$ y $y(2) = 5$, encontrar el valor de y , **encontrar, también** $y(4)$**.**

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tener en cuenta:

Cuando se dice $y(2) = 5$ significa que

$$y = 5\ cuando\ \ x = 2$$

Procedimiento

- $y(2) = 5$ Es la condición inicial.
- $y' = 8x - 4$
- y Es una antiderivada de $8x - 4$:

Entonces:

$$y = \int (8x - 4)dx = 8\int xdx - 4\int dx = 8 * \frac{x^2}{2} - 4x + c$$

- Simplificando:

$$y = 4x^2 - 4x + c*$$

- Podemos determinar el valor de **C** por medio de la condición inicial:

$$y = 5 \; cuando \quad x = 2$$

- Reemplazando en *:

$$y = 4x^2 - 4x + c \rightarrow 5 = 4(2)^2 - 4(2) + c$$

- Despejando c:

$$c = 5 - 16 + 8 \rightarrow c = -3$$

- Reemplazando c por -3 en la ecuación (*) se obtiene la función que buscamos:

$$y = 4x^2 - 4x + c \text{ pero } \quad c = -3 \qquad (3)$$

- Entonces la ecuación queda:

$$y = 4x^2 - 4x - 3$$

Para encontrar $y(4)$, hacemos x = 4 en la ecuación (3):

$$y(4) = (4)^2 - 4(4) - 3 = 64 - 16 - 3 = 45$$

---

3. Si $f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$ con $f'(3) = 8$, hallar $f(x)$

Procedimiento

- Se deben independizar las dos variables. Todo la que tenga x a un lado (incluyendo el dx) y todo lo que tenga $y = f(x)$ al lado contrario.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x + 3 \rightarrow dy = (3x^2 + 4x + 3)dx$$

- Integrando a ambos lados:

$$\int \boldsymbol{dy} = \int \boldsymbol{3x^2 + 4x + 3} \rightarrow y = 3\int x^2dx + 4\int xdx + 3\int dx \rightarrow$$

$\boldsymbol{y = \frac{3x^{2+1}}{2+1} + \frac{4x^{1+1}}{1+1} + 3x + c,}$ Efectuando las operaciones indicadas y simplificando:

$$\boldsymbol{y = \frac{3x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 3x + c \rightarrow y = x^3 + 2x^2 + 3x + c} *$$

- La condición inicial es: **x = 3, y = 8**
- Reemplazando en * tenemos:

$$\boldsymbol{y = x^3 + 2x^2 + 3x + c}$$

$$\boldsymbol{8 = (3)^3 + 2(3)^2 + 3(3) + c}$$

- Despejando $\boldsymbol{c}$:

$$\boldsymbol{c = 8 - 27 - 18 - 9 \rightarrow c = -46}$$

- La función o modelo queda:

$$\boldsymbol{y = x^3 + 2x^2 + 3x - 46}$$

- **Aplicaciones de la integral indefinida**.

APLICACIONES EN ECONOMÍA: Costo marginal, ingreso marginal y otras aplicaciones serán analizadas a través de ejemplos.

Costo marginal: Tenemos los siguientes tres modelos matemáticos (o funciones):

- $\boldsymbol{c(q)}$: **Modelo o función para los costos.**
- $\boldsymbol{c'(q)}$: **Modelo o función de costo marginal.** El costo marginal resulta al derivar la función o modelo de costo. El costo marginal es lo que cuesta producir una unidad adicional a las unidades que se tenía planeado producir inicialmente.
- $\boldsymbol{\bar{c}(q) = \frac{c(q)}{q}}$: Es el modelo o **función de costo promedio**. Es lo que cuesta en promedio producir una sola unidad.
- $\boldsymbol{q}$: **Número de unidades producidas**.

Como se está integrando el dato, en este tipo de problemas, será el **modelo de costo marginal**; adicionalmente la **condición inicial** será **casi siempre la misma**, nos darán un valor para los costos fijos, los costos fijos quieren decir $q = 0$ (Producción igual a cero).

2.2.12 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. En la manufactura de un producto se tiene: Costos fijos mensuales de \$ 2'000000

   (\$ 2000 miles) y el modelo o función para el costo marginal es:

$c'(q) = 10q + 8$ En miles de \$.

Donde q es el número de unidades producidas mensualmente.

Determinar:

a. **Función o modelo para el costo.**

Procedimiento

$$c'(q) = \frac{d[c(q)]}{dq} \rightarrow \frac{d[c(q)]}{dq} = 10q + 8$$

- Se deben independizar las dos variables:

$$d[c(q)] = (10q + 8)dq$$

- Se integra a ambos lados:

$$\int d[c(q)] = \int (10q + 8)dq \rightarrow 10 \int qdq + 8 \int dq$$

$$c(q) = 10\frac{q^{1+1}}{1+1} + 8q + c \rightarrow \ c(q) = 10\frac{q^2}{2} + 8q + c$$

- Simplificando:

$$c(q) = 5q^2 + 8q + c *$$

b. La condición inicial dice que los costos fijos son de **\$2000 miles**, esto quiere decir que para $q = 0 \rightarrow c = 2000$

- Reemplazando estos valores en: $c(q) = 5q^2 + 8q + c$, se tiene:

$$2000 = 5(0)^2 + 8(0) + c$$

- Despejando c:

$$c = 2000$$

- **El modelo de costos** queda: $c(q) = 5q^2 + 8q + 2000$ en miles de $.

c. **Función o modelo para el costo promedio**.

Procedimiento

$$\bar{c}(q) = \frac{c(q)}{q} = \frac{5q^2 + 8q + 2000}{q}$$

- Separando denominadores y simplificando:

$\bar{c}(q) = 5q + 8 + \frac{2000}{q}$ En miles de $.

d. Hallar el **costo**, **costo promedio** y **costo marginal** cuando se producen **50 unidades** en el mes; interprete los resultados obtenidos.

Procedimiento

Se pide determinar: $c(50)$, $\bar{c}(50)$, $c'(50)$

Se reemplaza en:

- $c(q) = 5q^2 + 8q + 2000$

$c(50) = 5(50)^2 + 8(50) + 2000 = 14900$ en miles de $.

Se concluye que producir **50 unidades** en **un mes** le cuesta a la empresa

$ 14’900.000.

- $\bar{c}(q) = \frac{c(q)}{q}$

$\bar{c}(50) = \frac{14900}{50} \rightarrow \bar{c}(q) = 298$ En miles de $.

Cuando se producen **50 unidades** en **un mes** cada unidad le cuesta a la empresa **$298.000**.

- $c'(q) = 10q + 8$

$c'(50) = 10(50) + 8 \rightarrow c'(q) = 500 + 8 = 508$ En miles de $

Cuando se producen **50 unidades**, producir **una unidad adicional** a las 50 le cuesta a la empresa

$ 508.000 (esa sola unidad adicional cuesta $ 508.000).

---

2. La **función o modelo** para el **costo marginal** es:

$c' = 4q + 7$ En $

Determinar el **costo promedio** cuando la producción es de **200 unidades.** Se sabe que los **costos fijos** son de $\$350.000$

Procedimiento

- $c(q) = \int c'(q)dq = \int (4q + 7)dq$ **en $**

$$c(q) = 4\int q dq + 7\int dq \rightarrow c(q) = 4\frac{q^{1+1}}{1+1} + 7q + c \rightarrow c(q) = 4\frac{q^2}{2} + 7q + c$$

Simplificando: $c(q) = 2q^2 + 7q + c$

- La condición inicial dice que: Costos fijos son de $\$350.000$

Cuando $q = 0 \rightarrow c(q) = 350.000$

Reeplazando en $c(q) = 2q^2 + 7q + c$:

$$350.000 = 2(0)^2 + 7(0) + c$$

Despejando c:

$$c = 350.000$$

La función de **costo total** queda:

$$c(q) = 2q^2 + 7q + 350.000$$

- La función de **costo promedio** se obtiene como:

$\bar{c}(q) = \frac{2q^2+7q+350.000}{q}$ Separando denominadores y simplificando:

$$\bar{c}(q) = 2q + 7 + \frac{350.000}{q} \text{ } en \ \$.$$

- Se pide hallar el costo promedio para una producción de **200 unidades**, es decir para

$$q = 200$$

Se reemplaza en: $\bar{c}(q) = 2q + 7 + \frac{350.000}{q}$

$$\bar{c}(q) = 2(200) + 7 + \frac{350.000}{200} = \$\ 2.157$$

---

3. El siguiente ejemplo fue tomado del libro Fundamentos de Cálculo del autor Francisco Soler Fajardo [1] y otros.

Una compañía actualmente produce **150 unidades** por semana de un producto. Por experiencia, saben que producir la unidad número x en una semana (**costo marginal**) está dado por:

$$c'(x) = 25 - 0.02x \text{ } en \ \$$$

Determinar el **costo extra** por semana que debería considerar al elevar la producción de **150** a **200** unidades por semana.

Procedimiento

a. Se debe hallar la función de costo:

---

[1] SOLER FAJARDO, Francisco; NUÑEZ, Reinaldo; ARANDA SILVA, Moisés. Fundamentos de Cálculo con aplicaciones a ciencias Económicas y Administrativas. 2 ed. Bogotá: Ecoe ediciones, 2002. p. 370.

$$c(x)=\int c'(x)dx=\int(25-0.02x)dx=25\int dx-0.02\int xdx\rightarrow$$

$$c(x)=25x-0.02\frac{x^2}{2}+c\rightarrow c(x)=25x-0.01x^2+c\quad en\,\$$$

b. No se tienen la información suficiente para determinar la constante de integración **C**, pero no es necesario saberlo, ya que se desea calcular el incremento en el costo que resulta al elevar x de **150** a **200** unidades por semana, es decir, se desea hallar:

$c(200)-c(150)$**:** se reemplaza cada uno en la ecuación $c(x)=25x-0.01x^2+c$

$$c(200)=25(200)-0.01(200)^2+c$$

$$c(150)=25(150)-0.01(150)^2+c$$

- Se efectúa la diferencia:

$$c(200)-c(150)=25(200)-0.01(200)^2+c-[25(150)-0.01(150)^2+c]$$

$$c(200)-c(150)=5.000-400+c-3750+225-c$$

- Efectuando las operaciones indicadas:

$$c(200)-c(150)=1.075$$

- Por lo tanto: El incremento en el costo semanal sería de **\$ 1075**.

c. **INGRESO MARGINAL**: Tenemos las siguientes tres funciones:

- $r(q)$: **Función para los ingresos**.
- $r'(q)$**: Función de ingreso marginal**. El ingreso marginal resulta al derivar la función o modelo de ingreso. El ingreso marginal es el ingreso que resulta cuando se vende una unidad adicional a las presupuestadas.
- $r(q)=p(q)*q$
- $p(q)$**: Función de precio o demanda.**
- q**: Número de unidades vendidas.**

Como se está integrando, el dato en este tipo de problemas será el **modelo de ingreso marginal**; adicionalmente la condición inicial será casi siempre la misma, si no hay ventas no habrá ingresos, esto es: Para

$$q=0,\qquad r=0$$

2.2.13 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

a. Si la función para el ingreso marginal es:

$$\boldsymbol{r'(q) = 1.000 - 12q - 6q^2} \; en \; \$$$

Encontrar la función para la demanda o precio

Procedimiento

$$\boldsymbol{r'(q) = \frac{d[r(q)]}{dq} \rightarrow \frac{dr}{dq} = 1.000 - 12q - 6q^2}$$

$$\boldsymbol{dr = (1.000 - 12q - 6q^2)dq}$$

Integrando a ambos lados:

$$\boldsymbol{\int dr = \int (1.000 - 12q - 6q^2)dq}$$

$$\boldsymbol{r = 1000 \int dq - 12 \int qdq - 6 \int q^2 dq \rightarrow}$$

$$\boldsymbol{r = 1000 - 12 * \frac{q^{1+1}}{1+1} - 6 * \frac{q^{2+1}}{2+1} + c = 1000 - 12\frac{q^2}{2} - 6\frac{q^3}{3} + c}$$

Simplificando:

$$\boldsymbol{y = r(q) = 1000q - 6q^2 - 2q^3 + c \; Función \; Ingreso}$$

Cuando no se vende $\boldsymbol{q = 0}$ no hay ingreso $\boldsymbol{r = 0}$.

Reemplazando estos valores en: $\boldsymbol{r(q) = 1000q - 6q^2 - 2q^3 + c}$

$\boldsymbol{0 = 1000(0) - 6(0)^2 - 2(0)^3 + c}$ Por lo tanto**:**

$$\boldsymbol{c = 0}$$

b. Si la función de ingreso es:

$$\boldsymbol{y = r(q) = 1000q - 6q^2 - 2q^3 en} \; \$$$

Entonces la **función demanda** se obtiene dividiendo la función de ingreso entre q :

$p = \frac{r(q)}{q} = \frac{1000q - 6q^2 - 2q^3}{q}$ Separando denominadores:

$p = \frac{r(q)}{q} = \frac{1000q}{q} - \frac{6q^2}{q} - \frac{2q^3}{q}$ Simplificando:

$$p = \frac{r(q)}{q} = 1000 - 6q - 2q^2 \ en \ \$$$

---

1. La función o modelo para el ingreso marginal es:

   $r'(q) = 5q + 3000 \ en \ \$$ Determine el modelo para el ingreso.

Procedimiento

$$r(q) = \int r'(q)dq = \int (5q + 3000)dq \rightarrow$$

$$r(q) = 5\int q\,dq + 3000\int dq = 5\frac{q^{1+1}}{1+1} + 3000q + c$$

$$r(q) = \frac{5}{2}q^2 + 3000q + c$$

Ahora, la condición inicial es: $q = 0, r = 0$

Reemplazando en: $r(q) = \frac{5}{2}q^2 + 3000q + c$, se tiene que:

$$0 = \frac{5}{2}(0)^2 + 3000(0) + c \rightarrow c = 0$$

La función de ingreso es:

$$r(q) = \frac{5}{2}q^2 + 3000q \ en \ \$$$

2.2.14 APLICACIONES EN FÍSICA:

La aplicación se da en el movimiento en un eje coordenado y Caída libre.

- Para un objeto que se mueve a lo largo de un eje, tenemos las siguientes funciones:
- **$s(t)$: Función o modelo de posición.** Esta dado en unidades de espacio (metros, kilómetros, centímetros).
- **$v(t)$: Función o modelo de velocidad instantánea**. Está dada en unidades de espacio divididas entre unidades de tiempo. Las unidades más utilizadas son: m/s (Se lee metro por segundo; cm/s (centímetro por segundo); km./h (kilómetro por hora); Km./s (kilómetro por segundo); entre otras.
- **$a(t)$: Función o modelo de aceleración.** Esta dado en unidades de espacio divididas entre unidades de tiempo al cuadrado. Las más utilizadas son: m/s^2, Km./s^2.
- **t: Tiempo**.

Además se tienen las siguientes relaciones entre ellas:

- $s(t) = \int v(t)dt$
- $v(t) = \int a(t)dt$

NOTA:

- Las condiciones iniciales, por lo general, se dan para un tiempo t=0, a no ser que sé de una condición diferente.
- El dato en este caso es la aceleración.

2.2.15 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. La aceleración de un cuerpo que se mueve a lo largo de un eje coordenado está dada por: $a(t) = 2t + 3\ en\ \frac{m}{seg^2}$ El objeto parte con una velocidad de **12 m/s** desde una posición de **10 m**. Determine: La función de velocidad instantánea.

PROCEDIMIENTO

a. **Función velocidad**: Se sabe que:

$$v(t) = \int a(t)dt = \int (2t + 3)dt = 2\int t\,dt + 3\int\ dt \rightarrow$$

$\boldsymbol{v(t) = 2\frac{t^{1+1}}{1+1} + 3t + c = 2\frac{t^2}{2} + 3t + c}$ Simplificando:

$\boldsymbol{v(t) = t^2 + 3t + c}$

Se determina el valor de la constante **C**. Se sabe que el objeto parte con una velocidad de **12 m/s**. Esta condición inicial quiere decir que:

$\boldsymbol{t = 0, v = 12}$ Reemplazando en $\boldsymbol{v(t) = t^2 + 3t + c}$ se tiene:

$\boldsymbol{12 = (0)^2 + 3(0) + c \rightarrow c = 12}$ por lo tanto:

La función de velocidad es: $\boldsymbol{v(t) = t^2 + 3t + 12}$

b. **Función de posición**: Se sabe que:

$$\boldsymbol{s(t) = \int v(t)dt = \int (t^2 + 3t + 12)\, dt \rightarrow}$$

$$\boldsymbol{s(t) = \int t^2\, dt + 3\int t\, dt + 12\int dt \rightarrow}$$

$$\boldsymbol{s(t) = \frac{t^{2+1}}{2+1} + 3\frac{t^{1+1}}{1+1} + 12t + c \rightarrow}$$

$$\boldsymbol{s(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 12t + c\ en\ metros \rightarrow}$$

Para hallar **C** tenemos que el objeto parte de una posición de **10 m**, quiere decir esta condición:

Para $\boldsymbol{t(0), s(10),}$ reemplazando estos valores en $\boldsymbol{s(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 12t + c,}$

$$\boldsymbol{10 = \frac{(0)^3}{3} + \frac{3(0)^2}{2} + 12(0) + c \rightarrow c = 10}$$

La función de posición es: $\boldsymbol{s(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 12t + c\ en\ metros}$

Actividad: Realice el mismo ejemplo cuando el objeto parte desde el reposo, es decir, cuando $\boldsymbol{v = 0}$.

2. Un cuerpo se mueve a lo largo de un eje coordenado con aceleración dada por la función:

$$\boldsymbol{a(t) = 3t^2 + 6\ \frac{m}{s^2}}$$

Si el móvil parte del **reposo** a **20 metros del origen**, determine función de velocidad instantánea y función de posición instantánea.

Procedimiento

a. Se tiene que:

$$\boldsymbol{v(t) = \int a(t)dt = \int (3t^2 + 6\,)dt = 3\int t^2\,dt + 6\int\ dt \rightarrow}$$

$\boldsymbol{v(t) = 3\,\frac{t^{2+1}}{2+1} + 6t + c \rightarrow v(t) = 3\,\frac{t^3}{3} + 6t + c}$ Simplificando:

$$\boldsymbol{v(t) = t^3 + 6t + c}$$

Como el cuerpo parte del reposo, quiere decir que: $\boldsymbol{t = 0, v = 0}$

Reemplazando en $\boldsymbol{v(t) = t^3 + 6t + c}$ se tiene:

$$\boldsymbol{0 = (0)^3 + 6(0) + c \rightarrow c = 0}$$

La función de velocidad es: $\boldsymbol{v(t) = t^3 + 6t\ \frac{m}{s}}$

b. Para hallar la función de posición sabemos que:

$$\boldsymbol{s(t) = \int v(t)dt \rightarrow s(t) = \int (t^3 + 6t)\,dt \rightarrow}$$

$$\boldsymbol{s(t) = \int t^3\,dt + 6\int t\,dt = \frac{t^{3+1}}{3+1} + 6 * \frac{t^{1+1}}{1+1} + c \rightarrow}$$

$\boldsymbol{s(t) = \frac{t^4}{4} + 6 * \frac{t^2}{2} + c}$ Simplificando: $\boldsymbol{s(t) = \frac{t^4}{4} + 3t^2 + c}$

- A 20 metros del origen quiere decir que: $t = 0, s = 20$

Reemplazando se tiene: $20 = \frac{(0)^4}{4} + 3(0)^2 + c \rightarrow c = 20$

La función de posición es: $s(t) = \frac{t^4}{4} + 3t^2 + 20\ m$

- **Caída libre.** En caída libre la aceleración es la gravedad y se asume como negativa.
- Si el objeto **va cayendo** la velocidad se asume **negativa** (por lo general).
- Si el objeto **va subiendo** la velocidad se asume **positiva** (Por lo general).

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tenga presente:

la gravedad es de **9,8 m/s²**. Quiere decir $a(t) = -9.8\ \text{m/s}^2$.

2.2.16 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Se arroja un objeto desde una altura inicial de 310 m, con una velocidad de 15 m/s. Determine la función de velocidad instantánea:

Procedimiento

a. **Función para la velocidad instantánea:** Se sabe que: $a(t) = -9.8\ \text{m/s}^2$.

Entonces:

$$v(t) = \int -9.8\, dt = -9.8t + c$$

- Para determinar el valor de **C** se utiliza la condición inicial:

$$t = 0, v = 15$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{15 = -9.8(0) + c \rightarrow c = 15}$$

La función de velocidad queda: $\boldsymbol{v(t) = -9.8t + 15\,\frac{m}{s}}$

b. **Función para la posición**:

Procedimiento

Se tiene que:

$$\boldsymbol{s(t) = \int(-9.8t + 15)dt \rightarrow s(t) = -9.8\int t\,dt + 15\int dt \rightarrow}$$

$$\boldsymbol{s(t) = -9.8 * \frac{t^{1+1}}{1+1} + 15t + c \rightarrow s(t) = -9.8 * \frac{t^2}{2} + 15t + c \rightarrow}$$

$$\boldsymbol{s(t) = -4.9t^2 + 15t + c}$$

- La condición inicial es: $\boldsymbol{t = 0, s = 310}$

Reemplazando en:

$\boldsymbol{s(t) = -4.9t^2 + 15t + c}$ se tiene:

$$\boldsymbol{310 = -4.9(0) + 15(0) + c \rightarrow c = 310}$$

- La función de posición es: $\boldsymbol{s(t) = -4.9t^2 + 15t + 310}$

c. **Altura máxima** que alcanza el cuerpo:

Procedimiento

La altura máxima se da en el momento en que **la velocidad es cero** $v = 0$.

Por lo tanto se hace la velocidad igual a cero y se despeja **t**:

$$\boldsymbol{v(t) = 0 \rightarrow -9.8t + 15 = 0 \rightarrow t = \frac{-15}{-9.8} \rightarrow t = 1.53\ s}$$

Este es el tiempo que se demora el objeto para alcanzar la altura máxima. Para determinar la altura máxima se reemplaza este valor en el modelo de posición.

$$s_{max} = s(1.53) = -4.9(1.53)^2 + 15(1.53) + 310$$

$$s_{max} = 321,479\ m$$

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tenga presente: Otra forma de determinar la altura máxima sería determinando los máximos y mínimos de la función $s\ t\ = -4\ 9\ ^2\quad 1\ 5\ t\ 3\ 1\ 0$ utilizando los conceptos de primera y segunda derivada.

d. La máxima velocidad que alcanza el cuerpo.

- **Velocidad Máxima:** La máxima velocidad se da un momento antes de que el objeto toque el piso, es decir, para $s = 0$.

$$s(t) = 0 \rightarrow -4.9t^2 + 15t + 310 = 0, multiplicando\ por -1$$
$$\rightarrow 4.9t^2 - 15t - 310 = 0$$

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tener en cuenta: Para solucionar la ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0,$ se utiliza la fórmula general: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

➢ Solucionando esta ecuación por fórmula general:

$$t = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4(4.9)(-310)}}{2(4.9)} \rightarrow$$

$$t = \frac{15 \pm \sqrt{225 + 6076}}{9.8} \rightarrow t = \frac{15 \pm \sqrt{6301}}{9.8} \rightarrow t = \frac{15 \pm 79.38}{9.8}$$

$$t_1 = \frac{15 + 79.38}{9.8} \rightarrow t_1 = 9.63$$

$$t_2 = \frac{15 - 79.38}{9.8} \rightarrow t_2 = -6.57$$

El valor negativo: $t_2 = -6.57$ se descarta.

- **La máxima velocidad** se presenta en: $t_1 = 9.63$

$$v_{máx} = -9.8(9.63) + 15 = -79.37\frac{m}{s}$$

e. Determine si después de 2,5 segundos el objeto sube o baja.

Una forma de determinar esta situación es reemplazando este tiempo en el **modelo de velocidad** y dependiendo del **signo** del resultado sabemos si sube o si baja.

$$v(2.5) = -9.8(2.5) + 15 = -9.5\frac{m}{s}$$

Como la **velocidad es negativa**, el objeto **cae** en ese momento.

---

2. Un objeto se deja caer desde una altura de 500 m. Determine: Función de velocidad instantánea.

Procedimiento

a. **Función velocidad**: El valor de la gravedad $g = 9.8\ \frac{m}{s^2}$

Nota: La velocidad está dada por la integración de la aceleración, en este caso la aceleración de la gravedad, como el objeto cae, ésta se considera **negativa**.

$$v(t) = \int -9.8\, dt \rightarrow v(t) = -9.8t + C\ \ \frac{m}{s}$$

- Como el objeto se deja caer, quiere decir que para:

$$t = 0, v = 0$$

- Reemplazando esta condición inicial en la función de velocidad, tenemos:

$$v(t) = -9.8 + C \rightarrow -9.8(0) + C = 0 \rightarrow c = 0$$

- Por lo tanto la función velocidad es: $v(t) = -9.8t\frac{m}{s}$

f. **Función de posición o altura instantánea**.

Procedimiento

a. La posición está dada por la integración de velocidad:

$$s(t) = \int v(t)dt = \int -9.8\, t\, dt = -9.8 \int t\, dt = -9.8\, \frac{t^{1+1}}{1+1} + C \rightarrow$$

$s(t) = -9.8\frac{t^2}{2} + C$ Simplificando: $s(t) = -4.9t^2 + C$ $en\ m$ (posición o altura instantánea).

- Como el objeto cae de una altura de **500 m**, esto quiere decir, que:

$$t = 0, s(t) = 500$$

- Reemplazando en la función de posición:

$$s(t) = -4.9t^2 + C \rightarrow 500 = -4.9(0)^2 + C \rightarrow C = 500$$

Reemplazando, se tiene que: $s(t) = -4.9t^2 + 500\ m$

b. **Velocidad máxima** que alcanza el cuerpo:

Procedimiento

- La velocidad máxima se alcanza cuando: $s(t) = 0$

$$s(t) = 0 \rightarrow -4.9t^2 + 500 = 0 \rightarrow -4.9t^2 = -500$$

$$t^2 = \frac{-500}{-4.9} \rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{500}{4.9}} \rightarrow t = 10.1\ s$$

Se descarta el número negativo.

- Para obtener la velocidad máxima, reemplazamos este valor en la función de velocidad:

$$v_{máx}(10.1) = \rightarrow -9.8 * (10.1) =$$

$$v_{máx} = 98.98\ \frac{m}{s}$$

c. Velocidad, posición y aceleración después de 5 segundos.

Procedimiento

Se pide hallar:

a. $s(t) = -4.9t^2 + 500\ m \rightarrow s(t) = -4.9(5)^2 + 500 = 377.5\ m.$

b. $v(t) = -9.8t \rightarrow v(5) = -9.8(5) = -49\ \frac{m}{s}$

c. $a(t) = -9.8\ \frac{m}{s^2}$ Corresponde a la aceleración de la gravedad**.**

---

3. El siguiente ejemplo fue tomado del libro Cálculo con geometría analítica de los autores Purcell y Varberg [2]

Cerca de la superficie de la tierra, la aceleración debida a la gravedad es de 32 pies por segundo cuadrado. Si se arroja un objeto hacia arriba desde una altura inicial de 1000 pies, con una velocidad de 50 pies por segundo, encuentre su velocidad y su altura 4 segundos más tarde.

Procedimiento

a. Se tiene que:

$$v(t) = \int -32\ dt = -32t + C$$

- Cuando $t = 0, v = 50$

$$50 = -32(0) + c \rightarrow c = 50$$

- La función de velocidad queda:

[2] PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 228.

$$v(t) = -32t + 50\ \frac{piés}{s}$$

b. Se tiene que:

$$s(t) = \int (-32t + 50)dt = -32\int t\,dt + 50\int dt = -32\frac{t^{1+1}}{1+1} + 50t + C \rightarrow$$

$$s(t) = -32\frac{t^2}{2} + 50t + C \rightarrow s(t) = -16t^2 + 50t + C$$

- Para $t = 0, s = 1000$

Se reemplaza en: $s(t) = -16t^2 + 50t + c$

$$s(t) = -16t^2 + 50t + c \rightarrow\ 1000 = -16(0)^2 + 50(0) + c \rightarrow$$

$$c = 1000$$

Por lo tanto la función de posición es:

$$s(t) = -16t^2 + 50t + 1000$$

- Cuando $t = 4$:

  - $v(t) = -32t + 50\ \frac{piés}{s} \rightarrow v(4) = -32(4) + 50\ \frac{piés}{s} = -78\frac{piés}{s}$
  - $s(t) = -16t^2 + 50t + 1000 \rightarrow s(4) = -16(4)^2 + 50(4) + 1000$

$$s(t) = 944\ piés$$

2.3 TEMA 2 TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

- **Integración por sustitución o integración por cambio de variable**.

Esta técnica es la más general y la más utilizada.

Antes de explicar en qué consiste la técnica, veamos necesidad de utilizarla:

Determinar: $\int (x + 2)^2 dx$

Procedimiento

Para poderla realizar por los métodos o propiedades conocidas, se debe expandir primero el binomio:

$$\int (x+2)^2 dx = \int (x^2+4x+4)dx = \int x^2 dx + 4\int x\, dx + \int 4\, dx =$$

$$= \frac{x^{2+1}}{2+1} + 4\frac{x^{1+1}}{1+1} + 4x + C = \frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 4x + C$$ Simplificando, se tiene:

$$\int (x+2)^2 dx = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x + C$$

Para este ejemplo fue fácil y practico expandir el binomio, ya que se encontraba elevado a la potencia 2, pero que sucede si la potencia es 100, o 1’235.400, o es un fraccionario como 5/3 se haría tedioso expandir el binomio o sería imposible en el caso del exponente fraccionario.

Es por esto que es necesario utilizar una integración que nos permita realizar todo este tipo de ejercicios en una forma más simple y menos tediosa: **integrar por sustitución o cambio de variable.**

- La fórmula de integración por **cambio se variable** es la siguiente:

$$\int u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c,\ \ para\ n \neq -1, \text{donde } u = f(x)$$

- Si se tiene:

$$\int \frac{1}{u} du = \int u^{-1} du = \ln u + C$$

2.3.1 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

NOTA:
A través de un ejemplo se explicará, paso a paso, la manera de aplicar la técnica de integración por sustitución.

1. Resolver por sustitución o cambio de variable la siguiente integral:

$$\int (x-10)^{30} dx$$

Procedimiento

a. Se asigna, a la expresión principal, una variable que puede ser: u, v, w ... o cualquier otra variable diferente a la variable inicial. (Esto es lo que se denomina cambio de variable).

Para el ejemplo se hace: $\boxed{u = x - 10}$

NOTA:
Lo importante al asignar la nueva variable es que, la expresión que quede, debe contener la derivada de la variable asignada.

a. Se deriva la expresión asignada a la nueva variable con respecto a la variable inicial, esto es:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d(x-10)}{dx} = 1 \rightarrow \frac{du}{dx} = 1$$

b. Se despeja el diferencial de la variable inicial, esto es: dx

$$\frac{du}{dx} = 1 \rightarrow dx = du$$

c. Se remplaza en la integral inicial la **variable asignada** y el **diferencial despejado** y luego simplifique.

$$\int (x-10)^{30} dx = \int u^{30} du$$

NOTA:
Si al hacer los reemplazos correspondientes y simplificar, aparece la variable inicial, es porque:
- La integral no se puede efectuar por este método, o
- Porque hay que hacer un cambio de variable diferente.

b. Se resuelve la integral.

$$\int (x-10)^{30} dx = \int u^{30} du = \frac{u^{30+1}}{30+1} + C = \frac{u^{31}}{31} + C$$

c. Se reemplaza la variable original: $x - 10$

$$\int (x-10)^{30} dx = \int u^{30} du = \frac{u^{30+1}}{30+1} + C = \frac{u^{31}}{31} + C = \frac{(x-10)^{31}}{31} + C$$

---

2. El siguiente ejemplo fue propuesto por el autor Haeussler en uno de sus libros.

Resolver la siguiente integral:

$$\int 3x^2 (x^3+7)^3 dx$$

Procedimiento

a. Se hace: $v = x^3 + 7$
b. Se halla la derivada de v en función **de** x**:**

Si $v = x^3 + 7 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 3x^2 \rightarrow dx = \frac{dv}{3x^2}$

$\int 3x^2 (x^3+7)^3 dx = \int 3x^2 v^3 \frac{dv}{3x^2}$, simplificando $3x^2$:

$$\int 3x^2 (x^3+7)^3 dx = \int v^3 dv = \frac{v^{3+1}}{3+1} + C = \frac{v^4}{4} + C,$$

c. Reemplazando v por $x^3 + 7$

$$\int 3x^2(x^3+7)^3dx = \frac{(x^3+7)^4}{4} + C$$

---

3. Integrar: $\int 4x^2(2x^3+20)^8dx$

a. Se hace $u = 2x^3 + 20$
b. Se halla la derivada de u en función **de** x**:**

$$\frac{du}{dx} = 6x^2 \rightarrow dx = \frac{du}{6x^2}$$

c. Reemplazando dx en $\int 4x^2(2x^3+20)^8dx$ se tiene:

$$\int 4x^2(2x^3+20)^8dx = \int 4x^2(u)^8\frac{du}{6x^2}$$

d. Simplificando**:**

$$\int 4x^2(u)^8\frac{du}{6x^2} = \frac{2}{3}\int u^8du = \frac{2}{3} * \frac{u^{8+1}}{8+1} + C = \frac{2}{3} * \frac{u^9}{9} + C$$

e. Recuperando la variable inicial:

$$\int 4x^2(2x^3+20)^8dx = \frac{2(2x^3+20)^9}{27} + C$$

---

4. El siguiente ejemplo fue tomado del autor Haeussler[3], propuesto en uno de sus libros.

Resolver la siguiente integral: $\int x\sqrt{x^2+5}dx$

Procedimiento

a. Se hace $w = x^2 + 5$
b. Se halla la derivada de w en función **de** x**:**

---

[3] HAEUSSLER. Ernest. F. Jr.; RICHARD S. Paul. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. 8 ed. México: Prentice Hall, 1997. p. 735.

$$\frac{dw}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{dw}{2x}$$

c. Reemplazando dx en $\int x\sqrt{x^2+5}dx$ se tiene:

$$\int x\sqrt{x^2+5}dx = \int x\sqrt{w} * \frac{1}{2x}dw = \frac{1}{2}\int w^{\frac{1}{2}}\,dw =$$

$\frac{w^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2} * \frac{w^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{2} * \frac{w^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$, simplificando por **2** y expresando en forma de raíz:

$$\int x\sqrt{x^2+5}dx = \frac{1}{3} * \sqrt{w^3} + C$$

d. Recuperando la variable inicial:

$$\int x\sqrt{x^2+5}dx = \frac{1}{3} * \sqrt{(x^2+5)^3} + C$$

e. Sacando raíz: $\frac{x^2+5}{3} * \sqrt{x^2+5} + C$

---

4. Resolver la siguiente integral: $\int 2x\sqrt{4x^2+1}\,dx$

Procedimiento

a. **Se hace** Se hace $u = 4x^2+1$

b. Se halla la derivada de u en función **de** x**:**

$$\frac{du}{dx} = 8x \rightarrow dx = \frac{du}{8x}$$

c. Reemplazando dx en $\int x\sqrt{4x^2+1}\,dx$ se tiene:

$$\int x\sqrt{4x^2+1}\,dx = \int 2x\sqrt{u}\frac{du}{8x} = \int 2x\ u^{\frac{1}{2}}\,\frac{du}{8x} \rightarrow$$

d. Simplificando, integrando y recuperando la variable inicial :

$$\int 2x\sqrt{4x^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{4} * \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$\int 2x\sqrt{4x^2+1}\,dx = \frac{1}{6}\sqrt{(4x^2+1)^3}$, Sacando raíz:

$$\int 2x\sqrt{4x^2+1}\,dx = \frac{4x^2+1}{6} * \sqrt{4x^2+1}$$

---

6. Integrar: $\int 16x\,(2x^2-31)^5 dx$

Procedimiento

a. Se hace $u = 2x^2 - 31$
b. Se halla la derivada de u en función **de** x**:**

$$Si\ \ u = 2x^2 - 31 \rightarrow \frac{du}{dx} = 4x \rightarrow dx = \frac{du}{4x}$$

c. Se reemplaza en: $\int 16x\,(2x^2-31)^5 dx = \int 16x\,u^5 \frac{du}{4x}$
d. Integrando:

$$\int 16x\,(2x^2-31)^5 dx = \int 4u^5\,du = 4 * \frac{u^{5+1}}{5+1} + c = 4 * \frac{u^6}{6} + C$$

e. Reemplazando $u = 2x^2 - 31$:

$$\int 16x\,(2x^2-31)^5 dx = 4 * \frac{u^6}{6} + C = \frac{2(2x^2-31)^6}{3} + C$$

---

7. $\int \frac{8}{(6x+5)^5}\,dx$

Procedimiento:

a. Se hace $u = 6x + 5$

b. Se halla la derivada de $\boldsymbol{u}$ en función **de** $\boldsymbol{x}$:

$$Si\ \ u = 6x + 5 \ \rightarrow \frac{du}{dx} = 6 \rightarrow dx = \frac{du}{6}$$

c. Se reemplaza en:

$$\int \frac{8}{(6x+5)^5} dx = \int \frac{8}{(u)^5} \frac{du}{6} = \frac{4}{3} u^{-5} du$$

d. Integrando:

$$\int \frac{8}{(6x+5)^5} dx = \frac{4}{3} \frac{u^{-5+1}}{-5+1} + c = \frac{4}{3} \frac{u^{-4}}{-4} + c$$

e. Simplificando y remplazando $\boldsymbol{u = 6x + 5}$:

$$\int \frac{8}{(6x+5)^5} dx = \frac{4}{3} \frac{u^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{3u^4} + c = -\frac{1}{3(6x+5)^4} + C$$

---

8. Integrar: $\int \frac{6x+5}{6x^2+10x+100} dx$

a. Se hace $\boldsymbol{u = 6x^2 + 10x + 100}$
b. Se halla la derivada de $\boldsymbol{u}$ en función **de** $\boldsymbol{x}$:

$$Si\ \ u = 6x^2 + 10x + 100 \ \rightarrow \frac{du}{dx} = 12x + 10 \rightarrow dx = \frac{du}{12x + 10}$$

c. Se reemplaza en:

$$\int \frac{6x + 5}{6x^2 + 10x + 100} dx = \int \frac{6x + 5}{u} * \frac{du}{12x + 10}$$

d. Factorizando y simplificando:

$$\int \frac{6x + 5}{u} * \frac{du}{12x + 10} = \int \frac{6x + 5}{u} * \frac{du}{2(6x + 5)}$$

$$\int \frac{6x + 5}{6x^2 + 10x + 100} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln u + c$$

e. Reemplazando $u = 6x^2 + 10x + 100$

$$\int \frac{6x+5}{6x^2+10x+100}dx = \frac{1}{2}\ln(6x^2+10x+100) + c$$

Actividad: Teniendo como modelo el ejemplo anterior realice la siguiente integral:

$\int \frac{5x}{x^2-23}dx$ La respuesta es: $\frac{5}{2}\ln(x^2-23)+C$

Realizar el procedimiento en hoja aparte y socializar con el tutor.

---

9. Integrar: $\int 5^{3x-2}dx$

Procedimiento:

a. Se hace $u = 3x - 2$
b. Se halla la derivada de u en función **de** x**:**

$$Si\ \ u = 3x - 2 \ \rightarrow \frac{du}{dx} = 3 \rightarrow dx = \frac{du}{3}$$

c. Se reemplaza en:

$$\int 5^{3x-2}dx = \int 5^u * \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int 5^u\, du$$

d. Integrando:

$$\int 5^{3x-2}dx = \frac{1}{3}\int 5^u\, du = \frac{1}{3} * \frac{5^u}{\ln 5} + C$$

e. Reemplazando $u = 3x - 2$:

$$\int 5^{3x-2}dx = \frac{1}{3} * \frac{5^u}{\ln 5} + C = \frac{5^{3x-2}}{3\ln 5} + C$$

---

10. Integrar: $\int 10x^2\, e^{6x^3+20}dx$

Procedimiento

a. Se hace $u = 6x^3 + 20$
b. Se halla la derivada de u en función **de** x:

$$Si\ \ u = 6x^3 + 20 \rightarrow \frac{du}{dx} = 18x^2 \rightarrow dx = \frac{du}{18x^2}$$

c. Se reemplaza en:

$$\int 10x^2\, e^{6x^3+20} dx = \int 10x^2\, e^u * \frac{du}{18x^2}$$

d. Simplificando:

$$\int 5e^u * \frac{du}{9} = \frac{5}{9}\int e^u du$$

e. Integrando:

$$\int 10x^2\, e^{6x^3+20} dx = \frac{5}{9}\int e^u du = \frac{5}{9}e^u + c$$

f. Recuperando la variable inicial $u = 6x^3 + 20$

$$\int 10x^2\, e^{6x^3+20} dx = \frac{5}{9}e^{6x^3+20} + c$$

2.3.2 INTEGRALES QUE SE RESUELVEN CON DIVISIÓN PREVIA A LA INTEGRAL

Se desea encontrar la integral de una **expresión racional**, que es una expresión de la forma:

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

La idea es obtener la siguiente integral:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Cuando se efectúa una integral de este tipo, se pueden presentar tres casos:

A. Que la integral se pueda efectuar directamente por el método de **sustitución o cambio de variable** (esta forma ya se ha realizado anteriormente):

2.3.3 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Integrar: $\int \frac{2x+1}{x^2+x-7} dx$

Procedimiento

a. Se hace $u = x^2 + x - 7$
b. Se halla la derivada de u en función **de** x:

$$Si\ \ u = x^2 + x - 7 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x + 1 \rightarrow dx = \frac{du}{2x+1}$$

c. Se reemplaza en:
d. $\int \frac{2x+1}{x^2+x-7} dx = \int \frac{2x+1}{u} \frac{du}{2x+1}$, Simplificando $2x+1$:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-7} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln\left|x^2 + x - 7\right| + C$$

Recuerde que: $|x|$ *indica el valor absoluto de* x.

---

2. Integrar: $\int \frac{2x}{(x^2+10)^5} dx$

$\int$

Procedimiento

a. Se hace $u = x^2 + 10$
b. Se halla la derivada de u en función **de** x:

$$Si\ \ u = x^2 + 10 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

c. Se reemplaza en:

$\int \frac{2x}{(x^2+10)^5} dx = \int \frac{2x}{(u)^5} \frac{du}{2x}$ simplificando $2x$:

$$\int \frac{2x}{(x^2+10)^5} dx = \int \frac{du}{(u)^5} = \int u^{-5} du = \frac{u^{-5+1}}{-5+1} + c$$

$$\int \frac{2x}{(x^2+10)^5} dx = \frac{u^{-4}}{-4} + c$$

d. Expresando con exponente positivo y reemplazando $u = x^2 + 10$

$$\int \frac{2x}{(x^2+10)^5} dx = \frac{u^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{4u^4} + c = -\frac{1}{4(x^2+10)^4} + c$$

B. Puede suceder también que haya que **efectuar primero la división.** $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

> **NOTA:**
> Esta división es posible si la fracción es impropia, es decir, **el grado** del polinomio $\mathbf{P(x)}$ es mayor que el grado del polinomio $\mathbf{Q(x)}$.

2.3.4 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $\int \frac{2x^3+3x^2+1}{2x+1} dx$

Procedimiento

a. Para efectuar esta integral se debe realizar primero la división:

$$\frac{2x^3+3x^2+1}{2x+1}$$

Nota: Esta división se puede efectuar utilizando la división polinómica o la división sintética.

En este ejemplo, se utilizará división polinómica:

$2x^3 + 3x^2 + 1$	$2x + 1$
$-2x^3 - x^2$	$x^2 + x - \frac{1}{2}$
$+2x^2 + 0x + 1$	
$-2x^2 - x$	
$-x + 1$	
$x + \frac{1}{2}$	
$\frac{3}{2}$	

Se tiene que:

- $C(x) = x^2 + x - \frac{1}{2}$ **Cociente**
- $R(x) = \frac{3}{2}$ **Residuo**
- $Q(x) = 2x + 1$ **Divisor**

Por lo tanto:

$$\frac{2x^3+3x^2+1}{2x+1} = x^2 + x - \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}}{2x+1}$$

b. Integrando:

$$\int \frac{2x^3+3x^2+1}{2x+1}dx = \int (x^2+x-\frac{1}{2}+\frac{\frac{3}{2}}{2x+1})dx$$

$$\int \frac{2x^3+3x^2+1}{2x+1}dx = \int (x^2+x-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}*\frac{1}{2x+1})dx$$

$$\int \frac{2x^3+3x^2+1}{2x+1}dx = \int x^2dx+\int x\,dx-\frac{1}{2}\int dx+\frac{3}{2}\int \frac{1}{2x+1}$$

- Resolviendo cada una de las cuatro integrales individualmente:

$\int x^2dx$	$\int \frac{x^{2+1}}{2+1}dx$	$\frac{x^3}{3}+C$
$\int x\,dx$	$\int \frac{x^{1+1}}{1+1}dx$	$\frac{x^2}{2}+C$
$-\frac{1}{2}\int dx$	$-\frac{1}{2}x+c$	$-\frac{1}{2}x+c$

- Para efectuar la cuarta integral se debe hacer cambio de variable, esto es:

$$\frac{3}{2}\int \frac{1}{2x+1}dx \rightarrow u=2x+1, \rightarrow \frac{du}{dx}=2 \rightarrow dx=\frac{du}{2}$$

$$\frac{3}{2}\int \frac{1}{2x+1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{u}\frac{du}{2} = \frac{3}{2}*\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{3}{4}\ln|u|$$

- Reemplazando $u=2x+1$

$$\frac{3}{2}\int \frac{1}{2x+1}dx = \frac{3}{4}\ln|2x+1|+C$$

c. Reuniendo la 4 integrales se tiene:

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{2x + 1} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\ln|2x + 1| + C$$

---

2. Integrar

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 3}{x - 3} dx$$

Procedimiento

a. Se realiza la división indicada:

$$\frac{3x^2 - 5x + 3}{x - 3}$$

$3x^2$	$-5x$	$+3$	$x - 3$
$-3x^2$	$+9x$		$3x + 4 = C(x)$
0	$+4x$	$+3$	
	$-4x$	$+12$	
	0	$15 = R(x)$	

Se tiene:

- $C(x) = 3x + 4$
- $R(x) = 15$
- $Q(x) = x - 3$

Por lo tanto:

$$\frac{3x^2-5x+3}{x-3}=3x+4+\frac{15}{x-3}$$

b. Integrando:

$$\int\frac{3x^2-5x+3}{x-3}=\int\left(3x+4+\frac{15}{x-3}\right)dx$$

$$\int\frac{3x^2-5x+3}{x-3}=\int 3x\,dx+\int 4dx+\int\frac{15}{x-3}dx$$

- Resolviendo cada una de las tres integrales individualmente:

$\int 3x\,dx$	$3\frac{x^{1+1}}{1+1}+C$	$\frac{3x^2}{2}+C$
$\int 4dx$	$4x$	$4x$

- Para efectuar la tercera integral se debe hacer cambio de variable, esto es:

$$15\int\frac{1}{x-3}dx\rightarrow u=x-3,\rightarrow\frac{du}{dx}=1\rightarrow dx=du$$

$$15\int\frac{1}{u}du=15\ln|u|+C$$

- Reemplazando $u=x-3$

$$\int\frac{1}{x-3}dx=\int\frac{1}{u}du=15\ln|u|+C=15\ln|x-3|+C=$$

c. Reuniendo la 4 integrales se tiene:

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 3}{x - 3} dx = \frac{3x^2}{2} + 4x + 15\ln|x - 3| + C$$

C. * La otra posibilidad sería descomponer, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ En una **suma de fracciones simples** llamada **fracciones parciales**. Esto es posible cuando la **fracción es propia**, es decir, el grado del polinomio **P(x)** es **menor** que el grado del polinomio **Q(x).**

*Este método se evaluará más adelante en la **UNIDAD 3**.

2.3.5 SUSTITUCIONES PARA RACIONALIZACIÓN

Integrales que contienen $\sqrt[n]{ax + b}$ y $\sqrt[n]{(ax + b)^m}$

1. Si aparece $\sqrt[n]{ax + b}$ en una integral, la sustitución de:

$u = \sqrt[n]{ax + b}$ Eliminará el radical.

Para resolver este tipo de integrales tenga en cuenta que:

- La x tiene como exponente **1** (sí, fuera exponente 2 o superior, no se puede utilizar el método que vamos a describir).
- Tanto a como b son números cualesquiera, pero a no puede ser cero; porque sí a fuera cero, entonces todo lo del radical sería constante y se utilizaría otro método más sencillo para su solución.

NOTA:
Para analizar esta forma de integrar, los ejercicios se realizarán paso a paso indicando el debido procedimiento en cada uno de ellos.

2.3.6 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Resolver la integral: $\int 6x \sqrt[3]{3x + 8}\, dx$

a. Para eliminar el radical: se hace u igual al radical, esto es:

$$u = \sqrt[3]{3x + 8}$$

NOTA:
Para eliminar la raíz elevamos ambos lados de la igualdad a un exponente equivalente al índice de la raíz, en este caso elevamos a ambos lados a un exponente tres, ya que la raíz es cúbica.

$$u = \sqrt[3]{3x+8} \rightarrow u^3 = \left(\sqrt[3]{3x+8}\right)^3 \rightarrow$$

$$u^3 = 3x+8$$

b. Se deriva la igualdad anterior con respecto a u $\left(\frac{du}{dx}\right)$ y se despeja dx:

NOTA:
Para realizar esta derivada, se recomienda que siempre que se derive **u**, se escriba, luego de la derivada, **du** y cuando se derive **x** , se escribe, luego de la derivada, **dx.**

- Derivando a ambos lados se tiene:

$$3u^2du = 3\ dx \rightarrow dx = \frac{3u^2du}{3} \rightarrow dx = u^2du$$

c. Se reemplaza u y dx en la integral original. Sí hay que realizar otro reemplazo se hace; la idea es que en la integral resultante no aparezca nada que tenga que ver con la variable inicial o sea con la x. Se tiene entonces:

$$\int 6x\ \sqrt[3]{3x+8}\ dx = \int 6x * u * u^2\ du$$

- Como todavía existe x en la integral, se debe encontrar una expresión, en función de u para reemplazarla, se sabe que:

$$u^3 = 3x+8 \rightarrow u^3 - 8 = 3x \rightarrow x = \frac{u^3-8}{3}$$

- Reemplazando en la integral:

$\int 6x * u * u^2\, du = \int 6(\frac{u^3-8}{3}) * u * u^2\, du,$ Simplificando y realizando los productos indicados

$$\int 6(\frac{u^3-8}{3}) * u * u^2\, du = 2\int (u^6 - 8u^3)\, du$$

$$2\int (u^6 - 8u^3) du = 2\left[\int u^6 du - 8\int u^3 du\right] \rightarrow$$

$$2\int (u^6 - 8u^3) du = 2\left[\frac{u^{6+1}}{6+1} - 8\frac{u^{3+1}}{3+1}\right] + C \rightarrow$$

- Multiplicando por 2 y simplificando:

$$2\left[\frac{u^{6+1}}{6+1} - 8\frac{u^{3+1}}{3+1}\right] + C = 2\frac{u^7}{7} - 16\frac{u^4}{4} + C = \frac{2u^7}{7} - 4u^4 + c\ **$$

d. Se recupera la variable inicial: $u = \sqrt[3]{3x+8},$ se reemplaza en **

$$\int 6x\sqrt[3]{3x+8}\, dx = \frac{2u^7}{7} - 4u^4 + c = \frac{2\left(\sqrt[3]{3x+8}\right)^7}{7} + 4\left(\sqrt[3]{3x+8}\right)^4 + C$$

---

2. Resolver la integral: $\int x\sqrt[3]{x-4}\, dx$

"El ejemplo fue tomado de uno de los libros del autor Purcell.[4]"

Procedimiento

u

a. Se hace u igual al radical:

[4] PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 396.

$$u = \sqrt[3]{x-4}$$

NOTA:

Para eliminar la raíz elevamos ambos lados de la igualdad a un **exponente equivalente** al **índice de la raíz**, en este caso elevamos a ambos lados a un **exponente tres,** ya que la raíz es cúbica.

$$u = \sqrt[3]{x-4} \rightarrow u^3 = \left(\sqrt[3]{x-4}\right)^3 \rightarrow$$

$$u^3 = x - 4$$

b. Se deriva la igualdad anterior con respecto a u $\left(\frac{du}{dx}\right)$ y se despeja dx:

NOTA:

Para realizar esta derivada, se recomienda que siempre que se derive **u**, se escriba, luego de la derivada, **du** y cuando se derive **x** , se escribe, luego de la derivada, **dx.**

- Derivando a ambos lados se tiene:

$$3u^2du = dx \rightarrow dx = 3u^2du$$

- $Si\ u^3 = x - 4 \rightarrow x = u^3 + 4$

c. Se reemplaza $u, x\ y\ dx$ en la integral original. Sí hay que realizar otro reemplazo se hace; la idea es que en la integral resultante no aparezca nada que tenga que ver con la variable inicial o sea con la x. Se tiene entonces:

$$\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx = \int (u^3+4) * u * 3u^2du = \int (3u^6 + 12u^3)du \rightarrow$$

$$\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx = \int 3u^6du + \int 12u^3du = 3\frac{u^{6+1}}{6+1} + 12\frac{u^{3+1}}{3+1} + C \rightarrow$$

$$\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx = \frac{3u^7}{7} + \frac{12u^4}{4} + C = \frac{3u^7}{7} + 3u^4 + C$$

d. Se recupera la variable inicial:

$$\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx = \int (3u^6 + 12u^3)du = \frac{3u^7}{7} + 3u^4 + C = \frac{3(\sqrt[3]{x-4})^7}{7} + 3(\sqrt[3]{x-4})^4 + C$$

---

3. Resolver:

$$\int \sqrt[7]{2x-103}\,dx$$

Procedimiento

a. Se hace u igual al radical:

$$u = \sqrt[7]{2x-103}$$

NOTA:

Para eliminar la raíz elevamos ambos lados de la igualdad a un **exponente equivalente** al **índice de la raíz**, en este caso elevamos a ambos lados a un **exponente siete,** ya que la raíz es séptima.

- Elevando a la séptima ambos lados de la ecuación:

$$u^7 = (\sqrt[7]{2x-103})^7 \rightarrow u^7 = 2x - 103$$

b. Derivando a ambos lados se tiene:

$$u^7 = 2x - 103 \rightarrow 7u^6du = 2\,dx \rightarrow dx = \frac{7u^6du}{2}$$

c. Reemplazando en la integral e integrando:

$$\int \sqrt[7]{2x-103}\,dx \int u * \frac{7u^6}{2}du = \frac{7}{2}\int \frac{u^7}{2}du \rightarrow$$

$$\int \sqrt[7]{2x-103}\,dx = \frac{7}{2}\int \frac{u^7}{2}du = \frac{7}{2} * \frac{u^{7+1}}{7+1} + C = \frac{7}{2} * \frac{u^8}{8} + C$$

d. Se recupera la variable inicial:

$$\int \sqrt[7]{2x-103}\,dx = \frac{7}{16} * \sqrt[7]{(2x-103)^8} + C$$

NOTA:
Esta integral también se puede resolver por sustitución.

4. Resolver: $\int \sqrt[7]{(5x+3)^2}\,dx$

Procedimiento

a. Se hace u igual al radical:

Recuerde que: $\int \sqrt[7]{(5x+3)^2}\,dx = \int (\sqrt[7]{5x+3})^2\,dx$

Entonces: $u = \sqrt[7]{5x+3} \to u^7 = 5x+3$

b. Derivando a ambos lados se tiene:

$$7u^6du = 5\,dx \to dx = \frac{7u^6du}{5}$$

c. Reemplazando en la integral e integrando:

$$\int (\sqrt[7]{5x+3})^2\,dx = \int (u)^2 * \frac{7u^6du}{5} = \frac{7}{5}\int u^8du = \frac{7}{5} * \frac{u^{8+1}}{8+1} \to$$

$\int (\sqrt[7]{5x+3})^2\,dx = \frac{7}{5} * \frac{u^9}{9} + C$ Pero $u = \sqrt[7]{5x+3} \to$

$$\int (\sqrt[7]{5x+3})^2\,dx = \frac{7}{45}\int (\sqrt[7]{5x+3})^9 + C$$

2.3.7 INTEGRACIÓN DE EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS

➢ **FÓRMULAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN**

FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA	INTEGRAL	VALOR INTEGRAL
$Sen\, u$	$\int Sen\, u\, du$	$-Cos\, u + C$
$Cos\, u$	$\int Cos\, u\, du$	$Sen\, u + C$
$Sec^2 u$	$\int Sec^2 u\, du$	$Tan\, u + C$
$Csc^2 u$	$\int Csc^2 u\, du$	$-Cot\, u + C$
$Sec\, u\, tan\, u$	$\int Sec\, u\, tan\, u\, du$	$Sec\, u + C$
$Csc\, u\, Cot\, u$	$\int Csc\, u\, Cot\, u\, du$	$-Csc\, u + C$
$Tan\, u$	$\int Tan\, u\, du$	$\ln\lvert sec\, u\rvert + C$
$Cot\, u$	$\int Cot\, u\, du$	$\ln\lvert sen\, u\rvert + C$
$Sec\, u$	$\int Sec\, u\, du$	$\ln\lvert sec\, u + tan\, u\rvert + C$
$Csc\, u$	$\int Csc\, u\, du$	$\ln\lvert csc\, u - cot\, u\rvert + C$

Para realizar la integración con expresiones trigonométricas, se presenta a continuación un cuadro con algunas identidades trigonométricas:

IDENTIDADES FUNDAMENTALES	IDENTIDADES ÁNGULOS DOBLES
$sen^2 x + cos^2 x = 1$	$Cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$
$1 + cot^2 x = csc^2 x$	$\text{Cos}(2x) = cos^2 x - sen^2 x$
$tan^2 x + 1 = sec^2 x$	$Sen^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$
$Tan\, x = \frac{sen\, x}{\cos x}$	$\text{Sen}(2x) = 2sen\, x \cos x$
$Cot\, x = \frac{\cos x}{sen\, x}$	**IDENTIDADES PRODUCTO**
$Tan\, x = \frac{1}{\cot x}$	$Sen(mx) * Cos(nx) = \frac{1}{2}[sen(m+n)x + sen(m-n)x]$

$Cot\ x = \dfrac{1}{\tan x}$	$Sen(mx) * Sen(nx) = \dfrac{1}{2}[cos(m+n)x - cos(m-n)x]$
$Csc\ x = \dfrac{1}{sen\ x}$	$Cos(mx) * Cos(nx) = \dfrac{1}{2}[cos(m+n)x + cos(m-n)x]$
$Sen\ X = \dfrac{1}{\csc x}$	**IDENTIDADES SUMA (DIFERENCIA) DE ÁNGULOS**
$Sec\ x = \dfrac{1}{\cos x}$	$Sen(A+B) = senAcosB + cosAsenB$
$Cos\ x = \dfrac{1}{\sec x}$	$Sen(A-B) = senAcosB - cosAsenB$
IDENTIDADES ÁNGULOS NEGATIVOS	$Cos(A+B) = cosAcosB - senAsenB$
$Sen(-x) = -Sen\ x$	$Cos(A-B) = cosAcosB + senAsenB$
$Cos(-x) = Cos\ x$	$Tan(A+B) = \dfrac{tanA + TanB}{1 - tanA * tanB}$
	$Tan(A-B) = \dfrac{tanA - TanB}{1 + tanA * tanB}$

2.3.8 PASOS PARA LA INTEGRACIÓN DE EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para la integración de expresiones trigonométricas, se deben tener en cuenta los siguientes aspectos.

No necesariamente este es el orden a seguir:

1. Determine, inicialmente, si la integral presenta la forma de alguna de las fórmulas básicas; Si es así efectúe la integral.
2. Cuando hay **una sola expresión trigonométrica**, para hacer el cambio de variable se toma lo que está **dentro de la expresión trigonométrica**, es decir **el ángulo**.
3. Cuando hay **dos o más expresiones trigonométricas** en la misma integral, el cambio de variable se hace tomando **una de las expresiones trigonométricas**.
4. Lleve las expresiones trigonométricas a expresiones equivalentes en términos del **seno** y del **coseno** (a veces facilita el trabajo pero no es indispensable).
5. Si es necesario utilice una o varias de las identidades trigonométricas.

2.3.9 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Resolver $\int 3x^2 \cos x^3\, dx$

Procedimiento

a. Se hace: $u = x^3$

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tenga presente: Cuando hay **una sola expresión trigonométrica,** para hacer el cambio de variable se toma lo que está **dentro de la expresión trigonométrica,** es decir **el ángulo.**

b. Se encuentra la derivada:

Si $u = x^3 \rightarrow du = 3x^2 dx \rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$

c. Reemplazando en la integral:

$$\int 3x^2 \cos x^3\, dx = \int 3x^2 \cos u \frac{du}{3x^2}$$ Simplificando $3x^2$:

$$\int 3x^2 \cos x^3 dx = \int \cos u\, du = Sen\, u + C$$

d. Reemplazando: $u = x^3$

$$\int 3x^2 \cos x^3 dx = Sen\, x^3 + C$$

---

2. Resolver $\int \frac{x}{sen^2(3x^2+2)} dx$

Procedimiento

a. Se hace: $u = 3x^2 + 2$

Si $u = 3x^2 + 2 \rightarrow du = 6x\, dx \rightarrow dx = \frac{du}{6x}$

b. Reemplazando en la integral:

$$\int \frac{x}{sen^2(3x^2+2)}dx = \int \frac{x}{sen^2 u} * \frac{du}{6x}$$ Simplificando x:

$$\int \frac{x}{sen^2(3x^2+2)}dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{sen^2 u}du$$

➢ Utilizando la identidad: (Ver cuadro de identidades)

$$Csc\, u = \frac{1}{sen\, u} \rightarrow Csc^2\, u = \frac{1}{sen^2 u}$$

c. La integral queda:

$$\int \frac{x}{sen^2(3x^2+2)}dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{sen^2 u}du = \frac{1}{6}\int csc^2\, u\, du \rightarrow$$

$$\int \frac{x}{sen^2(3x^2+2)}dx = \frac{1}{6}(-cot\, u) + C = -\frac{1}{6}cot(3x^2+2) + C$$

---

3. Resolver:

$$\int \frac{sen\, x}{cos^5\, x}dx$$

Procedimiento

a. El cambio de variable se debe hacer por una de las dos funciones trigonométricas, en este caso se realizará por coseno.

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Traer a la memoria: Cuando hay **dos o más expresiones trigonométricas** en la misma integral, el cambio de variable se hace tomando **una de las expresiones trigonométricas.**

Entonces, si $u = \cos x \rightarrow du = -sen\ x\ dx \rightarrow dx = -\frac{du}{sen\ x}$

a. Reemplazando en la integral:

$\int \frac{sen\ x}{cos^5\ x} dx = \int \frac{sen\ x}{u^5} * -\frac{du}{sen\ x}$ Simplificando $sen\ x$, se tiene:

$$\int \frac{sen\ x}{cos^5\ x} dx = -\int \frac{1}{u^5} du = -\int u^{-5} du = -\frac{u^{-5+1}}{-5+1} + C \rightarrow$$

$$\int \frac{sen\ x}{cos^5\ x} dx = -\frac{u^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{4u^4} + C$$

b. Reemplazando $u = \cos x$

$\int \frac{sen\ x}{cos^5\ x} dx = \frac{1}{4cos^4 x} + C$ Pero: $Sec\ x = \frac{1}{\cos x} \rightarrow$

$$\int \frac{sen\ x}{cos^5\ x} dx = \frac{1}{4cos^4 x} + C = \frac{1}{4} sec^4 x + C$$

---

4. Resolver: $\int \tan(5x - 7)\, dx$

Procedimiento

a. Sea $u = 5x - 7 \rightarrow du = 5\, dx \rightarrow dx = \frac{du}{5}$

b. Reemplazando en la integral:

$$\int \tan(5x-7)\, dx = \int \tan u * \frac{du}{5} \rightarrow$$

$$\int \tan(5x-7)\, dx = \frac{1}{5}\ln|sec\ (u)| + C$$

c. Reemplazando $u = 5x - 7$

$$\int \tan(5x-7)\, dx = \frac{1}{5}\ln|sec\ (u)| + C = \frac{1}{5}\ln|sec\ (5x-7)| + C$$

5. El siguiente ejemplo fue tomado del libro de

Purcell[5], resolver:

$$\int \frac{sen\ x - \cos x}{sen\ x} dx$$

Procedimiento

a. Separando denominadores:

$$\int \frac{sen\ x - \cos x}{sen\ x} dx = \int \left(\frac{sen\ x}{sen\ x} - \frac{cos\ x}{sen\ x}\right) dx = \int \frac{sen\ x}{sen\ x} dx - \int \frac{cos\ x}{sen\ x} \rightarrow$$

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

$$\frac{cos\ x}{sen\ x} = cot\ x$$

[5] PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 389.

Entonces:

$$\int \frac{sen\ x - \cos x}{sen\ x} dx = \int dx - \int cot\ x\ dx$$

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

$$\int Cot\ u\ du = \ln|sen\ u| + C$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{sen\ x - \cos x}{sen\ x} dx = \int dx - \int cot\ x\ dx = x - \ln|sen\ x| + c$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Resuelva las siguientes integrales indefinidas, utilizando las leyes básicas de integración.
   a) $\int 7x^5 dx$
   b) $\int \frac{4}{x^3} dx$
   c) $\int (5x-3)^3 dx$
   d) $\int \left(\sqrt[6]{x^5} - 3e^{4x} - \frac{8}{x} + \sqrt{x} \right) dx$
   e) $\int \frac{6x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 18x - 300}{3x^2} dx$
2. Resuelva los siguientes problemas.
   a) Desde un edificio de 32 metros se tira hacia arriba una piedra con una velocidad de $30m/s$. Determine la función de velocidad instantánea y la función de altura ó posición instantánea. Determine la altura máxima y la velocidad máxima que alcanza el objeto.

b) La función de costo marginal para cierto producto de una empresa es:

a. $c'(q) = 5q^2 + 7q + 800$ \$

c) Los costos fijos son de 400.000 $

d) Encuentre la función de costo promedio del producto.

e) La función de ingreso marginal en la venta de q unidades de un producto es:

a. $r'(q) = 50000 - 6q$ \$

Encuentre la función de demanda ó precio.

3. Resuelva las siguientes integrales utilizando las técnicas de integración vistas.

a) $\int \frac{5x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 9x + 10}{x+2}\, dx$

b) $\int x^2 \sqrt[4]{3x+1}\, dx$

c) $\int 7x sen\left(x^2 + 35\right) dx$

d) $\int \tan^3 x \cot^2 dx$

e) $\int \frac{3x+1}{\sqrt[5]{3x^2 + 2x + 3}}\, dx$

4. La función de ingreso marginal para cierto producto es:

$$r'(q) = \frac{300}{(1000 - 2q)^2} \ \$$$

Halle la función de precio o demanda del producto

5. Un objeto se mueve a lo largo del eje coordenado: Encuentre la función o modelo de posición y la función o modelo de velocidad bajo las condiciones indicadas.

a. La aceleración está dada por la función. $a(t) = t \quad cm/s^2$. El objeto parte del origen con una velocidad de 50 cm/s.

b. $a(t) = 2t + 1 \quad cm/s^2$. Parte desde el reposo a una distancia de 250 cm del origen.

c. $a(t) = -3t^2 + 8t + 50 \ m/s^2$. Parte desde el origen con una velocidad de 6 m/s.

d. $a(t) = 6 \quad m/s^2$. El objeto parte del reposo a 100 m del origen. Determine además la posición después de un minuto.

6. En los siguientes problemas encuentre la integral indefinida:

a) $\int \frac{8}{x^9}\,dx$

b) $\int \left(\frac{3}{x} + \frac{5}{3x^6} + \frac{2}{3} \right) dx$

c) $\int \frac{10}{\sqrt[6]{x^5}}\,dx$

d) $\int \frac{(5x+7)^3}{3x^3}\,dx$

e) $\int (8x-1)(3x+4)\,dx$

f) $\int 3^{4x}\,dx$

g) $\int \frac{1}{e^{6x}}\,dx$

h) $\int x\, 7^{x^2}\,dx$

i) $\int \sqrt[3]{x^2}\,(3x+5)\,dx$

j) $\int \frac{e^{4x} - e^{5x}}{e^{4x}}\,dx$

7. Resuelva las siguientes integrales por sustitución

a) $\int (9x+5)^{12}\,dx$

b) $\int \frac{4x}{\sqrt[8]{4x+11}}\,dx$

c) $\int 6x^2(2x^3-e)^{10}\,dx$

d) $\int \frac{8x-5}{4x^2-5x+13}\,dx$

e) $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x-39}\,dx$

f) $\int 8xe^{4x^2-100}\,dx$

g) $\int \sqrt{11x}\,dx$

h) $\int \frac{100}{e^{50x-99}}\,dx$

i) $\int x\sqrt{(5x^2-3)^5}\,dx$

j) $\int \frac{5}{x\ln x^4}\,dx$

8. Integrales que se resuelven utilizando división previa

a) $\int \frac{9x^3 - 7x + 5}{x+2}\, dx$

b) $\int \frac{(5x-7)^2}{x+6}\, dx$

c) $\int \frac{x^4 - 16}{x+2}$

d) $\int \frac{4x^2-9x-7}{2x-3} dx$

e) $\int \frac{x^4-3x^3-8x^2-1x+4}{x+3} dx$

f) $\int \frac{5x^2+x-1}{3x+2} dx$

g) $\int \frac{7x^3+5x-9}{9x+7} dx$

h) $\int \frac{25x^2+20x+4}{5x+4} dx$

i) $\int \frac{x^3-125}{x^2+5x+25} dx$

j) $\int \frac{8x^3+27}{2x+3} dx$

9. Integral indefinida aplicaciones en economía

El ejercicio número 31 ha sido tomado de uno de los libros de matemáticas del autor Haeussler[6]

a. Un fabricante ha determinado que la función de costo marginal es:

$$c'(q) = 0.003q^2 - 0.4q + 40 \ \$$$

Donde **q** es el número de unidades producidas. Si el costo marginal es de $ 27.50 cuando q = 50, y los costos fijos son de $
unidades?

b. El costo marginal de un artículo cuando se producen **q** unidades es:

$$c'(q) = -3q^2 + 60q + 4000 \ \$$$

El costo de producir 10 unidades es 90000 $. ¿Cuál es el costo de producir 50 unidades?

c. La función de ingreso marginal para cierto producto es:

$$r'(q) = \frac{350}{(q+3)^2} \ \$$$

Encuentre la función de demanda.

d. La función de ingreso marginal para cierto producto es:

$$r'(q) = \frac{405}{(5q+7)^3} \ \$$$

Encuentre la función de **demanda.**

El ejercicio número 35 fue tomado de uno de los libros del autor STEWART[7]

e. El costo marginal para fabricar x unidades de un producto es:

[6] HAEUSSLER. Ernest. F. Jr; RICHARD S. Paul. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. 8 ed. México: Prentice Hall, 1997. p. 734.

[7] STEWART, James. Cálculo conceptos y contexto. 1 ed. México: International Thomson Editores, 1999. p. 488.

$$C'(x) = 0.006x^2 - 1.5x + 8 \; dólares$$

El costo fijo es de 1 500 000 dólares, encuentre el costo de producir 2000 unidades.

f. La función de costo marginal para cierto artículo es:

$$C\ '(q) = \frac{35}{q+10} \ \$$$

Encuentre la función de costo, si los costos fijos son de 300000 $.

g. La función de costo marginal para cierto artículo es:

$$C'(q) = 3e^{0.004q} \ \$$$

Si los costos fijos son de $ 3 000, determine la función de costo.

10. Integral indefinida aplicaciones en física

a) Una bola es lanzada desde la superficie de la tierra con una velocidad de 43.5 m/s. ¿Cuál es la máxima altura qu
funciones de velocidad y de posición.

b) La función de aceleración de un objeto está dada por:

$$a(t) = 3.5t^2 - 4t + 30 \; m/s^2$$

El objeto parte desde una posición de -153 m con una velocidad de 3.5 m/s. Determine: Posición, velocidad y aceleración de

c) La función de aceleración de cierto objeto es:

$$a(t) = \frac{5}{(4t+5)^4} \ m/s^2$$

El objeto parte desde el origen con una velocidad de 8 m/s. Determine:

- Función de velocidad instantánea.
- Función de posición instantánea.

d. Un objeto se mueve desde el origen con una velocidad dada por la función:

$$v(t) = \frac{3t}{3t^2+10} \ m/s$$

Encuentre:

- Función de aceleración instantánea.
- Función de posición instantánea.
- Posición, velocidad y aceleración cuando han transcurrido 20 segundos.

e. Un objeto se deja caer desde una altura de 253 m. Determine la función o modelo de posición para cualquier insta
el momento en que toca el suelo.

f. Un objeto se lanza hacia arriba desde una altura de 250 m, con una velocidad de 100 m/s. Determine si el objeto
su respuesta. ¿El objeto irá cayendo o subiendo después de 15 s?

g. Un objeto se lanza hacia arriba desde la azotea de un edificio de 245 m con una velocidad de 83 m/s. determine:

- La altura máxima que alcanza el objeto.
- La velocidad máxima del objeto.

11. Integrales que contienen $\sqrt[n]{ax+b} \wedge \sqrt[n]{(ax+b)^m}$

a) $\int 2x\sqrt{7x-2}\;dx$

b) $\int \frac{x}{\sqrt{3-11x}}\;dx$

c) $\int \frac{10x}{\sqrt{x+100}}\;dx$

d) $\int x\sqrt[4]{7x+8}\;dx$

e) $\int x\sqrt{x+3}\,dx$

f) $\int 4x\sqrt[3]{x^2+6x+9}\;dx$

g) $\int 7x\sqrt[9]{6x-13}\;dx$

12. Integración de funciones trigonométricas

a) $\int sen6x\,dx$

b) $\int \frac{2}{3}\cos\left(\frac{5}{9}x\right)dx$

c) $\int 5x^3 senx^4 dx$

d) $\int \frac{3}{2}xsen(4x-3)dx$

e) $\int \sec^2(7x)dx$

f) $\int \csc^2(8x+5)dx$

g) $\int senx(3-\cos x)^6 dx$

h) $\int \frac{5\cos xdx}{(10+senx)^6}dx$

i) $\int \frac{\cot 3x}{sen3x}dx$

j) $\int 5^{\cos x} senxdx$

k) $\int \frac{\cos x}{1-\cos^2 x}dx$

l) $\int e^{3x} sen(e^{3x})\, dx$

m) $\int \frac{1}{xsen(\ln x)}dx$

n) $\int \cos^3 x\, dx$

o) $\int sen(4x)\cos(8x)dx$

p) $\int \cos(10x)\cos(12x)dx$

q) $\int sen\left(\frac{1}{3}x\right)sen\left(\frac{4}{5}x\right)dx$

13. Demuestre las siguientes fórmulas de integración

a) $\int tanu\, du = \ln\left|\sec u\right| + c$

b) $\int \cot u\, du = \ln\left|\operatorname{sen} u\right| + c$

c) $\int \sec u\, du = \ln\left|\sec u + tanu\right| + c$

d) $\int \csc u\, du = \ln\left|\csc u - \cot u\right| + c$

3 UNIDAD 2 INTEGRAL DEFINIDA

3.1.1 OBJETIVO GENERAL.

Entender el concepto de la integral definida, partiendo del cálculo del área bajo una curva.

3.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Aplicar la integral definida al cálculo del área bajo una curva y el área entre curvas.
- Aplicar la integral definida para el cálculo del volumen de sólidos de revolución utilizando diferentes métodos.

3.2 TEMA 1 INTEGRAL DEFINIDA

Definición de integral definida. La integral definida es una expresión de la forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Dónde: a y b se llaman **límites de integración**, y

a: Límite inferior.

b: Límite superior.

NOTA:
La integral definida es **un número;** para calcular este número, se utiliza el **teorema fundamental del cálculo.**

3.2.1 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

El teorema fundamental del cálculo recibe de manera apropiada este nombre porque establece una conexión entre las dos ramas del cálculo: **el cálculo diferencial** y el **cálculo integral.** El primero surgió del **problema de la tangente**, el cálculo integral lo hizo de un problema en apariencia no relacionado, **el problema del área**. El profesor de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630 –

1667), descubrió que estos dos problemas en realidad estaban íntimamente relacionados. De hecho, se dio cuenta que la derivación y la integración son procesos inversos. **El teorema fundamental del cálculo da la**

relación inversa precisa entre la derivada y la integral. Newton y Leibniz explotaron esta relación y la usaron para desarrollar el cálculo en un método matemático sistemático.[8]

3.2.2 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

NOTA:
En la integral definida no es necesario colocar la constante de integración.

NOTA:
El teorema fundamental del cálculo se puede demostrar a partir del área bajo una curva.

3.2.3 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Calcular: $\int_0^2 6 - 3x^2\, dx$

PROCEDIMIENTO

Se aplica el teorema fundamental del cálculo:

$$\int_0^2 6 - 3x^2\, dx = 6x - 3\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 6x - x\Big|_0^2 = [6(2) - (2)^3] - [6(0) - (0)^3] \rightarrow$$

[8] STEWART, James. Cálculo conceptos y contexto. 1 ed. México: International Thomson Editores, 1999. p. 383.

$$\int_0^2 6 - 3x^2\, dx = 12 - 8 = 4$$

---

2. Calcular: $\int_{-1}^{3}(6x^2 - 2x + 6)\, dx$

Procedimiento

a. Integrando:

$$\int_{-1}^{3}(6x^2 - 2x + 6)dx = \frac{6x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 6x\Big|_{-1}^{3} \rightarrow$$

b. Aplicando el teorema fundamental del cálculo:

$$\int_{-1}^{3}(6x^2 - 2x + 6)dx = 2x^3 - x^2 + 6x\Big|_{-1}^{3} \rightarrow$$

$$\int_{-1}^{3}(6x^2 - 2x + 6)dx = [2(3)^3 - (3)^2 + 6(3)] - [2(-1)^3 - (-1)^2 + 6(-1)] \rightarrow$$

$$\int_{-1}^{3}(6x^2 - 2x + 6)dx = (54 - 9 + 18) - (-2 - 1 - 6) = 72$$

---

3. Calcular:

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{1 + x^3}}\, dx$$

Procedimiento

a. Integrando: Utilizando el método sustitución se tiene:

Si $u = 1 + x^3 \rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$

b. Reemplazando en la integral:

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx = \int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{u}} * \frac{du}{3x^2} = \int_0^1 \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}du = \int_0^1 u^{\frac{1}{2}}\,du \rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx = \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{u}\Big|_0^1 \rightarrow$$

c. Aplicando el teorema fundamental del cálculo:

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx = 2\sqrt{u}\Big|_0^1 \rightarrow 2\sqrt{1+x^3}\Big|_0^1 = 2\sqrt{1+(1)^3} - 2\sqrt{1+(0)^3} = 2\sqrt{2}-2$$

3.2.4 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

INTEGRAL	PROPIEDAD	RESULTADO
1. $\int_a^b f(x)dx$	Al intercambiar los límites de integración, se cambia el signo de la integral.	$-\int_b^a f(x)dx$
2. $\int_a^a f(x)dx$	Sí los límites de integración son iguales, el resultado de la integral es igual a cero.	0
3. $\int_a^c f(x)dx$	$Si\ a < b < c$	$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
EJEMPLOS		
1. $\int_3^5 (4X+3)dx$	$=$	1. $-\int_5^3 (4x+3)dx$

2. $\int_{10}^{10} 50x^4\, dx$	$=$	0
3. $\int_0^6 (2x-3)dx$	$=$	$\int_0^2 (2x-3)dx + \int_2^6 (2x-3)dx$

NOTA: La variable de integración es una **"variable muda"** en el sentido de que cualquier otra variable produce el mismo resultado, el mismo número, es decir:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$$

Ejemplo: $\int_5^{10} 3x dx = \int_5^{10} 3z\, dz$

3.3 TEMA 2 ÁREA BAJO UNA CURVA Y ÁREA ENTRE CURVAS.

ÁREA BAJO UNA CURVA

Para describir **un método** para determinar el área bajo una curva, se parte de un **ejemplo** en particular:

Ejemplo: Encuentre el área de la región R limitada por la curva: $y = f(x) = \sqrt{x}$ y el eje x, entre $x = 0\ \ y\ x = 9.$

PROCEDIMIENTO

a. Lo primero que se debe hacer es realizar la gráfica del modelo:

- Los valores para la gráfica se muestran en la siguiente tabla:

x	$f(x) = \sqrt{x}$	y
0	$\sqrt{0}$	0
1	$\sqrt{1}$	1
2	$\sqrt{2}$	1.41
3	$\sqrt{3}$	1.73
4	$\sqrt{4}$	2
5	$\sqrt{5}$	2.23

6	$\sqrt{6}$	**2.44**
7	$\sqrt{7}$	**2.64**
8	$\sqrt{8}$	**2.82**
9	$\sqrt{9}$	**3**

La gráfica de la función se puede ver en la figura 1

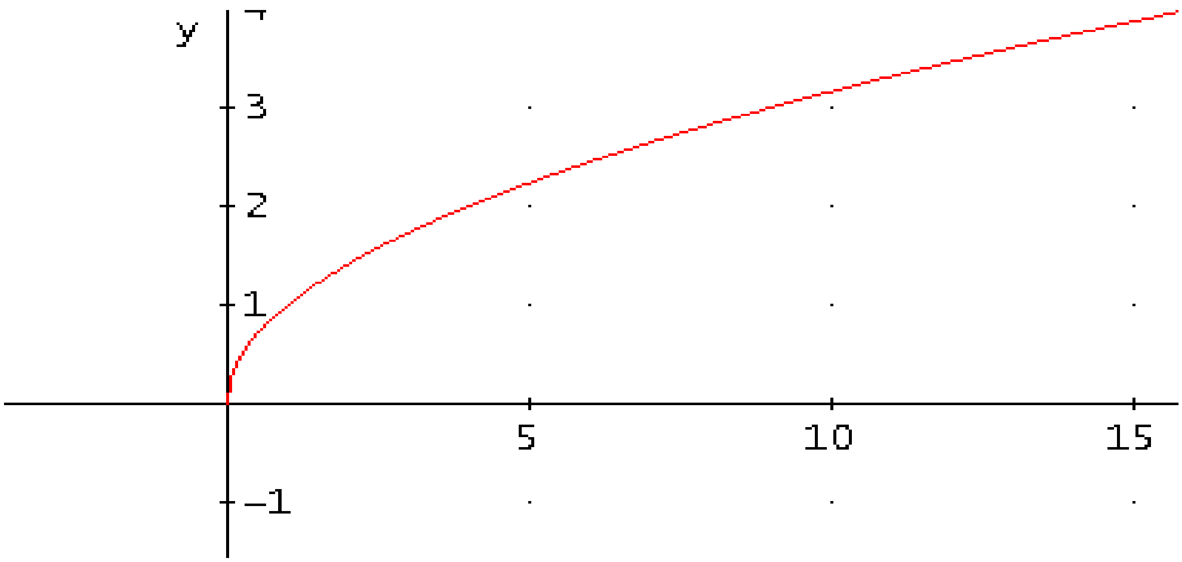


Figura 1. Gráfica de la función $y = f(x) = \sqrt{x}$

c. Se obtiene el **área total** como una **suma de áreas**, dividiendo la figura en rectángulos de igual base y alturas determinadas por la función.

Por facilidad se toma la **base** para cada rectángulo **igual a 1**. Si llamamos la **base** $\Delta\, \boldsymbol{x}$, tenemos que $\Delta\, \boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ (ver figura 2).

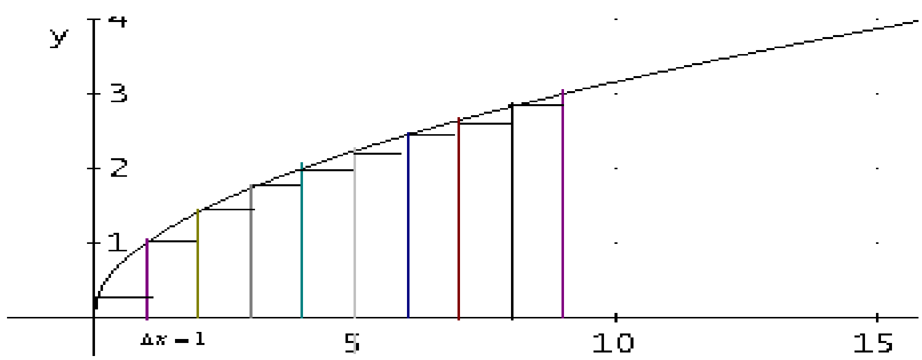


Figura 2

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tener en cuenta: El área de un rectángulo es igual a base por altura.
El área total será igual a la suma de cada área, es decir:

$$A_T = A_1 + A_2 + A_{3+}A_4 + \quad A_9$$

Se tiene entonces:

ÁREA	$\Delta\, x * f(x)$	VALOR ÁREA
A_1	$1 * f(1)$	$\sqrt{1} = 1$
A_2	$1 * f(2)$	$\sqrt{2} = 1,41$
A_3	$1 * f(3)$	$\sqrt{3} = 1,73$
A_4	$1 * f(4)$	$\sqrt{4} = 2$
A_5	$1 * f(5)$	$\sqrt{5} = 2,23$
A_6	$1 * f(6)$	$\sqrt{6} = 2,44$
A_7	$1 * f(7)$	$\sqrt{7} = 2,64$
A_8	$1 * f(8)$	$\sqrt{8} = 2,82$
A_9	$1 * f(9)$	$\sqrt{9} = 3$
$A_T = \sum_{i=1}^{9} A_i * \Delta x$	$=$	**19,306**

Una manera fácil para determinar $\Delta\, x$ sería:

$$\Delta\, x = \frac{Extremo\ mayor - extremo\ menor}{Número\ de\ rectangulos}$$

NOTA:
Mientras más pequeña sea la base de cada rectángulo, más precisa será el área obtenida, esto es, mientras **más rectángulos, más exacto** será el valor obtenido.

Se realizará el análisis para una función cualquiera y en forma general:

Sea la función $y = f(x)$, se determina el área de la región **R** en el primer cuadrante, entre

$$\boldsymbol{x = a \;\; y \;\; x = b}$$

Para ello utilicemos el mayor número de rectángulos posible, esto quiere decir que la base de cada rectángulo será lo más pequeña posible, esto se puede observar en la figura 3

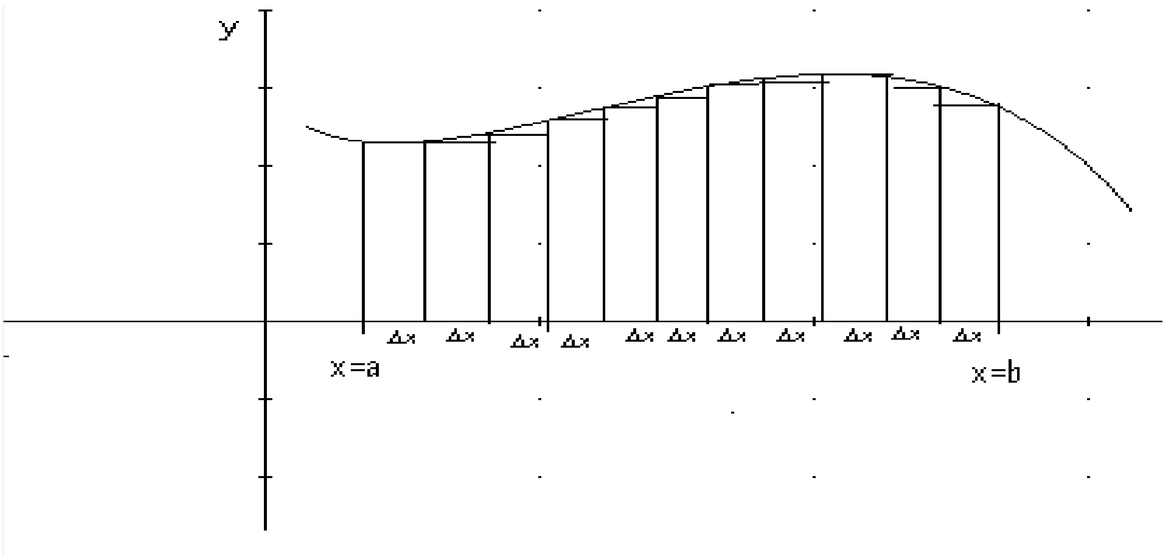


FIGURA3

- De la figura 3 se tiene que:

$$A_T \approx \Delta x * f(x_1) + \Delta x * f(x_2) + \Delta x * f(x_3) + \Delta x * f(x_4) + \cdots + \Delta x * f(x_n)$$

- Expresándolo en forma de sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{n} \approx f(x_i) * \Delta x, \text{ si } n \to \infty \; y \; \Delta x \to 0$$

- Esto es:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_i) * \Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

3.3.1 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Determine el área exacta de: $\int_0^9 \sqrt{x}\,dx$

Procedimiento

$$\int_0^9 \sqrt{x}\,dx = \int_0^9 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^9 = \frac{2}{3}\sqrt[2]{x^3}\Big|_0^9 = \frac{2}{3}\sqrt{9^3} - \frac{2}{3}\sqrt{0^3} \to$$

$$\int_0^9 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} * 27 - \frac{2}{3} * 0 = 2 * 9 - 0 = 18$$

Recuerde que: $\sqrt{729} = 27$

ÁREA BAJO UNA CURVA

Cuando se determina el área bajo una curva se pueden presentar **tres alternativas**:

1. Sí, la región está **por encima del eje x** como lo muestra la **figura 4**:

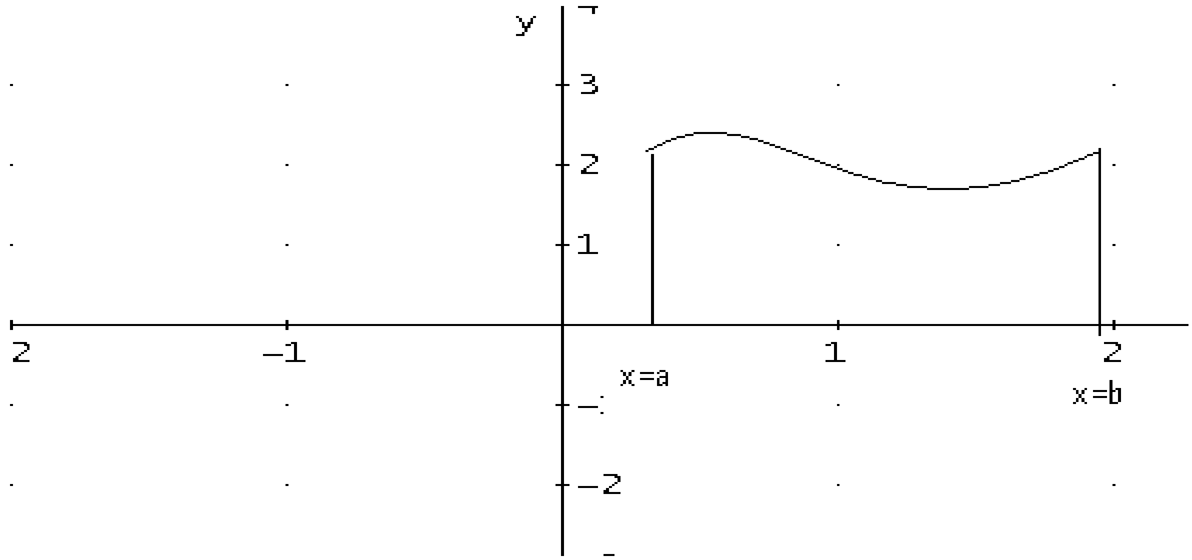


Figura 4

Entonces:

$$\boldsymbol{A = \int_a^b f(x)dx}$$

1. Sí, La región está **por debajo del eje x** como lo muestra la **figura 5**:

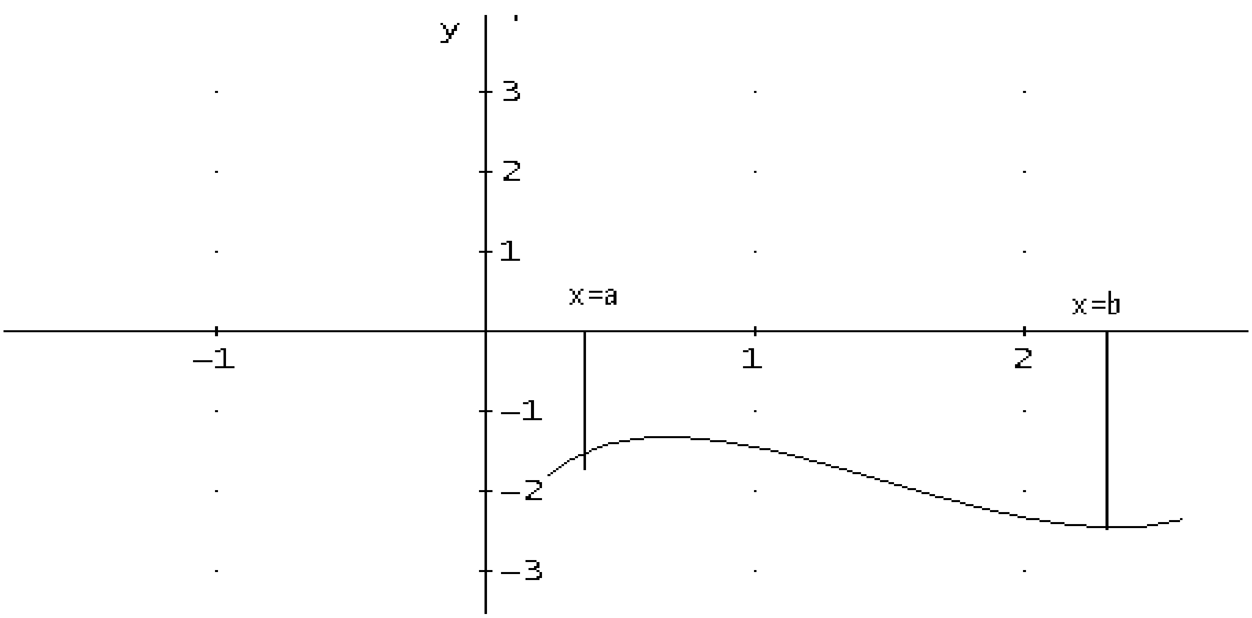


Figura 5

Entonces:

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

3.3.2 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. El siguiente ejemplo fue tomado de uno de los libros del autor Purcell.[9]

Encontrar el área de la región **R** limitada por:

$\boldsymbol{y = \frac{x^2}{3} - 4}$ y el eje $\boldsymbol{x}$, entre $\boldsymbol{x = -2 \ y \ x = 3}$

Procedimiento

e La gráfica de la figura se puede hacer dándole valores a x entre - 2 y 3, reemplazando cada valor en la función $\boldsymbol{y = f(x) = \frac{x^2}{3} - 4}$. Efectuando este proceso, obtenemos los valores mostrados en la tabla:

x	$y = f(x) = \frac{x^2}{3} - 4$	y
-2	$\frac{(-2)^2}{3} - 4$	-2.6
-1	$\frac{(-1)^2}{3} - 4$	-3.6
0	$\frac{(0)^2}{3} - 4$	-4
1	$\frac{(1)^2}{3} - 4$	-3.6

[9] PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 282.

$\mathbf{2}$	$\frac{(2)^2}{3} - 4$	-2.6
$\mathbf{3}$	$\frac{(3)^2}{3} - 4$	-1

- La gráfica de la función y el área que se pide hallar la podemos observar en la figura 6.

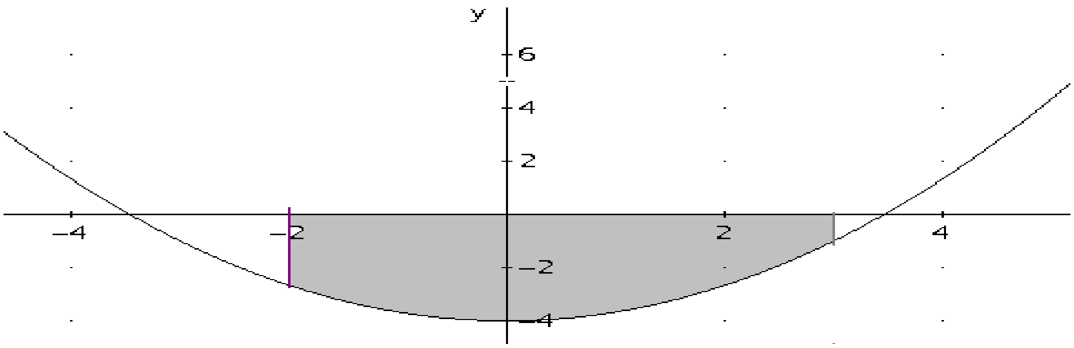


Figura 6

a Como la región está **por debajo del eje x**, se debe plantear la integral:

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

- Solución de la integral:

$$A = -\int_{-2}^{3}\left(\frac{x^2}{3} - 4\right)dx = -\int_{-2}^{3}\left(\frac{1}{3} * \frac{x^3}{3} - 4x\right)dx = -\left(\frac{1}{3} * \frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_{-2}^{3}$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo:

$$A = -\left\{\frac{1}{3} * \frac{3^3}{3} - 4(3) - \left[\frac{1}{3} * \frac{(-2)^3}{3} - 4(-2)\right]\right\} = \left\{\frac{1}{3} * \frac{27}{3} - 12 - \left[\frac{1}{3} * \frac{(-8)}{3} + 8\right]\right\}$$

$$A = -\left\{3 - 12 - \left[-\frac{8}{9} + 8\right]\right\} = -\left\{-9 + \frac{8}{9} - 8\right\} = -\left(\frac{-145}{9}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{145}{9}\ Unidades\ cuadradas}$$

---

3 Sí la región tiene **parte por encima** y **parte por debajo** del $\boldsymbol{eje\ x}$, El área se debe calcular utilizando varias integrales.

3.3.3 EJEMPLOS DE APRENDIZAJE

1. El siguiente ejemplo fue tomado de uno de los libros del autor Purcell[10]

Encontrar el área de la región limitada por:

$\boldsymbol{y = f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3\ \ y\ el\ eje\ x}$, entre $\boldsymbol{x = -1\ y\ \ x = 2}$.

Procedimiento

a. Para determinar la región cuya área deseamos hallar, podemos dar valores a x entre $\boldsymbol{x = -1\ y\ \ x = 2}$, reemplazar en la función para obtener los respectivos valores de y.

Realizando este proceso, obtenemos los valores de la siguiente tabla.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3}$	$\boldsymbol{y}$
$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{(-1)^3 - 3(-1)^2 - (-1) + 3}$	$\boldsymbol{0}$
$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{(0)^3 - 3(0)^2 - 0 + 3}$	$\boldsymbol{3}$
$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{(1)^3 - 3(1)^2 - 1 + 3}$	$\boldsymbol{0}$
$\boldsymbol{2}$	$\boldsymbol{(2)^3 - 3(2)^2 - 2 + 3}$	$\boldsymbol{-3}$

---

[10] PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 282.

La gráfica de la función y la región cuya área se quiere obtener, está dada en la figura 7:

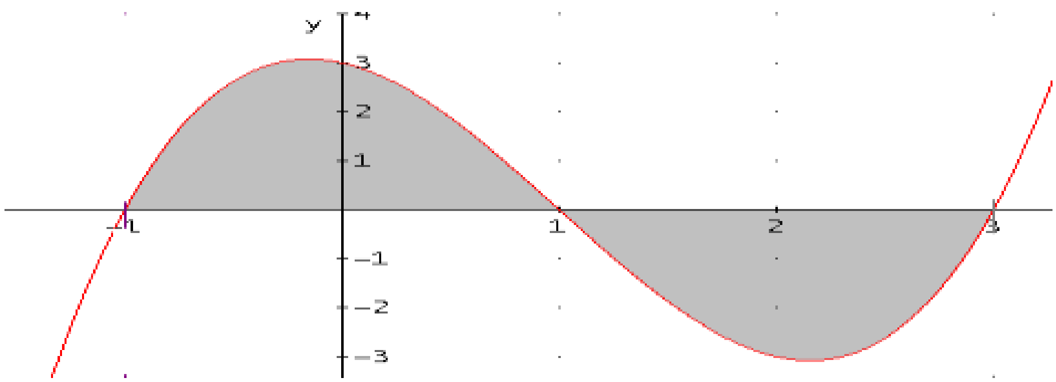


Figura 7

En la figura se puede ver que la gráfica corta el eje x en los puntos:

$$x = -1, \qquad x = 1, \qquad x = 3$$

Si estos puntos no se pueden leer en la gráfica, se debe proceder como sigue:

- Se deben hallar los puntos donde la función corta el eje x, para ello se soluciona la ecuación $f(x) = 0$.

La solución de $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ es:

$$x = -1, \qquad x = 1, \qquad x = 3$$

Actividad: Verificar el resultado efectuando la respectiva división.

b. Planteamiento de la integral a calcular:

ENTRE	POSICIÓN	INTEGRAL
$-1 \ y \ 1$	La función está **por encima** del eje x	$\int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx$
$1 \ y \ 2$	La función está **por debajo** del eje x	$-\int_{1}^{2} (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx$

c. Para determinar el área:

$$A = \int_{-1}^{1} (\boldsymbol{x^3 - 3x^2 - x + 3})\boldsymbol{dx} - \int_{1}^{2} (\boldsymbol{x^3 - 3x^2 - x + 3})\boldsymbol{dx}$$

d. Solución de la integral:

$$A = \int_{-1}^{1} (\boldsymbol{x^3 - 3x^2 - x + 3})\boldsymbol{dx} - \int_{1}^{2} (\boldsymbol{x^3 - 3x^2 - x + 3})\boldsymbol{dx}$$

$$A = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x\Big|_{-1}^{1} - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_{1}^{2} \rightarrow$$

- Simplificando y remplazando:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{(1)^4}}{\boldsymbol{4}} - \boldsymbol{(1)^3} - \frac{\boldsymbol{(1)^2}}{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{3(1)} - \left[\left(\frac{\boldsymbol{(-1)^4}}{\boldsymbol{4}}\right) - \boldsymbol{(-1)^3} - \frac{\boldsymbol{(-1)^2}}{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{3(-1)}\right] -$$

$$\left[\left(\frac{(2)^4}{4} - (2)^3 - \frac{(2)^2}{2} + 3(2)\right) - \left(\frac{(1)^4}{4} - (1)^4 - \frac{(1)^2}{2} + 3(1)\right)\right]$$

$$A = \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3 - \left[\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} - 3\right] - \left[\left(\frac{16}{4} - 8 - \frac{4}{2} + 6\right) - \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3\right)\right]$$

$$A = \frac{7}{4} - \left[\frac{-9}{4}\right] - \left[(4 - 8 - 2 + 6) - \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3\right)\right]$$

$$A = \frac{7}{4} - \left[\frac{-9}{4}\right] - \left[(0) - \left(\frac{7}{4}\right)\right] = \frac{16}{4} - \left[-\frac{7}{4}\right] = 4 + \frac{7}{4} \rightarrow A = \frac{23}{4}\,unidades\ cudradas$$

---

3. Encontrar el área de la región limitada por $\boldsymbol{y = 3x^2 + 7x - 6}$ y el eje $\boldsymbol{x}$

Entre $\boldsymbol{x = -4\ \ y\ \ x = 2}$

Procedimiento

a. La gráfica de la función y de la región cuya área se desea hallar la podemos ver en la figura 8.

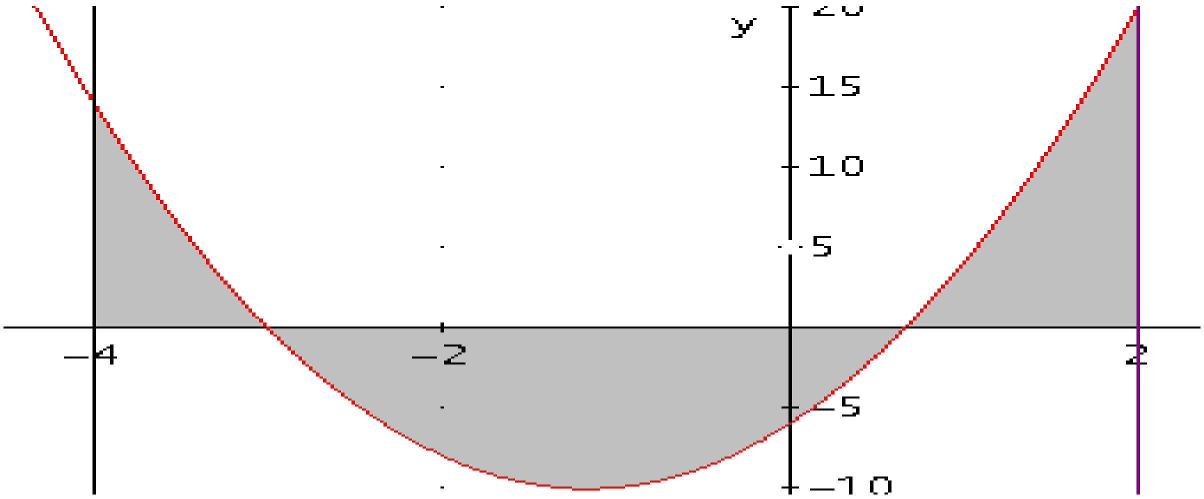


Figura 8

b. Como los puntos donde la función corta el eje x no se pueden leer con exactitud en la gráfica, para determinarlos se debe solucionar la ecuación:

$$3x^2 + 7x - 6 = 0$$

NOTA:
Mientras más pequeña sea la base de cada rectángulo, más precisa será el área obtenida, esto es, mientras **más rectángulos, más exacto** será el valor obtenido.

Esto es:

$$\frac{3}{3}(3x^2 + 7x - 6) = 0 \rightarrow \frac{9x^2 + 7(3x) - 18}{3} = 0 \rightarrow \frac{(3x+9)*(3x-2)}{3} = 0 \rightarrow$$

$$(x+3)*(3x-2) = 0 \rightarrow$$

$$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$$

$$3x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Para hallar el área de la región, se debe plantear:

ENTRE	POSICIÓN	INTEGRAL
$-4\ y\ -3$	La función está **por encima** del eje x	$\int_{-4}^{-3}(3x^2+7x-6)dx$
$-3\ y\ \frac{2}{3}$	La función está **por debajo** del eje x	$-\int_{-3}^{\frac{2}{3}}(3x^2+7x-6)dx$
$\frac{2}{3}\ y\ 2$	La función está **por encima** del eje x	$+\int_{\frac{2}{3}}^{2}(3x^2+7x-6)dx$

$$A=\int_{-4}^{-3}(3x^2+7x-6)dx-\int_{-3}^{\frac{2}{3}}(3x^2+7x-6)dx+\int_{\frac{2}{3}}^{2}(3x^2+7x-6)dx$$

Actividad: Se deja como ejercicio resolver estas integrales, la respuesta para cada una de las integrales del el ejercicio:

$$\int_{-4}^{-3}(3x^2+7x-6)dx=\frac{13}{2}$$

$$\int_{-3}^{\frac{2}{3}}(3x^2+7x-6)dx=\frac{1331}{54}$$

$$\int_{\frac{2}{3}}^{2}(3x^2+7x-6)dx=\frac{328}{27}$$

$$A=\frac{13}{2}-\left(-\frac{1331}{54}\right)+\frac{328}{27}=\frac{13}{2}+\frac{1331}{54}+\frac{328}{27}\rightarrow A=\frac{1169}{27}\ unidades\ cuadradas$$

Área entre curvas.

Para determinar el área entre curvas se debe tener en cuenta cuál de las curva está por encima y cual está por debajo (o cual curva está más alejada del eje x y cual curva está más cerca del eje).

El área se calcula como:

$$A = \int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]dx$$

Dónde: $f(x)$ está **<u>por encima</u>** de $g(x)$.

Donde f(x) está por encima de g(x).

3.3.4 PROCEDIMIENTO PARA HALLAR EL ÁREA ENTRE CURVAS:

1. Determine los puntos de corte de ambas curvas, si los hay, para ello resuelva la ecuación:

$$f(x) = g(x).$$

2. Bosqueje la gráfica de ambas funciones.

RECOMENDACIÓN:

Grafique solo el tramo necesario, de valores entre el área a obtener o entre los puntos de corte.

3. Plantear el área como una integral o como varias integrales, según sea el caso y resolver.

3.3.5 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Encuentre el área de la región **R** limitada por las curvas:

$y = g(x) = 8 - x^2$, $y = f(x) = x^2$, entre $x = 0$ y $x = 3$

Procedimiento

a. Hay que determinar los puntos donde se cortan estas curvas. Para ello se igualan las funciones y se despeja la variable:

$$f(x) = g(x) \rightarrow x^2 = 8 - x^2 \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = \frac{8}{2} \rightarrow$$

$$x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow x = 2, \qquad x = -2$$

b. Los puntos para hacer ambas gráficas se observan en la siguiente tabla:

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = 8 - x^2$
0	$0^2 = 0$	$8 - 0^2 = 8 - 0 = 8$
1	$1^2 = 1$	$8 - 1^2 = 8 - 1 = 7$
2	$2^2 = 4$	$8 - 2^2 = 8 - 4 = 4$
3	$3^2 = 9$	$8 - 3^2 = 8 - 9 = -1$

La gráfica de la región se observa en la figura 9.

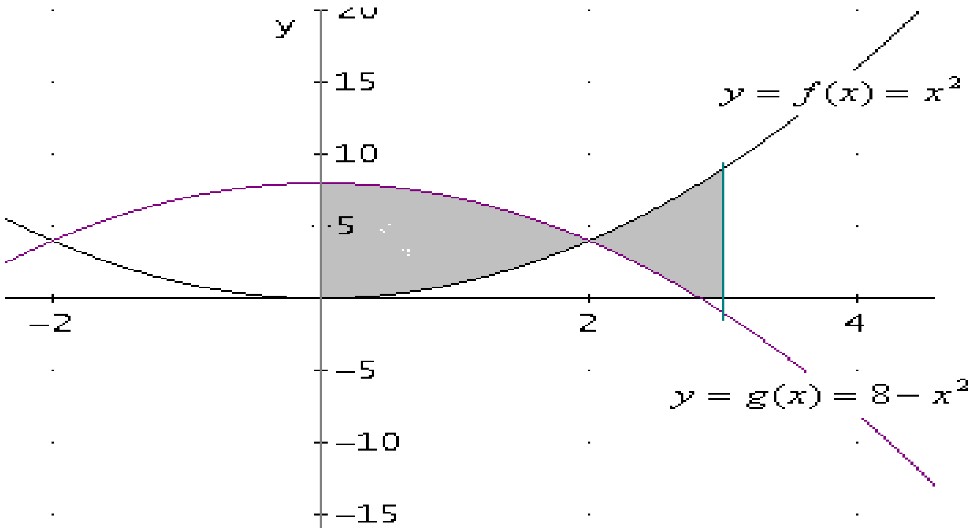


Figura 9

De acuerdo a la figura 9:

ENTRE	POSICIÓN	INTEGRAL
$x = 0 \;\; y \; x = 2$	La función $g(x)$ está **por encima** de $f(x)$	$\int_0^2 (8 - x^2 - x^2)dx$
$x = 2 \; y \; x = 3$	La función $f(x)$ está **por encima** de $g(x)$.	$\int_2^3 [x^2 - (8 - x^2)dx$

c. El área de la región se obtiene como:

$$A = \int_0^2 (8 - 2x^2)\, dx + \int_2^3 (2x^2 - 8) dx$$

➢ Resolviendo cada integral se tiene:

- $\int_0^2 (8-2x^2)dx = 8x - \frac{2x^3}{3}\Big|_0^2 = 8(2) - \frac{2(2)^3}{3} - \left[8(0) - \frac{2(0)^3}{3}\right] = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$

- $\int_2^3 (2x^2-8)dx = \frac{2x^3}{3} - 8x\Big|_2^3 = \frac{2(3)^3}{3} - 8(3) - \left[\frac{2(2)^3}{3} - 8(2)\right] = 18 - 24 - \left[\frac{16}{3} - 16\right]$

$$\int_2^3 (2x^2-8)dx = -6 - \left[-\frac{32}{3}\right] = -6 + \frac{32}{3} = \frac{14}{3}$$

Por lo tanto el área es:

$$A = \frac{32}{3} + \frac{14}{3} = \frac{46}{3}\ unidades\ cuadradas$$

2. Determine el área de la región R limitada por las curvas:

$y = f(x) = x^2 - 6x + 8$, $y = g(x) = x + 2$, entre $x = 0$ y $x = 7$

Procedimiento

a. La región cuya área se desea hallar se puede ver en la figura 10:

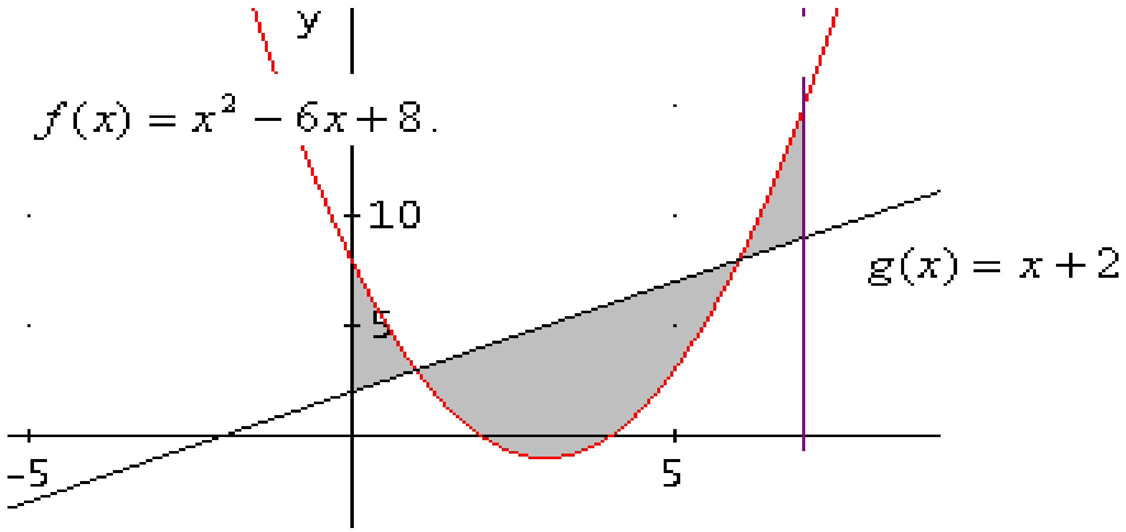


Figura 10

b. Los puntos donde se cortan estas dos funciones se obtienen solucionando la ecuación:

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 - 6x + 8 = x + 2$$

➢ Igualando a cero, simplificando y factorizando:

$$x^2 - 6x + 8 - x - 2 = 0 \rightarrow x^2 - 7x + 6 \rightarrow (x - 6) * (x - 1) = 0$$

$$x - 6 = 0 \rightarrow x = 6$$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

c. De acuerdo a la figura 10, para hallar el área de la región sombreada, se debe plantear:

ENTRE	POSICIÓN	INTEGRAL
$x = 0 \ y \ x = 1$	La función está **por encima** del eje x	$\int_0^1 [x^2 - 6x + 8 - (x + 2)]dx$
$x = 1 \ y \ x = 6$	La función está **por encima** del eje x	$+\int_1^6 [x + 2 - (x^2 - 6x + 8]dx$
$x = 6 \ y \ x = 7$	La función está **por encima** del eje x	$+\int_6^7 [x^2 - 6x + 8 - (x + 2)]dx$

$$A = \int_0^1 [x^2 - 6x + 8 - (x + 2)]dx + \int_1^6 [x + 2 - (x^2 - 6x + 8]dx + \int_6^7 [x^2 - 6x + 8 - (x + 2)]dx$$

Actividad: Realiza las integrales y encuentra el valor del área bajo la curva.

---

3. Encuentre el área de la región limitada por la curva:

$$y = f(x) = 3x^2 + 10x - 8, \text{ Entre } x = -3 \ \ y \ \ x = 2$$

Procedimiento

a. La gráfica de esta función es **una parábola** que **abre hacia arriba** como lo muestra la figura 11.

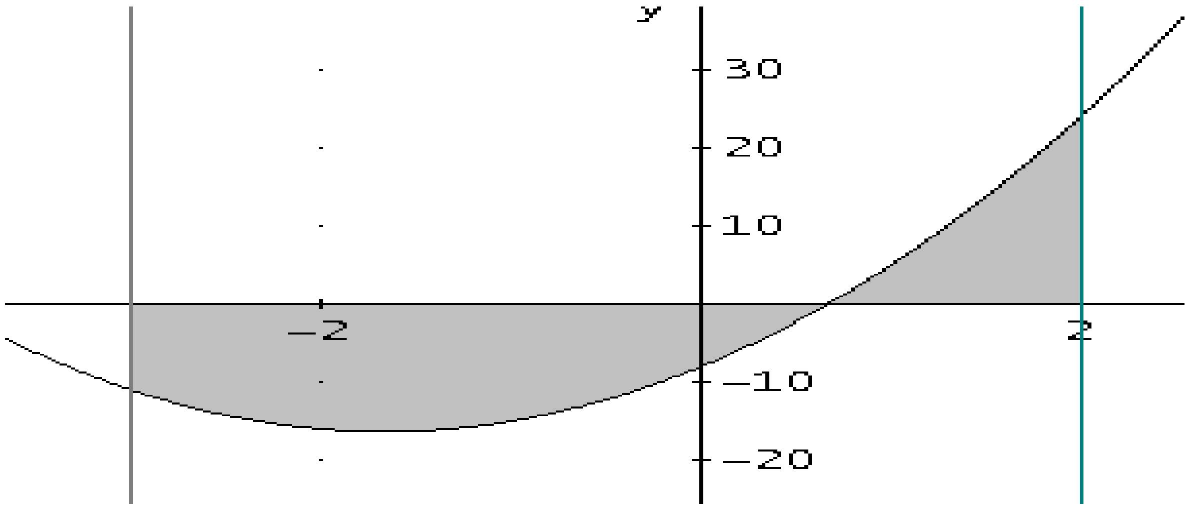


Figura 11.

b. Se encuentran los puntos donde la gráfica corta el eje $\boldsymbol{x}$; se hace $\boldsymbol{f(x) = 0}$:

$$\boldsymbol{f(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 10x - 8 = 0}$$

- Factorizando e igualando cada factor a cero:

$$\boldsymbol{\frac{3}{3}(3x^2 + 10x - 8) = 0 \rightarrow \frac{9x^2+10(3x)-24}{3} = 0 \rightarrow \frac{(3x+12)*(3x-2)}{3} = 0 \rightarrow}$$

- $\boldsymbol{(x+4)*(3x-2) = 0 \rightarrow}$
- $\boldsymbol{x + 4 = 0 \rightarrow x = -4}$
- $\boldsymbol{3x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3}}$

c. Para hallar el área se debe plantear y solucionar:

ENTRE	POSICIÓN	INTEGRAL
$\boldsymbol{x = -3 \;\; y \; x = \frac{2}{3}}$	La función está **por debajo** del eje $\boldsymbol{x}$	$-\int_0^1 \boldsymbol{(3x^2 + 10x - 8)dx}$
$\boldsymbol{x = \frac{2}{3} \; y \; x = 2}$	La función está **por encima** del eje $\boldsymbol{x}$	$+\int_1^6 \boldsymbol{(3x^2 + 10x - 8)dx}$

$$A = -\int_{-3}^{\frac{2}{3}} (3x^2 + 10x - 8)dx + \int_{\frac{2}{3}}^{2} (3x^2 + 10x - 8)dx$$

$$A = -\int_{-3}^{2/3} (3x^2 + 10x - 8)dx + \int_{2/3}^{2} (3x^2 + 10x - 8)dx$$

Actividad: solucionar las integrales definidas que quedan indicadas. (La respuesta del ejercicio es $\boldsymbol{A = \frac{1610}{27}\ unidades\ cuadradas}$)

4. Encuentre el área de la región encerrada por las parábolas (El ejemplo fue tomado de uno de los libros del autor STEWART[11]):

$$\boldsymbol{y = f(x) = x^2, \qquad y = g(x) = 2x - x^2}$$

Procedimiento

a. La grafica de ambas funciones se puede ver en la figura 12:

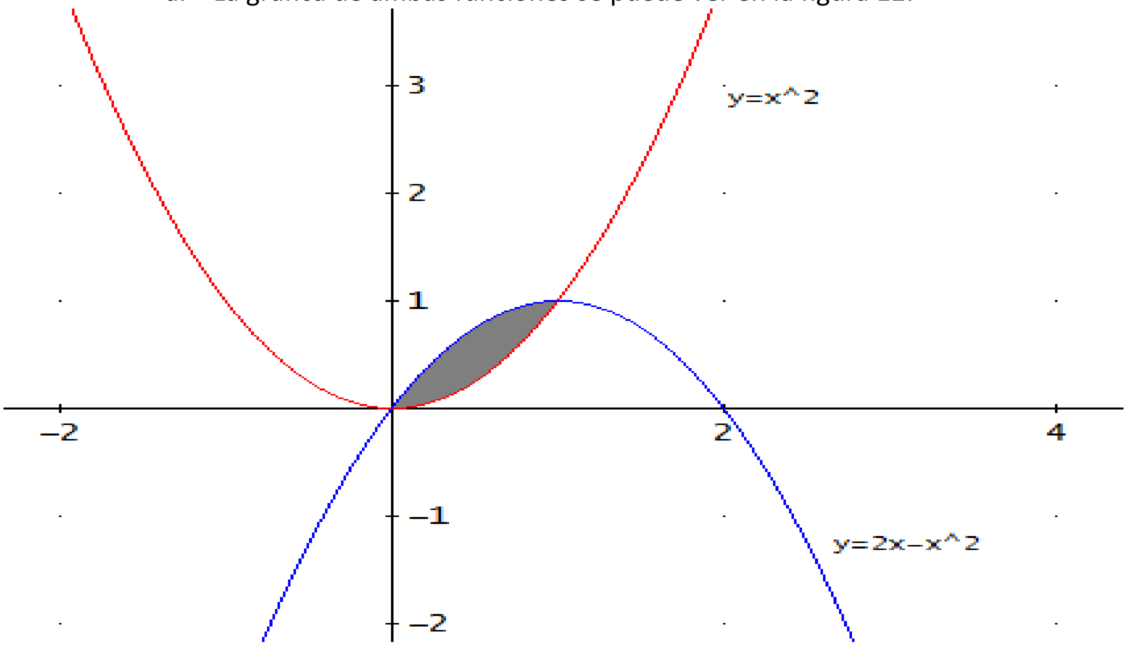


Figura 12.

[11] STEWART, James. Cálculo conceptos y contexto. 1 ed. México: International Thomson Editores, 1999. p. 449.

b. Se deben encontrar los puntos de corte, para ello se hace:

$$\boldsymbol{f(x) = g(x)}$$

$$\boldsymbol{x^2 = 2x - x^2}$$

- Se iguala a cero, se simplifica, se factoriza y se iguala cada factor a cero:

$$\boldsymbol{x^2 - 2x + x^2 = 0 \rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \rightarrow 2x * (x - 1) = 0}$$

$$\boldsymbol{2x = 0 \rightarrow x = 0}$$

$$\boldsymbol{x - 1 = 0 \rightarrow x = 1}$$

c. Como la función $\boldsymbol{g(x) = 2x - x^2}$ está **por encima** de la función $\boldsymbol{f(x) = x^2}$, para calcular el área de la región se debe plantear:

$$\boldsymbol{A = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2)dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)\, dx}$$

- Resolviendo la integral:

$$\boldsymbol{A = \int_0^1 (2x - 2x^2)\, dx = \frac{2x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = x^2 - \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1}$$

$$\boldsymbol{A = \int_0^1 (2x - 2x^2)\, dx = (1)^2 - \frac{2(1)^3}{3} - \left[(0)^2 - \frac{2(0)^3}{3}\right]}$$

$$\boldsymbol{A = \int_0^1 (2x - 2x^2)\, dx = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\ \textit{unidades cuadradas}}$$

3.4 TEMA 3 SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Un **sólido de revolución** o **volumen de revolución (**es una figura en el espacio, por lo tanto tiene tres dimensiones), es un sólido obtenido al rotar una región del plano Una figura plana) alrededor de una recta ubicada en el mismo, las cuales pueden o no cruzarse. Dicha recta se denomina **eje del sólido de revolución.**

- **Volumen del sólido de revolución**

- Se sabe que el volumen de un sólido es igual a**:**

$$\boldsymbol{v = Base * Ancho * alto}$$

- El volumen de un cilindro es:

$\boldsymbol{v = \pi * r^2 * h}$ En este caso el radio está determinado por la función.

Existen varios métodos para determinar el volumen de un sólido de revolución. Sólo se analizarán dos de ellos.

- **Método del disco para determinar el volumen de un sólido de revolución**.

Este método se utiliza cuando se hace **girar el área** bajo **una curva** alrededor de **un eje**.[12]

En este caso se obtiene un cilindro, el volumen de un cilindro es:

$$\boldsymbol{v = \pi * r^2 * h}$$

1. **<u>Cuando el eje del sólido es el eje x</u>**:

a. Dada una función $\boldsymbol{y = f(x)}$**,** cuya grafica se puede observar en la en la figura 13

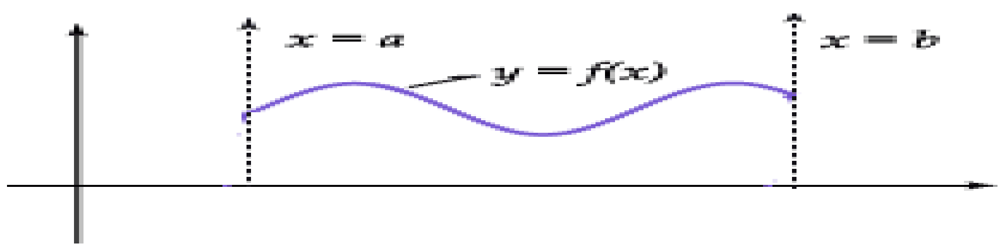


Figura 13 gráfica de la función $\boldsymbol{y = f(x)}$

b. Si se hace **girar** la región plana **R** comprendida entre la función $\boldsymbol{y = f(x)}$ y el eje $\boldsymbol{x}$ entre $\boldsymbol{x = a}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{x = b}$ Se obtiene **el sólido de revolución** mostrado en la figura 14.

[12]HERNÁNDEZ, Elsie. Aplicaciones de la integral definida: Volumen de sólidos de revolución. En: Cálculo Diferencial e Integral. [en línea]. [consultado 2 feb. 2010]. Disponible en <http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/CALCULODIFERENCIAL/curso-elsie/aplicacionesintegral/html/node6.html>

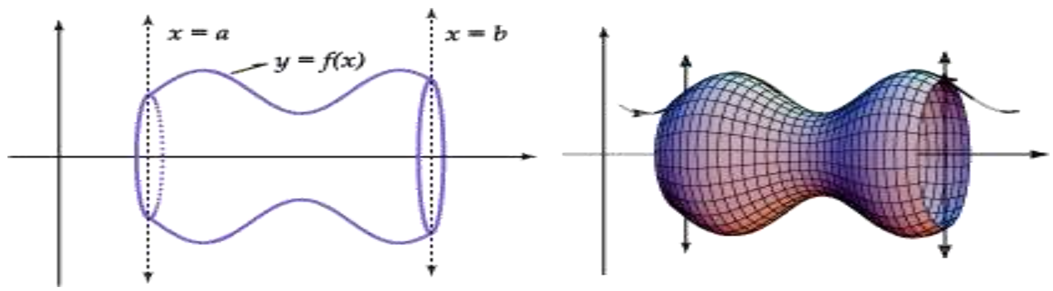


Figura 14.

Sólido de revolución formado al hacer girar la región **R** alrededor del eje $\boldsymbol{x}$.

c. Dividiendo el sólido en $\boldsymbol{n}$ sólidos iguales de altura $\Delta\boldsymbol{x}$ como lo muestra la figura 15:

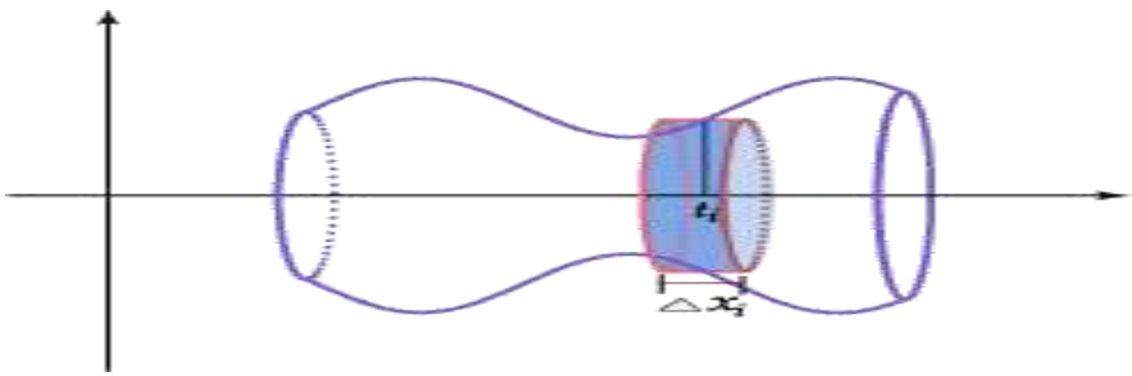


Figura 15

d. Luego, calculando el volumen de cada sólido y obteniendo el volumen del sólido como la suma de los $\boldsymbol{n}$ volúmenes, se llega a la expresión que nos determina el Volumen del sólido:

$$\boldsymbol{v \approx \sum_{i=1}^{\infty} \pi[f(x_i)]^2 \Delta x_i}$$

Si se hace que el número de sólidos más pequeños **tienda a infinito** se obtiene **el volumen exacto del sólido**, esto es:

$$\boldsymbol{v = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \pi[f(x_i)]^2 \Delta x_i = \lim_{\Delta x\to\infty} \sum_{a}^{b} \pi[f(x_i)]^2 \Delta x_i}$$

La expresión anterior se convierte en:

$$v = \pi \int_a^b [f(x_i)]^2 dx$$

2. **Cuando el eje del sólido es el eje y:**

$$v = \pi \int_c^d [f(y_i)]^2 dy$$

3.4.1 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Halle el volumen del sólido generado al hacer girar alrededor del eje x la región **R** formada por la función $y = x^2$ y el eje x, entre $x = 0 \wedge x = 1$.

Procedimiento

a. La figura 16 muestra la región plana y el sólido generado.

Para hacer la gráfica de la región basta con graficar la función $y = x^2$ entre

$x = 0 \wedge x = 1$

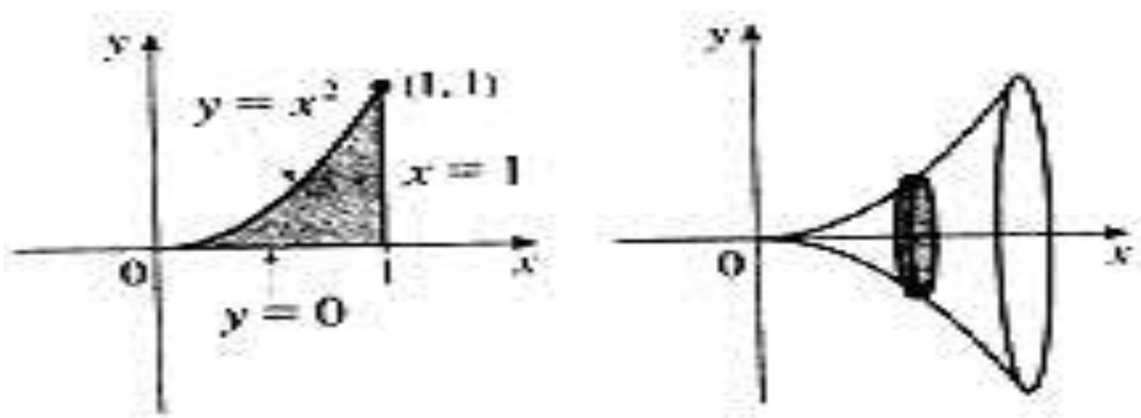


Figura 16

b. Para hallar el volumen se debe plantear:

$$v = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

- Reemplazando los valores dados:

$$v = \pi \int_0^1 [x^2]^2 dx = \pi \int_0^1 x^4\, dx = \pi * \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{(1)^5}{5} - \frac{(0)^5}{5} \right) = \frac{\pi}{5}$$

Por lo tanto:

$$v = \frac{\pi}{5}\ unidades\ cúbicas$$

2. Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje y la región **R** limitada por la función $x = \sqrt{y}$ y el eje y entre $y = 0 \wedge y = 4$

Procedimiento

a. La figura 17 muestra la gráfica de la región **R** y la gráfica del sólido generado

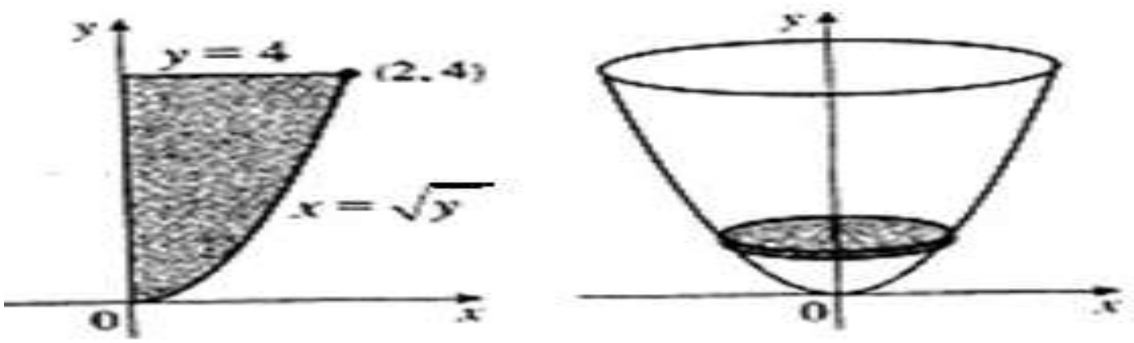


Figura 17

b. Como la región gira en torno al eje y , para hallar el volumen se debe plantear:

$$v = \pi \int_c^d [f(y_i)]^2 dy$$

- Reemplazando los valores dados:

$$v = \pi \int_c^d [f(y_i)]^2 dy = \pi \int_0^4 \left[\sqrt{y}\ \right]^2 dy = \pi \int_0^4 y\, dy \rightarrow$$

$$v = \pi * \frac{y^2}{2} \Big|_0^4 = \pi \left[\frac{(4)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \right] = 8\pi$$

Por lo tanto:

$$v = 8\pi \text{ unidades cúbicas}$$

---

3. El siguiente ejemplo fue tomado de uno de los libros del autor Purcell[13]

Encuentre el volumen del sólido de revolución obtenido mediante la rotación alrededor del eje x, de la región limitada por la curva $y = \sqrt{x}$ y el eje x entre x **= 0 y** x **= 4.**

ACTIVIDAD: Realizar el ejercicio, teniendo en cuenta que el resultado a obtener es:

$$v = \pi \int_0^4 \left[\sqrt{x} \right]^2 dx = 8\pi$$

Nota: Resolverlo y confrontar el proceso realizado con el tutor.

---

4. El siguiente ejemplo fue tomado de uno de los libros del autor Purcell.[14]

Encuentre el volumen del sólido de revolución que se genera por la rotación alrededor del eje y de la región limitada por la curva $y = x^3$ y el eje y entre $y = 0 \wedge y = 3$

ACTIVIDAD: Realizar el ejercicio, teniendo en cuenta que el resultado a obtener es:

$$v = \pi \int_0^3 \left[y^{\frac{1}{3}} \right]^2 dy = \frac{3\pi}{5} * 3^{\frac{5}{3}} = 11,7625969 \ldots$$

---

[13] PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 290.

[14] PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 291.

- **Método de la arandela para determinar el volumen de un sólido de revolución**.

Este método se utiliza cuando se hace **girar el área** entre **dos curvas** alrededor de **un eje**.

1. **Si la región gira alrededor del eje x:**

$$v = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx - \pi \int_a^b [g(x)]^2 dx \rightarrow$$

$$v = \pi \left[\int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} \, dx \right]$$

Donde la función $f(x)$ está **por encima** de la función $g(x)$.

2. **Si la región gira alrededor del eje y:**

$$v = \pi \int_a^b [f(y)]^2 dy - \pi \int_a^b [g(y)]^2 dy \rightarrow$$

$$v = \pi \left[\int_a^b \{[f(y)]^2 - [g(y)]^2\} \, dx \right]$$

Donde la función $f(y)$ está **más alejada** del eje y que la función $g(y)$

3.4.2 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Encuentre el volumen del sólido que se genera al girar alrededor del eje x la región **R,** formada por las curvas: $x = y^2 \wedge y = x^2$

PROCEDIMIENTO

a. Es conveniente escribir la función $x = y^2$ despejando la **y**, esto es:

$$x = y^2 \rightarrow y^2 = x \rightarrow y = \pm\sqrt{x} \rightarrow y = f(x) = \pm\sqrt{x}$$

b. La otra función es:

$$y = g(x) = x^2$$

c. Para determinar **los límites** de la región **R**, es necesario encontrar los puntos de corte de ambas funciones, para ello se debe plantear y solucionar la ecuación:

$$f(x) = g(x) \rightarrow \pm\sqrt{x} = x^2$$

➢ Para eliminar la raíz elevamos en ambos lados al cuadrado, esto es:

$$\left(\pm\sqrt{x}\right)^2 = (x^2)^2 \rightarrow x = x^4$$

➢ Igualando a cero, factorizando y haciendo cada factor igual acero se tiene:

$$x^4 - x = 0 \rightarrow x * (x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0$$

$$x^3 - 1 = 0 \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{1} \rightarrow x = 1$$

d. La región y el sólido generado se pueden observar en la figura 18 donde solamente se debe graficar la **parte positiva** de la función $f(x)$, es decir:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

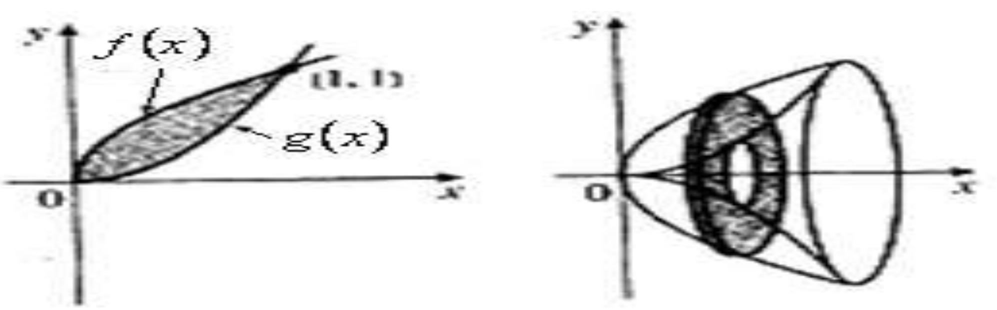


Figura 18

Se observa que la función $f(x)$ está por encima de la función $g(x)$, por lo tanto para hallar el volumen se debe plantear y solucionar:

$$v = \pi \left[\int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} \, dx \right]$$

$$v = \pi \left[\int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} \, dx \right] \rightarrow \pi \int_0^1 (x - x^4) dx \rightarrow$$

$$v = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) |_0^1 = \pi \left\{ \frac{(1)^2}{2} - \frac{(1)^5}{5} - \left[\frac{(0)^2}{2} - \frac{(0)^5}{5} \right] \right\}$$

$$v = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \pi \left(\frac{5-2}{10} \right) = \frac{3}{10} \pi$$

Por lo tanto:

$$v = \frac{3}{10} \pi \; unidades \; cúbicas$$

---

2. Determine el volumen del sólido de revolución que se genera al girar alrededor del eje x, la región limitada por la parábola $y = x^2 + 1$ y la recta $y = x + 3$

Procedimiento

a. Primero se deben determinar los puntos de corte de estas figuras y para ello se igualan ambas funciones:

$$x^2 + 1 = x + 3$$

- Igualando a cero, factorizando y haciendo cada factor igual acero se tiene:

$$x^2 + 1 = x + 3 \rightarrow x^2 + 1 - x - 3 = 0 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow (x - 2) * (x + 1) = 0$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$$

b. La región y el sólido generado los podemos ver en la figura 19:

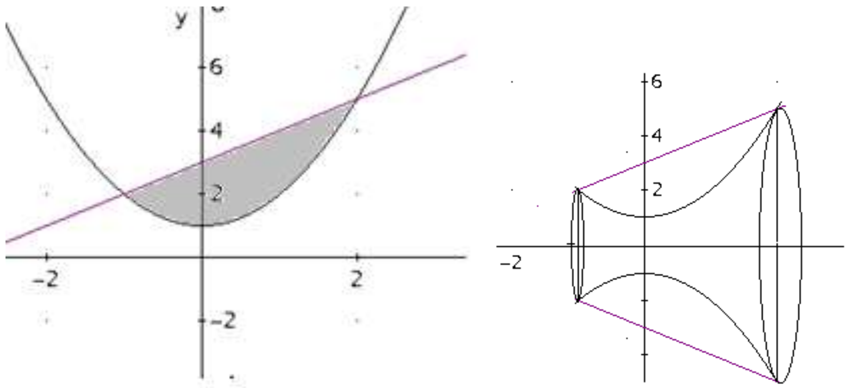


Figura 19

- Analizando la gráfica se tiene que:

GRÁFICA	FUNCIÓN	CARACTERÍSTICA
Línea recta	$y = x + 3$	Está **más alejada** del eje x (o está **por encima**)
Parábola	$y = x^2 + 1$	Está **más cerca** del eje x (o está **por debajo**).

c. Para hallar el volumen se debe plantear:

$$v = \pi\left[\int_{-1}^{2}\{[x+3]^2 - [x^2+1]^2\}\,dx\right]$$

- **Nota**: Es práctico resolver aparte la expresión: $[x+3]^2 - [x^2+1]^2$

$$[x+3]^2 - [x^2+1]^2 = x^2 + 6x + 9 - (x^4 + 2x^2 + 1) =$$

$$x^2 + 6x + 9 - x^4 - 2x^2 - 1 = -x^4 - x^2 + 6x + 8$$

Reemplazando:

$$v = \pi\left[\int_{-1}^{2}\{[x+3]^2 - [x^2+1]^2\}\,dx\right] = \pi\left[\int_{-1}^{2}(-x^4 - x^2 + 6x + 8)\,dx\right]$$

$$v = \pi\left[\int_{-1}^{2}(-x^4 - x^2 + 6x + 8)\,dx\right] = \pi\left(-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x\right)\Big|_{-1}^{2}$$

$$v = \pi\left[\left(-\frac{(2)^5}{5} - \frac{(2)^3}{3} + 3(2)^2 + 8(2)\right) - \left(-\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3} + 3(-1)^2 + 8(-1)\right)\right]$$

$$v = \pi\left[\left(-\frac{32}{5} - \frac{8}{3} + 12 + 16\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 3 - 8\right)\right] \rightarrow v = \frac{117}{5}\ unidades\ cúbicas$$

---

3. El siguiente ejemplo fue tomado de uno de los libros del autor Purcell.[15]

Encuentre el volumen del sólido de revolución que se genera por la rotación alrededor del eje x de la región limitada por las parábolas: $y = x^2,\ y^2 = 8x$

Procedimiento

a. Se encuentran los puntos donde se cortan ambas funciones:

$$y^2 = 8x \rightarrow y = \pm\sqrt{8x}$$

b. Se determinan los puntos de corte (se igualan las funciones):

$x^2 = \pm\sqrt{8x}$, elevando al cuadrado: $(x^2)^2 = \left(\pm\sqrt{8x}\right)^2 \rightarrow x^4 = 8x$

- Igualando a cero, factorizando y haciendo cada factor igual acero se tiene:

$$x^4 - 8x = 0 \rightarrow x * (x^3 - 8) = 0$$

$$x = 0$$

$$x^3 - 8 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{8} \rightarrow x = 2$$

ACTIVIDAD 1: Realizar la gráfica de la región y el sólido de revolución.

Nota: Resolverlo y confrontar el proceso realizado con el tutor.

c. Para hallar el volumen se debe plantear:

[15] PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 291.

$$v = \pi\left[\int_0^2 \left\{\left[\pm\sqrt{8x}\right]^2 - [x^2]^2\right\} dx\right]$$

$$V = \pi\int_0^2 \left[\left(\pm\sqrt{8x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right] dx$$

ACTIVIDAD 2 solucionar la integral, justificando cada uno de los procesos realizados.

La respuesta es: $v \approx 30,16 \ldots \, Unidades\ cúbicas$

---

4. Realice el ejemplo3, pero la región gira alrededor del eje y.

ACTIVIDAD: Efectuar el ejercicio justificando cada uno de los procesos realizados.

Respuesta: $v = \pi\left[\int_0^4 \left\{\left[\pm\sqrt{y}\right]^2 - \left[\frac{y^2}{8}\right]^2\right\} dy\right] = 4,8\,\pi \approx 15,07964474 \ldots$

R:

3.4.3 EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Integral definida. Resuelva las siguientes integrales definidas.

- $\int_0^{10} 3x^2 dx$
- $\int_{-2}^{5} \frac{x}{x^2+4} dx$
- $\int_1^6 \frac{x}{x+4} dx$
- $\int_0^3 e^{3x+1} dx$

2. Área bajo una curva y área entre curvas.

- Encuentre el área de la región formada por la curva $y = 4x^2 - 5x - 6$ y el eje x, entre x =-3 y x = 5.

- Encuentre el área de la región R formada por la curva $f(x) = 10x^2 - x - 3$ y el eje x entre $x = 0$ y $x = 2$.
- Encuentre el área de la región formada por la curva $f(x) = \frac{5x}{x^2 - 16}$ y el eje x, entre x = - 2 y x = 3.
- Encuentre el área de la región formada por las funciones $y = 4x^2 \wedge y = 3x$
- Encuentre el área de la región formada por las curvas $y = 3x^2 - 5x \wedge y = 2x^2 - 6$ entre x = -3 y x = 5.

3. Sólidos de revolución.

- Determine el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer rotar alrededor del eje x la función $y = \sqrt{16 - x}$ entre x = -4 y x = 4.
- Determine el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer rotar alrededor del eje x la función $y = e^x$ entre x = -1 y x = 3.
- Determine el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer rotar alrededor del eje x la función $y = x^2 + 4$ entre x = -4 y x = 5.
- Determine el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer rotar alrededor del eje x la función $y = x^2 \wedge y = 3x$ entre x = 0 y x = 3.
- Determine el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer rotar alrededor del eje x la función $y = x + 1 \wedge y = 2x$ entre x = 2 y x = 10.

4. Use una integral definida para encontrar el área de la región limitada por la curva, el eje **x** y los valores de **x** dados. En cada caso primero bosqueje la región.

- $y = 2x - 3,\ entre,\ \ x = 0 \wedge 5$
- $y = x^3 + 2x,\ entre\ \ x = -2 \wedge x = 2$
- $y = x^2 - 5x - 24,\ entre\ \ x = -3 \wedge x = 5$
- $y = 5x^2 + 8x - 4,\ entre\ \ x = -1 \wedge x = 6$

5. Determine el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar la región dada alrededor del eje indicado.

- $y = \frac{5}{4}x,\ entre\ \ x = 0 \wedge x = 10\ Gira\ alrededor\ del\ eje\ x$
- $y = 3x^2\ \ entre\ \ x = 2 \wedge x = 3\ Gira\ alrededor\ \ del\ \ eje\ \ x$
- $y = 5x + 4\ entre\ \ x = 0 \wedge x = 3\ Gira\ eje\ \ x$

6. Determine el área de la región limitada por la curva o curvas, el eje **x** y los valores de **x** dados. En cada caso primero bosqueje la región.

- $y = 7x^2 - 12x - 4x \;\; entre \;\; x = -2 \wedge x = 8$
- $y = \sqrt{25 - x} \;\; entre \;\; x = -5 \wedge x = 5$
- $y = \dfrac{100}{x+4} \;\; entre \;\; x = 1 \wedge x = 6$
- $y = 5x^2 - 3x \wedge y = x^2 + 6 \;\; entre \;\; x = -1 \wedge x = 7$
- $y = 4x^2 \wedge y = 3x^2 + 9 \;\; entre \;\; x = -2 \wedge x = 5$

7. **Determine el volumen del sólido de revolución** generado al hacer girar la región dada alrededor del eje indicado.

- $y = 2x + 1 \;\; entre \;\; x = 0 \wedge x = 6 \;\; gira \;\; eje \;\; x$
- $y = x^2 + 4x \;\; entre \;\; x = 0 \wedge x = 3 \;\; gira \;\; eje \;\; x$
- $y = e^x \;\; entre \;\; x = -2 \wedge x = 2 \;\; gira \;\; eje \;\; x$
- $y = 5x^2 + 1 \;\; entre \;\; x = -1 \wedge x = 1 \;\; gira \;\; eje \;\; x$
- $y = \dfrac{5}{x+3} \;\; entre \;\; x = -1 \wedge x = 2 \;\; gira \;\; eje \;\; x$
- $y = \sqrt{x^2 + 16} \;\; entre \;\; x = -4 \wedge x = 4 \;\; gira \;\; eje \;\; x$
- $y = \sqrt{25 - x^2} \wedge y = 2 \;\; entre \;\; x = -3 \wedge x = 4 \;\; gira \;\; eje \;\; x$
- $y = x \wedge y = x^3 \;\; entre \;\; x = 0 \wedge x = 1 \;\; gira \;\; eje \;\; x$
- $y = 2x + 1 \wedge y = 1 - x^2 \;\; entre \;\; x = 0 \wedge x = \;\; gira \;\; eje \;\; x$
- $y = x + 4 \wedge y = \sqrt{x^2 - 4} \;\; entre \;\; x = 4 \wedge x = 6 \;\; gira \;\; eje \;\; x$

4 UNIDAD 3 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

4.1.1 OBJETIVO GENERAL.

Calcular integrales indefinidas y definidas, usando los métodos de integración por partes e integración por fracciones parciales.

4.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Resolver integrales utilizando integración por partes
- Resolver integrales utilizando fracciones parciales.

4.2 TEMA 1 INTEGRACIÓN POR PARTES

El método de integración por partes permite utilizar la siguiente fórmula:

La siguiente idea de la definición de integración por partes fue tomada del autor LEITHOLD[16]

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Donde tanto u como v son expresiones en x .

- **Demostración de la fórmula para integración por partes**

a. Para demostrar esta fórmula se parte de la **derivada de un producto**:

$$D_x(u*v) = (u*v)' = \frac{du}{dx}*v + \frac{dv}{dx}u \rightarrow d(u*v) = dx*\left(\frac{du}{dx}*v + \frac{dv}{dx}u\right) \rightarrow$$

$$d(u*v) = v*du + u*dv$$

b. Se integra a ambos lados de la igualdad:

$$\int d(u*v) = \int (v*du + u*dv) \rightarrow uv = \int v\,du + \int u\,dv$$

[16] LEITHOLD, Louis. El Cálculo con Geometría Analítica. 6 ed. México: Harla, 1992. p. 689.

- Despejando $\int \boldsymbol{u\,dv}$, se tiene:

$$\int \boldsymbol{u\,dv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{v\,du} +$$

La fórmula de integración por partes es:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

En la utilización de esta fórmula se busca

1. Que $\boldsymbol{u}$ sea **un <u>factor simple</u>**, que nos permita **una derivada "sencilla".**

2. Que $\boldsymbol{dv}$ sea un **<u>factor</u>** que permita **una integral "sencilla".**

- **Pasos para aplicar la fórmula de integración por partes**

1. A una de las expresiones se le asigna la letra $\boldsymbol{u}$.
2. Derivando se obtiene $\boldsymbol{\frac{du}{dx}}$; se despeja $\boldsymbol{dx.}$
3. A la expresión restante se le asigna el $\boldsymbol{dv.}$
4. Integrando la expresión anterior se obtiene $\boldsymbol{v.}$
5. Se reemplaza en la fórmula de integración por partes a: $\boldsymbol{uv}$ y la $\int \boldsymbol{v\,du}$
6. Se efectúa la integral: $\int \boldsymbol{v\,du}$
7. La constante de integración se coloca después de realizar todas las integrales.

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

1. Este método se utiliza principalmente para integrar expresiones que contengan $\boldsymbol{e^u}$, $\boldsymbol{\ln|u|}$, o expresiones trigonométricas, combinadas entre sí o con expresiones polinómicas.

2. $\boldsymbol{e^x}$ por lo general nunca es $\boldsymbol{u}$.

3. $\boldsymbol{\ln|x|}$ por lo general es $\boldsymbol{u}$.

4.2.1 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor SOLER FAJARDO.[17]Resolver:

$$\int \ln|x|\,dx$$

Procedimiento

a. Sea $u = \ln|x| \rightarrow du = \frac{1}{x}dx$
b. Sea $dv = dx \rightarrow \int dv = \int dx \rightarrow v = x$
c. Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int \ln|x|\,dx = x * \ln|x| - \int x\frac{1}{x}dx$$

$$\int \ln|x|\,dx = x * \ln|x| - \int dx = x * \ln|x| - x + C$$

[17]SOLER FAJARDO, Francisco; NUÑEZ, Reinaldo; ARANDA SILVA, Moisés. Fundamentos de Cálculo con aplicaciones a ciencias Económicas y Administrativas. 2 ed. Bogotá: Ecoe ediciones, 2002. p. 335.

2. El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor LEITHOLD[18]

Encuentre: $\int x \ \ln|x| \ dx$

Procedimiento

a. Sea $u = \ln|x| \to du = \frac{1}{x} dx$
b. Sea $dv = x\, dx \to \int dv = \int x dx \to v = \frac{x^2}{2}$
c. Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

$$\int x \ \ln|x| \ dx = \frac{x^2}{2} * \ \ln|x| - \int \frac{x^2}{2} * \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} * \ \ln|x| - \int \frac{x}{2} * dx$$

$$\int x \ \ln|x| \ dx = \frac{x^2}{2} * \ \ln|x| - \int \frac{x}{2} * dx = \frac{x^2}{2} * \ \ln|x| - \frac{1}{2} * \frac{x^{1+1}}{1+1} + C \to$$

$$\int x \ \ln|x| \ dx = \frac{x^2}{2} * \ \ln|x| - \frac{x^2}{4} + C$$

3. El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor SOLER FAJARDO[19] Resolver

$$\int xe^x dx$$

Procedimiento

a. Sea $u = x \to du = dx$
b. $dv = e^x dx \to v = \int e^x dx \to v = e^x$

[18] LEITHOLD, Louis. El Cálculo con Geometría Analítica. 6 ed. México: Harla, 1992. p. 691

[19] SOLER FAJARDO, Francisco; NUÑEZ, Reinaldo; ARANDA SILVA, Moisés. Fundamentos de Cálculo con aplicaciones a ciencias Económicas y Administrativas. 2 ed. Bogotá: Ecoe ediciones, 2002. p. 335.

c. Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \boldsymbol{xe^x dx = xe^x} - \int \boldsymbol{e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C}$$

4. El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor LEITHOLD[20]

Resolver: $\int x^3 e^{x^2} dx$

Procedimiento

a. Sea: $\boldsymbol{u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx}$

b. Sea: $\boldsymbol{dv = xe^{x^2}} \rightarrow v = \int xe^{x^2} dx$

- Esta integral se debe resolver por sustitución

$$v = \int xe^{x^2} dx$$

- ✓ Sea:

$$\boldsymbol{z \overset{=}{=} x^2 \rightarrow dz = 2x\,dx \rightarrow dx = \frac{dz}{2x}}$$

- ✓ La integral queda:

$$v = \int xe^z \frac{dz}{2x} = \frac{1}{2}e^z = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

[20] LEITHOLD, Louis. El Cálculo con Geometría Analítica. 6 ed. México: Harla, 1992. p. 691

$$v = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

c. Reemplazando en la fórmula de integración por partes:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int \frac{1}{2}e^{x^2}\, dx$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

---

5. El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor LEITHOLD[21]

Resolver: $\int x^2 e^x dx$

Procedimiento

a. **Sea** $\boldsymbol{u = x^2 \to du = 2x\, dx}$
b. $\boldsymbol{dv} = e^x\, dx$, Integrando a ambos lados se tiene:

$$\int \boldsymbol{dv} = \int \boldsymbol{e^x\, dx \to v = e^x}$$

c. $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x\, e^x dx$

- $\int 2x\, e^x dx$, se efectúa por partes:
  - $Sea\ \boldsymbol{u = 2x \to du = 2\, dx}$

  Aplicando la fórmula de integración por partes:

[21] LEITHOLD, Louis. El Cálculo con Geometría Analítica. 6 ed. México: Harla, 1992. p. 691

$$\int 2x\, e^{x} dx = 2x\, e^{x} - \int e^{x}\, 2\, dx = 2x\, e^{x} - 2\, e^{x} + C$$

---

6. El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor PURCELL[22], resolver:

$$\int \boldsymbol{x^2 \,\mathrm{sen}\, x \;\, dx}$$

Procedimiento

a. **Sea** $\boldsymbol{u = x^2 \rightarrow du = 2x\, dx}$
b. $\boldsymbol{dv = \mathrm{sen}\, x \;\, dx \rightarrow v = -cos\, x}$
c. $\boldsymbol{\int x^2 \,\mathrm{sen}\, x \;\, dx = x^2(-cos\, x) - \int(-cos\, x)\, 2x\, dx \rightarrow}$

$$\boldsymbol{\int x^2 \,\mathrm{sen}\, x \;\, dx = -x^2\, cos\, x + 2\int x\, cos\, x\, dx} \;**$$

- $\boldsymbol{\int x\, cos\, x\, dx}$ Hay que efectuarla por partes:
- Sea $\boldsymbol{u = x \rightarrow du = dx}$ y $\boldsymbol{dv = cos\, x\, dx \rightarrow v = sen\, x}$
- Reemplazando en la fórmula de integración por partes: $\int udv = uv - \int vdu$

$$\boldsymbol{\int x\, cos\, x\, dx = x\; senx - \int senx\, dx = x\; senx - (-cosx)}$$

$$\boldsymbol{\int x\, cos\, x\, dx = x\; senx + cosx}$$

d. Reemplazando en:** se tiene:

$$\boldsymbol{\int x^2 \,\mathrm{sen}\, x \;\, dx = -x^2\, cos\, x + 2\int x\, cos\, x\, dx} \;**$$

---

[22] PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 404.

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \; dx = -x^2 \cos x + 2(x \, senx + cosx) + C$$

- Efectuando las operaciones indicadas:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \; dx = -x^2 \cos x + 2x \, senx + 2 \, cosx + C$$

7. El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor HAEUSSLER[23]

Resolver: $\int \frac{\ln|x|}{\sqrt{x}} dx$

Procedimiento

a. Sea $u = \ln|x| \to du = \frac{1}{x} \, dx$

b. $dv = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \, dx \to v = 2x^{\frac{1}{2}}$

c. $\int \frac{\ln|x|}{\sqrt{x}} dx = \ln|x| * 2x^{\frac{1}{2}} - \int 2x^{\frac{1}{2}} * \frac{1}{x} dx$ →Efectuando las operaciones indicadas:

Recuerde que: $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} = x^{\frac{1}{2}-1} = x^{-\frac{1}{2}}$, entonces

$$\int \frac{\ln|x|}{\sqrt{x}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} * \ln|x| - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} * \ln|x| - 2 - 4x^{\frac{1}{2}} + c$$

$$\int \frac{\ln|x|}{\sqrt{x}} dx = \; 2x^{\frac{1}{2}} * \ln|x| - 2 - 4\sqrt{x} + c$$

8. El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor PURCELL[24]

[23] HAEUSSLER. Ernest. F. Jr; RICHARD S. Paul. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. 8 ed. México: Prentice Hall, 1997. p. 798.

[24] PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 404.

Resolver:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \; dx$$

Procedimiento

a. Sea $u = senx \rightarrow du = cosx\, dx$
b. $dv = e^x dx = \rightarrow v = e^x$
c. $\int e^x \operatorname{sen} x \; dx = senx * e^x - \int e^x cosx\, dx$**
   - $\int e^x cosx\, dx$ Hay que efectuarla por partes:
- Sea $u = cosx \rightarrow du = -senx\, dx$ y $dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$
- Reemplazando en la fórmula de integración por partes: $\int udv = uv - \int vdu$

$$\int e^x cosx\, dx = cosx\ * e^x - \int e^x(-senx)\, dx$$

$$\int e^x cosx\, dx = \ e^x * cosx + \int e^x senx\, dx$$

a. Reemplazando en:** se tiene:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \; dx = senx * e^x - \left[e^x * cosx + \int e^x senx\, dx\right]$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x \; dx = \ e^x * senx - e^x * cosx - \int e^x \operatorname{sen} x \; dx$$

Nota: Para solucionar este ejercicio, hay que despejar la integral $\int e^x \operatorname{sen} x \; dx$

$$\int e^x \operatorname{sen} x \; dx + \int e^x \operatorname{sen} x \; dx = e^x * senx - e^x * cosx \rightarrow$$

$$2\int e^x \operatorname{sen} x \; dx = e^x * senx - e^x * cosx \rightarrow$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x \; dx = \frac{1}{2}(e^x * senx - e^x * cosx) \rightarrow$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x \; dx = \frac{1}{2}e^x * senx - \frac{1}{2}e^x * cosx + C$$

---

9. El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor HAEUSSLER[25]

Resolver: $\int x^2 e^{2x+1}\, dx$**

Procedimiento

a. Sea $u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx$
b. $dv = e^{2x+1}dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x+1}$
c. $\int x^2 e^{2x+1}\, dx = x^2 * \frac{1}{2}e^{2x+1} - \int \frac{1}{2}e^{2x+1}\, 2x\,dx$ Simplificando el 2, se tiene:

$$\int x^2 e^{2x+1}\, dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x+1} - \int e^{2x+1}\, x\,dx$$

- $\int e^{2x+1}\, x\,dx$ Hay que efectuarla por partes:
- Sea $u = x \rightarrow du = dx$ y $dv = e^{2x+1}dx \rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x+1}$
- Reemplazando en la fórmula de integración por partes: $\int udv = uv - \int vdu$

$$\int e^{2x+1}\, x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} * x - \int \frac{1}{2}e^{2x+1}\; dx$$

$$\int e^{2x+1}\, x\,dx = \frac{1}{2}x\, e^{2x+1} - \frac{1}{2} * \frac{1}{2}e^{2x+1} = \frac{1}{2}x\, e^{2x+1} - \frac{1}{4}e^{2x+1}$$

Reemplazando en: ** $\int x^2 e^{2x+1}\, dx$, se tiene:

---

[25] HAEUSSLER. Ernest. F. Jr; RICHARD S. Paul. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. 8 ed. México: Prentice Hall, 1997. p. 800.

$$\int x^2 e^{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\,x^2 * e^{2x+1} - \left(\frac{1}{2}x\,e^{2x+1} - \frac{1}{4}e^{2x+1}\right) + C$$

Eliminando el paréntesis:

$$\int x^2 e^{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\,x^2 * e^{2x+1} - \frac{1}{2}x\,e^{2x+1} + \frac{1}{4}e^{2x+1} + C$$

10. Resolver: $\int x^2\cos(2x)\,dx$**

Procedimiento

a. **Sea** $u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx$
b. $dv = cos(2x) \rightarrow v = \frac{1}{2}sen(2x)$
c. $\int x^2 cos(2x)\,dx = x^2 * sen(2x) - \int \frac{1}{2}sen(2x)\,2x\,dx$

- Simplificando el 2, se tiene:

$$\int x^2 cos(2x)\,dx = x^2 * sen(2x) - \int x\,sen(2x)\,x\,dx$$

- $\int sen(2x)\,x\,dx$ Hay que efectuarla por partes:
- Sea $u = x \rightarrow du = \ dx$ y $dv = sen(2x)dx \rightarrow v = -\frac{1}{2}cos(2x)$
- Reemplazando en la fórmula de integración por partes: $\int udv = uv - \int vdu$

$$\int x\,sen(2x)x\,dx = -\frac{1}{2}x\,cos(2x) - \int -\frac{1}{2}cos(2x)dx = -\frac{1}{2}x\,cos(2x) + \frac{1}{4}sen(2x)$$

Reemplazando en: ** $\int x^2\cos(2x)\,dx$**,** se tiene:

$$\int x^2\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}x^2 * sen(2x) - \left(-\frac{1}{2}x\,cos(2x) + \frac{1}{4}sen(2x)\right) + C$$

Eliminando el paréntesis:

$$\int x^2 \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}x^2 * sen(2x) + \frac{1}{2}x\cos(2x) - \frac{1}{4}sen(2x) + C$$

---

11. Resolver: $\int x^3 \ln x^2 \; dx$

Procedimiento

a. Aplicando las propiedades de los logaritmos, la integral también se puede expresar:

$$\int x^3 \ln x^2 \; dx = \int x^3 * 2\ln x \; dx = 2\int x^3 \ln x \; dx$$

b. Sea $u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

c. $dv = x^3 \rightarrow v = \frac{x^4}{4}$

d. Reemplazando en la fórmula de integración por partes: $\int udv = uv - \int vdu$

- $\int x^3 \ln x^2 \; dx = 2\left(\frac{x^4}{4} * \ln x - \int \frac{x^4}{4} * \frac{1}{x}dx\right)$, Simplificando x:
- $\int x^3 \ln x^2 \; dx = 2\left(\frac{x^4}{4} * \ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx\right)$
- $\int x^3 \ln x^2 \; dx = 2\left(\frac{x^4}{4} * \ln x - \frac{1}{16}x^4\right) + C$, Simplificando por 2:
- $\int x^3 \ln x^2 \; dx = \frac{x^4}{2} * \ln x - \frac{1}{8}x^4 + C$

---

12. Dada la región limitada por la curva: $y = f(x) = \ln x$ y el eje x entre

$x = 1$ y $x = e$. Determine:

a. El área de la región.

b. El volumen del sólido generado al rotar la región alrededor del eje x.

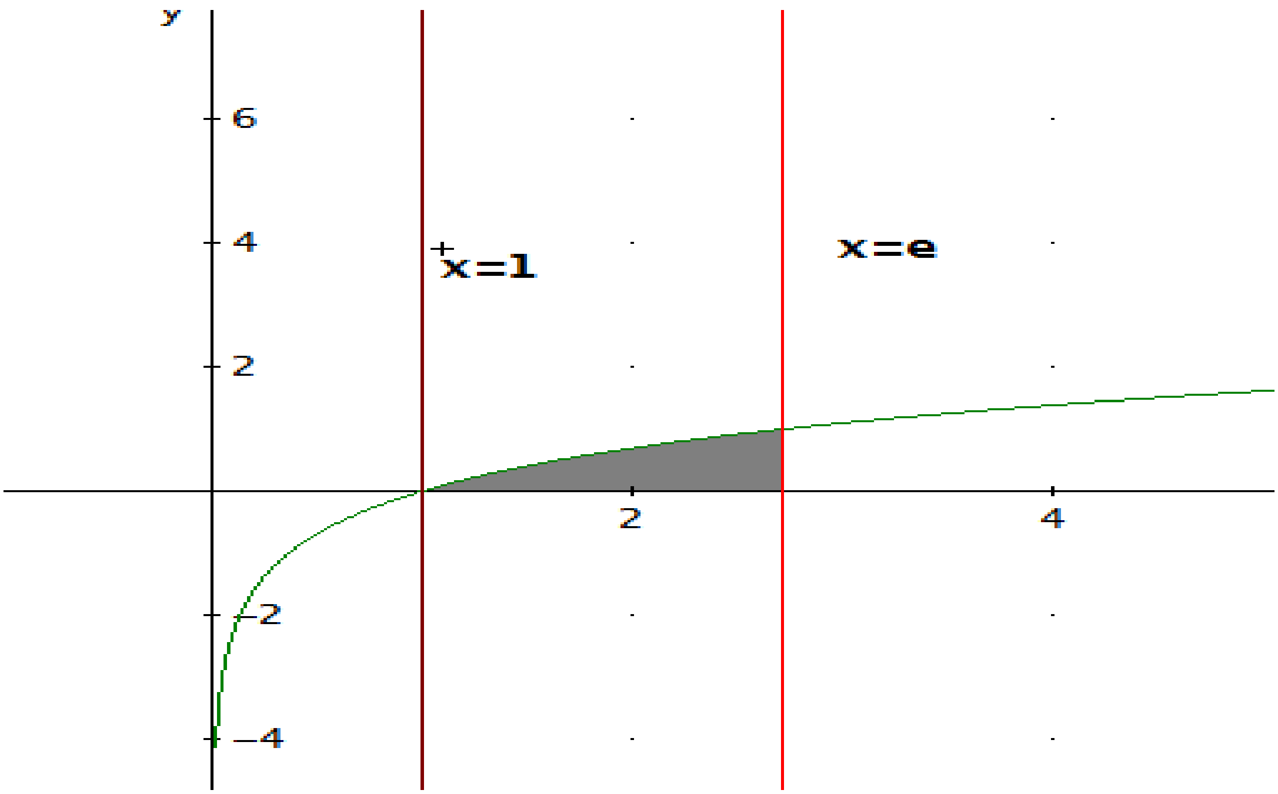
Procedimiento

a. Los puntos para la gráfica son los mostrados en la tabla.

Recuerde que para calcular $\ln x, \quad x > 0$

x	$y = f(x) = \ln x$	y
1	$\ln 1$	0
1.5	$\ln 1.5$	0.4
2	$\ln 2$	0.7
2.5	$\ln 2.5$	0.91
e	$\ln e$	1

➢ La gráfica de la región se muestra en la siguiente figura:



Grafica de $y = f(x) = \ln x$

b. Se calcula el área de la región:

$$A = \int_1^e \ln x \, dx$$

- Se hace $u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x}dx$
- $dv = dx \rightarrow v = x$

c. Reemplazando en: $\int udv = uv - \int vdu$

$$A = \int_1^e \ln x\, dx = x\ \ln x - \int x * \frac{1}{x}dx,$$ Simplificando x:

$$A = \int_1^e \ln x\, dx = x\ \ln x - \int dx = x\ \ln x - x|_1^e \rightarrow$$

$$A = \int_1^e \ln x\, dx = e * \ln e - e - [1 * \ln 1 - 1] \rightarrow$$

$$A = \int_1^e \ln x\, dx = e - e - \ 1 * \ln 1 + 1 \rightarrow$$

Recuerde que: $\ln e = 1, \ln 1 = 0$ realizando las operaciones indicadas:

$$A = \int_1^e \ln x\, dx = 1\ unidades\ cuadradas$$

d. Se calcula el volumen del sólido generado al rotar la región alrededor del eje x:

$$V = \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx$$

- Sea $u = (\ln x)^2 \rightarrow du = 2\ln x * \frac{1}{x}dx$
- $dv = dx \rightarrow v = x$
- Reemplazando:

$$V = \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx = \pi \left[x * (\ln x)^2 - \int x * 2\ln x * \frac{1}{x}dx\right]$$

$$V = \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx = \pi[x * (\ln x)^2 - 2x\ \ln x + 2x]|_1^e$$

$$V = \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx = \pi(e-2) unidades\ cuadradas.$$

Actividad: Realice los reemplazos y verifique la respuesta.

4.3 TEMA 2 INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES

Una expresión racional es una expresión de la forma:

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Cuando se efectúa una integral de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}$, pueden suceder tres casos:

A. Que la integral se pueda efectuar directamente por el **método de sustitución** o **cambio de variable** (esta forma ya se ha realizado en capítulos anteriores).

4.3.1 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Resolver: $\int \frac{2x+1}{x^2+x-7} dx$

Procedimiento

a. Sea $w = x^2 + x - 7 \rightarrow$

$$\frac{dw}{dx} = 2x + 1 \rightarrow dx = \frac{dw}{2x+1}$$

b. Reemplazando en $\int \frac{2x+1}{x^2+x-7} dx$, se tiene:

$\int \frac{2x+1}{w} * \frac{dw}{2x+1}$, Simplificando $2x+1$, se tiene:

$$\int \frac{dw}{w} = \ln|w| + C = \ln\left|x^2 + x - 7\right| + C$$

2. Resolver: $\int \frac{2x}{(x^2+10)^5}dx$

Procedimiento

a. $v = x^2 + 10 \rightarrow$

$$\frac{dv}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{dv}{2x}$$

b. Reemplazando en $\int \frac{2x}{(x^2+10)^5}dx$, se tiene:

$\int \frac{2x}{(v)^5} * \frac{dv}{2x}$, Simplificando $2x$:

$$\int v^{-5}dv = \frac{v^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{v^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4v^4} + C = -\frac{1}{4(x^2+10)^4} + C$$

B. Puede suceder también que haya que efectuar primero la división. $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Esta división es posible si **la fracción es impropia**, es decir, el grado del polinomio P(x) **es mayor** que le grado del polinomio Q(x). Este tipo de integral ya fue trabajado en unidades anteriores.

Actividad: Realizar un repaso del tema y de algunos ejercicios del tema.

C. La otra posibilidad sería descomponer, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ En una suma de **fracciones simples** llamada **fracciones parciales**. Esto es posible **cuando la fracción es propia**, es decir, el grado del polinomio P(x) es **menor** que el grado del polinomio Q(x).

Nota: Puede suceder que para efectuar una integral de este tipo, sea necesario combinar con el método anterior, es decir, hacer primero la división y luego descomponer en fracciones parciales.

Antes de desarrollar el método, se analizará un ejemplo de suma de fracciones, un proceso contrario al método que se va a desarrollar.

a. Efectuar la siguiente suma de fracciones:

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1}$$

Se halla el **mínimo común múltiplo (m.c.m.):** está dado por $(x-1) * (x+1)$

$$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{2*(x+1)+3*(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x+2+3x-3}{(x-1)(x+1)}=\frac{5x-1}{x^2-1}$$

b. Ahora, se pide determinar la integral del resultado anterior, es decir hay que obtener: $\int \frac{5x-1}{x^2-1}dx$

NOTA:
Esta integral no se puede efectuar par ninguno de los métodos conocidos hasta el momento, por lo tanto se debe descomponer la fracción en **una suma de fracciones** más simples y así poder determinar la integral de una expresión equivalente.

$$\int \frac{5x-1}{x^2-1}dx=\int\left[\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}\right]dx=\int\frac{2}{x-1}dx+\int\frac{3}{x+1}dx$$

$$\int \frac{5x-1}{x^2-1}dx=2\ln|x-1|+3\ln|x+1|+C$$

El ejercicio anterior se realizó directamente porque se conocía el resultado de las fracciones parciales, a continuación se explicará el método para descomponer una fracción en fracciones parciales.

4.3.2 MÉTODO PARA DESCOMPONER UNA FRACCIÓN EN FRACCIONES PARCIALES.

Para descomponer una expresión $\frac{P(x)}{Q(x)}$, en **fracciones parciales**, depende de la naturaleza del polinomio $Q(x)$ y se debe cumplir además que **el grado** del polinomio $P(x)$ debe ser **menor** que el grado del polinomio $Q(x)$, se presentan cuatro casos.

CASO1: Cuando el polinomio $Q(x)$ se puede factorizar como un producto de factores lineales distintos:

$$Q(x)=(x-a)*(x-b)*(x-c)$$

Entonces la fracción se puede escribir como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\cdots$$

4.3.3 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Resolver: $\int \frac{5x-1}{x^2-1} dx$

Procedimiento

a. Como no se puede efectuar esta integral directamente, se descompone la fracción en fracciones parciales:
   - Se factoriza $Q(x)$, si no está factorizado:

$$Q(x) = x^2 - 1 = (x+1) * (x-1)$$

   - Entonces: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5x-1}{(x+1)*(x-1)}$

b. Se escribe la fracción como una suma de fracciones, utilizando todos los factores de $Q(x)$ y asignando letras mayúsculas en el numerador (A, B, C, …tantos factores haya en el denominador)**:**

$$\frac{5x-1}{(x+1)*(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

Nota: Se encuentran los valores A y B

c. Se efectúa la suma indicada:

$$\frac{5x-1}{(x+1)*(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A*(x-1)+B*(x+1)}{(x+1)*(x-1)}$$

   - Para eliminar los denominadores se multiplica toda la expresión por el m.c.m. de los denominadores, esto es:

$$\frac{5x-1}{(x+1)*(x-1)} * (x+1)*(x-1) = \frac{A*(x-1)+B*(x+1)}{(x+1)*(x-1)} * (x+1)*(x-1)$$

   - Simplificando queda:

$$5x - 1 = A*(x-1) + B*(x+1)$$

d. Como los denominadores son iguales, también lo son los numeradores (los denominadores desaparecen). Igualando los numeradores, resulta una identidad:

$$5x - 1 = A*(x-1) + B*(x+1)$$

e. Se asignan los valores apropiados a x, se reemplazan en la identidad; de esta manera se halla el valor de cada constante:

- Si $x = 1 \rightarrow 5(1) - 1 = A(1-1) + B(1+1) \rightarrow 4 = 2B \rightarrow B = 2$
- Si $x = -1 \rightarrow 5(-1) - 1 = A(-1-1) + B(1-1) \rightarrow -6 = -2A \rightarrow A = 3$

f. Reemplazando los valores obtenidos en el paso anterior en $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$ y efectuando la integral por alguno de los métodos conocidos:

$$\int \frac{5x-1}{(x+1)*(x-1)}dx = \int \frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-1}dx = 3\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + C$$

---

2. Resolver: $\int \frac{3x-1}{x^2-x-6}dx$

Procedimiento

a. Se factoriza el denominador:

$$\frac{3x-1}{x^2-x-6} = \frac{3x-1}{(x-3)*(x+2)}$$

b. Se remplaza en función de A y B (Son dos factores en el denominador):

$$\frac{3x-1}{(x-3)*(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} = \frac{A*(x+2) + B*(x-3)}{(x-3)*(x+2)}$$

c. Simplificando: $(x-3)*(x+2)$, se tiene que:

$$3x - 1 = A*(x+2) + B*(x-3)$$

d. Se asignan los valores apropiados a x, se reemplazan en la identidad; de esta manera se halla el valor de cada constante:

- Si $x = -2 \rightarrow 3(-2) + 1 = A(-2+2) + B(-2-3) \rightarrow -7 = -5B \rightarrow B = \frac{7}{5}$
- Si $x = 3 \rightarrow 3(3) - 1 = A(3+2) + B(3-3) \rightarrow 8 = 5A \rightarrow A = \frac{8}{5}$

e. Por lo tanto, solucionar: $\int \frac{3x-1}{x^2-x-6}dx$ es lo mismo que resolver:

$$\int \left(\frac{\frac{8}{5}}{x-3} + \frac{\frac{7}{5}}{x+2}\right)dx = \frac{8}{5}\int \frac{1}{x-3}dx + \frac{7}{5}\int \frac{1}{x+2}dx \rightarrow$$

$$\frac{8}{5}\int \frac{1}{x-3}dx + \frac{7}{5}\int \frac{1}{x+2}dx = \frac{8}{5}\ln|x-3| + \frac{7}{5}\ln|x+2| + C$$

---

3. El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor PURCELL[26], resolver:

$$\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}dx$$

Procedimiento

a. Se factoriza el denominador:

$$\frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} = \frac{5x+3}{x(x^2-2x-3)} = \frac{5x+3}{x*(x-3)*(x+1)}$$

b. Se remplaza en función de A, B y C (Son tres factores en el denominador):

$$\frac{5x+3}{x*(x-3)*(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1} \rightarrow$$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1} = \frac{A*(x-3)*(x+1) + B*x*(x+1) + C*x*(x-3)}{x*(x-3)*(x+1)}$$

c. Simplificando: $x * (x-3) * (x+2)$, se tiene que:

$$5x+3 = A*(x-3)*(x+1) + B*x*(x+1) + C*x*(x-3)$$

d. Se asignan los valores apropiados a x, se reemplazan en la identidad; de esta manera se halla el valor de cada constante:

- Si $x = 0 \rightarrow 5*0+3 = A(0-3)*(0+1) + B*0*(0+1) + C*0*(0-3) \rightarrow 3 = -3A \rightarrow$

$$A = \frac{-3}{3} \rightarrow A = -1$$

- Si $x = 3 \rightarrow 5(3)+3 = A(3-3)*(3+1) + B*3(3+1) + C*3*(3-3) \rightarrow$

---

26 PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 441

$$18 = 12B \rightarrow B = \frac{18}{12} \rightarrow B = \frac{3}{2}$$

- $x = -1 \rightarrow 5 * (-1) + 3 = A(-1-3) * (-1+1) + B * (-1) * (-1+1) + C * (-1) * (-1-3)$

$$-2 = 4C \rightarrow C = \frac{-2}{4} \rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

- Por lo tanto, solucionar:

$\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} dx$ Es lo mismo que resolver: $\int \left(\frac{-1}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x-3} \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} \right)$

$$\int \left(\frac{-1}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x-3} \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} \right) = -\int \frac{1}{x} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-3} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx \rightarrow$$

$$-\int \frac{1}{x} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-3} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx = -\ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x-3| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$$

CASO 2: Cuando $Q(x)$ se puede factorizar como un **producto de factores lineales repetidos**:

Si $Q(x) = (x-a)^n;$ entonces:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)^3} + \cdots$$

Nota: El procedimiento para hallar las constantes A, B y C es similar al descrito en el caso anterior.

4.3.4 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Resolver: $\int \frac{2x+5}{x^2+6x+9} dx$

Procedimiento

a. Se factoriza el denominador:

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3) * (x+3) = (x+3)^2$$

b. Se remplaza en función de A y B (Son dos factores en el denominador):

$\frac{2x+5}{x^2+6x+9} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2}$, Efectuando la suma de fracciones indicada:

$$\frac{2x+5}{x^2+6x+9} = \frac{A*(x+3)+B}{(x+3)^2}$$

c. Igualando los numeradores queda:

$$2x + 5 = A*(x+3) + B$$

d. Se asignan los valores apropiados a x, se reemplazan en la identidad; de esta manera se halla el valor de cada constante:

Si $x = -3 \rightarrow 2*(-3) + 5 = A*(-3+3) + B \rightarrow B = -1$

- Se reemplaza el valor de B y se da otro valor a x:

Si $x = 0 \rightarrow 2*(0) + 5 = A*(0+3) - 1 \rightarrow 5 = 3A - 1 \rightarrow 3A = 5 + 1 \rightarrow A = \frac{6}{3} \rightarrow A = 2$

- Por lo tanto:

$$\frac{2x+5}{x^2+6x+9} = \frac{2}{x+3} - \frac{1}{(x+3)^2}$$

- Por lo tanto, solucionar:

$\int \frac{2x+5}{x^2+6x+9} dx$ Es lo mismo que resolver: $\int \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{(x-3)^2}\right)$

$$\int \frac{2x+5}{x^2+6x+9} dx = \int \frac{2}{x+3} dx - \int \frac{1}{(x+3)^2} dx = 2\ln|x+3| + \frac{1}{x+3} + C$$

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

$$\int \frac{1}{(x+3)^2}dx = \int \frac{1}{u^2}du = \int u^{-2}du = \frac{u^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{u}$$

Reemplazando: $\int \frac{1}{(x+3)^2}dx = -\frac{1}{x+3}$

2. Resolver:

$$\int \frac{3x^2 - 8x + 13}{x^3 + x^2 - 5x + 3}dx$$

Procedimiento

Actividad:

a. Se debe comprobar que:

$$\int \frac{3x^2 - 8x + 13}{x^3 + x^2 - 5x + 3}dx = \int \frac{3x^2 - 8x + 13}{(x+3) * (x-1)^2}dx$$

Además que: $A = 4,\ B = -1,\ C = 2$

b. Se debe terminar el ejercicio hasta resolver las integrales resultantes, justificando cada uno de los procesos realizados y confrontándolo con el tutor.

---

1. Resolver: $\int \frac{x}{x^2-6x+9}dx$

Además que: $A = 1,\ B = 3$

Actividad: Se realizar el ejercicio hasta resolver las integrales resultantes, justificando cada uno de los procesos realizados y confrontándolo con el tutor.

2. Resolver: $\int \frac{2x^2-11x+18}{x^2-6x+9}dx$

Actividad: Se realizar el ejercicio hasta resolver las integrales resultantes, justificando cada uno de los procesos realizados y confrontándolo con el tutor.

CASO 3: Cuando $Q(x)$ se puede factorizar como un **producto de factores cuadráticos irreducibles** distintos:

$$Q(x) = (\ ax^2 + bx + c) * (dx^2 + ex + f) * (gx^2hx + i) * \ldots$$

Entonces $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se puede descomponer en:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} + \frac{Cx + D}{dx^2 + ex + f} + \frac{Ex + F}{gx^2hx + i} + \cdots$$

CASO 4: Cuando $Q(x)$ se puede factorizar como un producto de factores cuadráticos repetidos:

$$Q(x) = (ax^2 + bx + c)^n$$

Entonces:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} + \frac{Cx + D}{(ax^2 + bx + c)^2} + \frac{Ex + F}{(ax^2 + bx + c)^3} + \cdots$$

4.3.5 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor HEUSSLR[27]

[27] HAEUSSLER. Ernest. F. Jr; RICHARD S. Paul. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. 8 ed. México: Prentice Hall, 1997. p. 806.

Resolver: $\int \frac{-2x-4}{x^3+x^2+x}dx$

Procedimiento

d Se factoriza el denominador:

$$x*(x^2+x+1)$$

- Los factores corresponden: a **un factor lineal** y a **un factor cuadrático,** entonces, la fracción queda:

$\frac{-2x-4}{x*(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$ *** → Realizando la suma de fracciones indicada:

$$\frac{-2x-4}{x*(x^2+x+1)} = \frac{A*(x^2+x+1)+(Bx+C)*x}{x*(x^2+x+1)}$$

- Eliminando los denominadores:

$$-2x-4 = A*(x^2+x+1)+(Bx+C)*x$$

e Se asignan los valores apropiados a x , se reemplazan en la identidad; de esta manera se halla el valor de cada constante:

- Si $x=0 \rightarrow -2(0)-4 = A[(0)^2+(0)+1]+[B(0)+C(0)]*1$

$$-4 = A \rightarrow A=-4$$

- Como el factor x^2+x+1 no da **cero** en los reales, se deben dar dos valores a x y al mismo tiempo reemplazar el valor $A=-4$ resultando un sistema de ecuaciones 2 X 2.

$Si\ x=1\ y\ A=-4 \rightarrow -2(1)-4 = -4[(1)^2+(1)+1]+[B(1)+C]*1$

$$-6 = -12+B+C \rightarrow B+C=6$$ **Ecuación 1**

$Si\ x=2\ y\ A=-4 \rightarrow -2(2)-4 = -4[(2)^2+(2)+1]+[B(2)+C]*2$

$$-8 = -28+4B+2C \rightarrow 4B+2C=20$$ **Ecuación 2**

f Queda planteado un sistema de ecuaciones 2x2 y la forma más práctica de efectuarlo es utilizando el sistema de determinantes:

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Traer a la memoria: para solucionar un sistema de ecuaciones lineales 2x2:

1. Se toman los coeficientes de cada una de las variables y se forma una matriz de orden 2.
2. Esta matriz se iguala al término independiente.
3. Para encontrar cada variable su lugar es ocupado por el término independiente y se coloca de denominador para cada una de ellas la matriz de orden 2 obtenida inicialmente,

esto es, en forma general:

Sean:

$$ax + by = m$$
$$cx + dy = n$$

- Se toman los coeficientes de x y de y, se forma la matriz determinante de orden **2:**

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

- Para hallar cada una de las variables, se reemplaza el lugar de la respectiva variable por el término independiente y se divide por la matriz original, así:

$$x = \frac{\begin{bmatrix} m & b \\ n & d \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{bmatrix} a & m \\ c & n \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$$

Nota: Para solucionar una matriz de orden **2**, se multiplican los elementos de **la diagonal principal** (De izquierda a derecha, de arriba hacia abajo) y se le resta el producto de **la diagonal secundaria** (De derecha a izquierda, de arriba hacia abajo), esto es:

$$x = \frac{(m*d)-(b*n)}{(a*d)-(b*c)}$$

$$y = \frac{(a*n)-(m*c)}{(a*d)-(b*c)}$$

- Se toman las ecuaciones planteadas:

$B + C = 6$ Ecuación 1

$4B + 2C = 20$ Ecuación 2

- Se forma la matriz determinante con los respectivos coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 20 \end{bmatrix}$$

- Se plantean las matrices para cada variable

$$B = \frac{\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 20 & 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}} = \frac{(6 * 2) - (1 * 20)}{(1 * 2) - (1 * 4)} = \frac{12 - 20}{2 - 4} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$B = 4$$

$$C = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}} = \frac{(1 * 20) - (6 * 4)}{(1 * 2) - (1 * 4)} = \frac{20 - 24}{2 - 4} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$C = 2$$

a. Reemplazando en *** e integrando a ambos lados se tiene que:

$$\int \frac{-2x - 4}{x^3 + x^2 + x} dx = \int \left[\frac{-4}{x} + \frac{4x + 2}{x^2 + x + 1}\right] dx = \int \frac{-4}{x} dx + \int \frac{4x + 2}{x^2 + x + 1} dx$$

- $\int \frac{4x+2}{x^2+x+1} dx$ se debe resolver por sustitución:

Sea: $u = x^2 + x + 1 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x + 1 \rightarrow dx = \frac{du}{2x+1}$

- Reemplazando en: $\int \frac{4x+2}{x^2+x+1} dx,$ se tiene:

$$\int \frac{4x+2}{x^2+x+1} dx = \int \frac{4x+2}{u} * \frac{du}{2x+1} = \int \frac{2*(2x+1)}{u} * \frac{du}{2x+1}$$ Simplificando $2x+1$:

$$\int \frac{4x+2}{x^2+x+1} dx = \int \frac{2}{u} du = 2\ln u = 2\ln|x^2+x+1|$$

b. Por lo tanto:

$$\int \frac{-2x-4}{x^3+x^2+x} dx = \int \frac{-4}{x} dx + \int \frac{4x+2}{x^2+x+1} dx = -4\ln|x| + 2\ln|x^2+x+1| + C$$

---

2. Resolver: $\int \frac{3x+1}{x^2-7x+10} dx$

Procedimiento

a. Factorizando el denominador:

$$x^2 - 7x + 10 = (x-5)*(x-2)$$

- Como los factores son lineales y diferentes, la fracción queda:

$$\frac{3x+1}{x^2-7x+10} = \frac{3x+1}{(x-5)*(x-2)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-2}$$

- Efectuando la suma de fracciones indicada:

$$\frac{3x+1}{(x-5)*(x-2)}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-2}=\frac{A*(x-2)+B*(x-5)}{(x-5)*(x-2)}$$

- Multiplicando por: $(x-5)*(x-2)$:

$$(x-5)*(x-2)\frac{3x+1}{(x-5)*(x-2)}=[(x-5)*(x-2)]*\left[\frac{A*(x-2)+B*(x-5)}{(x-5)*(x-2)}\right]$$

- Simplificando:

$$3x+1=\ A*(x-2)+B*(x-5)$$

b. Se asignan los valores apropiados a x, se reemplazan en la identidad; de esta manera se halla el valor de cada constante:

- Si $x=2\rightarrow 3*(2)+1=A*(2-2)+B*(2-5)\rightarrow$

$$7=A*(0)-3B\rightarrow -3B=7\rightarrow B=-\frac{7}{3}$$

- Si $x=5\rightarrow 3*(5)+1=A*(5-2)+B*(5-5)\rightarrow$

$$16=A*(3)+B*(0)\rightarrow 3A=16\rightarrow A=\frac{16}{3}$$

c. Reemplazando estos valores en: $\int\frac{3x+1}{x^2-7x+10}dx,$ se tiene:

$$\int\frac{3x+1}{x^2-7x+10}dx=\int\frac{\frac{16}{3}}{x-5}dx+\int\frac{-\frac{7}{3}}{x-2}dx=\frac{16}{3}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{7}{3}\int\frac{1}{x-5}dx$$

Nota: Las integrales: $\frac{16}{3}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{7}{3}\int\frac{1}{x-5}dx,$ se deben resolver por sustitución

Actividad: Realice por sustitución las integrales planteadas y confronte el resultado que se dará a continuación

$$\int \frac{3x+1}{x^2-7x+10}dx = \frac{16}{3}\int \frac{1}{x-2}dx - \frac{7}{3}\int \frac{1}{x-5}dx = \frac{16}{3}\ln(x-5) - \frac{7}{3}\ln(x-2) + C$$

3. Resolver: $\int \frac{4x^3+2x^2+8x+8}{x^4-16}dx$

Procedimiento

a. Se factoriza el denominador:

$$x^4 - 16 = (x^2+4) * (x^2-4) = (x^2+4) * (x+2) * (x-2)$$

- Se obtuvieron los siguientes factores:
  - (x^2+4)**:** Es un factor irreducible**.**
  - $(x+2) * (x-2)$: Son factores lineales diferentes.
- La fracción queda entonces:

$$\frac{4x^3+2x^2+8x+8}{x^4-16} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$$

- Multiplicando por: $(x^2+4) * (x+2) * (x-2)$ se anulan los denominadores
  - La expresión queda:

$4x^3 + 2x^2 + 8x + 8 =$

$(Ax+B) * (x-2) * (x+2) + C * (x^2+4) * (x+2) + D * (x^2+4) * (x-2)$

a. Se asignan los valores apropiados a x , se reemplazan en la identidad; de esta manera se halla el valor de cada constante:

- $x = 2 \rightarrow 4 * (2)^3 + 2 * (2)^2 + 8 * (2) + 8 =$

$(2A+B) * (2-2) * (2+2) + C * (2^2+4) * (2+2) + D * (2^2+4) * (2-2) =$

$(2A+B)*(0)*(2+2)+C*(2^2+4)*(2+2)+D*(2^2+4)*(0)=$

$4*(2)^3+2*(2)^2+8*(2)+8=\ C*(2^2+4)*(2+2)=$

$4*8+2*4+8*2+8=C*(4+4)*(2+2)\rightarrow 32+8+16+8=32C\rightarrow$

$$32C=64\rightarrow C=\frac{64}{32}\rightarrow C=2$$

- $x=-2\rightarrow 4*(-2)^3+2*(-2)^2+8*(-2)+8=$

$(-2A+B)*(-2+2)*(-2-2)+C*((-2)^2+4)*(-2+2)+D*((-2)^2+4)*(-2-2)=$

$(-2A+B)*(0)*(-4)+C*(4+4)*(0)+D*(2^2+4)*(-4)=$

$4*(-2)^3+2*(-2)^2+8*(-2)+8=D*(8)*(-4)\rightarrow -32+8+8-16=-32D$

$$-32=-32D\rightarrow D=\frac{-32}{-32}\rightarrow D=1$$

- Se reemplaza: $D=1,\ C=2,\ x=0$

$4(0)^3+2(0)^2+8(0)+8=[A(0)+B](0-2)(0+2)+2[0^2+4)(0+2)]+1[0^2+4)(0-2)]$

$$8=-4B+16-8\rightarrow 4B=16-8-8\rightarrow B=0$$

- Se reemplaza: $B=0, D=1,\ C=2,\ x=1$

$4(1)^3+2(1)^2+8(1)+8=[A(1)+0](1-2)(1+2)+2[1^2+4)(1+2)]+1[1^2+4)(1-2)]$

$$4+2+8+8=A(-1)(3)+2(5)(3)+1(5)(-1)\rightarrow$$

$22=-3A+30-5\rightarrow 3A=30-22-5\rightarrow 3A=3\rightarrow A=1$

c. Reemplazando en: $\int\frac{4x^3+2x^2+8x+8}{x^4-16}=\int\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2}$ se tiene que:

$$\int\frac{4x^3+2x^2+8x+8}{x^4-16}=\int\left[\frac{(1)x+0}{x^2+4}+\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+2}\right]dx\rightarrow$$

$$\int \frac{4x^3+2x^2+8x+8}{x^4-16} = \int \left[\frac{x}{x^2+4}+\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+2}\right] dx \rightarrow$$

$$\int \frac{4x^3+2x^2+8x+8}{x^4-16} = \frac{1}{2}\ln(x^2+4)+2\ln(x-2)+\ln(x+2)+C$$

---

4. Resolver: $\int \frac{3x^3+6x^2-27}{x^4-9x^2} dx$

Procedimiento

a. Factorizando el denominador:

$$x^4-9x^2 = x^2 * (x^2-9) = x^2 * (x-3) * (x+3)$$

- La fracción queda:

$$\frac{3x^3+6x^2-27}{x^4-9x^2} = \frac{3x^3+6x^2-27}{x^2 * (x-3) * (x+3)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-3}+\frac{D}{x+3}$$

- Multiplicando por: $x^2 * (x-3) * (x+3)$
- La identidad queda:

$$3x^3+6x^2-27 = Ax(x-3)(x+3)+B(x-3)(x+3)+Cx^2(x+3)+Dx^2(x-3)$$

$***$

b. Se asignan los valores apropiados a x , se reemplazan en la identidad; de esta manera se halla el valor de cada constante:

- $x = 0 \rightarrow$

$$3(0)^3+6(0)^2-27 = A(0)(0-3)(0+3)+B(0-3)(0+3)+C(0)^2(0+3)+D(0)^2(0-3)$$

$$-27 = B(0-3)(0+3) \rightarrow -9B = -27 \rightarrow$$

$$B = \frac{-27}{-9} \to \boldsymbol{B = 3}$$

- $x = 3$ Se anulan los términos en $A, B, D,$ por lo tanto:

$$3(3)^3 + 6(3)^2 - 27 = C * (3)^2 * (3+3) = 81 + 54 - 27 = 54\, C \to$$

$$C = \frac{108}{54} \to \boldsymbol{C = 2}$$

- $x = -3$ Se anulan los términos en $A, B, C,$ por lo tanto:

$$3(-3)^3 + 6(-3)^2 - 27 = D * (-3)^2(-3-3) \to$$

$$-81 + 54 - 27 = -54\, D \to -54\, D = 54 \to D = \frac{-54}{-54} \to \boldsymbol{D = 1}$$

- Se reemplaza: $B = 3, C = 2, D = 1\ con\ x = 1$ en ***

$$3(1)^3 + 6(1)^2 - 27 = A(1)(1-3)(1+3) + 3(1-3)(1+3) + 2(1)^2(1+3) + 1(1)^2(1-3) \to$$

$$3 + 6 - 27 = A(-2)(4) + 3(-2)(4) + 2(4) + 1(-2) \to$$

$$-18 = -8A - 24 + 8 - 2 \to 8A = 18 - 24 + 8 - 2 \to$$

$$8A = 0 \to \boldsymbol{A = 0}$$

c. Reemplazando estos valores en: $\int \frac{3x^3+6x^2-27}{x^4-9x^2} dx,$ se tiene:

$$\int \frac{3x^3 + 6x^2 - 27}{x^4 - 9x^2} dx = \int \left[\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{x+3}\right] dx \to$$

$$\int \frac{3x^3 + 6x^2 - 27}{x^4 - 9x^2} dx = \int \left[\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+3}\right] dx \to$$

$$\int \frac{3x^3 + 6x^2 - 27}{x^4 - 9x^2} dx = -\frac{3}{x} + 2\ln(x-3) + \ln(x+3) + C$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Utilizando integración por partes resuelva:

- $\int x^4 \ln x^2 dx$
- $\int x\sqrt{3x+8}\ dx$

2. Utilizando fracciones parciales resuelva las siguientes integrales:

- $\int \frac{5}{2x^2 - x - 10} dx$

$\int \frac{5x-1}{25x^2+70x+49} dx$

3. Utilizando integración por partes resuelva:

- $\int \left(x+e^{2x}\right)^2 dx$
- $\int x^4 \cos x dx$

4. Utilizando fracciones parciales resuelva:

- $\int \frac{8x^2+8x+9}{2x^3-5x^2-3x} dx$
- $\int \frac{47x^3-268x^2+51x-102}{5x^4-26x^3+20x^2-78x+15} dx$

5. Sea la región limitada por la curva: $y = 3xe^{x/3}$ entre $x = 0 \wedge x = 9$

a. Determine su área.
b. Determine el volumen cuando la región gira en torno al eje x.

6. Resuelva Las siguientes integrales

- $\int \left(x^3 - 2x\right)e^x dx$

- $\int 7x^2 \cos x dx$

- $\int \frac{19x^2+48}{x^3+16x} dx$

- $\int \cot^3(5x) dx$

- $\int \frac{7x-1}{25x^2+30x+9} dx$

- $\int \frac{\ln x}{x} dx$

- $\int \frac{1}{9x^3-4x} dx$

- $\int \frac{2x-7}{x^2+x-20} dx$

- $\int \frac{3x-1}{x^3+x} dx$

- $\int x^6 \ln x^2 \, dx$

- $\int x^4 sen(9x)\, dx$

- $\int \frac{x^3}{\sqrt{49-x^2}}\, dx$

4.3.6 RELACIÓN CON OTROS TEMAS

Con los conceptos de antiderivada ó integración y las técnicas básicas de integración, se alcanza una interrelación con otras áreas del conocimiento, que permiten abordar temáticas generales del saber específico en el campo profesional.

5 PISTAS DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta: Cuando se dice $\boldsymbol{y(2)=5}$ significa que

$$\boldsymbol{y = 5\ cuando\quad x = 2}$$

Tenga presente: la gravedad es de **9,8 m/s²**. Quiere decir $\boldsymbol{a(t) = -9.8}$ **m/s²**.

Traer a la memoria: Otra forma de determinar la altura máxima sería determinando los máximos y mínimos de la función $\boldsymbol{s(t) = -4.9t^2 + 15t + 310}$ utilizando los conceptos de primera y segunda derivada.

Tener en cuenta: Para solucionar la ecuación de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0,}$ se utiliza la fórmula general: $\boldsymbol{x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

Tenga presente: Cuando hay **una sola expresión trigonométrica**, para hacer el cambio de variable se toma lo que está **dentro de la expresión trigonométrica**, es decir **el ángulo**

Traer a la memoria: Cuando hay **dos o más expresiones trigonométricas** en la misma integral, el cambio de variable se hace tomando **una de las expresiones trigonométricas**

Tener en cuenta: $\boldsymbol{\frac{cos\ x}{sen\ x} = cot\ x}$

Traer a la memoria

$$\int \boldsymbol{Cot\ u\ du} = \mathbf{ln}|\boldsymbol{sen\ u}| + \boldsymbol{C}$$

Tener en cuenta: El área de un rectángulo es igual a base por altura.

- El área total será igual a la suma de cada área, es decir:

$$\boldsymbol{A_T = A_1 + A_2 + A_{3+}A_4 + \cdots A_9}$$

Tener en cuenta: Un polinomio de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c,}$ se factoriza multiplicando y dividiendo por el coeficiente de $\boldsymbol{x^2\ (o\ sea\ \ por\ a).}$

Tenga presente: $\boldsymbol{\int \frac{1}{(x+3)^2} dx = \int \frac{1}{u^2} du = \int u^{-2} du = \frac{u^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{u}}$

Reemplazando: $\boldsymbol{\int \frac{1}{(x+3)^2} dx = -\frac{1}{x+3}}$

Traer a la memoria: para solucionar un sistema de ecuaciones lineales 2x2:

1. Se toman los coeficientes de cada una de las variables y se forma una matriz de orden 2.

2. Esta matriz se iguala al término independiente.

3. Para encontrar cada variable su lugar es ocupado por el término independiente y se coloca de denominador para cada una de ellas la matriz de orden 2 obtenida inicialmente,

Esto es, en forma general:

Sean:

$$ax + by = m$$

$$cx + dy = n$$

- Se toman los coeficientes de x y de y, se forma la matriz determinante de orden **2:**

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

- Para hallar cada una de las variables, se reemplaza el lugar de la respectiva variable por el término independiente y se divide por la matriz original, así:

$$x = \frac{\begin{bmatrix} m & b \\ n & d \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{bmatrix} a & m \\ c & n \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$$

Nota: Para solucionar una matriz de orden **2**, se multiplican los elementos de **la diagonal principal** (De izquierda a derecha, de arriba hacia abajo) y se le resta el producto de **la diagonal secundaria** (De derecha a izquierda, de arriba hacia abajo), esto es:

$$x = \frac{(m*d)-(b*n)}{(a*d)-(b*c)}$$

$$y = \frac{(a*n)-(m*c)}{(a*d)-(b*c)}$$

6 BIBLIOGRAFÍA

ARANDA, E., URENA, F. **Problemas de Cálculo en una variable**. 2008. (compra on-line a través de la página www.bubok.es)

DÁVILA, Antonio; NAVARRO, Pedro; CARVAJAL, José. Introducción al Cálculo. 1 ed. Caracas: Mc Graw Hill, 1966.

DOWLING, Edward T. Cálculo para Administración, Economía y Ciencias Sociales. 1 ed. México: Mc Graw Hill, 1966.

Estela, M.R.; Saà, J; "Cálculo con soporte interactivo en Moodle"; Ed. Pearson-Prentice Hall; Madrid, 2008.

GARCÍA, A., LÓPEZ, A., RODRIGUEZ, G., ROMERO, S., DE LA VILLA, A. **Cálculo II**. Ed. Clagsa, 2002.

HAEUSSLER. Ernest. F. Jr; RICHARD S. Paul. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. 8 ed. México: Prentice Hall, 1997.

HOFFMANN, Laurence D; BRADLEY, Gerald L. Cálculo aplicado a Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales. 5 ed. Bogotá: Mc Graw Hill.

LEITHOLD, Louis. El Cálculo con geometría analítica. 7a edición. México: Oxford University, 2003.

PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993.

________Cálculo diferencial e integral. Novena edición. México: Prentice Hall Hispanoaméricana, 2007.

SOLER FAJARDO, Francisco; NUÑEZ, Reinaldo; ARANDA SILVA, Moisés. Fundamentos de Cálculo con aplicaciones a ciencias Económicas y Administrativas. 2 ed. Bogotá: Ecoe ediciones, 2002.

STEWART, James. Cálculo conceptos y contexto. 1 ed. México: International Thomson Editores, 1999.

_______Cálculo diferencial e integral. Segunda edición. Bogotá: International Thompson editores, 2007.

________Pre cálculo. 3 ed. México: International Thompson editores, 2001.

Fuentes digitales o electrónicas

http://www.matematicasbachiller.com/temario/calculin/tema_01/indice.html

Fecha Enero de 2010

http://www.matematicasbachiller.com/temario/calculin/index.html

Fecha Enero de 2010

http://video.google.com.co/videosearch?sourceid=navclient&hl=es&rlz=1T4WZPC_esCO342CO345&q=calculo+integral&um=1&ie=UTF-8&ei=5oNXS7D-Asi0tgfcwdCoBA&sa=X&oi=video_result_group&ct=title&resnum=4&ved=0CB0QqwQwAw#

Fecha Enero de 2010

http://www.aulafacil.com/matematicas-integrales/curso/Temario.htm

Fecha Enero de 2010

http://apuntes.rincondelvago.com/calculo-integral.html

Fecha Enero de 2010

http://www.monografias.com/trabajos73/calculo-integral/calculo-integral.shtml

Fecha Enero de 2010

http://elcentro.uniandes.edu.co/cr/mate/calculo/integral.htm

Fecha Enero de 2010

http://www.xtec.cat/~jlagares/integral.esp/integral.htm#E1

Fecha Enero de 2010

http://personal.redestb.es/javfuetub/analisis/calculo/integral.htm

Fecha Enero 2010

http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/CALCULODIFERENCIAL/curso-elsie/integral_indefinida/html/index.html

Fecha Enero 2010

http://es.wikibooks.org/wiki/C%C3%A1lculo_en_una_variable/C%C3%A1lculo_integral/T%C3%A9cnicas_de_integraci%C3%B3n

Fecha Enero de 2010

http://www.matematicasbachiller.com/videos/cintegral/ind_int01.htm#1

Fecha Enero de 2010

http://www.matematicasypoesia.com.es/ProbIntegral/ProbCalIntPreg.htm

Fecha Enero de 2010

http://www.biopsychology.org/apuntes/calculo/calculo3.htm

Fecha Enero de 2010

http://books.google.com.co/books?id=wwD5_lve6f4C&pg=PA427&lpg=PA427&dq=calculo+integral&source=bl&ots=Cf95_WqoYa&sig=khiNK6ESgLwRUReZOK6v1p32Uwk&hl=es&ei=H41XS4PRGs2PtgfFvcyqBA&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=6&ved=0CCYQ6AEwBTgy#v=onepage&q=calculo%20integral&f=false

Fecha Enero de 2010

http://books.google.com.co/books?id=YFXiagjvmDYC&printsec=frontcover&dq=calculo+integral&ei=B45XS_ydH6rGywSHuejWDw&cd=7#v=onepage&q=&f=false

Fecha Enero de 2010

http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/CALCULODIFERENCIAL/index.htm

Fecha Enero de 2010

http://www.scribd.com/doc/5052129/CALCULO-DIFERENCIAL-E-INTEGRAL-II-FAS1-LA-INTEGRAL-DEFINIDA-

Fecha Enero de 2010

http://huitoto.udea.edu.co/Matematicas/intro.html

Fecha enero de 2010

http://www.brujula.net/wiki/Funci%C3%B3n_matem%C3%A1tica.html

Fecha enero de 2010.

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/20/matematicas-20.html

Fecha enero de 2010.

http://www.ejercitando.com.ar/probmate/inecua01.htm

Fecha enero de 2010.

http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html

Fecha enero de 2010.

http://www.monografias.com/trabajos10/historix/historix.shtml

Fecha enero de 2010.

http://www.matematicasbachiller.com/videos/cintegral/index.htm

Fecha febrero de 2010.

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/UnidadesDidacticas/03-2-u-graficas.html#ACTI_3

Fecha enero de 2010.

http://math.uprm.edu/~santiago/Calculus_II/HOMEWORK/HOMEWORK_HTML/HTML_Homework_Integration_Applications_Volume/index.html

Fecha febrero de 2010.

http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/CALCULODIFERENCIAL/curso-elsie/aplicacionesintegral/html/node6.html

Fecha febrero de 2010.