UNIREMINGTON®
CORPORACIÓN UNIVERSITARIA REMINGTON
RES. 2661 MEN JUNIO 21 DE 1996

ESTADÍSTICA PROBABILÍSTICA

TRANSVERSAL

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Vicerrectoría de Educación a Distancia y virtual

2016

AUTOR

PABLO EMILIO BOTERO TOBÓN
pbotero@remington.edu.co

Nota: el autor certificó (de manera verbal o escrita) No haber incurrido en fraude científico, plagio o vicios de autoría; en caso contrario eximió de toda responsabilidad a la Corporación Universitaria Remington, y se declaró como el único responsable.

RESPONSABLES

Jorge Mauricio Sepúlveda Castaño
Decano de la Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería
jsepulveda@uniremington.edu.co

Eduardo Alfredo Castillo Builes
Vicerrector modalidad distancia y virtual
ecastillo@uniremington.edu.co

Francisco Javier Álvarez Gómez
Coordinador CUR-Virtual
falvarez@uniremington.edu.co

GRUPO DE APOYO

Personal de la Unidad CUR-Virtual
EDICIÓN Y MONTAJE

Primera versión. Febrero de 2011.
Segunda versión. Marzo de 2012
Tercera versión. noviembre de 2015
Cuarta versión 2016

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

1 MAPA DE LA ASIGNATURA

ESTADÍSTICA PROBABILÍSTICA

PROPÓSITO GENERAL DEL MÓDULO

Lo que se busca con la aplicación de la Estadística Probabilística lineal es resolver problemas comunes y a la vez muy variados de la empresa en donde en general se tienen necesidades por satisfacer con cierto número de recursos limitados o escasos y con el objetivo de lograrlo en forma óptima. Esto significa la búsqueda de un valor máximo cuando se trata de beneficios; o bien la búsqueda de un mínimo cuando se trata de esfuerzos a desarrollar.

OBJETIVO GENERAL

Aplicar técnicas de análisis estadístico probabilístico en la solución de problemas, partiendo de un conjunto de datos y mediciones, para la obtención de conclusiones que permitan la proyección de la estadística hacia la solución de situaciones problémicas en las diferentes áreas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

UNIDAD 1

Realizar correctamente una distribución de probabilidades, diferenciando variables discretas y variables continuas.

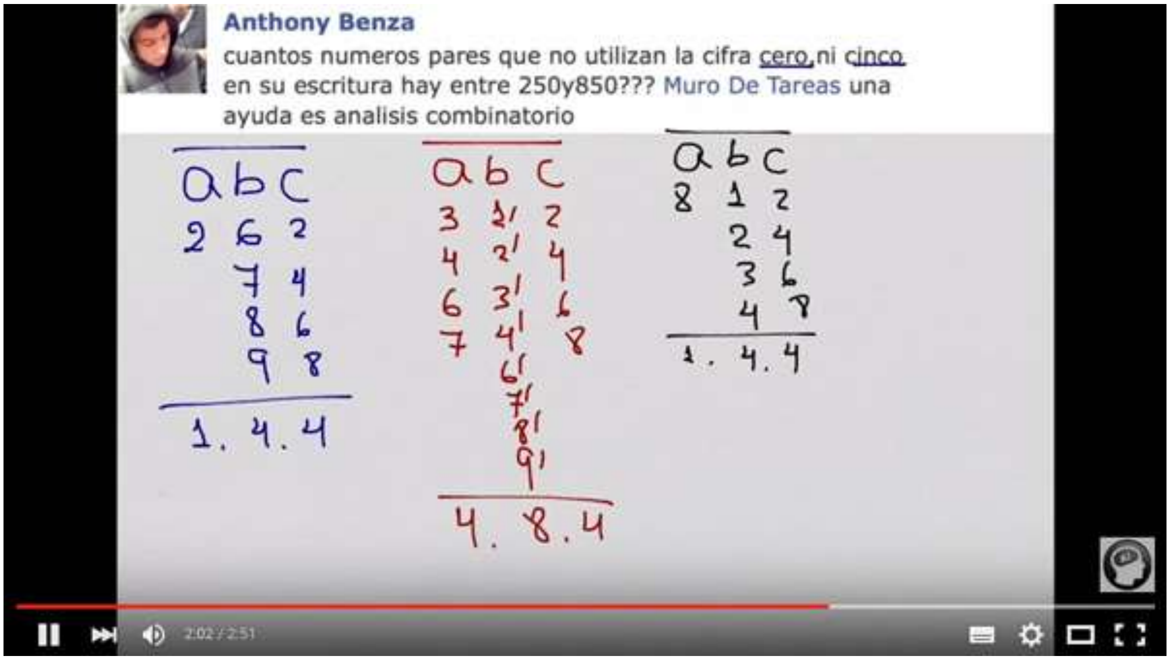
UNIDAD 2

Distinguir las distribuciones de las diferentes probabilidades.

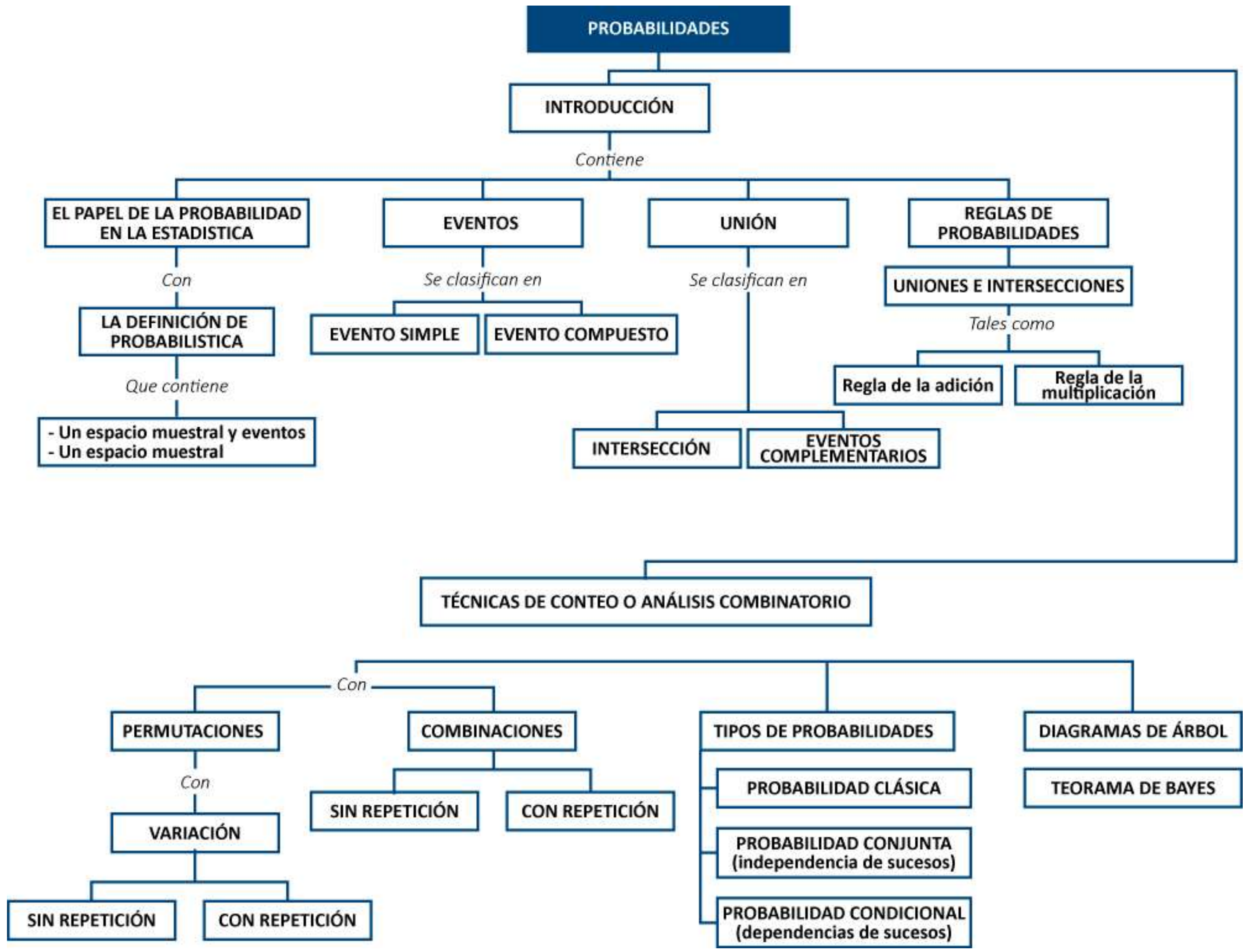
UNIDAD 3

Construir modelos de estadística inferencial para la solución de problemas.

2 UNIDAD 1 PROBABILIDAD



Análisis Combinatorio, conteo de números [Enlace]()



2.1.1 DEFINICIÓN CONCEPTOS BÁSICOS

- **Probabilidad:** La **probabilidad** es un método por el cual se obtiene la frecuencia de un acontecimiento determinado mediante la realización de un experimento aleatorio, del que se conocen todos los resultados posibles, bajo condiciones *suficientemente* estables.

- **Evento simple:** Un **suceso** o **evento simple** es un subconjunto del espacio muestral que contiene un único elemento.

- **Evento compuesto**: Evento que incluye dos o más eventos independientes.

- **Regla de adición:** La regla de la adición o regla de la suma establece que la probabilidad de ocurrencia de cualquier evento en particular es igual a la suma de las probabilidades individuales, si es que los eventos son mutuamente excluyentes, es decir, que dos no pueden ocurrir al mismo tiempo.

- **Regla de Multiplicación**: La regla de la multiplicación establece que la probabilidad de ocurrencia de dos o más eventos estadísticamente independientes es igual al producto de sus probabilidades individuales.

- **Permutación:** En matemáticas, una **permutación** es la variación del orden o de la disposición de los elementos de un conjunto.

- **Combinación:** Técnica de conteo que permite calcular el número de arreglos que pueden realizarse con todos o con una parte de los elementos de un solo conjunto, en donde no interesa el orden de los elementos.

Definiciones tomadas de: Wikipedia, la enciclopedia libre

es.wikipedia.org/wiki

2.1.2 OBJETIVO GENERAL

Realizar correctamente una distribución de probabilidades, diferenciando variables discretas y variables continuas.

2.1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Analizar experimentos aleatorios de una o más variables, es decir, la probabilidad de ocurrencia de un proceso.

Determinar a través del análisis combinatorio, como método rápido y eficaz, el conteo del número de maneras o formas en que pueden ordenarse o seleccionarse elementos de un conjunto, con elementos tales como: La Permutación, La Variación y La Combinación

Tema 1 Introducción a las Probabilidades

La **estadística probabilística** es una de las subdivisiones de la matemática, que consiste en el estudio de **experimentos aleatorios**, del que se conocen **todos los resultados posibles** bajo condiciones **suficientemente estables** de una o más variables, por medio del cual se obtienen **las frecuencias** de un acontecimiento es decir, la **probabilidad de ocurrencia** de un suceso. Para que un experimento sea aleatorio, se deben dar dos hechos fundamentales:

- Se debe tener **un espacio muestral**, en la cual se encuentran los diferentes resultados que pueden suceder, y
- Que los **resultados de repeticiones no tienen** un comportamiento **igual** o **predecible**.

La Probabilística se utiliza extensamente en muchas áreas del conocimiento para sacar conclusiones sobre **la probabilidad discreta** de **sucesos potenciales** y la mecánica subyacente discreta de **sistemas complejos**, por lo tanto, se puede definir como:

La rama de las matemáticas que: **estudia**, **mide** o **determina** los **experimentos** o **fenómenos aleatorios**.

Otros conceptos considerados en la probabilística son los siguientes:

- **La frecuencia relativa** con que se presenta un evento se puede llegar a **repetir** una cierta cantidad de veces, y el otro es que

- **La probabilidad inductiva**, es el **grado de credibilidad** a una proporción que describe un evento dependiendo de **la evidencia** de los hechos.

2.1.4 EL PAPEL DE LA PROBABILIDAD EN LA ESTADÍSTICA

A continuación se determinarán los diferentes conceptos, métodos y análisis de la estadística por medio de la probabilística, fundamentales para todo individuo a la hora de observar el comportamiento del objeto de estudio.

- **Definición de Probabilística**

La probabilidad mide **la frecuencia** con la que ocurre un resultado en un experimento bajo condiciones suficientemente estables, para sacar conclusiones sobre **la probabilidad** de **sucesos potenciales** y la mecánica subyacente de sistemas complejos, en otras palabras es la posibilidad de ocurrencia de un suceso.

- **Espacio muestral y eventos**

Antes de entrar a definir el Espacio muestral, se definirá lo que es un fenómeno o experimento aleatorio:

- **Fenómeno o experimento aleatorio**

Un experimento es el resultado o relación de un conjunto de condiciones denominados fenómenos o experimentos.

Existen dos tipos de experimentos:

FENÓMENOS	EJEMPLOS
Determinísticos	Los movimientos de los planetas, las leyes, normas, decretos, entre otros.
Aleatorios	Los juegos de azar.

- **Espacio Muestral**

Es el conjunto de todos los resultados posibles de una experiencia aleatoria. Se puede representar con: $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{o}$ $\boldsymbol{\Omega}$.

Cada elemento de $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{o}$ $\boldsymbol{\Omega}$ se denomina **punto muestral** o **evento simple** (para nuestro proceso se utilizará la letra griega $\boldsymbol{\Omega}$).

Por ejemplo:

1. El Espacio muestral de una moneda está dado por:

$$\boldsymbol{\Omega} = \{\text{Cara, sello}\} \rightarrow \boldsymbol{\Omega} = \{\mathbf{c}, \mathbf{s}\}$$

2. El Espacio muestral de un dado está dado por:

$$\boldsymbol{\Omega} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Nota: Se define como un **Suceso Aleatorio (Evento Simple)** a cualquier **subconjunto** del Espacio Muestral, se representa con una letra mayúscula, por ejemplo que:

- Al lanzar la moneda caiga **cara** (suceso aleatorio), esto es:

$\{\mathbf{c}\} \subset \boldsymbol{\Omega}$: **C** es subconjunto del espacio muestral $\boldsymbol{\Omega}$

- Al lanzar el dado caiga **sello** (suceso aleatorio), esto es:

$\{\mathbf{s}\} \subset \boldsymbol{\Omega}$: **s** es subconjunto del espacio muestral $\boldsymbol{\Omega}$

- Al lanzar la moneda caiga **el número dos** (suceso aleatorio), esto es:

$\{\mathbf{2}\} \subset \boldsymbol{\Omega}$: **2** es subconjunto del espacio muestral $\boldsymbol{\Omega}$

- Al lanzar la moneda caiga **el número 5** (suceso aleatorio), esto es:

$\{\mathbf{5}\} \subset \boldsymbol{\Omega}$: **5** es subconjunto del espacio muestral $\boldsymbol{\Omega}$

A continuación se presenta un ejercicio de Espacio Muestral, tomado de:

Espacio muestral

www.ditutor.com/probabilidad/**espacio_muestral**.html

Una bolsa contiene bolas blancas y negras, se extraen sucesivamente tres bolas, entonces se da el siguiente evento:

$$\mathbf{\Omega = \{(b,b,b),(b,b,n),(b,n,b),(n,b,b),(b,n,n),(n,b,n),(n,n,b),(n,n,n)\}}$$

Se piden tres sucesos aleatorios:

a. **El suceso** $\mathbf{A = \{\ Extraer\ tres\ bolas\ del\ mismo\ color\}}$

$$\mathbf{A = \{(b,b,b),(n,n,n)\}}$$

$$\mathbf{A \subset\ \Omega}: \boldsymbol{A\ es\ subconjunto\ de\ \Omega.}$$

---

b. **El suceso** $\mathbf{B = \{\ Extraer\ al\ menos\ una\ bola\ blanca\}}$

$$\mathbf{B = \{(b,b,b),(b,b,n),(b,n,b),(n,b,b),(b,n,n),(n,b,n),(n,n,b)\}}$$

$$\mathbf{B \subset\ \Omega}: \boldsymbol{Bes\ subconjunto\ de\ \Omega}$$

---

c. **El suceso** $\mathbf{C = \{\ Extraer\ una\ sola\ bola\ negra\}}$

$$\mathbf{C = \{(b,b,n),(b,n,b),(n,b,b)\}}$$

$$\mathbf{C \subset\ \Omega}: \boldsymbol{C\ es\ subconjunto\ de\ \Omega}$$

- **Clasificación de los eventos**

Antes de entrar a clasificar los eventos, analicemos las definiciones de algunos sucesos, de gran importancia para el proceso de la Probabilística.

SUCESO	CONCEPTO	EJEMPLO

SUCESO ELEMENTAL	**Cada uno de los elementos** que forman parte del espacio muestral.	Lanzando una moneda al aire, puede caer cara.
SUCESO COMPUESTO	Cualquier **subconjunto** del espacio muestral.	Lanzando una moneda al aire, puede caer cara o puede caer sello (uno de los dos, no los dos al tiempo).
SUCESO SEGURO	Es el **Espacio muestral** (Conformado por **todos los posibles resultados)**.	Al tirar un dado, obtener una puntuación meno r o igual a seis.
SUCESO IMPOSIBLE	Es aquel que **no tiene ningún elemento** (**carece de elementos**), se representa por la letra griega ϕ**,** que significa **conjunto vacío.**	Lanzar un dado y obtener 7 como resultado.
SUCESOS COMPATIBLES	Se dice que dos sucesos **A** y **B** son **Compatibles** cuando tienen algún **elemento** (suceso) **en común**.	Sean: **A:** Sacar puntos par al tirar un dado, y **B:** Obtener un múltiplo de 3. Se da la compatibilidad, ya que se puede obtener el 6 y este es par y múltiplo de 6.
SUCESOS INCOMPATIBLES	Se dice que dos sucesos **A** y **B** son **Incompatibles** cuando **no tienen ningún elemento** (suceso) **en común**.	Sean: A: Sacar puntos par al tirar un dado, y B: Obtener un múltiplo de 5. Se da la incompatibilidad, ya que es imposible que se de este resultado.

SUCESOS INDEPENDIENTES	Se dice que dos sucesos **A** y **B** son **Independientes**, cuando la probabilidad de lo que suceda con A, **no se ve afectada** por lo que haya sucedido con B.	Si se lanzan dos monedas al aire, el resultado obtenido es independiente para cada caso.
SUCESOS DEPENDIENTES	Dos sucesos **A** y **B** son **Dependientes** cuando la probabilidad de que suceda A**, se ve afectada** por que haya sucedido o no B.	Extraer dos caratas de una baraja, sin reposición, son dos sucesos dependientes.
SUCESO CONTRARIO	El suceso **Contrario** de **A**, es otro que se realiza cuando **no se da A**. Se representa como $\overline{\boldsymbol{A}}$**.**	Cuando se lanza un dado, se entiende por sucesos contrarios, sacar par e impar al mismo tiempo. Son sucesos que no se pueden dar simultáneamente.

Dados estos conceptos fundamentales, entremos a definir, como se pueden descomponer los resultados básicos de un experimento.

Estos se pueden dar como:

a. Eventos Simples

Se definen como la forma simple de representar un evento o experimento.

Es un subconjunto del espacio muestral que contiene un solo elemento, por ejemplo:

1. Si se trata de contar objetos o cosas y el espacio muestral es:

$\boldsymbol{\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}}$**,** o sea el conjunto de los números Naturales, los sucesos elementales estarían dados por cada uno de los conjuntos $\{\mathbf{k}\}$**,** donde $\mathbf{k} \in \mathbb{N}$.

2. Si se lanza una moneda dos veces, el espacio muestral está dado por:

$\boldsymbol{\Omega = \{cc, cs, sc, ss\}}$, donde **C: cara** y **S: sello**, los sucesos **simples** o **elementales** son, entonces:

$\boldsymbol{\{cc\}, \{cs\}, \{sc\}, \{ss\}}$

3. Si x es una Variable Aleatoria Normalmente Distribuida, el campo muestral sería entonces:

$\boldsymbol{\Omega = (-\infty, +\infty)}$ y en los números Reales los sucesos simples o elementales son todos los conjuntos $\boldsymbol{\{x\}}$, donde $\mathbf{x} \in \boldsymbol{R_e}$.

4. **Otras características:**

Los sucesos elementales pueden tener probabilidades que son: ➢ Estrictamente **mayores** que **cero**, ➢ **No definidas**, ➢ Cualquier **combinación** de estas. Ejemplo: La probabilidad de cualquier **Variable Aleatoria Discreta**, está determinada por **las probabilidades asignadas** a **los sucesos elementales** del experimento que determina **la variable**.
Cualquier **suceso elemental** tiene **probabilidad cero** en cualquier **Variable Aleatoria Continua**.
Existen **Distribuciones Mixtas** que no son **completamente Continuas**, ni **completamente Discretas**, entre las que pueden darse **ambas situaciones**.

b. **Evento Compuesto**

Puede considerarse que un evento es una composición de dos o más eventos distintos. Se da de dos formas:

1. **Unión**

La Unión de dos eventos $\boldsymbol{A\ y\ B}$, es el evento de que ocurre $\boldsymbol{A}$ **o** $\boldsymbol{B}$, o **ambos** ocurren en **una sola realización** del experimento. Se representa por $\cup$.

2. **Intersección**

La intersección de dos eventos $\boldsymbol{A\ y\ B}$ es el evento que ocurre si tanto $\boldsymbol{A}$ como $\boldsymbol{B}$ tienen **elementos en común**. Se representa por $\cap$.

3. **Eventos Complementarios**

Dos eventos son **complementarios** cuando su **unión** es **igual al espacio muestral.**

REGLAS DE PROBABILIDADES PARA UNIONES E INTERSECCIONES

a. **Regla de la Adición**

Regla especial de la adición, se establece que dos eventos $\boldsymbol{A\ y\ B}$ son **mutuamente excluyentes,** la probabilidad de que uno u otro evento ocurra es igual a **la suma de sus probabilidades**

La ocurrencia de al menos dos sucesos $\boldsymbol{A\ y\ B}$ es la siguiente:

$$\boldsymbol{P(A\ o\ B) = P(A) \cup P(B) = P(A) + P(B)}$$

Si son mutuamente excluyentes, entonces:

$$\boldsymbol{P(A\ o\ B) = P(A) \cup P(B) = P(A) + P(B) - P(A\ y\ B)}$$

b. Regla de la Multiplicación

Para la probabilidad de la ocurrencia conjunta de A y B, se da de las siguientes formas:

1) Si los eventos son **independientes**:

Si A y B son eventos independientes, entonces:

$P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$.

En general, para ***cualquier* número** de eventos independientes, la probabilidad de que todos los eventos sucedan es **el producto** de las **probabilidades** de que sucedan los **eventos individuales**.

Ejemplo tomado de: Probabilidad **de** Eventos Independientes

www.montereyinstitute.org/courses/.../U12_L2_T2_text_final_es.htm

EJERCICIO DE APRENDIZAJE

Problema	**Beth tiene 10 pares de calcetines: 2 negros, 2 cafés, 3 blancos, 1 rojo, 1 azul, y 1 verde. Hoy quiere usar el par blanco, pero tiene prisa para llegar al trabajo, por lo que agarra un para al azar. Si no es blanco, lo devolverá al cajón. Si continúa agarrando pares aleatoriamente, ¿Cuál es la probabilidad de sacar un par blando en su *tercer* intento?**	
	Evento A: un par de calcetines que *no* son blancos **Evento B**: un par de calcetines que *no* son blancos	Primero, definimos los eventos. Como queremos que ella saque unos blancos en su *tercer* intento, es necesario que no saque blancos en su primer y segundo intentos

Evento C: un par de calcetines que son blancos

Los eventos son independientes, porque cada resultado eliminado es reemplazado. Los eventos anteriores no cambian las probabilidades de eventos posteriores

Ahora revisa si son independientes. Beth elimina un resultado cuando saca un par de calcetines, pero luego lo regresa al cajón, entonces las probabilidades no cambiarán

El tamaño de espacio muestral para cada evento es **10** (Hay **10 pares** de calcetines de donde escoger)

El tamaño del espacio de eventos para el Evento A y el Evento B es **7**. (Hay **7 pares** que no son blancos)

El tamaño del espacio de eventos del Evento C es **3.** (Hay **3 pares** que son blancos)

$$\boldsymbol{P(A\ y\ B\ y\ C) = P(A).P(B).P(C) =}$$

$$\boldsymbol{\frac{7}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{147}{1000}}$$ (Para obtener calcetines blancos en tres intentos)

Podríamos encontrar el espacio muestral y el espacio de eventos para todo el experimento y calcular la razón. Sin embargo, como los eventos son independientes, es más fácil encontrar los espacios muestrales y los espacios de eventos de los eventos individuales y multiplicarlos

2. Si los eventos son **dependientes:**

Dos o más eventos son dependientes cuando la ocurrencia o no ocurrencia de uno de ellos afecta la probabilidad de ocurrencia del otro (o de los otros). Cuando se tiene este caso, se utiliza el concepto de Probabilidad Condicional, para denominar la probabilidad del evento relacionado.

La expresión $\boldsymbol{P\ (A|B)}$**,** indica la probabilidad de ocurrencia del evento A si el evento B ya ocurrió.

Nota: Se debe tener claro que $(\boldsymbol{A|B})$**, no es una fracción**.

Se tiene entonces que:

$$P(A|B) = P(A\ y\ B)/P(B)$$

o

$$P(B|A) = P(A\ y\ B)/P(A)$$

$$\boldsymbol{Probabilidad\ Condicional} = \frac{P(A\ y\ B)}{P(B)}\ o\ P(B|A) = P(A\ y\ B)/P(A)$$

Definición de Probabilidad Condicional: **Si a y B son dos eventos en** $\boldsymbol{S}$, la probabilida de que ocurra A dado que ocurrió el evento B, es la probabilidad condicional de A dado B, se denota: $\boldsymbol{P(A|B)}$

En la **regla de la Multiplicación**, se puede determinar que:

Para la probabilidad de la ocurrencia conjunta de A y B, existen dos acepciones a esta regla:

1) Si los eventos son **independientes**:

$$P\ (A \cap B) = P(A).P(B)$$

2) Si los eventos son **dependientes**:

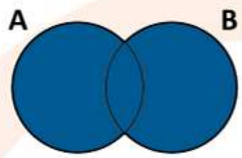
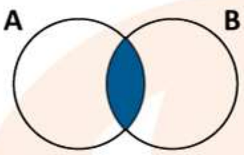
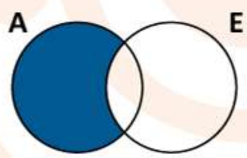
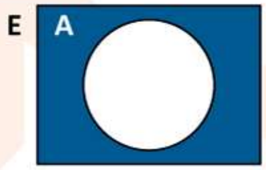
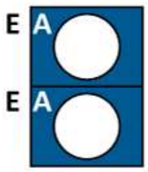
Es la probabilidad de $\boldsymbol{A}$ multiplicada por la probabilidad condicional de $\boldsymbol{B}$ dado $\boldsymbol{A}$, esto es:

$P\ (A\ y\ B) = P(A).P(B|A)$ y, viceversa,

$$P\ (A\ y\ B) = P(B\ y\ A). = P(B).P(A|B)$$

PISTAS DE APRENDIZAJE

Recuerde que: En las operaciones con eventos, dados dos eventos, A y B, se llaman:

Unión		***AUB*** Es el evento formado por todos los elementos de ***A*** y todos los elementos de ***B***. Sin ***repetir*** elementos.
Intersección		***AnB*** Es el evento formado por todos los elementos que son, a la vez, de ***A*** y de ***B.*** O sea, sólo los ***elementos*** que se ***repiten (comunes a los 2 conjuntos).***
Diferencia		***A-B*** es el evento formado por todos los elementos de ***A*** que ***no son*** de ***B.***
Evento Complementario		El evento ***A'*** se llama evento complementario de ***A.*** Y se cumple que ***A'=S-A***
Eventos Mutuamente Excluyentes		Dos eventos ***A*** y ***B***, se llaman mutuamente excluyentes, cuando no tienen ningún elemento en común. Es decir, cuando ***AnB= ϕ***. También se le llaman eventos disjuntos.

2.2 TEMA 2 TÉCNICAS DE CONTEO O ANÁLISIS COMBINATORIO

El **Análisis Combinatorio** es la rama de la [matemática] que estudia los **diversos arreglos** o **selecciones** que se pueden formar con los elementos de un conjunto dado; es un **método rápido** y **eficaz** que permite contar el número de **maneras** o **formas** en que se pueden **ordenar** o **seleccionar** los elementos de un conjunto, las actividades que se dan son denominadas **Eventos** o **Sucesos.**

El estudio del **análisis combinatorio** permitirá resolver y comprender problemas sobre **probabilidades** en una forma analítica y comprensiva.

A través del análisis combinatorio se pueden resolver muchos problemas prácticos del entorno, tales como: cuántos números diferentes de teléfonos, placas o loterías se pueden generar utilizando un conjunto dado de números y letras.

VER ENLACE Análisis combinatorio **- Monografias.com**

www.monografias.com/trabajos13/analisco/analisco.shtm

Dentro de estas técnicas de Conteo o Análisis Combinatorio, se tienen:

- **La Regla multiplicativa:**

Si hay n_1 formas de hacer una cosa y n_2 formas de hacer otra, hay

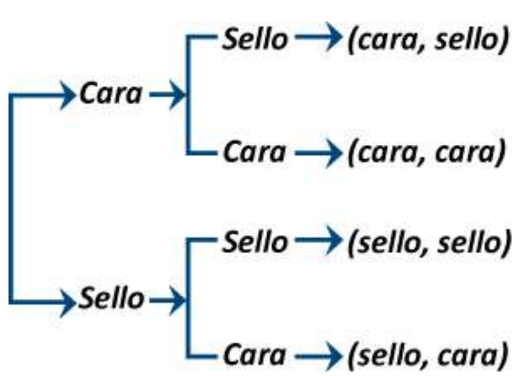
$n_1 * n_2$ Formas de realizarlas ambas.

2.2.1 EJERCICIO DE APRENDIZAJ

1. Al lanzar dos monedas ¿cuáles serán los posibles resultados?

Se puede resolver por el diagrama del árbol:

a. Más adelante se profundizará en este tema.



a. También se puede realizar con una tabla de contingencia:

PROCEDIMIENTO	MONEDA 1	MONEDA 2
# DE FORMAS	$n_1 = 2$	$n_2 = 2$
$n_1 * n_2 = 4$		

2. Un estudiante de Uniremington se va a matricular en tres materias: administración de personal del cual dispone de 2 horarios, hoja electrónica del que dispone de 4 horarios y cálculo que tiene 3 horarios ¿De cuántas formas diferentes puede acomodar su horario?

PROCEDIMIENTO	Admón. de personal	Hoja Electrónica	Cálculo
# DE FORMAS	$n_1 = 2$	$n_2 = 4$	$n_3 = 3$
$n_1 * n_2 * n_3 = 24$			

En forma general, se tiene que:

Si un procedimiento A_1 se puede realizar de n_1 formas, un procedimiento A_2 se puede realizar de n_2 formas, un procedimiento A_3 se puede realizar de n_3 formas y un procedimiento A_k se puede realizar de n_k formas, entonces:

$A_1, A_2, A_3, \dots A_k$ Se pueden realizar de $n_1 * n_2 * n_3 * \dots * n_k$ Formas

2.2.2 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Un estudiante de administración va a presentar **4 evaluaciones**: contabilidad, matemáticas, herramientas de informática y metodología de investigación. Cada docente de dichas asignaturas tiene

un número de temas así: **4, 7, 2** y **2** respectivamente ¿de cuántas formas diferentes puede presentar las pruebas?

Solución:

Datos: $n_1 = 4, n_2 = 7, n_3 = 2 \ y \ n_4 = 2$ Entonces,

$$n_1 * n_2 * n_3 * n_4 = 4 * 7 * 2 * 2 = 112$$

---

2. De la ciudad **A la ciudad B** hay **4 formas de viajar**, de la **ciudad B a la C** hay **2 formas** y de la ciudad **C a la D** **hay 5 formas** ¿Cuántas rutas posibles hay de la ciudad **A a la D**?

$n_1 = 4, n_2 = 2, n_3 = 5$ Entonces,

$$n_1 * n_2 * n_3 = 4 * 2 * 5 = 40$$

---

3. Se lanza **una moneda** **2 veces** y **un dado** **una vez** ¿Cuántos resultados son posibles?

PROCEDIMIENTO	**Moneda 1**	**Moneda 2**	**Dado**
# DE FORMAS	$n_1 = 2$	$n_2 = 2$	$n_3 = 6$
$n_1 * n_2 * n_3 = 2 * 2 * 6 = 24$			

4. ¿De cuantas formas se puede responder un examen si el examen tiene 3 preguntas de opción múltiple con 4 opciones cada una?

PROCEDIMIENTO	**Pregunta 1**	**Pregunta 2**	**Pregunta 3**
# DE FORMAS	$n_1 = 4$	$n_2 = 4$	$n_3 = 4$

$$n_1 * n_2 * n_3 = 4 * 4 * 4 = 64$$

- **PERMUTACIONES**

Es lo mismo que ordenación; es la **disposición en orden** de un conjunto de objetos en el que hay un 1^0, $un\ 2^0, un\ 3^0$,... hasta n

También se puede definir como todo **arreglo** de **elementos** en donde **nos interesa** el **lugar o posición** que **ocupa** cada uno de los elementos que constituyen dicho arreglo.

Nota: Para obtener las fórmulas de permutaciones y de combinaciones hay que definir primero lo que es $n!$ (ene factorial), elemento matemático involucrado en las fórmulas utilizadas para la resolución de problemas.

- **Factorial**

Definición: El factorial de un **número entero positivo** ($\mathbb{Z}^+$), se define como **el producto** de **todos los números enteros positivos** desde el **número 1** (los números naturales) hasta el número n, esto se da como:

La **Función Factorial** definida mediante el producto:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (n-1) \times n$$

Ejercicios de aprendizaje

1. Calcular

a) $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

b) $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$

c) $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

d) $8! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 40.320$

2. Completar la siguiente tabla , obteniendo el factorial indicado:

n	$n!$
0	

9	
13	
15	1.307.674.368.000
20	2.432.902.008.176.640.000
30	
40	

3. Halle el resultado de las siguientes expresiones, pero antes de hacerlo simplifique hasta donde sea posible, se resolverá el primer ejercicio para que lo tomes como modelo:

a) $\frac{7!}{5! * 3!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1 * 3\times2\times1}$, simplificando en el numerador y en el denominador, se tiene: $\frac{7!}{5! * 3!} = 7$

b) $\frac{15!}{(15-5)!}$ R/360360

c) $\frac{8!}{(8-4)!}$ R/1680

d) $\frac{6!}{3!(6-3)!}$ R/20

e) $\frac{10!}{4!(10-4)!}$ R/210

f) $\frac{10!}{5!(12-10)!} = \frac{10!}{5!(2!)} = \frac{10!}{5! * 2!} = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1 * 2\times1} = \frac{30240}{2} = 15120$

2.2.3 EJERCICIO DE APRENDIZAJE

1. ¿De cuántas formas diferentes se pueden acomodar 7 CD`S en un porta CD`S?

Solución:

Procedimiento	Posición 1	Posición 2	Posición 3	Posición 4	Posición 5	Posición 6	Posición 7
# de formas	$n_1 = 7$	$n_2 = 6$	$n_3 = 5$	$n_4 = 4$	$n_5 = 3$	$n_6 = 2$	$n_7 = 1$
$\mathbf{7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040} *$							

Se pueden colocar de $\mathbf{5040}$ * formas diferentes.

2. ¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras del siguiente conjunto:

M = {x, y, z, w}?

Solución:

Procedimiento	Letra 1	Letra 2	Letra 3	Letra 4
# de formas	$n_1 = 4$	$n_2 = 3$	$n_3 = 2$	$n_4 = 1$
$\mathbf{4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24} *$				

Se pueden ordenar de $\mathbf{24}$ * formas diferentes.

3. ¿de cuántas formas diferentes pueden sentarse 6 personas en una banca?

Solución:

Procedimiento	Posición 1	Posición 2	Posición 3	Posición 4	Posición 5	Posición 6

# de formas	$n_1 = 6$	$n_2 = 5$	$n_3 = 4$	$n_4 = 3$	$n_5 = 2$	$n_6 = 1$
$\mathbf{6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720} *$						

Se pueden sentar de $\mathbf{720} *$ formas diferentes.

- **PERMUTACIONES POR SUBGRUPOS**

Son las ordenaciones de varios objetos en **subgrupos sin repetición, el orden de estos subgrupos** es importante; cuando se **cambia el orden** de los elementos, el **grupo cambia**, es otro totalmente diferente.

Se dice entonces que:

El número total de permutaciones de $\boldsymbol{n}$ objetos distintos tomados en $\boldsymbol{r}$ subgrupos de ellos, está dado por:

$$\boldsymbol{P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

2.2.4 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. En el **ejemplo** de los CD`S (¿De cuántas formas diferentes se pueden acomodar 7 CD`S en un porta CD`S?), si en el porta CD´S sólo caben 4 Cd´S ¿de cuántas formas se pueden ordenar?

   Solución: Aplicando la ecuación:

   $\boldsymbol{P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}}$, se tiene, entonces:

$$\boldsymbol{P_4^7} = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{\mathbf{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}}{\mathbf{3!}}, \text{ simplificando, se tiene que:}$$

$$\boldsymbol{P_4^7 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840}$$

Nota: Con la regla multiplicativa la solución sería:

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

Puesto que

Compartimiento	se puede acomodar	cualquiera
En el primero	$\rightarrow$	de los 7 Cd´S
En el segundo	$\rightarrow$	de los 6 Cd´S
En el tercero	$\rightarrow$	de los 5 Cd´S
En el cuarto	$\rightarrow$	de los 4 Cd´S restantes

Es decir:

$Procedimiento$	$compartimiento\ 1$	$compartimiento\ 2$	$compartimiento\ 3$	$compartimiento\ 4$
$N°\ de\ formas$	$n_1 = 7$	$n_2 = 6$	$n_3 = 5$	$n_4 = 4$

1. En el **ejemplo (**¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras del siguiente conjunto: M = {x, y, z, w}?)

Se tiene el conjunto $M = \{x, y, z, w\}$, si se **va a ordenar de a 2 letras,** **sin repetición,** ¿Cómo se puede ordenar?

Solución:

a. Mecánicamente: $xy, xz, xw, yx, yz, yw, zx, zy, zw, wx, wy, wz$

b. Aplicando la fórmula conocida, se tendría:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{24}{2} = 12$$

c. Con la regla multiplicativa la solución sería: $\mathbf{4 \times 3}$

Puesto que en la primera posición puede ir cualquiera de las 4 letras, en la segunda posición puede ir cualquiera de las 3 letras restantes porque no se puede repetir letra:

PROCEDIMIENTO	$1^a Posición$	$2^a Posición$
N° DE FORMAS	$\boldsymbol{n_1 = 4}$	$\boldsymbol{n_2 = 3}$

2. ¿Cuántas palabras de **3 letras** se pueden formar con las letras **ABCDE** sin repetir letra?

Solución:

- Datos
    - **5** letras: **ABCDE**
    - Palabras de **tres letras** que se pueden formar.

a. Aplicando la fórmula conocida, se tendría:

$$P_3^5 = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{120}{2} = 60$$

b. Con la regla multiplicativa la solución sería**:** $\mathbf{5 \times 4 \times 3 = 60}$

Puesto que en la primera posición se puede poner cualquiera de las 5 letras, En la segunda posición se puede poner cualquiera de las 4 letras restantes y en la tercera posición se puede poner cualquiera de las 3 letras restantes.

PROCEDIMIENTO	$1^a Posición$	$2^a Posición$	$3^a Posición$

N° DE FORMAS	$n_1 = 5$	$n_2 = 4$	$n_1 = 3$

c. Hacerlo mecánicamente sería muy complicado y demasiado largo, ya que se tendrían que escribir las **60 combinaciones** posibles.

- **VARIACIONES**

Dado un conjunto de n elementos, se sabe que si se **toman todos** y se **ordena** de todas las formas posibles se tendrán **permutaciones** de n elementos; pero si en lugar de tomar todos los elementos se **toma una parte** o un **subconjunto** de ellos y se ordenan de todas **las formas posibles**, se obtendrán **variaciones**.

También se define una **variación** como cada una de las **tuplas** (una secuencia ordenada de objetos) de **cierto orden** que pueden formarse tomando **elementos de un conjunto**.

Nota: Las **tuplas** se emplean para describir objetos matemáticos que tienen **estructura**, es decir, que pueden ser **descompuestos** en un cierto número de **componentes**.

Estas variaciones se pueden dar de dos formas:

- **Variaciones sin repetición:**

Cuando no se admiten repeticiones: Entonces el número de n - **tuplas** en que ninguno de los elementos **se repitan** se llama **número de variaciones sin repetición** este otro número resulta ser:

$$V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Dónde:

m: *Población*

n: *Muestra*

2.2.5 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. ¿Cuántos números de 3 cifras distintas se pueden formar con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Procedimiento:

Se forman subconjuntos de **tres elementos distintos**, en los que **nos importa** el **orden 123,** es distinto de 321.

Se formarán, entonces:

$$V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!} \to V_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

Solución: Se formarán **120** elementos diferentes.

---

2. En la final de unas olimpiadas corren la final de 100m **8 atletas**. ¿De **cuántas formas** se puede configurar el podium?

Procedimiento: Utilizando la ecuación conocida, se tiene:

$$V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!} \to V_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

Solución: el podio se puede formar de **336** maneras diferentes.

Nota: Recuerde que al podium de una competencia solo suben tres participantes (el 1°, el 2° y el 3°), por eso se toma $n = 3$.

- **Variaciones con repetición:**

Las **variaciones con repetición** de m elementos tomados en grupos de *n* es el número de diferentes n-tuplas de un conjunto de m elementos, está dado por:

$$VR_m^n = m^n$$

2.2.6 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

- ¿Cuántos números de 8 cifras que empiecen por 6 se pueden formar?

  Procedimiento:

Si los números empiezan por **6** sólo queda determinar qué ocurre con las **siete últimas cifras** que puede **cualquier dígito**, esto es, aplicando la ecuación determinada

$$VR_m^n = m^n \rightarrow VR_m^n = 10^7$$

Se Podrán formar 10.000.000 números.

- ¿Cuántas apuestas distintas se pueden hacer en la quiniela para cubrir todas las posibilidades? Nota: Incluido el pleno al 15.

  Para rellenar una quiniela se usan tres signos **1, X, 2**, luego se tienen **tres elementos**. Se rellenan **15 casillas**, por tanto se agrupan de 15 en 15, entonces:

$$VR_{3.15} = 3^{15} = 14.348.907 \ apuestas$$

Combinaciones

Dado un conjunto de **m** elementos, pueden tomar **n** para formar **arreglos** o **subgrupos** en las cuales **no interesa el orden**.

Existen dos tipos de Combinaciones:

1. **Combinaciones con Repetición**: de **m** elementos tomados de **n** en **n**, dónde $m \geq n$, son los distintos grupos formados por **n** elementos de forma tal que:

***

- **No** entran todos los elementos.
- **No** importa **el orden.**
- **Si se repiten** los elementos.

Esta dada por:

$$CR_m^n = \binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$$

Ejercicio de Aprendizaje

En una bodega hay en cinco tipos diferentes de botellas. ¿De cuántas formas se pueden elegir cuatro botellas?

Procedimiento

a. De acuerdo a *****, se tiene que:

No entran **todos** los elementos	Sólo elije **4**.
No importa **el orden**.	**Da igual** que elija **2** botellas de anís y **2** de ron, que **2** de ron y **2** de anís.
Sí se **repiten** los elementos.	Puede elegir **más de una** botella del **mismo tipo**.

a. Aplicando la ecuación se tiene que:

$$CR_m^n = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$$

$$CR_5^4 = \frac{(5+4-1)!}{4!(5-1)!} = \frac{8!}{4!.4!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1.4\times3\times2\times1})$$

$$CR_5^4 = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} = \frac{1680}{24} = 70$$

Solución: Se pueden dar **70 formas** posibles de elegir **las 4 botellas**.

Tomado de: Combinaciones con repetición - Vitutor

www.vitutor.com/pro/1/a_8.html

---

2. Combinaciones sin Repetición: de m elementos tomados de n en n, con $m \geq n$ son toda las agrupaciones posibles que puedan hacerse con los m elementos de tal forma que:

Esta dada por la

****

- **No** entran todos los elementos.
- **No** importa **el orden.**
- **NO se repiten** los elementos.

siguiente ecuación:

$$C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n}$$

Nota 1: Las combinaciones se pueden calcular mediante factoriales, utilizando la siguiente ecuación:

$$C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Nota 2: Las combinaciones se denotan por:

$$C_m^n \text{ o } C_{m,n}$$

Ejercicios de aprendizaje

Calcular **el número de combinaciones** de 10 elementos tomados de 4 en 4.

Procedimiento

a. Aplicando:

$$C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{5040}{24} = 210$$

b. Aplicando:

$$C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \frac{10!}{4!.\,(10-4)!} = \frac{10!}{4!\,.6!} \rightarrow$$

$$C_m^n = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{(4 \times 3 \times 2 \times 1).6!} \rightarrow$$

$$C_m^n = \frac{5040}{24} = 210$$

3. En una clase de 35 alumnos se quiere elegir un comité formado por tres alumnos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?

Procedimiento

a. **No** entran **todos** los elementos.

No importa **el orden**: Juan, Ana.

No se **repiten** los elementos.

b. Se aplica la ecuación:

$$C_{35}^{3} = \frac{35.34.33}{3.2.1} = 6545$$

Solución: Se pueden formar **6545** grupos de **tres estudiantes**.

Tipos de probabilidades

1. **Probabilidad Clásica**

Es la probabilidad de **un evento A** es igual al número de resultados favorables al evento A dividido por el número de resultados posibles del experimento, o sea:

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados favorables al evento } A}{\text{Número de resultados posibles del experimento}}$$

$$P(A) = \frac{Muestra}{Población}$$

2. **Probabilidad Conjunta (Independencia de sucesos)**

Cuando **los eventos** **son independientes**, la ocurrencia de uno de ellos no cambia la probabilidad de ocurrencia del otro, está determinado por la siguiente la fórmula:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

3. **Probabilidad Condicional (Dependencia de sucesos)**

La probabilidad de que **el suceso A ocurra** dado que, o a condición de que, **haya ocurrido ya el suceso B** se denomina **Probabilidad Condicional**, y está determinado por:

$$P\left({}^{A}/_{B}\right) = P(A \cap B)/P(B) = [P(A) * P(B)]/P(B), \text{ con } P(B) \neq 0$$

Diagrama de Árbol

Cuando se tiene que hallar las probabilidades de varios sucesos conjuntos, suele ser útil de dibujar un árbol de probabilidades.

"Un **diagrama de árbol** es una herramienta que se utiliza para determinar todos **los posibles resultados** de **un experimento aleatorio**.

En el **cálculo de la probabilidad** se requiere conocer el **número de objetos** que forman parte del **espacio muestral**, estos se pueden determinar con la construcción de **un diagrama de árbol**.

Ejemplo: Si Juan tiene 3 pantalones y 2 camisas basta multiplicar **3x2=6** y son **6 posibilidades** de que se pueda vestir.

El **diagrama de árbol** es **una representación gráfica** de **los posibles resultados** del experimento, el cual consta una serie de pasos, donde cada uno de los pasos tiene **un número finito** de maneras de ser llevado a cabo. Se utiliza en los problemas de conteo y probabilidad.

Para la construcción de **un diagrama en árbol** se partirá poniendo **una rama** para cada una de **las posibilidades**, acompañada de **su probabilidad**. Cada una de estas ramas se conoce como **rama de primera generación**.

En **el final** de cada rama de **primera generación** se constituye a su vez, un nudo del cual parten **nuevas ramas** conocidas como **ramas de segunda generación,** según las posibilidades del siguiente paso, salvo si el nudo representa un **posible final del experimento (nudo final).**

Hay que tener en cuenta que la construcción de un árbol **no depende** de tener **el mismo número de ramas de segunda generación** que salen de cada rama de primera generación y que la **suma de probabilidades de las ramas de cada nudo ha de dar 1.**

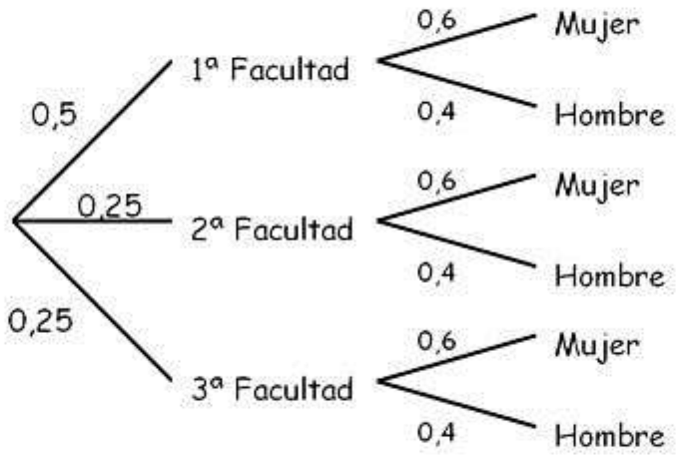
Existe **un principio sencillo** de los **diagramas de árbol** que hace que éstos sean mucho **más útiles** para **los cálculos rápidos de probabilidad**: **multiplicamos** las probabilidades, si se trata **de ramas adyacentes (contiguas)**, el ejemplo de alumna de la primera facultad, o bien las sumamos si se trata de ramas separadas que emergen de un mismo punto, el ejemplo de encontrar un alumno.

Ejercicios de Aprendizaje

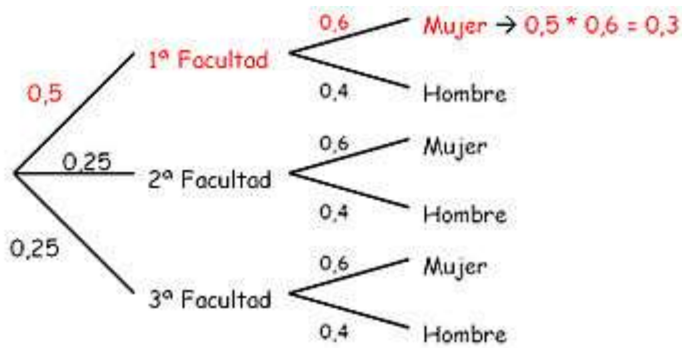
1. Una universidad está formada por tres facultades:

- La **1ª** con el **50%** de estudiantes.
- La **2ª** con el **25%** de estudiantes.
- La **3ª** con el **25%** de estudiantes.

Las mujeres están repartidas uniformemente, siendo un **60%** del total en cada facultad.

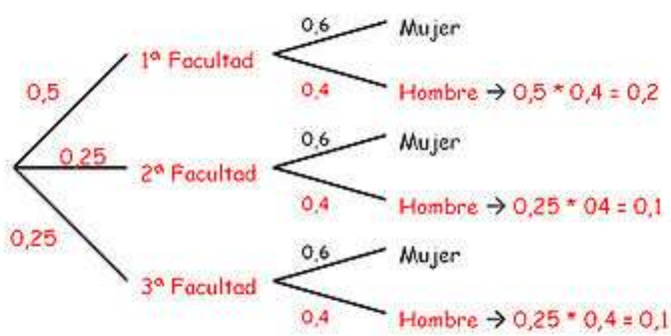


¿Probabilidad de encontrar una alumna de la primera facultad?



$$P(Alumna\ de\ la\ 1^{a} facultad) = 0{,}5 * 0{,}6 = 0{,}3$$

¿Probabilidad de encontrar un alumno varón?



$$P(Alumno\ varón) = 0{,}5 * 0{,}4 + 0{,}25 * 0{,}4 + 0{,}25 * 0.4 = 0{,}4$$

Pero también podría ser lo contrario.

Teorema de Bayes

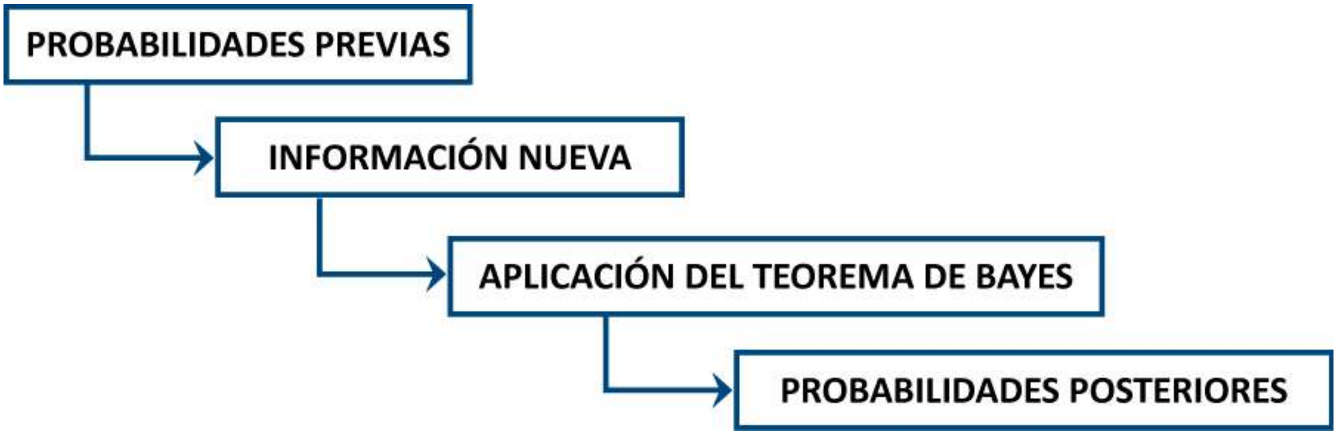
Es la probabilidad de que sea: $A_{1,}, A_2, A_3, \ldots A_n$ un conjunto de **sucesos incompatibles** cuya **unión es el total**, tales que **la probabilidad** de cada uno de ellos **es distinta de cero**. Sea B un suceso cualquiera del que se contenga las **probabilidades condicionales** $P(B/A_i)$**,** entonces la probabilidad de $P(A_i/B)$, viene dada por:

$$P\left({}^{A_i}/_{B}\right) = \frac{\left[P\left(\frac{B}{A_i}\right) P(A_i)\right]}{P(B)} = \left[P\left({}^{B}/_{A_i}\right) P(A_i)\right] / \left(\sum P\left({}^{B}/_{i}\right) P(A_i)\right)$$

Dónde:

$P(A_i)$	Las probabilidades **a priori.**
$P\left(B/A_i\right)$	La probabilidad de **B en la hipótesis de A**.
$P(A_i/B$	Las probabilidades **a posteriori**.

El Teorema de Bayes: Se utiliza para **analizar probabilidades posteriores**, es decir, **después de una información nueva**. Se tienen eventos con unas **probabilidades previas** o **a priori** los cuales son **mutuamente excluyentes** y **la unión** de todos ellos es **el espacio muestral**, o sea que la suma de todas sus probabilidades es **igual a uno**.



Nota: Como **un evento** y **su complemento** son **mutuamente excluyentes**, el **teorema de Bayes** también **se aplica para calcular** las **probabilidades posteriores** de **un evento** y de **su complemento**.

2.2.7 EJERCICIO DE APRENDIZAJE

Una empresa manufacturera recibe embarques de partes de dos proveedores. Sea A_1 el evento de que una parte provenga del **proveedor 1** y A_2 el evento de una parte provenga del **proveedor 2**. Actualmente el **65%** de las partes que compra la empresa provienen del **proveedor 1** y el **35%** restante del **proveedor 2**; es decir que si se selecciona una parte al azar, **las probabilidades previas:**

- $\mathbf{P(A_1) = 0,65}$ y
- $\mathbf{P(A_2) = 0,35}$

Además se tienen datos históricos, **B** representa el evento de que **una parte es buena** y **M** representa el evento de que **una parte es mala o defectuosa**:

$P\left({}^{B}/_{A_1}\right) = 0,98$ Probabilidad de que **la parte sea buena** dado que venga del **proveedor 1**.

$P\left({}^{B}/_{A_2}\right) = 0,95$ Probabilidad de que **la parte sea buena** dado que venga del **proveedor 2.**

$P\left({}^{M}/_{A_1}\right) = 002$ Probabilidad de que **la parte sea mala o defectuosa** dado que venga del **proveedor 1.**

$P\left({}^{M}/_{A_2}\right) = 0,05$ Probabilidad de que **la parte sea mala o defectuosa** dado que venga del **proveedor 2.**

Actividad: Realiza **el diagrama del árbol** para la situación que se plantea.

- **Teorema de Bayes para el caso de dos eventos:**

$$P(A_1 \setminus B) = \frac{P(A_1) * P(B/A_1)}{P(A_1) * P(B/A_1) + P(A_2) * P(B/A_2)}$$

$$P(A_2 \setminus B) = \frac{P(A_2) * P(B/A_2)}{P(A_1) * P(B/A_1) + P(A_2) * P(B/A_2)}$$

2.2.8 EJERCICIO DE APRENDIZAJE

Sustituyendo para el evento de que **la parte sea mala**:

$$P(A_1 \setminus M) = \frac{0,65 * 0,02}{0,65 * 0,02 + 0,35 * 0,05} = \frac{0,013}{0,013 + 0,018} = 0,419$$

Si **la parte es mala o defectuosa**, la **probabilidad** de que venga del **proveedor 1** es de **0,419** **o sea** $\mathbf{0,419 * 100\% = 41,9\%.}$

____

$$P(A_2 \setminus M) = \frac{0,35 * 0,05}{0,65 * 0,02 + 0,35 * 0,05} = \frac{0,018}{0,013 + 0,018} = 0,581$$

Si **la parte es mala o defectuosa**, la **probabilidad** de que venga del **proveedor 2** es de **0,581** **o sea** $\mathbf{0,581 * 100\% = 58,1\%.}$

____

Nota: Este teorema se puede generalizar para casos donde hay $\boldsymbol{n}$ eventos mutuamente excluyentes $\boldsymbol{A_1, A_2, \dots, A_n}$ y cuya unión es el espacio muestral

(Las **probabilidades** **son iguales a uno**) Así:

$$P(Ai / B) = \frac{P(Ai) * P(B / Ai)}{P(A1) * P(B / A1) + P(A2) * P(B / A2) + \dots + P(An) * P(B / An)}$$

En otras palabras: probabilidad para el camino de $\boldsymbol{A_i}$ a $\boldsymbol{B}$ **dividido** por **la suma** de **todas las probabilidades** para las rutas a $\boldsymbol{B}$.

____

Método tabular:

Es otro método para calcular dichas probabilidades, las columnas respectivas de la tabla son así:

COLUMNA	DEFINICIÓN

1ª columna	Se colocan los eventos **mutuamente excluyentes** a quienes se les va a calcular las probabilidades posteriores $A_1, A_2, \dots, A_n$
2ª columna	Tiene las probabilidades previas de los **eventos anteriores**, como son **mutuamente excluyentes**, **la sumatoria** de dichas probabilidades es igual a uno.
3ª columna	Contiene las probabilidades condicionales de **la nueva información**, es decir del evento B, dado cada evento $A_1, A_2, \dots, A_n$
4ª columna	Es el cálculo de **las probabilidades conjuntas** de cada evento con **la nueva información** (evento B); es decir, se aplica la regla multiplicativa; esta columna se halla **multiplicando** la columna 2 por la columna 3 y la sumatoria de esta columna es **la probabilidad** de **la nueva información** P(B)
5ª columna	Contiene el cálculo de las probabilidades posteriores: $P(A_i \setminus B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \left(\frac{Columna\ 4}{Sumatoria\ de\ la\ columna\ 4}\right)$
Nota: La **sumatoria** de **la columna 5** es igual a uno.	

La tabla quedaría así:

B: En este caso se toma como la nueva información el evento de que la parte sea mala.

Eventos	Probabilidades previas	Probabilidades condicionales	Probabilidades conjuntas	Probabilidades Posteriores
A_i	$P(A_i)$	$P(B \setminus A_i$	$P(A_i \cap B)$	$P(A_i \setminus B)$
A_1	$0,65$	$0,02$	$0,65 * 0,02 = 0,013$	$0,013/0,031 = 0,581$

A_2	$0,35$	$0,05$	$0,35 * 0,05 = 0,018$	$0,018/0,031 = 0,419$
	$\sum = 1$			$\sum = 1$

- Interpretación de cada una de las columnas:

COLUMNA	DESCRIPCIÓN
Columna 1	A_1: Que la parte venga del **proveedor 1.** A_2: Que la parte venga del **proveedor 2.**
Columna 2	$P(A_1)$ = **0,65**: es la probabilidad de que la parte venga del **proveedor 1**. $P(A_2)$ = **0,35**: es la probabilidad de que la parte venga del **proveedor 2.**
Columna 3	**P (M \ A1) = 0,02** probabilidad de que la parte sea mala dado que venga del **proveedor 1.** **P (M \ A2) = 0,05** probabilidad de que la parte sea mala dado que venga del **proveedor 2.**
Columna 4	**P (A_1∩M) = 0,013** probabilidad de que la parte venga del **proveedor 1** y **sea mala.** **P(A_2∩M) = 0,018** probabilidad de que la parte venga del **proveedor 2** y **sea mala.**
Columna 5	**P (A_1\M)** si la parte es mala, la probabilidad de que venga del **proveedor 1** es **0,419**

	P (A_2\M) si la parte es mala, la probabilidad de que venga del **proveedor 2** es **0,581**.

2.2.9 EJERCICIO DE APRENDIZAJE

Se tienen las **probabilidades previas**:

P (A_1) = 0,2

P (A_2) = 0,5

P (A_3) = 0,3

Las **probabilidades condicionales** del **evento B** dados A_1, A_2, y A_3 son:

P (B/ A_1) = 0,5

P (B/ A_2) = 0,4

P (B/ A_3) = 0,3

Calcular las **probabilidades posteriores.**

Eventos	Probabilidades previas	Probabilidades condicionales	Probabilidades conjuntas	Probabilidades Posteriores
A_i	$P(A_i)$	$P(B \setminus A_i$	$P(A_i \cap B)$	$P(A_i \setminus B)$
A_1	$0,2$	$0,5$	$0,2 * 0,5 = 0,1$	$0,01/0,39 = 0,256$
A_2	$0,5$	$0,4$	$0,5 * 0,4 = 0,2$	$0,2/0,39 = 0,512$
A_3	$0,3$	$0,3$	$0,3 * 0,3 = 0,09$	$0{,}09/0{,}39 = 0{,}231$

	$\sum = 1$		$P(B) = 0,39$	$\sum = 1$

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

a. En las **Combinaciones con Repetición:** de m elementos tomados de n en n, dónde $m \geq n$, son los distintos grupos formados por n elementos de forma tal que:

> ***
> - No entran todos los elementos.
> - No importa el orden.
> - Si se repiten los elementos.

b. En las **Combinaciones sin Repetición:** ***de m elementos tomados de n en n, con m≥n*** son toda las agrupaciones posibles que puedan hacerse con los m elementos de tal forma que:

> ****
> - No entran todos los elementos.
> - No importa el orden.
> - NO se repiten los elementos.

2.2.10 EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

En los ejercicios que se le presentan a continuación pondrá en práctica todos los conceptos vistos en el desarrollo de la unidad, para entrar a resolverlos tenga presente los conceptos teóricos y los ejercicios de aprendizaje desarrollados durante la unidad, si tiene alguna duda trate de contactarse con alguno de sus compañeros o recurra a su respectivo tutor por alguno de los medios o canales de comunicación dispuesto para ello.

1. Dados tres conjuntos

A={a, b, c, d, 1, 2, 3}

B={d, e, c, h, 4, 2, 3}

C={a, f, g, d, 5, 2, 7}

Encontrar analítica y gráficamente (lo resaltado en rojo se debe ocultar para el estudiante)

A U B= {a, b, c, d, 1, 2, 3, e, h, 4}

A ∩ C= {a, d, 2}

A U B U C= {a,b,c,d,1,2,3,e,h,4,f,g,5,7}

A´= { e, h, 4, f, g, 5, 7}

---

2. Utilice la Regla de Adición

En una muestra de 750 estudiantes, 400 dijeron tener un video grabadora, 200 dijeron tener un computador y 150 dijeron tener ambos. Si un estudiante es seleccionado al azar,

a. ¿cuál es la probabilidad de que tenga sólo un video grabadora, sólo un computador y uno de cada uno?

P(A) = 400 /750 =0.53. P(B) = 200 /750 = 0.27. P(A∩ B) = 150 /750 = 0.20

b. Si un estudiante es seleccionado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga un computador o un video grabadora en su casa?

P(A o B) = P(A) + P(B) - P(A∩B) = 0.53 +0.27 - 0.20 = 0.60

---

4. Si una moneda se lanza dos veces al aire, cual es la probabilidad de que ambos lanzamientos su resultado sea sello es:

(1/2) x (1/2) = (1/4)

---

5. (Permutación sin repetición) Un coleccionista de monedas de Colombia posee 7 de distinto valor. ¿De cuantas maneras se pueden colocar en un escritorio en fila?

Pn = n! = n1*n2*n3*…………….

Pn =1*2*3*4*5*6*7

Pn= 5040

___

6. En la hilera de un salón de clase se tiene colocados 9 escritorios y se necesitan sentar 9 alumnos; de cuantas maneras se podrán sentar

___

7. (Permutación con Repetición) ¿Cuantas palabras de 18 letras se pueden formar con la palabra Santa fe de Antioquia?

Pn = n! / (n1!n2!......nk!)

s: 1	t: 2	d: 1	q: 1
a: 4	f: 1	i: 2	u: 1
n: 2	e: 2	o: 1	

Pn = 18! / (1!4!2!2!1!2!1!2!1!1!1!)

P18=1,66 E13

___

8. ¿De cuantas maneras de distintas formas se pueden colocar en un estante en fila 5 bolas blancas, 4 verdes, 3 rojas, 7 azules y 5 negras?

___

9. (Variación sin repetición) En un evento de belleza se seleccionaron la reina, la virreina y la princesa de un grupo de 5 finalistas, de ¿cuantas maneras se pueden seleccionar por parte del jurado?

nVm = n! / (n-m)!

5V3 = 5! / (5-3)!

5V3 = 60 maneras.

___

10. En una oficina de consultoría estadística se cuentan con 7 secretarias para 3 despachos. ¿De cuantas formas se puede asignar a cada despacho las secretarias?

___

11. (Variación con repetición) ¿Cuántas palabras de diez letras se pueden usar con las letras del alfabeto a y b?

$V^m n = n^m$

$V^{10} 2 = 2^{10}$

$V^{10} 2 = 1024$

___

12. ¿Cuantos números se pueden llegar a formar con tres cifras de nueve cifras del sistema decimal?

___

13. (Combinación sin repetición) De cuantas maneras se pueden sacar 10 naranjas de una caja que contiene 20 naranjas?

nCm : n! / m! (n - m)!

20C10 : 20! / 10! (20 - 10)!

20C10 : 184756

___

14. Cuantos grupos de 5 alumnos se pueden formar con 25 de una clase de matemáticas, si uno es distinto del otro por un estudiante.

___

15. (Combinación con repetición) En una pastelería hay 6 tipos diferentes de pasteles. ¿De cuantas maneras se pueden seleccionar 3 pasteles?

nCm : (n + m - 1)! / m! (n - 1)!

6C3 = (6 + 3 - 1)! / 3! (6 - 1)!

6C3 = 56 maneras

____

16. En una fiesta de disfraces hay 22 variedades de estilos. ¿De cuantas formas se pueden elegir 12 de ellos?

____

17. (Probabilidad Clásica) ¿Cuál es la probabilidad de lanzar una moneda al aire y caiga cara?

Población: La moneda tiene dos lados cara y sello: 2

Muestra: cara: 1

P(A) = 1 /2 = 0,5 *100= 50%

La probabilidad de caer cara en un lanzamiento es del 50%.

____

18. ¿Cuál es la probabilidad del evento de caer un número par al lanzar un dado?

____

19. De una urna que contiene 6 bolas blancas, 2 grises y 3 negras. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraerla salga gris?

____

20. (Probabilidad Conjunta) En una reunión familiar, el 60% de los invitados son mujeres y el resto hombres, de estos miembros el 25% fuma. ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y no fume?

P (M) = 0,60

P (H) = 1 – P (M) = 1- 0,6 = 0,4

P (F) = 0,25

P (NO F) = 1 – P (F) = 1 – 0,25 = 0,75

P (H ∩ NO F) = P (H) * P (NO F)

P (H ∩ NO F) = 0,4 * 0,75 = 0,30 * 100 = 30%

____

21. En una urna hay 9 bolas, 4 rojas, 3 verdes y 2 negras, se extra una bola y se vuelve a introducir, luego se extrae otra. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una verde y una negra?

____

22. En una oficina bancaria hay 20 personas esperando pagar por cheque, de las cuales el 45% son mujeres y el 20% van a pagar tarjeta VISA. ¿Cuál es la probabilidad de que vaya a pagar se hombre y vaya hacer otra transición?

____

23. (Probabilidad Condicional) Se conoce que un campeonato de futbol un equipo gana cada dos partidos y luego pierde o empata el siguiente, ¿cuál es la probabilidad de que gane el segundo partido dado que el primero lo gano si el campeonato tiene 18 fechas?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

G G Q G G Q G G Q G G Q G G Q G G Q

G: Gana: 12

Q: Empata o pierde: 6

P (G) = 12 /18 =0,67

P (Gane dos partidos / gano el primero)= (12/18*12/18) / (12/18)

P (Gane dos partidos / gano el primero)= 0,67

____

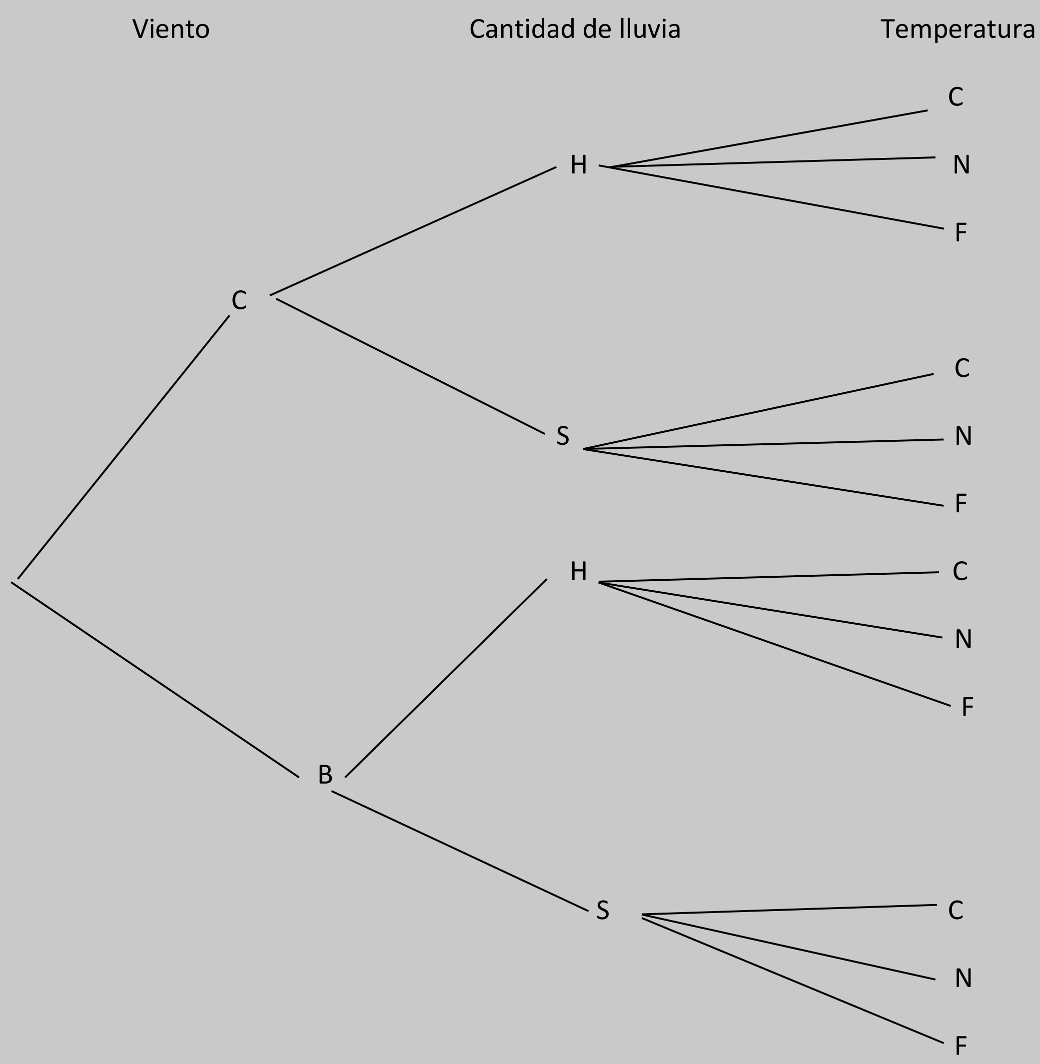
24. El meteorólogo pronostica que hoy habrá día de sol, con probabilidad del 55% y mañana lloverá con probabilidad del 46%, y que hoy y mañana habrá sol del 58%. ¿Cuál es la probabilidad de que llueva mañana dado que hoy hizo sol?

____

25. En un grupo de preparatoria, que consta de 60 mujeres y 40 varones, se observa que 25 son mujeres y 30 son hombres que laboran. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante elegido alzar labore dado que es mujer?

____

26. Observe que el observatorio astronómico clasifica cada día según las condiciones del viento en calma o brisa, según la cantidad de lluvia en húmedo y seco, y según la temperatura en un día cálido, normal o frio. ¿Cuál es la probabilidad de que un día sea de viento en calma, seco y normal?



P (V∩C∩T)= P(V) * P(C)*P (T)

P (V∩C∩T)= 1/2 * 1/2*1/3

P (V∩C∩T)= 1/12 = 0,08333*100=8,33%

La probabilidad de que un día sea de viento en calma, seco y normal es del 8,33%

27. Un médico general de un hospital de Colombia organiza su base de datos de acuerdo a sexo, tipo de sangre (A, AB, B u O) y presión sanguínea (alta, normal y baja). Mediante un diagrama de árbol ¿en cuántas clasificaciones y que valor pueden presentarse sus pacientes?

28. **(TEOREMA DE BAYES)**Tres máquinas de una empresa de confección, producen el 40%, 33% y 27% respectivamente del total de las piezas producidas. Los porcentajes de producción de piezas defectuosas de estas máquinas son del 4%, 3% y 2%.

Seleccionamos una pieza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

Se toma una pieza al azar y resulta que es defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que sea producida por la maquina A?

¿Cuál es la máquina que produce mayor cantidad de piezas defectuosas?

Sea

D= Piezas Defectuosas

No D= No piezas Defectuosas

P (A) = 0,40 P(B)= 0,33 P(C)= 0,27

P (D/A) = 0,04 P(D/B)= 0,03 P(D/C)= 0,02

29. P(D)= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C)

    P (D)= (0,40)(0,04) + (0,33)(0,03) + P(0,27)(0,02)

    P (D)= 0,03134* 100=3.13%

La probabilidad de que sea defectuosa es del 3,13%

30. P(A/D)= (P(A)P(D/A)) / P(D)

    P(A/D)= (0,40*0,04) / 0,03134

    P(A/D)= 0,511 * 100 = 51,1%

La probabilidad de que sea producida por la maquina A dado que es defectuosa es del 51,1%

31. P (B/D)= (P(B)P(D/B)) / P(D)

    P (B/D)= (0,33*0,03) / 0,03134

    P (B/D)= 0,316 * 100 = 31,6%

La probabilidad de que sea producida por la maquina B dado que es defectuosa es del 31,6%

P (C/D)= (P(C)P(D/C)) / P(D)

P(C/D)= (0,27*0,02) / 0,03134

P(C/D)= 0,173 * 100 = 17,3%

La probabilidad de que sea producida por la maquina C dado que es defectuosa es del 17,3%

La máquina que produce más piezas defectuosas es la A.

---

29. Se tienen tres bolsas de confites con 3 sabores: la bolsa 1 contiene 2 de mora, 10 de chocolate y 12 maní; la bolsa 2 contiene 6 de mora, 12 de chocolate y 15 maní; la bolsa 3 contiene 8 de mora, 7 de chocolate y 9 maní. Se selecciona una bolsa al azar y se extrae un dulce. Si el dulce es de mora. ¿Cuál es la probabilidad de que sea sacado de la bolsa 2?

---

30. Responda las siguientes situaciones de acuerdo a lo visto en la unidad

a. Con sus propias palabras de un ejemplo de probabilidades.
b. Realice tres ejemplos de tipos de probabilidades.
c. Realice un ejercicio de la vida cotidiana aplicando el diagrama de árbol.
d. Construya un ejercicio de la vida cotidiana aplicando del Teorena de Bayes.
e. Un equipo de fútbol juega 70% de sus partidos de noche y 30% durante el día. El equipo gana 50% de sus juegos nocturnos y 90% de los diurnos. De acuerdo con el diario del día de hoy, ganó ayer. a)¿Cuál es la probabilidad de que el partido se haya desarrollado de día? b)Cuál la probabilidad de que el partido se haya desarrollado de noche?

---

31. En un distrito electoral 40% de los votantes son liberales, 35% son conservadores y el resto son independientes. En la última elección de la primera vuelta el 15% de los liberales, el 20% de los conservadores y el 10% de los independientes votaron. Encuentre la probabilidad de que una persona que votó a) Sea liberal b) Sea conservador c) Sea independiente.

---

32. Un fabricante de artículos tiene 4 líneas de ensamble: A, B, C y D. Los porcentajes de producción diaria de las 4 líneas son: 35%, 20%, 30% y 15% respectivamente. Los porcentajes de unidades defectuosas por línea son: 2%, 4%, 3% y 4% respectivamente. Suponga que un artículo es extraído de la producción diaria y está defectuoso ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido de la línea a) A? b) B? c) C? d) D? e) ¿De cuál línea de ensamble es más probable que haya salido?

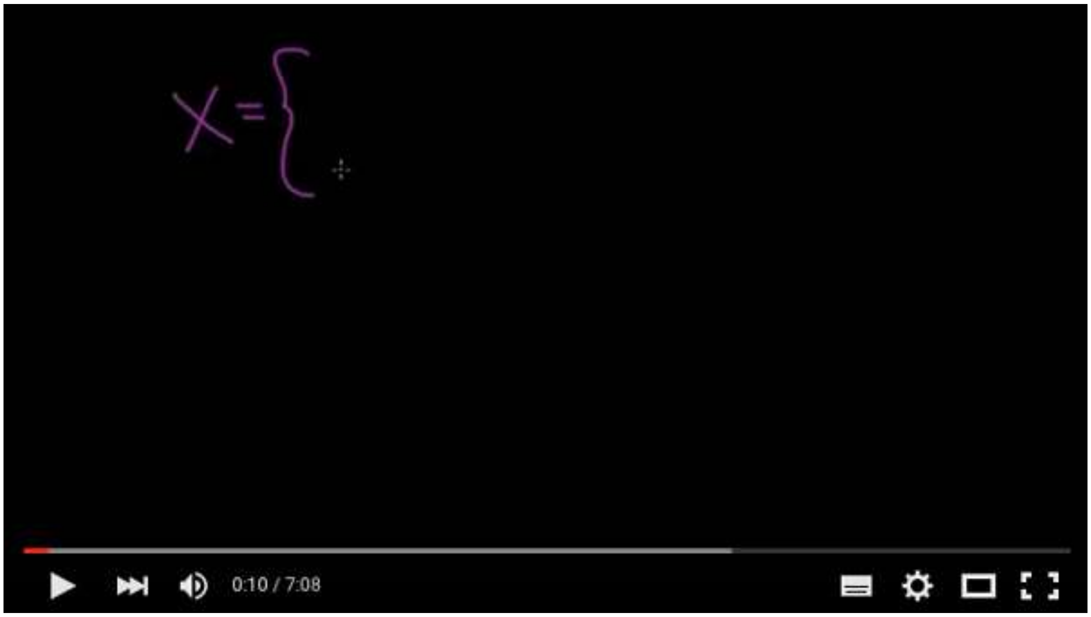
33. Un proceso de manufactura requiere el uso de un soldador robotizado en cada una de las dos líneas de ensamble A y B que producen 200 y 400 unidades por día respectivamente. Con base en la experiencia se cree que el soldador A produce 2% de las unidades defectuosas, mientras que el soldador B produce 5% de las unidades defectuosas; al final del día se selecciona una unidad al azar de la producción total y se halla defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la línea A? ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la línea B?

34. Un gerente de una línea de juguetes planea la introducción de un nuevo juguete al mercado. En el pasado el 40% de los juguetes introducidos por esta firma han tenido éxito y el 60% no lo han tenido. Antes de lanzar el juguete al mercado se hace una investigación de mercados y elabora un informe favorable o desfavorable. En el pasado 80% de los juguetes con éxito recibieron informes favorables y 30% de los juguetes sin éxito también recibieron informes favorables. El gerente desea saber la probabilidad de que el nuevo juguete tendrá éxito si recibe un informe favorable.

35. Una perfumería envía muestras de su último perfume al 70% de sus clientes. El 10% de los que recibieron la muestra empezaron a usar el perfume también el 20% de los clientes que no recibieron el perfume, empezaron a usarlo. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que esté usando el perfume haya recibido la muestra otorgada por la perfumería?

3 UNIDAD 2 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES

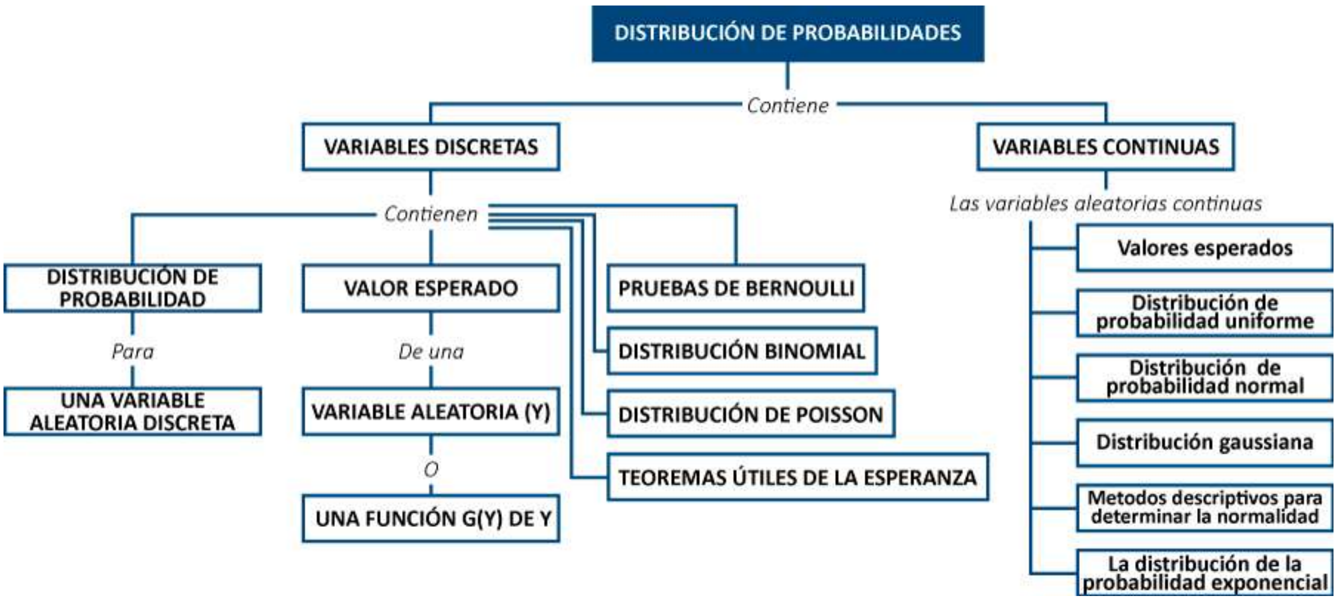
dxsp.sergas.es/.../4-Ayuda%20**Distribuciones**%20de%20**probabilidad**.pdf



Introducción a la distribución de probabilidades discretas Enlace

distribución de probabilidades Enlace

3.1.1 RELACIÓN DE CONCEPTOS



DEFINICIÓN CONCEPTOS BÁSICOS

- **VARIABLE ALEATORIA**: FORMALMENTE, UNA VARIABLE ALEATORIA ES UNA FUNCIÓN, QUE ASIGNA EVENTOS (P.E., LOS POSIBLES RESULTADOS DE TIRAR UN DADO DOS VECES: (1, 1), (1, 2), ETC.) A NÚMEROS REALES (P.E., SU SUMA). UNA **VARIABLE ALEATORIA** O **VARIABLE ESTOCÁSTICA** ES UNA VARIABLE ESTADÍSTICA CUYOS VALORES SE OBTIENEN DE MEDICIONES EN EXPERIMENTO ALEATORIO.

- **VARIABLE DISCRETA:** UNA **VARIABLE DISCRETA** ES UNA VARIABLE QUE SÓLO PUEDE TOMAR VALORES DENTRO DE UN CONJUNTO NUMERABLE, ES DECIR, NO ACEPTA CUALQUIER VALOR SINO SÓLO AQUELLOS QUE PERTENECEN AL CONJUNTO.

- **VARIABLE CONTINUA**: UNA **VARIABLE CONTINUA** PUEDE TOMAR UN VALOR CUALQUIERA DENTRO DE UN INTERVALO PREDETERMINADO.

- **VALOR ESPERADO**: EN ESTADÍSTICA LA **ESPERANZA MATEMÁTICA** (TAMBIÉN LLAMADA **ESPERANZA**, **VALOR ESPERADO**, **MEDIA POBLACIONAL** O **MEDIA**) DE UNA VARIABLE ALEATORIA X, ES EL NÚMERO $\mathrm{E}[X]$ QUE FORMALIZA LA IDEA DE *VALOR MEDIO* DE UN FENÓMENO ALEATORIO.

- **DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD:** ES UNA FUNCIÓN QUE ASIGNA A CADA SUCESO DEFINIDO SOBRE LA VARIABLE ALEATORIA, LA PROBABILIDAD DE QUE DICHO SUCESO OCURRA. LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD ESTÁ DEFINIDA SOBRE EL CONJUNTO DE TODOS LOS SUCESOS, CADA UNO DE LOS SUCESOS ES EL RANGO DE VALORES DE LA VARIABLE ALEATORIA.

- **DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL:** EN ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD SE LLAMA **DISTRIBUCIÓN NORMAL**, **DISTRIBUCIÓN DE GAUSS** O **DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA**, A UNA DE LAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLE CONTINUA QUE CON MÁS FRECUENCIA APARECE APROXIMADA EN FENÓMENOS REALES.

- **DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD UNIFORME:** EN TEORÍA DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA, LA **DISTRIBUCIÓN UNIFORME CONTINUA** ES UNA FAMILIA DE DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD PARA VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS, TALES QUE CADA MIEMBRO DE LA FAMILIA, TODOS LOS INTERVALOS DE IGUAL LONGITUD EN LA DISTRIBUCIÓN EN SU RANGO SON IGUALMENTE PROBABLE.

- **DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD GAUSSIANA**: EN ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD SE LLAMA **DISTRIBUCIÓN NORMAL**, **DISTRIBUCIÓN DE GAUSS** O **DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA**, A UNA DE LAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLE CONTINUA QUE CON MÁS FRECUENCIA APARECE APROXIMADA EN FENÓMENOS REALES.

- **DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD EXPONENCIAL**: EN ESTADÍSTICA LA **DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL** ES UNA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD CONTINUA CON UN PARÁMETRO $\lambda > 0$ CUYAFUNCIÓN DE DENSIDAD ES:

$$f(x) = P(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

DEFINICIONES TOMADAS DE: WIKIPEDIA, LA ENCICLOPEDIA LIBRE

ES.WIKIPEDIA.ORG/WIKI

3.1.2 OBJETIVO GENERAL

Distinguir las distribuciones de las diferentes probabilidades.

3.1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conocer las probabilidades de la distribución discreta.
- Conocer las probabilidades de la distribución continua.
- Diferenciar cada modelo de probabilidad.

3.2 TEMA 1 VARIABLES DISCRETAS

Antes de entrar a definir lo que es una variable discreta, se definirá lo que es una Variable Aleatoria.

VARIABLE ALEATORIA

Es **una variable cuyos valores** están determinados por **el resultado de un proceso al azar o aleatorio**; por tanto, una variable aleatoria se puede definir como la **descripción numérica del resultado de un experimento**; por ejemplo si se lanza una moneda dos veces, el número de caras que pueden aparecer puede tomar valores de 0,1, 2.

Las variables aleatorias se representan con **letras mayúsculas** como **X, Y, Z**

Ejemplos:

Ejemplo 1: lanzar un dado, la variable aleatoria **"Y"** indica el número que aparece en la cara superior **Y = 1, 2, 3, 4, 5, 6**

Ejemplo 2: lanzar una moneda sucesivamente hasta que **salga cara** **Z = 1, 2, 3….**

Ejemplo 3: un estudiante está realizando un examen y el tiempo límite es de una hora; si **"X"** es el **número de minutos** que le lleva para terminar el examen entonces **$0 < X \leq 60$** la variable aleatoria es **un intervalo**.

Clasificación de las variables aleatorias	
Variable aleatoria discreta	Si toma un **número finito** o **infinito** de **valores separados**; es decir, si sus valores corresponden a los **enteros positivos** como los ejemplos **1** y **2** se origina de **un proceso de conteo.**
Variable aleatoria continua	Si toma **cualquier valor** dentro de **un intervalo**, se origina de un **proceso medición**, como el **ejemplo 3.**

3.2.1 EJERCICIO DE APRENDIZAJE

En los siguientes experimentos diga cuales valores puede tomar la variable y que tipo de variable aleatoria es:

Experimento	Variable aleatoria(X)	Valores posibles	Tipo de vr
Funcionamiento de un banco	**Tiempo** en minutos entre **la llegada de los clientes**	$x \geq 0$	**Continua**
Llamar a 5 clientes	**Cantidad de clientes** que hacen el pedido	$x = 1, 2, 3, 4, 5$	**Discreta**
Proyecto para construir una biblioteca	**Porcentaje** del proyecto **terminado en seis meses**	$0 \leq x \leq 100$	**Continua**
Clientela de un restaurante	**Cantidad de clientes**	$x = 0, 1, 2, 3, \ldots$	**Discreta**
Inspeccionar un embarque de 50 tubos	**Cantidad de tubos defectuosos**	$x = 0, 1, 2, .., 50$	**Discreta**

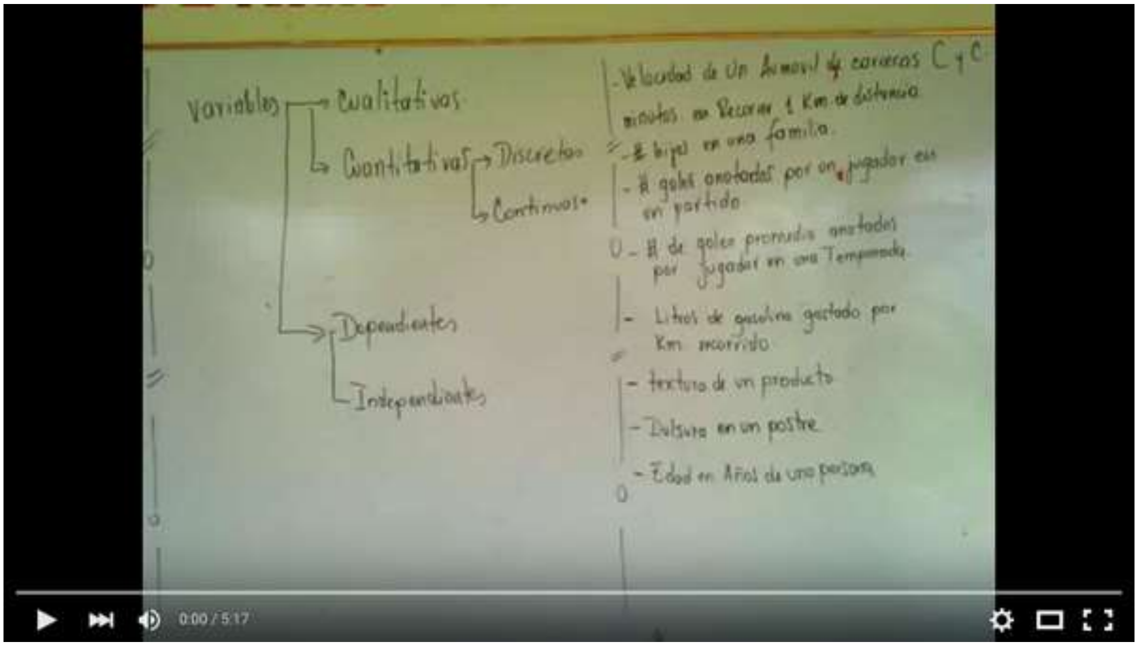
Variable Discreta: es una variable cuantitativa que toma valores aislados.

Nota: Esta variable no admite valores intermedios entre dos valores determinados o específicos.

Ejemplo: El número de hermanos de tres amigos: 2, 5, 1

Una variable discreta también se puede definir como aquella que **establece categorías** en **términos cualitativos** entre elementos. Ejemplo: estado civil, sexo, servicios de un centro de salud, entre otros.

En el siguiente video encontrarás una amplia explicación y ejemplos de lo que son las variables Discreta y Continua



variables discretas y continuas [Enlace]

3.2.2 EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

De acuerdo a lo indicado en el video, realiza un listado de 10 variables Discretas y 10 variables Continuas:

VARIABLES DISCRETAS	VARIABLES CONTINUAS
1.	1.
2.	2.
3.	3.
4.	4.
5.	5.

6.	6.
7.	7.
8.	8.
9.	9.
10.	10.

- La distribución de probabilidad para una variable aleatoria discreta.

La **distribución de probabilidad** para una variable aleatoria discreta x es una tabla, gráfica o fórmula que da la probabilidad $P(X = x)$ asociada a cada posible valor de x.

- **Distribución aleatoria discreta**, *variable aleatoria, es comparar una distribución de frecuencias con una de probabilidad.*
- Distribución aleatoria: Una variable aleatoria es discreta cuando sólo puede tomar unos ciertos valores enteros.

Ejemplos de variable aleatoria

- Número de caras obtenidas al lanzar tres monedas: 0, 1, 2, 3.
- Suma de las caras superiores obtenidas al lanzar dos dados: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Distribución de probabilidad

- En las distribuciones estadísticas discretas se obtienen los resultados en forma **empírica** o **experimental**: $\textbf{\textit{Resultados}}$: $\textbf{\textit{Frecuencias Absolutas}}\ f_i$ $\textbf{\textit{y Frecuencias Relativas}}\ h_i$.

- Realizando el experimento **muchas veces** (**infinitas**) se obtiene la **Distribución de Probabilidad**.

- La **Distribución de Probabilidad** de una variable aleatoria es **teórica** y son los **resultados esperados**.

- Es una **idealización** de la correspondiente **Distribución de Frecuencias.**

- También se llama **Función de probabilidad** o **Ley de Probabilidad.**

➤ **Características**

- A cada valor de la **Variable Aleatoria** x_i se le hace **corresponder** una probabilidad esperada teórica p_i.
- Se representa gráficamente mediante un **Diagrama de Barras.**
- **La suma** de todas las **probabilidades esperadas** es **uno (1).**

3.2.3 EJERCICIO DE APRENDIZAJE

Se lanza un **dado perfecto** 240 veces, se anota el resultado obtenido en la cara superior obteniendo los siguientes resultados:

Distribución aleatoria discreta						
Cara superior	1	2	3	4	5	6
Número de veces	40	39	42	38	42	39

Se pide:

a. Construir la tabla de **Distribución de Frecuencias Relativas** de los resultados obtenidos.

b. Construir **la Distribución de Probabilidad** de los resultados esperados.

c. Representar gráficamente las **dos Distribuciones**.

Nota: Si un dado es perfecto la Probabilidad de cada una de las caras es la misma: $\frac{1}{6}$

Procedimiento

1. Se realiza la Tabla de distribución de frecuencias:

Nota: La tabla de distribución de frecuencias muestra los resultados obtenidos.

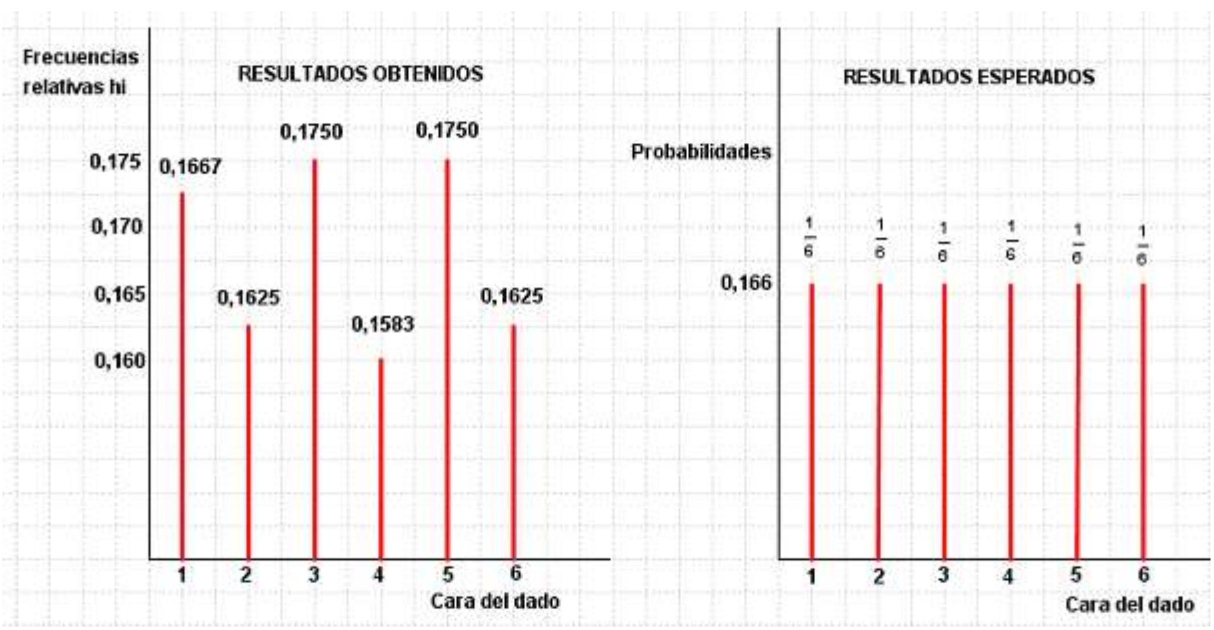
Cara x_i	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa h_i
1	40	$\frac{40}{240}$ =0,1667
2	39	$\frac{39}{240}$ =0,1625
3	42	$\frac{42}{240}$ =0,1750
4	38	$\frac{38}{240}$ =0,1583
5	42	$\frac{42}{240}$ =0,1750
6	39	$\frac{39}{240}$ =0,1625
	$\sum f_i = 240$	$\sum h_i = 1$

2. La tabla de **distribución de probabilidad** muestra los resultados esperados

Cara x_i	Número de veces	Probabilidades p_i
1	40	$\frac{1}{6} = 0,1667$

2	40	$\frac{1}{6} = 0{,}1667$
3	40	$\frac{1}{6} = 0{,}1667$
4	40	$\frac{1}{6} = 0{,}1667$
5	40	$\frac{1}{6} = 0{,}1667$
6	40	$\frac{1}{6} = 0{,}1667$
	$\sum \# \, veces = 240$	$\sum p_i = 1$

3. Gráfica de las distribuciones



En la gráfica de **los valores esperados**, se observa que a cada valor de **la variable aleatoria** x_i **"cara del dado"** se le hace corresponder su **probabilidad teórica**. A esta ley se le llama **distribución de probabilidad.**

Tomado de: Distribuciones probabilidad discreta - Monografias.com

www.monografias.com › *Matematicas* › *Estadistica*

- El valor esperado de una variable aleatoria (y) o una función g (y) de y.

En estadística **valor esperado** (también llamada **esperanza**, la **esperanza matemática**, **media poblacional** o **media**) de una **variable aleatoria** X, es el número $E[X]$ que formaliza la idea de **valor medio** de un fenómeno aleatorio.

Cuando **la variable aleatoria es discreta**, **la esperanza** es igual a:

La **suma de la probabilidad** de cada posible **suceso aleatorio multiplicado** por **el valor** de dicho suceso.

Nota 1: Representa la cantidad media que se **"espera"** como resultado de un **experimento aleatorio** cuando:

- La **probabilidad** de cada suceso se **mantiene constante**, y
- El **experimento** se repite **un elevado número de veces**.

Nota 2: Cabe decir que el valor que toma la **esperanza matemática** en algunos casos puede **no ser "esperado",** en el sentido más general de la palabra - el **valor de la esperanza** puede ser **improbable o** incluso **imposible**.

3.2.4 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. El valor esperado cuando tiramos un dado equilibrado de **6 caras** es **3,5**. Realizando el cálculo:

$$\boldsymbol{E[X] = 1 * \frac{1}{6} + 2 * \frac{1}{6} + 3 * \frac{1}{6} + 4 * \frac{1}{6} + 5 * \frac{1}{6} + 6 * \frac{1}{6}}$$

$$\boldsymbol{E[X]} = \frac{\mathbf{1+2+3+4+5+6}}{\mathbf{6}} = \mathbf{3,5}$$

Conclusión: 3,5 no es un valor posible al rodar el dado. En este caso, en el que todos los sucesos son de **igual probabilidad**, **la esperanza** es igual a la **media aritmética.**

2. Una aplicación común de **la esperanza matemática** es en **las apuestas** o **los juegos de azar**. Por ejemplo, la **ruleta americana** tiene **38 casillas** equiprobables. La ganancia para acertar una apuesta a un solo número **paga de 35 a 1** (es decir, se cobra 35 veces lo que se ha apostado y se recupera la apuesta, así que se recibe 36 veces lo que se ha apostado). Por tanto, considerando los **38 posibles resultados**, la **esperanza matemática** del **beneficio para apostar** a un solo número es:

$$\left(-1 * \frac{37}{38}\right) + \left(35 * \frac{1}{38}\right) = -0{,}0526$$

Por lo tanto uno esperaría, en media, perder unos **5 centavos** por **cada euro** que apuesta, y el valor esperado para apostar **1 euro** son **0.9474 euros.** En el mundo de las apuestas, un juego donde el **beneficio esperado es cero** (no se gana ni se pierde) se llama un **"juego justo".**

Nota 1: El <u>**primer paréntesis**</u> es la **"esperanza"** de **perder la apuesta** de 1€, por eso **es negativo el valor**.

Nota 2: El <u>**segundo paréntesis**</u> es la **esperanza matemática** de **ganar los 35€**.

Nota 3: La **esperanza matemática del beneficio (EMB)** es:

$$\boldsymbol{EMB = El\ valor\ esperado\ a\ ganar - El\ valor\ esperado\ a\ perder}$$

Tomado de: <u>Esperanza matemática - Wikipedia, la enciclopedia libre</u>

es.wikipedia.org/wiki/Esperanza_matemátic

3.2.5 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. ¿Cuántas caras se pueden obtener al lanzar dos monedas?

- El espacio muestral sería:

$$S = \{cc, cs, sc, ss\}$$

$$x = número\ de\ caras \longrightarrow x = 0, 1, 2$$

$$f(x): Probabilidad\ de\ que\ ocurra\ cada\ evento$$

x				
0	(s,s)	$P(x)=0$	$\frac{1}{4}$	$f(0)$
1	$(c,s)\ (s,c)$	$P(x)=1$	$\frac{2}{4}$	$f(1)$
2	(c,c)	$P(x)=2$	$\frac{1}{4}$	$f(2)$

- **Distribución de probabilidades:**

En el Ejercicio:

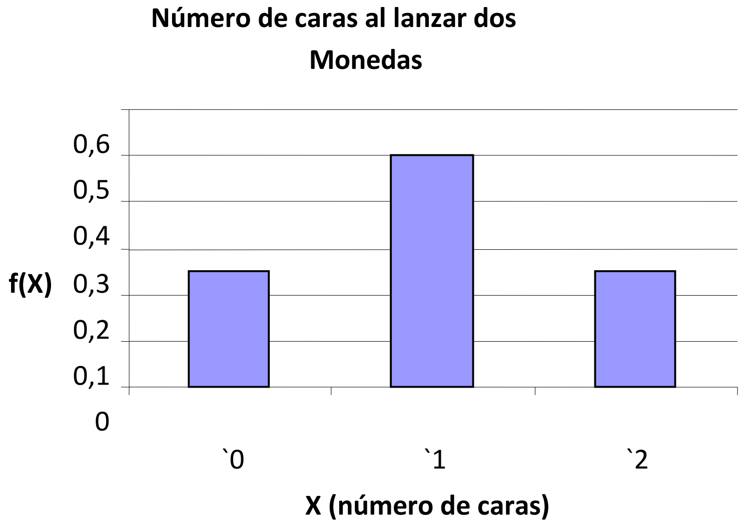
- El valor esperado de obtener caras al lanzar dos monedas es 1.
- El número de caras que se obtienen al lanzar dos monedas se desvían $\mathbf{0.707}$ de su promedio $\mathbf{1}$ $\left(\sqrt{\mathbf{0.5}}=\mathbf{0.707} **\right)$.

- **Tabla de Frecuencias**

x	$f(x)$	$x*f(x)$	$(x-\mu)^2*f(x)$
0	$\frac{1}{4}=0.25$	$0*\frac{1}{4}=0$	0.25
1	$\frac{2}{4}=0.5$	$1*\frac{2}{4}=0.5$	0
2	$\frac{1}{4}=0.25$	$2*\frac{1}{4}=0.5$	0.25
	$\sum=1$	$\sum=\frac{4}{4}\mu=1$	$\sum=0.5=\sigma^2**$

Nota: Siempre se debe cumplir que: $f(x)\geq 0$ y que $\sum f(x)=1$ por las **propiedades de las probabilidades.**

- **Gráfica de distribución de probabilidades:**



---

2. A continuación se tienen los datos sobre la cantidad de salas de operación en uso durante **20 días** de un hospital:

x Salas de operación	N^o Días	$f(x)$	$x * f(x)$	$(x-\mu)^2 * f(x)$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{0.15}$	$\mathbf{1 * 0.15 = 0.15}$	$\mathbf{0.408}$
$\mathbf{2}$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{0.25}$	$\mathbf{2 * 0.25 = 05}$	$\mathbf{0.106}$
$\mathbf{3}$	$\mathbf{8}$	$\mathbf{0.4}$	$\mathbf{3 * 0.4 = 1.2}$	$\mathbf{0.049}$
$\mathbf{4}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{0.2}$	$\mathbf{4 * 0.2 = 0.8}$	$\mathbf{0.365}$
	$\sum = 20$	$\sum = 1$	$\sum = 2.65 = \mu$	$\sum = 0.928 = \sigma^2$***

X(salas de oper	Nº de días	f(X)	X* f(X)	**$(X - \mu)^2 * f(X)$**
1	3	0.15	0.15	0.408
2	5	0.25	0.5	0.106
3	8	0.4	1.2	0.049
4	4	0.2	0.8	0.365
	∑ = 20	∑ = 1	∑= 2.65 = μ	**∑** = 0.928 = σ^2

1) El valor esperado de las salas de operación en uso del hospital es **2,65**.

2) Las salas de operación en uso del hospital se desvían **0,963** $\left(\sqrt{\mathbf{0.928}} = \mathbf{0.963} \; ***\right)$ de su promedio **2,65.**

3.2.6 EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

Dada la anterior tabla de Frecuencias:

1) busque las funciones de probabilidad e interprete cada una de ellas.
2) Trace una gráfica de función de probabilidad.

Algunos teoremas útiles de la esperanza.

1. Al **multiplicar** todos los valores de una variable por una **misma constante**, el valor esperado de ésta **queda multiplicado** por **el valor de la constante.**

$$E(AX) = A.E(X)$$

2. Al **sumar** a todos los valores de una variable **una misma constante**, el valor esperado de ésta **queda incrementado** por el valor de **la constante**

$$E(X + A) = E(X) + A$$

3. Si se tienen dos variables **X** e **Y**, **discretas** o **continuas**, **el valor esperado** de su **suma** o **diferencia** es **la suma o diferencia de sus valores esperados**

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

1. Si las variables **X** e **Y** son **variables aleatorias independientes** ocurre que **el valor esperado de su producto** es igual al **producto de sus valores esperados.**

$$E(X.Y) = E(X).E(Y)$$

- **Pruebas de Bernoulli.**

La Distribución de Bernoulli, llamada también Distribución Dicotómica, es una distribución de Probabilidad Discreta que:

- Para **la Probabilidad de éxito** (**P**) toma **el valor 1**, y
- Para l**a Probabilidad de Fracaso** (**q**) toma el **valor 0.**

Nota: el valor de q está determinado por: $\boldsymbol{q = 1 - p}$

Sea $\boldsymbol{X}$ una **variable Aleatoria** que mide **el número de éxitos** y se realiza un único experimento con dos posibles resultados – **éxito o Fracaso** - se dice entonces que la variable Aleatoria $\boldsymbol{X}$ se distribuye como una **Bernoulli** de **Parámetro P** y se denota de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{X \sim B_e(p)}$$

La fórmula para determinar esta distribución está dada por:

$$\boldsymbol{f(x) = p^x (1 - p)^{1-x} \;\; con\; x = \{0, 1\}}$$

La función de Probabilidad está definida por:

$$f(x,p)\begin{Bmatrix} p \;\; si\, x = 1 \\ q \;\; si\, X = 0 \\ 0 \;\; En\ cualquier\ otro\ caso \end{Bmatrix}$$

Nota: Un experimento al cual se aplica **la distribución de Bernoulli** se conoce como Ensayo de Bernoulli o simplemente ensayo, y **la serie** de esos experimentos como ensayos repetidos.

Ejemplos:

En la práctica, estos ensayos, solo se utilizan para modelar fenómenos aleatorios que solo tienen dos resultados posibles:

- Lanzar una moneda y verificar el resultado:
- ✓ Si sale cara (éxito), o
- ✓ Si sale sello (fracaso).

Se supone entonces que: Una moneda tiene una probabilidad de éxito de 0,5 (50%).

- Cuando se lanza un dado, verificar si se obtiene **un tres** (**es un éxito**) o **cualquier otro valor** es **un fracaso**.
- ¿Era el recién nacido niña?

Nota: Se debe tener claro que **éxito** y **fracaso** son **etiquetas** para **los resultados** y no deben ser interpretados literalmente.

3.2.7 EJERCICIO DE APRENDIZAJE

¿Cuál es **la probabilidad** de lanzar un dado y que salga **2**?

Procedimiento

a. Al lanzar un dado se tienen **6** posibilidades de resultado, por lo tanto el espacio muestral (S), es:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

b. Sacar 2 se considera **Éxito,** la probabilidad es $P = \frac{1}{6}$ (ver espacio muestral).

c. No sacar 2 se considera un **Fracaso,** entonces:

$$q = 1 - p \rightarrow q = 1 - \frac{1}{6} \rightarrow q = \frac{6-1}{6} \rightarrow q = \frac{5}{6}$$

La probabilidad de que salga un 2 está definida por:

1. $x = 1$ (*éxito*), entonces reemplazando en la fórmula:

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x} \quad con\ x = \{0, 1\}$$

$$P(x=1) = (\frac{1}{6})^1 * \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{1-1} \rightarrow P(x=1) = \frac{1}{6} * \left(1 - \frac{1}{6}\right)^0$$

$$P(x=1) = \frac{1}{6} \rightarrow P(x=1) = 0,166$$

$0,166$ es la probabilidad de que salga un 2

2. $x = 0$ (*Fracaso*), reemplazando en la fórmula se tiene:

$$P(x=0) = (\frac{1}{6})^0 * \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{1-0} \rightarrow P(x=1) = 1 * \left(\frac{5}{6}\right)^1$$

$$P(x=0) = \frac{5}{6} \rightarrow P(x=0) = 0,833$$

$P(x=0) = 0,833$ ***es la probabilidad de que no salga un 2***

➢ LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Recomendación: http://www.jorgegalbiati.cl/nuevo_06/binomial.pdf

Es una **distribución aleatoria discreta** que cumple con las siguientes características:

1. Existe una serie de **N** **ensayos** u **observaciones**.

2. En cada ensayo sólo **hay 2 posibles resultados** **mutuamente excluyentes**, generalmente conocidos como **éxito** (que se denota con **P**) y **fracaso**(que se denota con **1-P**)

3. **El resultado** (éxito o fracaso) de cualquier ensayo **es independiente** del **resultado de otro ensayo**, es decir que **el resultado de un ensayo** **no afecta** el resultado de cualquiera de los demás.

4. La probabilidad de **cada resultado posible** que se clasifique como éxito **es constante** de **ensayo** en **ensayo**; lo mismo ocurre con **la probabilidad de fracaso.**

3.2.8 EJERCICIO DE APRENDIZAJE

¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de **20 microprocesadores** del mismo tipo **ninguno** salga **defectuoso,** si **8%** de dichos microprocesadores producidos en una planta en particular son defectuosos?

Procedimiento

1. Son **20** **ensayos** u **observaciones**.

2. Los resultados son **P = 0.08** salir **defectuoso** y **1-P = 0.92** **no salir** **defectuoso.**

3. La probabilidad de que un microprocesador se clasifique como **defectuoso** o **no defectuoso** **es independiente** de la clasificación de cualquier otro microprocesador.

4. En todos los ensayos se cumplirán **las probabilidades** del **punto segundo**.

Fórmula para la Distribución Binomial

Está dada por:

$$f(x) = C_r^n * P^r * (1-P)^{n-r}$$

Dónde:

n= **tamaño** de la muestra.

P= probabilidad de **éxito**.

$1-p$= probabilidad de **fracaso**.

r= número de **éxitos** en la muestra

Ejercicios de Aprendizaje

1. En un almacén se sabe por la experiencia que la probabilidad de que un cliente compre es de **0,30** Si entran **3 clientes** ¿Cuál es la probabilidad de que **dos** de ellos compren?

Procedimiento

a. Datos del problema

- n= **tamaño** de la muestra= 3
- P= probabilidad de **éxito**, que el cliente compre= $0,3$
- $1-p$= probabilidad de **fracaso**, que el cliente no compre

  $1-p = 1-0,3 = 0,7$

- r= número de **éxitos** en la muestra= 2

b. Se aplica la fórmula:

$$f(x) = C_r^n * P^r * (1-P)^{n-r}$$

c. Reemplazando los datos conocidos, se tiene

$$f(x) = C_2^3 * P^2 * (1-P)^{3-2} = 3 * (0,3)^2 * (0,7) \rightarrow$$

$$f(x) = 3 * 0,09 * 0,7 = 0,189$$

Solución: La posibilidad que dos de ellos compren es de $0,189$, que en porcentaje es $18,9\%$

---

2. Una moneda es lanzada **8 veces** ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos **2 caras**?

Procedimiento

a. Se tiene que:

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2)$$

b. Por lo tanto:

$$P(x < 2) = P(x = 0) + P(x = 1) \rightarrow$$

$$P(x < 2) = C_0^8 * (\tfrac{1}{2})^0 * \left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_1^8 * (\tfrac{1}{2})^1 * \left(\frac{1}{2}\right)^7 \rightarrow$$

$$P(x < 2) = \frac{8!}{0! * 8!} * 1 * \frac{1}{256} + \frac{8!}{1! * 7!} * \frac{1}{2} * \frac{1}{128} \rightarrow$$

$$P(x < 2) = 1 * 1 * \frac{1}{256} + 8 * \frac{1}{2} * \frac{1}{128} = \frac{9}{256}$$

c. Reemplazando, se tiene:

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2) = 1 - \frac{9}{256} = 0,9648$$

Nota: Además se pueden encontrar en la tabla de la distribución binomial, **r** se reemplaza por **X** y los demás datos quedan igual.

3.2.9 TALLER DE ENTRENAMIENTO

En los ejercicios que se le presentan a continuación pondrá en práctica todos los conceptos vistos en el desarrollo de la unidad, para entrar a resolverlos tenga presente los conceptos teóricos y los ejercicios de aprendizaje desarrollados durante la unidad, si tiene alguna duda trate de contactarse con alguno de sus compañeros o recurra a su respectivo tutor por alguno de los medios o canales de comunicación dispuesto para ello.

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

1. Para un grupo de personas, 20% de sus impuestos son auditados cada año. Se eligen 5 personas al azar ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 2 tendrán auditoría?

2. Un estudiante realiza un examen de 10 preguntas de falso y verdadero si él adivina Cuál es la probabilidad de que:

- **a)** Obtenga 8 preguntas correctas.
- **b)** Gane el examen, es decir que responda 6 preguntas correctas o más.
- **c)** Si el examen en vez de las 10 preguntas de falso y verdadero fueran de opción múltiple y cada pregunta fuera de 4 opciones, responda a) y b)

3. De acuerdo con ciertos datos, el 25% están a favor de la reelección y el resto en contra. Se eligen 4 personas al azar, cuál es la probabilidad de que:

- **a)** Todos estén a favor de la reelección.
- **b)** Todos estén en contra.
- **c)** Al menos 1 esté en contra.

4. En Uniremington el 35% de los estudiantes son de regiones diferente a Medellín. Se eligen 8 alumnos al azar, cuál es la probabilidad de que:

- **a)** Todos sean de otras regiones.
- **b)** Todos sean de Medellín.
- **c)** Como máximo 4 sean de otras regiones.

5. El 30% del Senado de Colombia está conformado por mujeres; si se seleccionan 7 Senadores al azar, cuál es la probabilidad de que:

- **a)** Todos sean mujeres.
- **b)** Todos sean hombres.
- **c)** Al menos 4 sean mujeres.

6. De acuerdo con las estadísticas en Uniremington, el 3% de los estudiantes pierden Estadística probabilística, si se eligen 6 estudiantes al azar, cuál es la probabilidad de que:

   a) Ninguno pierda la materia.
   b) Como máximo 2 pierdan la materia.
   c) Como mínimo 2 pierdan la materia.
   d) Al menos 1 pierda la materia.

DISTRIBUCIÓN POISSON

Es una **Distribución de Probabilidad Discreta** que, a partir de **una frecuencia de ocurrencia media**, expresa la probabilidad de que ocurran un determinado **número de eventos** durante cierto **período de tiempo**.

Está generalizada en la probabilidad de **ocurrencia de sucesos** con probabilidades **muy pequeñas** o **sucesos muy raros** (de hecho se le llama **Distribución de los eventos Raros**), porque usa como aproximación la Probabilidad Binomial, cuando el tamaño de la muestra es grande y la cantidad de éxitos es pequeña.

También se puede definir como:

1. Una distribución de probabilidad Discreta. Es la probabilidad de un número de eventos ocurriendo en **un tiempo fijo** si estos eventos ocurren con **una frecuencia de media conocida** y son **independientes** del instante de acontecer.

2. Es la relación de **una variable** con respecto a **espacio**, **volumen** y **tiempo**.

Nota: Esta probabilidad fue descubierta por Siméon Denis POisson qién la dio a conocer en 1.838 en su obra:

" Recherches sur la Probabilité des jugements en matière criminelles et matière civile" (Investigación sobre la probabilidad de los juicios en materias criminales y civiles).

Cuando en un **Espacio Aleatorio** $(E.A)$ se define una **variable Aleatoria**(X)**,** con una probabilidad de **ocurrencia pequeña**, esta se determina como una generalización de la **Distribución Binomial.**

Nota: La **variable Aleatoria**(X)**,** representa el número de **éxitos independientes** que ocurren para **intervalos de medidas específicas** (tiempos, lugares, espacios).

Los intervalos de medida se refieren a:

- ✓ **Tiempo:** Segundo, minuto, hora, día, semana, mes, año, entre otros.
- ✓ **Área:** Centímetro cuadrado, pulgada cuadrada, entre otras.
- ✓ **Volumen**: Litro, galón, onza, entre otras.

Ejemplo

Ejemplos de estos eventos que pueden ser modelados por la distribución de Poisson incluyen:

- ✓ El número de autos que pasan a través de un cierto punto en una ruta (suficientemente distantes de los semáforos) durante un periodo definido de tiempo.
- ✓ El número de errores de ortografía que uno comete al escribir una única página.
- ✓ El número de llamadas telefónicas en una central telefónica por minuto.
- ✓ El número de servidores web accedidos por minuto.
- ✓ El número de animales muertos encontrados por unidad de longitud de ruta.
- ✓ El número de mutaciones de determinada cadena de ADN después de cierta cantidad de radiación.
- ✓ El número de núcleos atómicos inestables que se han desintegrado en
- ✓ un determinado período.
- ✓ El número de estrellas en un determinado volumen de espacio.
- ✓ La distribución de receptores visuales en la retina del ojo humana.
- ✓ La inventiva de un inventor a lo largo de su carrera
- ✓ La distribución de la riqueza humana

- ✓ Número de defectos por m^2.en piezas similares de un material
- ✓ Número de personas que llegan a un taller automotriz en un lapso de tiempo específico.
- ✓ Número de impulsos electrónicos errados transmitidos durante espacio de tiempo específico.
- ✓ Número de llamadas telefónicas que ingresan a un conmutador por minuto.
- ✓ Número de interrupciones en servicios de energía en intervalos de un día.
- ✓ Cantidad de átomos que se desintegran en sustancia radioactiva.
- ✓ Número de accidentes automovilísticos en un cruce específico durante una semana.

- **Ecuación de Poisson**

Esta ecuación está dada por:

$$f(k,\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Dónde:

- $\boldsymbol{k}$: Número de ocurrencias del evento. (El evento efectivamente sucede k veces).
- $\boldsymbol{\lambda}$: Es un **parámetro positivo** (representa el número de veces que se espera ocurra el fenómeno durante el intervalo determinado, por ejemplo:

Si un suceso tiene lugar en promedio cada 2 segundos y se está interesado de que ocurra k veces durante 15 segundos, el modelo de distribución de Poisson se determina con:

$$\lambda = 15 \times 2 = 30$$

- $\boldsymbol{e}$: Es la base de los logaritmos naturales ($e = 2{,}71828\ldots$)
- Tanto el **valor esperado** como **la varianza** de una variable aleatoria con distribución de Poisson **son iguales** a λ.

- La moda de una variable aleatoria de distribución de Poisson con un λ **no entero** es igual a $\lfloor\lambda\rfloor$, **el mayor** de los enteros menores que λ (el símbolo $\lfloor\ \rfloor$ representan **la función parte entera**).
- Cuando λ es **un entero positivo**, las **modas** son λ y $\lambda - 1$
- La **función generadora** de momentos de la distribución de Poisson con **valor esperado** λ es:

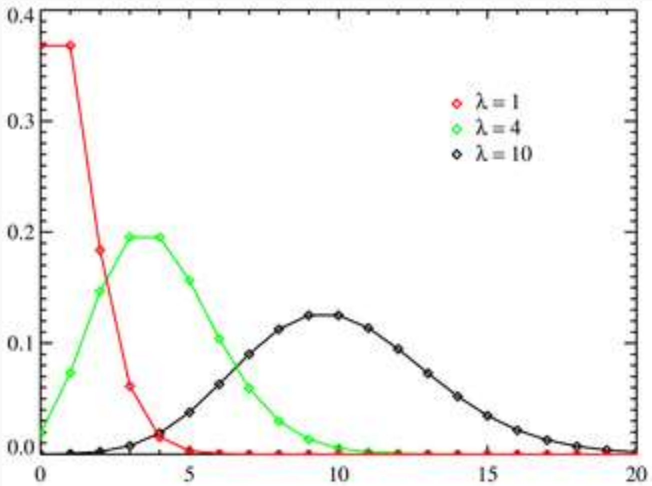
$$E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} f(k,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

- Las variables aleatorias de Poisson tienen la propiedad de ser **infinitamente divisibles.**
- La **divergencia Kullback-Leibler** desde una variable aleatoria de Poisson de parámetro λ_0 a otra de parámetro λ está dada por:

$$D_{KL}(\lambda \parallel \lambda_0) = \lambda(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} + \frac{\lambda_0}{\lambda} log \frac{\lambda_0}{\lambda})$$

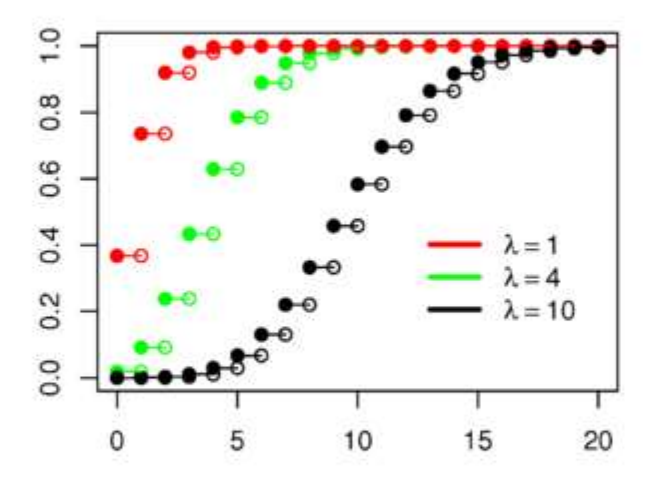
GRÁFICAS Y ELEMENTOS DE LA DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Distribución de Poisson



El eje horizontal es el índice *k*. La función solamente está definida en valores enteros de *k*. Las líneas que conectan los puntos son solo guías para el ojo y no indican continuidad.

Función de probabilidad



El eje horizontal es el índice *k*.

Función de distribución de probabilidad

<u>Parámetros</u> $\lambda \in (0, \infty)$

Dominio	$k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$
Función de probabilidad(fp)	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$
Función de distribución(cdf)	$\frac{\Gamma(\lfloor k+1 \rfloor, \lambda)}{\lfloor k \rfloor!}$ for $k \geq 0$ (dónde $\Gamma(x, y)$ es la Función gamma incompleta)
Media	λ
Mediana	$\text{usualmente cerca de } \lfloor \lambda + 1/3 - 0.02/\lambda \rfloor$
Moda	$\lceil \lambda \rceil - 1$
Varianza	λ
Coeficiente de simetría	$\lambda^{-1/2}$
Curtosis	$3 + \lambda^{-1}$
Entropía	$\lambda[1 - \ln(\lambda)] + e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \ln(k!)}{k!}$
Función generadora de momentos(mgf)	$\exp(\lambda(e^t - 1))$
Función característica	$\exp(\lambda(e^{it} - 1))$

Tomado de: Distribución de Poisson - Wikipedia, la enciclopedia libre

es.wikipedia.org/wiki/**Distribución**_de_**Poisson**

Referencia: Distribución Poison - Universidad Nacional de Colombia www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/2001065/.../cont_232_74.html

- **Intervalo de Confianza**

Un criterio fácil y rápido para calcular un intervalo de confianza aproximada de λ es propuesto por Guerriero (2012).

Dada una serie de eventos k (al menos el **15 - 20**) en un periodo de tiempo T, los límites del **intervalo de confianza** para **la frecuencia** vienen dadas por:

$$F_{low} = (1 - \frac{1,96}{\sqrt{k-1}})\frac{k}{T}$$

$$F_{upp} = (1 + \frac{1,96}{\sqrt{k-1}})\frac{k}{T}$$

Entonces, **los límites del parámetro** λ están dadas por:

$$\lambda_{low} = F_{low}T$$

$$\lambda_{uup} = F_{uup}T$$

___

- Relación de Poisson con otras Distribuciones

- Sumas de variables aleatorias de Poisson

La suma de variables aleatorias de Poisson **independientes** es otra variable aleatoria de Poisson cuyo **parámetro** es **la suma de los parámetros** de las originales. Dicho de otra manera, si:

$$X_i \sim P_{oi}(\lambda_i), i = 1, 2, 3, \ldots, N$$

Son N **variables aleatorias** de Poisson **independientes**, por lo tanto:

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim P_{oi}(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i$$

- Distribución binomial

La **distribución de Poisson** es el **caso límite** **de la distribución binomial**.

Si los parámetros:

n ***tiende a infinito*** $(n \to \infty)$ y θ ***tiende a cero*** $(\theta \to 0)$, de manera que:

$\lambda = n\theta$, se mantenga **constante**, entonces la **distribución límite** que se obtiene es de **Poisson**.

- **Aproximación Normal**

Como consecuencia del **teorema central del límite**, para **valores grandes** de λ, una **variable aleatoria** de Poisson X puede aproximarse por **otra normal** dado que:

$Y = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$, converge a una distribución normal de **Media Nula** y **Varianza igual a 1.**

- **Distribución exponencial**

Supóngase que para cada valor $t > 0$, que representa **el tiempo**, el número de sucesos de cierto fenómeno aleatorio sigue una distribución de Poisson de parámetro λt. Entonces, los tiempos transcurridos entre dos sucesos sucesivos sigue **la distribución exponencial**.

3.2.10 EJERCICIO DE APRENDIZAJE

Si el **2%** de los libros encuadernados en cierto taller tiene encuadernación defectuosa, para obtener la probabilidad de que **5 de 400** libros encuadernados en este taller tengan **encuadernaciones defectuosas** se usa la distribución de Poisson. En este caso concreto:

$k = 5$, y

λ El valor esperado de libros defectuosos.

Procedimiento:

a. El valor esperado de **libros defectuosos**:

$$\lambda = 2\% \times 400 \rightarrow \lambda = \frac{2 \times 400}{100} = 8$$

b. La **probabilidad buscada** es:

$$P(5,8) = \frac{8^5 e^{-8}}{5!} = 0,092$$

c. Este problema también podría resolverse recurriendo a una **distribución binomial** de parámetros **k = 5, n = 400** y θ**=0,02**.

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN DE POISSON

En los siguientes enlaces encontrarás las tablas de Distribución de Poisson, realiza una revisión completa de los mismos para que los apliques correctamente en el momento que realices actividades que involucren estos conceptos

Tabla de distribución Poisson(T) - Jorge Galbiati | Estadística

*www.jorgegalbiati.cl/nuevo_06/**Poisson**.pd*

- http://web.frm.utn.edu.ar/estadistica/TablasEstadisticas/TD4_PoissonAcumulada.pdf

3.3 TEMA 2 VARIABLES CONTINUAS

En este tema se determinarán los valores que puede tomar, esto es, una **variable continua** puede tomar un valor cualquiera dentro de un intervalo predeterminado o también, Una **variable continua** es una **variable cuantitativa** que puede tomar **valores comprendidos entre dos números.** Una variable continua toma valores en todo un intervalo de valores. Un atributo esencial de una variable continua es que, a diferencia de una variable discreta, **nunca puede ser medida con exactitud**; el valor observado depende en gran medida de la precisión de los instrumentos de medición. Con una variable continua hay inevitablemente **un error de medida**. Como ejemplo, la estatura de una persona (1.710m, 1.715m, 1.174m....)

- **Definición de variables aleatorias continúas**

Una variable continua es un **conjunto de valores** de la variable que abarca **un intervalo.**

También se puede definir como: Una variable aleatoria es continua si su recorrido **no es un conjunto numerable**, esto es, comprende un intervalo de **números Reales**, el ejemplo más claro de lo que es una variable continua es el de la estatura de una persona extraída de una población determinada de personas y se dice que esta puede estar contemplada entre $\mathbf{0,30\ metros\ y\ 2,10\ metros}$.

FUNCIÓN DE DENSIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

La **función de densidad de probabilidad (FDP)** o **función de densidad**, se representa como $\boldsymbol{f(x)}$, se utiliza para conocer la distribución de probabilidades de **un suceso** o **evento**, en relación al **resultado del suceso**.

La **FDP (Función Densidad de Probabilidad)** es **la derivada** (ordinaria o en el sentido de las distribuciones) de la función de distribución de probabilidad $\boldsymbol{F(x)}$,o de **manera inversa**, la función de distribución es **la integral** de **la función de densidad**, esto es:

$$\boldsymbol{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt}$$

Se puede determinar claramente que:

La **función de Densidad** de una variable Aleatoria determina la **concentración de probabilidad** alrededor de los valores de una variable aleatoria continua.

- **Valores esperados de variables aleatorias continuas**

La esperanza matemática para una variable aleatoria continua, con una función de Densidad f_x, está determinada por:

$$\boldsymbol{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) dx}$$

➢ **Propiedades**

1. La esperanza de una constante es la misma constante, así:

SI $k(X(w)) = k \to E(X) = k$

2. LA ESPERANZA DE LA VARIABLE:

$$ax + b \text{ con } a \text{ y } b \text{ constantes es igual a } a$$

3. SI UNA VARIABLE ALEATORIA TIENE COMO FUNCIÓN DE PROBABILIDAD O (CERO) DE DENSIDAD, SIMÉTRICA RESPECTO A UN VALOR A, LA ESPERANZA ES DICHO VALOR A (SI LA ESPERANZA EXISTE).

- **VARIANZA**

La varianza para una variable aleatoria continua está determinada por:

$$Var(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

Esta varianza también se puede calcular de la siguiente forma:

$$Var(x) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)dx - \mu^2$$

- **Propiedades de la varianza:**

$$1.\, Var(X) = \sigma^2 = E\left[\left(X - E(X)\right)^{2]} = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 = \alpha_2 - \mu^2$$

$$2.\, La\ varianza\ vale\ cero \Leftrightarrow X\ es\ una\ constante$$

$$Recuerde\ que \Leftrightarrow se\ lee\ "Si\ y\ solo\ sí\ ..."$$

$$3. \, Si \; b \; es \; una \; constante \;\; \Longrightarrow Var(X+b) = Var(X)$$

$$Recuerde \; que \Longrightarrow se \; lee \; "Entonces \ldots, Implica \; que \ldots"$$

$$4. \, Si \; a \; es \; una \; constante \;\; \Longrightarrow Var(aX) = a^2 Var(X)$$

Tipificación de una Variable

Si X es una Variable Aleatoria de:

- ✓ Media μ ,y
- ✓ Varianza σ^2

Entonces se dice que:

$$La \; variable \; Z \; es \; la \; Variable \; X \; tipificada \; si \; Z = X - \mu$$

Dónde σ es la desviación típica de X (raíz cuadrada positiva de la varianza).

Nota: Esta Tipificación es válida tanto para variables discretas, como para variables continuas.

- **Propiedades de Tipificación de una variable**

1. La variable Tipificada tiene **Media** igual a **cero**:

$$E(Z) = 0$$

1. La variable Tipificada tiene Varianza igual a 1:

$$Var(Z) = 1$$

Distribución de Probabilidad Uniforme

La distribución uniforme es **una familia** de **distribuciones de probabilidad** de **las variables aleatorias continuas**, la cual va asociada a **un intervalo de valores** de **igual longitud** en la cual son posibles de suceder los eventos, definida por parámetros de **a, b** que son su: **valor mínimo** y su **valor máximo**.

En otras palabras se dice que una variable aleatoria $\mathbf{X}$ sigue una distribución **Uniforme Continua** **si y solo sí** su función de **Densidad** es:

- $\boldsymbol{Constante\ en\ un\ intervalo\ finito\ (a, b)}$,

  y

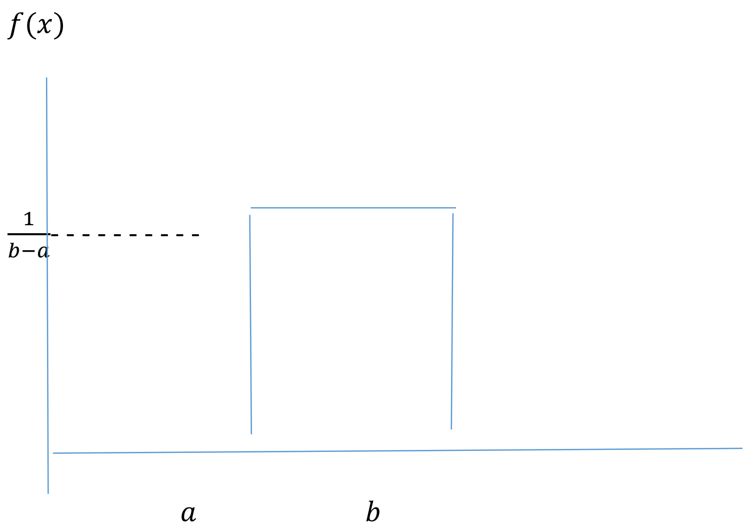
- $\boldsymbol{Nula\ fuera\ de\ \acute{e}l.}$

Esta distribución **Uniforme** tendrá la Función de Densidad definida por:

- $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{b-a}\ si\ y\ solo\ s\acute{\imath}\ a < x < b,}$ y
- En cualquier otro caso $\boldsymbol{f(x) = 0}$

Gráficamente sería:

Distribución Uniforme $* \ U(a, b)$



Nota: Esta distribución depende de dos Parámetros $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{b}$ y se denota por:

$$* \ U(a, b)$$

Parámetros o Características de la Distribución de Probabilidad Uniforme

Estos están determinados por:

- ✓ $\boldsymbol{Media}$: $\frac{(a+b)}{2}$
- ✓ $\boldsymbol{Varianza}$: $\frac{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^2}{12}$
- ✓ $\boldsymbol{Desviación\ Estándar}$: $\sqrt{\frac{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^2}{12}}$

Distribución de Probabilidad Normal

Es la distribución de probabilidades **más utilizada**, también llamada **distribución de Gauss.** Es una variable continua que cuyos valores se relacionan con **la media** y la **desviación estándar**.

- Esta distribución se representa por: $N(\mu, \sigma)$.
- Esta distribución de **Probabilidad Normal** tendrá la Función definida por:

$$Z = \frac{(X - \mu)}{\sigma}$$

Nota: Esta distribución es típica de muchos experimentos y observaciones de los fenómenos naturales, donde intervienen muchas causas.

3.3.1 EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO:

Consulta en la **bibliografía**, referenciada en el módulo, la **TABLA DE DISTRIBUCIÓN** y realiza dos ejercicios de aplicación de la misma, puedes tomar como referencia el siguiente enlace:

http://www.jorgegalbiati.cl/nuevo_06/normal.pdf

- LA CURVA NORMAL

La **campana de Gauss**, **curva de Gauss** o **curva normal**, es una función de **probabilidad continua**, **simétrica**, donde:

- ✓ Su **máximo valor** coincide con **la media** (μ), y
- ✓ Tiene **dos puntos de inflexión** situados a **ambos lados** de **la media**, a **una distancia** (σ) de ella.

Nota 1: Esta curva fue descrita por el matemático alemán **Carl Friederich Gauss**, estudiando **los errores** que se producen **al medir reiteradamente** una cierta magnitud.

Nota 2: La gran **importanci**a de esta distribución se debe a **la enorme frecuencia** con la que aparece en **las situaciones más variadas.**
La mayoría de los rasgos humanos tiene representaciones en la curva normal:

CARACTERES	DESCRIPCIÓN
Caracteres morfológicos de individuos	Estatura, peso.
Caracteres fisiológicos	Visión, desarrollo motriz, audición, ritmo cardíaco.
Caracteres sociológicos	Inteligencia, aptitudes.
Caracteres físicos	Raza.

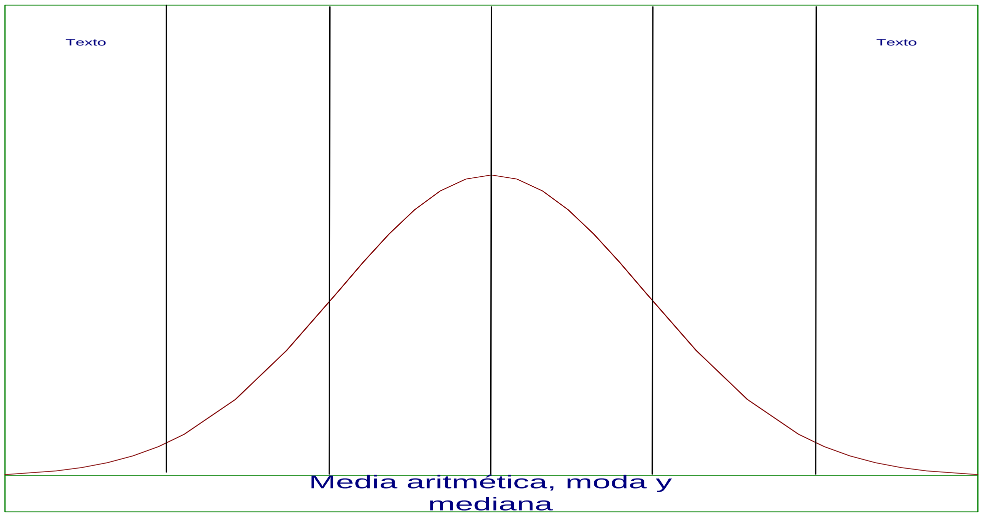
Nota: Para cada valor de **la media** (μ) y de **la desviación típica** o **estándar** (σ)**,** hay una **curva normal**, que se denomina $N(\mu, \sigma)$

- **Características de la Curva Normal**

La Curva Normal posee las siguientes características:

1	Tiene un perfil de campana y presenta un solo pico en el centro de la distribución.
2	Es simétrica con respecto a su media aritmética, es decir, que si se corta la curva verticalmente por este valor central, las dos mitades serán como imágenes reflejadas en un espejo
3	La moda y la mediana son iguales a la media.
4	La curva decrece uniformemente en ambas direcciones a partir del valor central y se acerca cada vez más al eje x, pero nunca llega a tocarlo Es asintótica respecto al eje X, esto es, se prolonga indefinidamente a lo largo del eje x sin cortarlo.

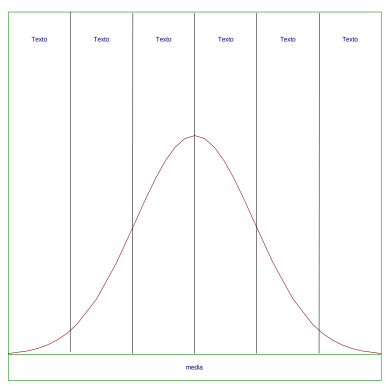
- **Gráficamente** se pueden determinar las diferentes situaciones para la Distribución Normal:



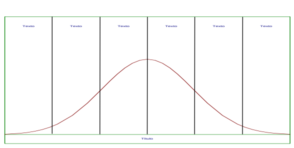
Nota: La **desviación estándar** o **desviación típica** de un conjunto de datos (**distribución**), indica la **variación** o **desviación** de dichos datos **con respecto a su promedio**; esta **medida** determina el **ancho de la curva**; es decir que: Si **la desviación típica** **es grande**, la curva **será ancha**.

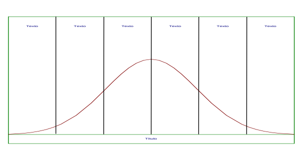
Por lo tanto se puede hablar de **familias de distribuciones normales** así:

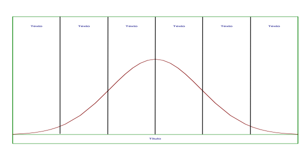
1. Con **igual media** y **distintas desviaciones típicas**:



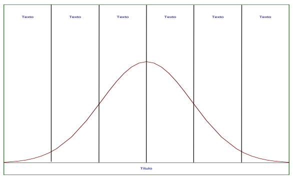
2. Con **distintas medias** pero **iguales desviaciones típicas**:

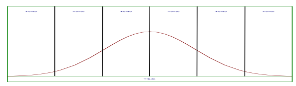


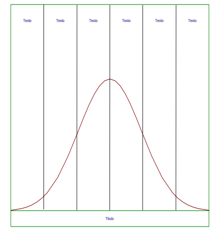




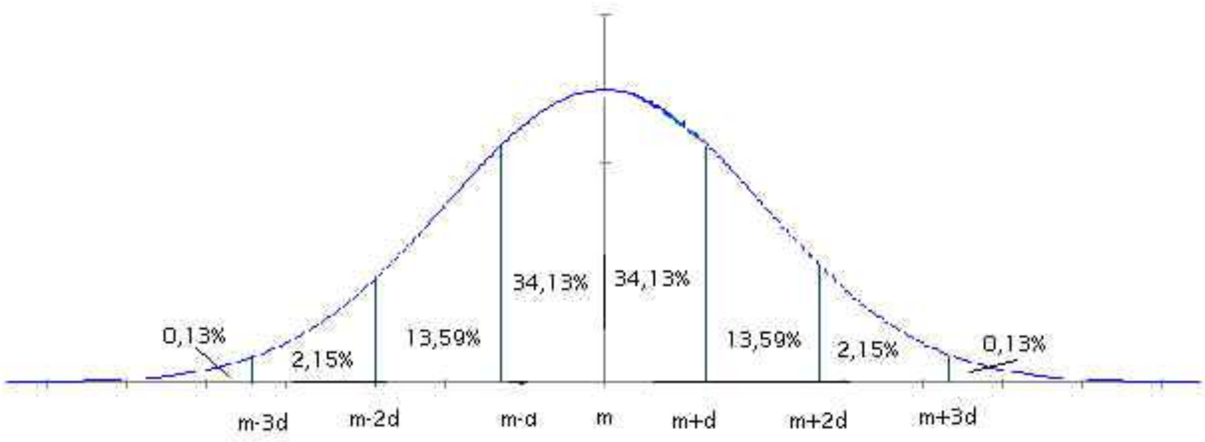
3. Con **distintas medias** y **distintas desviaciones típicas**:







Nota: Por ser una distribución de probabilidad, el **área bajo una curva normal** cualquiera es **1** (**100%** de los casos). Esta área se distribuye, expresando la **probabilidad** en **tantos por ciento** del siguiente modo (tomando un ejemplo predeterminado):



Dónde: La **media aritmética** es m y la **desviación típica** es d:

- ✓ $\boldsymbol{El\ 68,26\%}$ de las observaciones están comprendidas en el intervalo: $(\mu - \sigma, \quad \mu + \sigma)$

- ✓ $\boldsymbol{El\ 95,44\%}$ de las observaciones están comprendidas en el intervalo: $(\mu - 2\sigma, \quad \mu + 2\sigma)$

- ✓ $\boldsymbol{El\ 99,74\%}$ de las observaciones están comprendidas en el intervalo: $(\mu - 3\sigma, \quad \mu + 3\sigma)$

3.3.2 EJERCICIO DE APRENDIZAJE

Un test de inteligencia, que está normalizado tiene **una media de 100** y una desviación **típica de 15,** **N (100,15)**

a. ¿Entre qué par de valores se presenta el $68,26\%$?

Procedimiento:

$\mu - \sigma = 100 - 15 = 85$ y

$\mu + \sigma = 100 + 15 = 115$

Solución: **El 68,26%** de la población a quien se le aplique el test puntuará entre **85 y 115.**

b. ¿Entre qué par de valores se presenta el **95,44%?**

Procedimiento:

- ✓ $\mu + 2\sigma = 100 - 2 * (15) = 100 - 30 = 70$
- ✓ $\mu + 2\sigma = 100 + 2 * (15) = 100 + 30 = 130$

Solución: El **95,44%** de la población a quien se le aplique el test puntuará entre **70 y 130.**

c. ¿Entre qué par de valores se presenta el **99,74%?**

Procedimiento:

- ✓ $\mu + 3\sigma = 100 - 3 * (15) = 100 - 45 = 55$
- ✓ $\mu + 3\sigma = 100 + 3 * (15) = 100 + 45 = 145$

Solución: El **99,74%** de la población a quien se le aplique el test puntuará entre **55 y 145.**

- **El valor Z o desvío normal Z**

Es **un valor transformado** que indica a **cuantas desviaciones estándar** por **encima** o por **debajo** de **la media** se encuentra un dato, está dado por:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

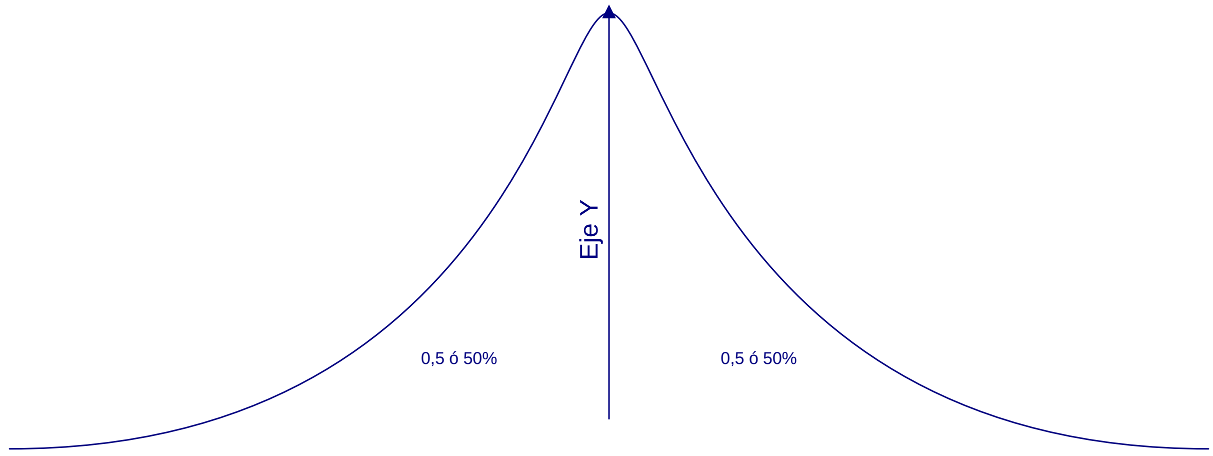
Dónde:

X =Valor de la **variable aleatoria** que nos interesa.

μ = **Media** de la distribución de esta **variable aleatoria**.

σ = **Desviación estándar** de esta distribución.

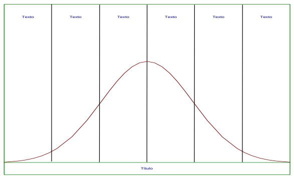
Entonces, como toda el **área bajo la curva** tiene una **probabilidad igual a 1,** es decir el **100%** de los casos, gráficamente se determinaría de la siguiente manera:



3.3.3 EJERCICIO DE APRENDIZAJE

Tomando el los datos del ejercicio anterior:

1. ¿Qué **porcentaje** de la población tendrá un coeficiente intelectual entre **100 y 120**?

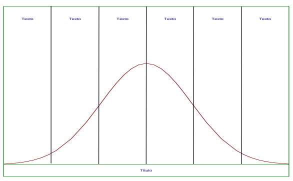


$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \rightarrow Z = \frac{120-100}{15} \rightarrow Z = 1{,}33$$

El valor en la tabla sería: $0{,}4082 * 100 = 40{,}82\%$

---

2. ¿Qué porcentaje de la población tendrá un coeficiente intelectual **mayor que 120?**

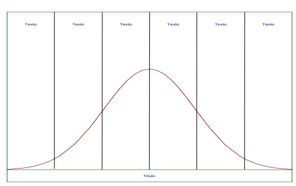


$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \rightarrow Z = \frac{120-100}{15} \rightarrow Z = 1{,}33$$

Valor en la tabla $0{,}4082 \rightarrow$
$0{,}5 - 0{,}4082 = 0{,}0918 * 100 = 9{,}18\%$ 0

---

3. ¿Qué porcentaje de la población tendrá un coeficiente intelectual **menor que 120?**



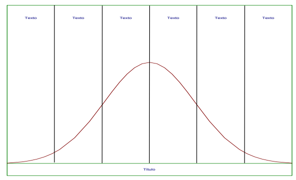
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \rightarrow Z = \frac{120-100}{15} \rightarrow Z = 1{,}33$$

Valor en la tabla $0{,}4082 \rightarrow$

$0{,}5 + 0{,}4082 = 0{,}9082 * 100 = 90{,}82\%$ 0

---

4. ¿Qué porcentaje de la población tendrá un coeficiente intelectual entre **80 y 100?**

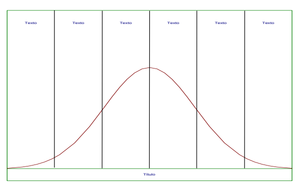


$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \rightarrow Z = \frac{80 - 100}{15} \rightarrow Z = -1{,}33$$

Valor en la tabla $0{,}4082 * 100 = 40{,}82\%$

---

5. ¿Qué porcentaje de la población tendrá un coeficiente intelectual **menor que 80?**



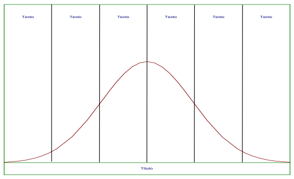
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \rightarrow Z = \frac{80 - 100}{15} \rightarrow Z = -1{,}33$$

Valor en la tabla: $0{,}4082 \rightarrow$

$0{,}5 - 0{,}4082 = 0{,}0918 * 100 = 9{,}18\%$ 0

---

6. ¿Qué porcentaje de la población tendrá un coeficiente intelectual **mayor que 80?**



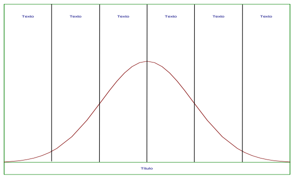
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \rightarrow Z = \frac{80 - 100}{15} \rightarrow Z = -1{,}33$$

Valor en la tabla: $0{,}4082 \rightarrow$

$0{,}5 + 0{,}4082 = 0{,}9082 * 100 = 90{,}82\%$ 0

---

7. ¿Qué porcentaje de la población tendrá un coeficiente intelectual entre **80 y 120?**



De **100 a 80** sería **0,4082** y de **100 a 120** sería **0,4082,** se **suman**, entonces sería: **0,4082+0,4082=0,8164*100 =81,64%**

3.3.4 EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

Se tiene un grupo de alumnas de 11º cuyo peso se comporta normalmente

N (48,4) es decir que:

- ✓ $\boldsymbol{\mu}$= 48 kilogramos, y
- ✓ $\boldsymbol{\sigma}$= 4 kilogramos

1. ¿Entre qué par de valores se presenta el 68,26% del peso de las alumnas?

2. Qué porcentaje de las alumnas pesan:

a) Más de 55 kilos.
b) Menos de 42 kilos.
c) Entre 48 kilos y 56 kilos.
d) Entre 46 kilos y 56 kilos.
e) Entre 45 kilos y 55 kilos.

3.3.5 MÉTODOS DESCRIPTIVOS PARA DETERMINAR LA NORMALIDAD.

Por medio de **la inferencia estadística** acerca de la población con base en la información de la muestra. Estos supuestos se basan en la aproximación a la normal.

Los métodos utilizados para una **distribución de aproximación** a **la normal** son:

1. Construcción de **histogramas de frecuencia relativa** o **diagrama de tallo y hojas** para los datos.
2. Calculo del **rango intercuartílico** y **la desviación estándar**.
3. La construcción del **grafico de probabilidad normal** para los datos.

3.3.6 LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD EXPONENCIAL

La **distribución exponencial** es una distribución probabilística continua cuya variable está dada por un parámetro de $\boldsymbol{\lambda > 0}$.

La función de Densidad de la Distribución Exponencial (Distribución de Probabilidad Continua con un parámetro $\boldsymbol{\lambda > 0}$), está dado por:

$$F(x) = P(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \quad para \ x \geq 0 \\ 0 \ de \ otra \ forma \end{cases} \quad y$$

La **función** de **distribución acumulada** es:

$$\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 \quad Para \ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} \ para \ x \geq 0 \end{cases}}$$

Nota 1: $\boldsymbol{e}$ representa el **número e** **(2,73…)**.

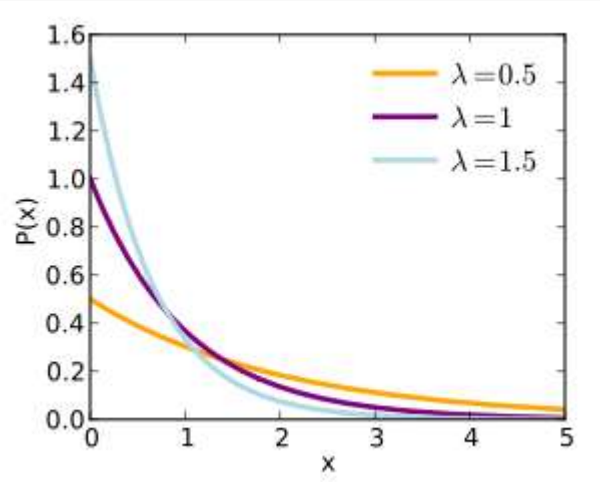
Nota 2: El **valor esperado (E)** de una variable aleatoria **X** con **distribución exponencial** está dado por:

$$\boldsymbol{E[X] = \frac{1}{\lambda}}$$

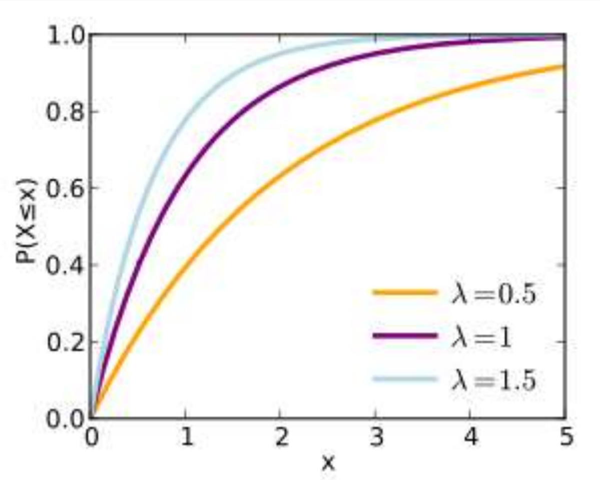
Nota 3: La **varianza (V)** de una variable aleatoria **X** con **distribución exponencial** está dado por:

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

- **Gráficas y Parámetros de una variable aleatoria con Distribución Exponencial:**



Función de densidad de probabilidad



Función de distribución de probabilidad

Parámetros	$\lambda > 0$
Dominio	$[0, \infty)$
Función de densidad (pdf)	$\lambda e^{-\lambda x}$
Función de distribución (cdf)	$1 - e^{-\lambda x}$
Media	$1/\lambda$
Mediana	$\ln(2)/\lambda$
Moda	0
Varianza	$1/\lambda^2$
Coeficiente de simetría	2
Curtosis	9
Entropía	$1 - \ln(\lambda)$
Función generadora de momentos (mgf)	$\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}$
Función característica	$\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1}$

Nota: La distribución exponencial es un caso particular de distribución gamma con $\boldsymbol{k = 1}$. Además **la suma de variables aleatorias** que siguen una misma distribución exponencial es una variable aleatoria expresable en términos de **la distribución gamma**.

- Ejemplos para la distribución exponencial es la distribución de la longitud de los intervalos de una variable continua que transcurren entre dos sucesos, que se distribuyen según la distribución de Poisson:

- El tiempo transcurrido en un call center hasta recibir la primera llamada del día se podría modelar como una exponencial.
- El intervalo de tiempo entre terremotos (de una determinada magnitud) sigue una distribución exponencial.
- Supongamos una máquina que produce hilo de alambre, la cantidad de metros de alambre hasta encontrar una falla en el alambre se podría modelar como una exponencial.
- En fiabilidad de sistemas, un dispositivo con tasa de fallo constante sigue una distribución exponencial.

- **Cálculo de las Variables Aleatorias**

✓ Una variable aleatoria de Distribución Exponencial x se puede calcular por medio de una variable aleatoria de Distribución Uniforme: $\boldsymbol{u = U(0,1)}$:

$$\boldsymbol{x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)}$$

Pero $\boldsymbol{(1-u)}$ también es una variable aleatoria con una distribución $\boldsymbol{U(0,1)}$, se puede utilizar una versión mucho más eficiente, dada por:

$$\boldsymbol{x = -\frac{1}{\lambda}\ln(u)}$$

- **Relaciones**

La suma de k variables aleatorias **independientes** de **distribución exponencial** con parámetro λ es una variable aleatoria **de Distribución Gamma**

Tomado de: Distribución exponencial - Wikipedia, la enciclopedia libre

*es.wikipedia.org/wiki/**Distribución_exponencial***

3.3.7 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. El valor esperado cuando lanzamos un dado 5 veces esta dado así:

Población: el dado tiene 6 caras = 6

Muestra: siempre cae una cara =1

P (D) = 1/6

E(X)= 1(1/6)+2(1/6)+3(1/6)+4(1/6)+5(1/6)

E(X) = 2,5

---

2. (Prueba de Bernoulli) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda doce veces caiga una vez cara?

SELLO =0

CARA= 1

P (CARA) = ½

---

3. (Prueba de Bernoulli) Cual es la probabilidad de que al lanzar una dado 5 veces caiga una vez 6?

Número diferente a 6 =0

Seis= 1

P (Seis) = 1/6

---

4. (Distribución binomial) Una máquina de una fábrica de tornillos produce un 5 por 5000 de piezas defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de que al examinar un grupo de 60 piezas se encuentren 3 defectuosas?

P= 5/5000=0,001

P(X=K) = $n! / (k! (n - k)!) * p^{k} * q^{n-k}$

P(X=3) = $60! / (3! (60 - 3)!) * 0{,}001^{3} * 0{,}999^{60-3}$

P(X=3) = $60! / (3! (57)!) * 0{,}001^{3} * 0{,}999^{57}$

P(X=3) = 34220 *0,000000001 *0,945

P(X=3) = 34220 *0,000000001 *0,945

P(X=3) = 0,00003 * 100= 0,003%

La probabilidad de que al examinar un grupo de 60 piezas se encuentren 3 defectuosas.

3.3.8 EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

En los ejercicios que se le presentan a continuación pondrá en práctica todos los conceptos vistos en el desarrollo de la unidad, para entrar a resolverlos tenga presente los conceptos teóricos y los ejercicios de aprendizaje desarrollados durante la unidad, si tiene alguna duda trate de contactarse con alguno de sus compañeros o recurra a su respectivo tutor por alguno de los medios o canales de comunicación dispuesto para ello.

Nota: En el taller encontrará algunos ejercicios resueltos que le servirán de apoyo en la solución del mismo.

1. La probabilidad de que un paciente se alivie con una vacuna contra una gripa es del 85%. Se pide determinar que una vez administrada a 22 pacientes:

   a) Ninguno tenga la enfermedad
   b) Todos tengan la enfermedad
   c) Al menos cinco de ellos.
   d) Al máximo 10 de ellos.

2. La probabilidad de que un alumno saque cinco en una notas es del 15%. Si en el grupo hay 20 personas, se pide:

   a. Ninguno saquen la nota
   b. Todos saquen la nota
   c. Al menos 7 saquen la nota
   d. Entre 2 y 5 saquen la nota

3. Un grupo de excursionistas salen de paseo para la costa, a la hora de llegar al hotel el 75% piden la cama doble. Cual es la probabilidad de que en un grupo de 50 personas se encuentren:

   a) Máximo 40 pidan la pieza con cama doble
   b) Menos de 10 pidan la pieza con cama doble

4. El número de estudiantes que llegan a un colegio sigue una distribución de Poisson. Si el número promedio es de 215 alumnos por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que en un minuto lleguen 3 estudiantes al colegio?

Alumnos Minutos

215 60

λ 1

λ=215/60= 4 estudiantes en un minuto

$P(X=K) = (\lambda^{x}\ e^{-\lambda}) / x!$

$P(X=3) = (4^{3}\ e^{-4}) / 3!$

P(X=3) = 0,192*100 = 19,2%

La probabilidad de que en un minuto lleguen 3 estudiantes al colegio es del 19,2%.

5. El número de pasajeros que llegan al metro sigue una distribución de Poisson. Si el número promedio es de 522 pasajeros por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que en un minuto lleguen 21 pasajeros lleguen al metro?

6. El número de llamadas a un celular en 10 minutos es de 6. Si el número promedio es de llamadas en una hora es de 50 por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que:

   a) en 25 segundos lleguen 2 llamadas.

b) En un minuto entre 2 y 3 llamadas

7. Hallar la función de densidad de una variable aleatoria continúa de 6x en el intervalo de 0 a 1

$\int_0^1 (6x)\, dx = 6$

8. Hallar la función de densidad de una variable aleatoria continúa de $12x^2 – 3X$ en el intervalo de 0 a 1.

9. Hallar el valor esperado de variable aleatoria continua de 12x – 7 en el intervalo de 0 a 1

$\int_0^1 x(12x-7)\, dx =$

$\int_0^1 (12x^2 – 7X)\, dx = 12 – 7 = 5$

10. Hallar el valor esperado de variable aleatoria continua de $21X^2 +24X – 17$ en el intervalo de 0 a 1

11. (Distribución Uniforme) Una empresa de calzado de Colombia tiene una función de costos dada por f(c)= 2000+4x; siendo x el numero zapatos. En el mercado se nde cada unidad a $50.000. La demanda entre artículos es uniforme entre 5.000 a 20.000 unidades. Cual es el beneficio esperado?

Entonces

X= cantidad de artículos

Beneficio esperado = 50.000X - (2000+4x)

Beneficio esperado = 49.996x - 2000

Beneficio esperado= 50.0004 ((5000+20000)/2) – 2000

Beneficio esperado=50.0004 (12500) – 2000

Beneficio esperado=620.500.000 – 2000

Beneficio esperado= 625.048.000

12. (Distribución Uniforme) Una empresa de dulces de Colombia tiene una función de costos dada por f(c)= 125+4x; siendo x el numero dulces. En el mercado se vende cada unidad a $150. La demanda entre artículos es uniforme entre 2550 a 3820 unidades. Cuál es el beneficio esperado?

13. (Distribución Normal) Un docente de estadística ha observado que las notas obtenidas por sus alumnos en los exámenes de la materia siguen una distribución Normal con media 4 y desviación estándar de 3, ¿cuántos sacaron un 4,5?

P(X=4,5) = P(Z=0,17)=0,0675 * 100 = 6,75%

Z= (X - μ) / σ

Z= (4,5 – 4) / 3

Z= O,17

Se busca en la tabla de la distribución z el valor de 0,17 cuyo valor es 0,0675.

La probabilidad de que los alumnos saquen 4,5 de nota es de 6,75%.

14. (Distribución Normal) Una prueba psicológica a estudiantes de primer semestre de ingreso a una Universidad se obtuvo como resultado un puntaje con media de 150 y desviación estándar de 25 puntos.

    a. Determinar cuántos alumnos sacaron un puntaje entre 115 y 140.
    b. Determinar qué porcentaje de estudiantes sacaron un puntaje de al menos 120 puntos.
    c. Determinar qué porcentaje de los estudiantes sacaron un puntaje de 105.
    d. Determinar cuántos sacaron como puntaje 120.

15. (Distribución Normal) La media de los pesos de los estudiantes de una institución privada es de 70 kg y desviación típica de 3 kg, se conoce que esta tiene 3250 alumnos. Hallar:

    a. Entre 55 kg y 60 kg.
    b. Más de 85 kg.
    c. Menos de 65 kg.
    d. Exactamente 64 kg
    e. 75 kg o menos

16. (Distribución Normal) El consumo medio mensual de energía eléctrica en un municipio es de 65 Kwh., con una desviación típica de 6,5 Kwh. Se supone que se distribuye según una distribución normal. a) ¿Cuántos Kwh. tendría que consumir mensual para pertenecer al 15% de la población que más consume?. b) Si usted consume 45 Kwh. ¿qué % de la población consume al menos que usted?

17. (Distribución Exponencial) Se ha comprobado que el tiempo de vida de cierto tipo de marcapasos sigue una distribución exponencial con media de 15 años. ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona a la que se le ha implantado este marcapasos se le deba reimplantar otro antes de 18 años? Si el marcapasos lleva funcionando correctamente 4 años en un paciente, ¿cuál es la probabilidad de que haya que cambiarlo antes de 20% años?

$F(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ si $t \geq 0$

$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

$P(T \leq 18) = \int F(T)\, dt = F(t) = 1 - e^{-18/15}$

$P(T \leq 18) = 1 – 0{,}30$

$P(T \leq 18) = 0{,}70$

18. (Distribución Exponencial) Se ha comprobado que el tiempo de vida de cierto tipo de electrodoméstico sigue una distribución exponencial con media de 5 años. ¿Cuál es la probabilidad de que a un electrodoméstico tenga una duración de 4 años? Si este lleva funcionando correctamente 3 años en una casa, ¿cuál es la probabilidad de que haya que cambiarlo antes de 25% años?

19. Responda las siguientes preguntas de acuerdo a los conceptos desarrollados en la unidad:

a. Qué diferencia existe entre las distintas distribuciones de probabilidad.
b. De un ejemplo de distribución binomial aplicado a la vida cotidiana.
c. De un ejemplo de distribución Poisson aplicado a la vida cotidiana.
d. De un ejemplo de distribución normal aplicado a la vida cotidiana.
e. Según lo visto para usted cual es la principal distribución.

20. De acuerdo a los conceptos desarrollados en la unidad, realice la siguiente actividad: El estudiante debe realizar un proyecto aplicando las distribuciones de Probabilidades.

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

- **Recuerde que**: Los métodos utilizados para una **distribución de aproximación** a **la normal** son:

1. Construcción de **histogramas de frecuencia relativa** o **diagrama de tallo y hojas** para los datos.
2. Calculo del **rango intercuartílico** y **la desviación estándar**.
3. La construcción del **grafico de probabilidad normal** para los datos.

- **Recuerde que**: La Curva Normal posee las siguientes características:

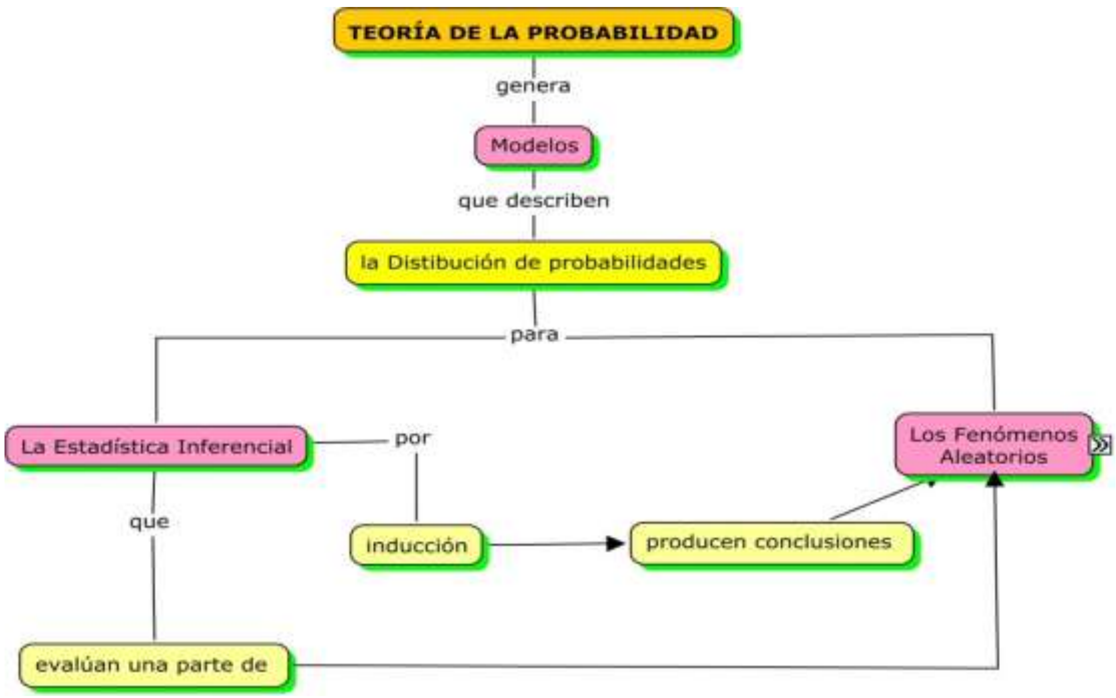
1	Tiene un **perfil de campana** y presenta **un solo pico** en **el centro** de la distribución.
2	Es **simétrica** con respecto a **su media aritmética**, es decir, que si se **corta la curva verticalmente** por este valor central, las dos mitades serán como **imágenes** reflejadas en un espejo
3	**La moda** y **la mediana** son **iguales** a **la media**.
4	La curva **decrece uniformemente** en **ambas direcciones** a partir del **valor central** y se acerca cada vez más **al eje x**, pero nunca llega a tocarlo Es **asintótica** respecto al eje X, esto es, **se prolonga indefinidamente** a lo largo del eje x **sin cortarlo**.

4 UNIDAD 3 INTRODUCCIÓN A LA INFERENCIA ESTADÍSTICA

[Estadística inferencial - Vitutor](www.vitutor.com/estadistica/inferencia/estadistica_inferencial.htm)

*www.vitutor.com/**estadistica/inferencia/estadistica_inferencial**.htm*

4.1.1 RELACIÓN DE CONCEPTOS



4.1.2 DEFINICIÓN CONCEPTOS BÁSICOS

- **Estadística inferencial:** La **estadística inferencial** es una parte de la estadística que comprende los métodos y procedimientos que por medio de la inducción determina propiedades de una población estadística, a partir de una pequeña parte de la misma.

- **Muestreo:** En estadística se conoce como **muestreo** a la técnica para la selección de una muestra a partir de una población.

- **Parámetro estadístico**; una función definida sobre valores numéricos que caracteriza una población o un modelo.

- **Estimador**: En estadística, un **estimador** es un estadístico (esto es, una función de la muestra) usado para estimar un parámetro desconocido de la población

Muestral Aleatorio Simple: Es considerado el método más sencillo. Mediante una tabla de números al azar se eligen las zonas que se quieren muestrear. Este tipo de muestreo posee algunos inconvenientes. Por un lado, supone definir de antemano los límites de un yacimiento, y no siempre se conocen con certeza. Por otro lado, el carácter aleatorio de las tablas numéricas provoca que en algunas áreas se acumulen las muestras, mientras que en otras permanecen intactas.

- **Distribuciones Muestrales:** En estadística, la **distribución muestral** es lo que resulta de considerar todas las muestras posibles que pueden ser tomadas de una población. Su estudio permite calcular la probabilidad que se tiene, dada una sola muestra, de acercarse al parámetro de la población. Mediante la distribución muestral se puede estimar el error para un tamaño de muestra dado.

- **Error Estándar:** El **error estándar** es la desviación estándar de la distribución muestral de un estadístico.[1] El término se refiere también a una estimación de la desviación estándar, derivada de una muestra particular usada para computar la estimación.

  Estimación: En inferencia estadística se llama estimación al conjunto de técnicas que permiten dar un valor aproximado de un parámetro de una población a partir de los datos proporcionados por una muestra.

- **Intervalos de Confianza:** En estadística, se llama a un par o varios pares de números entre los cuales se estima que estará cierto valor desconocido con una determinada probabilidad de acierto.

- **Prueba Hipótesis nula:** En estadística, una **hipótesis nula** es una hipótesis construida para anular o refutar, con el objetivo de apoyar una hipótesis alternativa. Cuando se utiliza, la hipótesis nula se presume verdadera hasta que una prueba estadística en la forma de una prueba empírica de la hipótesis indique lo contrario. Si la hipótesis nula no es rechazada, esto no quiere decir que sea verdadera.

Definiciones tomadas de: Wikipedia, la enciclopedia libre

es.wikipedia.org/wiki

4.1.3 OBJETIVO GENERAL

Construir modelos de estadística inferencial para la solución de problemas.

4.1.4 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Identificar los diferentes tipos de distribuciones muéstrales, identificando los diferentes tipos de intervalos y realizando las pruebas de hipótesis de comparación por medias y proporciones.

4.1.5 TEMA 1 DISTRIBUCIONES MUESTRALES

El muestreo se utiliza cuando **no es posible contar** o **poder medir** todos los elementos que conforman una población. Se refiere a **muestra**, a **una parte** de la población que **se va a estimar**.

Una **muestra** debe de cumplir los siguientes aspectos:

ASPECTOS	CARACTERÍSTICA
1. Homogeneidad	Los elementos se deben **seleccionar** de **la misma población**.
2. Independencia	Cada dato **no debe de ser condicionado** mutuamente entre sí.
3. Representatividad	La muestra debe ser **el mejor valor de los elementos** del conjunto que proviene.

- **PARÁMETROS**

Un parámetro es una medida que me permite **calcular el comportamiento de una variable** de una población.

- **Estimador**

El estimador son **las cantidades** usadas para **describir** una muestra.

Un estadístico debe presentar las siguientes características:

1. Se pueden tener **varios valores** posibles.
2. **No se puede predecir** su **valor numérico.**
3. Se les designa con **letras latinas**.

4.1.6 MUESTRAL ALEATORIO SIMPLE

Se seleccionan muestras mediantes métodos que permitan que **cada una de la muestras** tengan **igual probabilidad de acontecer** y que **cada elemento de la población** tenga **la misma oportunidad** de **ser seleccionadas** dentro de la muestra.

La mejor manera de seleccionar **una muestra aleatoria** de una población es mediante **los números aleatorios**. Estos se pueden determinar mediante **la generación de valores** por medio de una computadora o una tabla de números aleatorios.

Distribuciones Muestrales

Si se toman **varios valores** de **una muestra** de una población, las poblaciones seleccionadas **todas no serían iguales**, y varia de **una muestra a otra** por **alguna observación**.

4.1.7 DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE LA MEDIA

1. Una distribución de la probabilidad de todas **las medias posibles** de la muestra de **un evento**. Cada muestra de tamaño **n** que se puede extraer de una población **proporciona una media**. Si se considera cada una de **estas medias** como **valores de una variable aleatoria** se puede estudiar su distribución que se llamará **distribución muestral de medias**.

Si se tiene una población normal **N (m, s)** y se extrae de ella muestras de tamaño **n**, la **distribución muestral de medias** sigue también una **distribución normal,** esto es:

$$\boldsymbol{N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})}$$

Para una mejor comprensión de esta distribución se realizará un **Ejercicio para el Aprendizaje**, este se tomó de:

DISTRIBUCIÓN DE LA MEDIA MUESTRAL 1.

*www2.uah.es/jmmartinez**media**no/.../MCCSS%20Tema%2009d%20Prob*

Considerar una población en la que se estudia una característica $\boldsymbol{X}$, que sigue una distribución normal de $\boldsymbol{Media = 12}$ y $\boldsymbol{Varianza = \sigma^2 = 16}$, se pide:

a. Probabilidad de que un elemento de esa población, elegido al azar, tenga la característica superior a 14.

b. Considerar una muestra aleatoria de tamaño $n = 9$, ¿Cuál es la probabilidad de que la Media Muestral $\overline{X}$ tenga un valor superior a 14?

Procedimiento:

a. La distribución es **Norma**l, por lo tanto se da $N(12, 4)$.

La Desviación Típica $\sigma = 4$, (Recuerde que: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{16} = 4$)

Se tipifica realizando el cambio: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

Entonces:

$$P(x > 14) = P\left(\frac{6-\mu}{\sigma}\right) = P(Z > 0,5) = 1 - P(Z < 0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085$$

____

b. Las Medias Muestrales de tamaño n se distribuyen según la Normal:

$$\left[X \in N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})\right]$$

En este caso: $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow N(12, \frac{4}{\sqrt{9}}) \rightarrow N(12, \frac{4}{3})$

Por lo tanto:

$$P(\overline{X} > 14) = P\left[Z > \frac{14-12}{4/3}\right] = P(Z > 1,5) = 1 - P(Z < 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$$

***Nota**: Se utiliza la tabla N (0,1) para comprobar la probabilidad correspondiente al valor z.*

____

- **Distribución muestral de proporciones**

Se recomienda revisar y analizar el siguiente enlace *, en el cual detallan con precisión este tipo de distribuciones:

*Enlace: Distribucion muestral de proporciones - SlideShare

*es.slideshare.net/eraperez/**distribucion-muestral-de-proporciones***

En muchas oportunidades y durante **un proceso de mediciones** se debe plantear **la estimación** de **una Proporción** o **un Porcentaje**, por lo tanto, en estos casos, **la variable aleatoria** toma solamente **dos valores diferentes** (**Éxito o Fracaso**), es decir, se sigue una **Distribución Binomial** (ampliamente explicada en unidades anteriores), y cuando la extensión de la población **es grande** la Distribución Binomial $\boldsymbol{B(n,p)}$ se aproxima a la Normal $\boldsymbol{N(np,\sqrt{npq})}$

Nota: Cuando las muestras de tamaño $n > 30$ la distribución muestral de proporciones sigue la siguiente distribución normal:

$$\boldsymbol{N\left(p,\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)}$$

Dónde:

- $\boldsymbol{p}$**:** Proporción de uno de los valores de la variable estadística en la población.
- $\boldsymbol{q = 1 - p}$

4.1.8 EJERCICIO DE APRENDIZAJE

Tomado de: Distribuciones muestrales

recursostic.educacion.es/descartes/web/.../distrib_**muestral**es.htm

Si se tira una moneda no trucada 100 veces, ¿cuál es la probabilidad de que se obtengan más de 55 caras?

Procedimiento

a. En una moneda no trucada la proporción de caras es 0,5 con lo que:

$$\boldsymbol{p = 0,5}$$

$$\boldsymbol{q = 0,5}$$

$$\boldsymbol{n = 100}$$

b. La distribución Muestral de proporciones se distribuye: $N(0,5;0,5)$

c. Si p' es la proporción en la muestra, se calcula entonces la probabilidad de la siguiente forma:

$$P(p' > 0,55) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$$

Nota: Se utiliza la tabla **N (0,1)** para comprobar la probabilidad correspondiente al valor **Z**

- **Distribución Muestral**

Es **una distribución de probabilidad** donde se describe **la media** y la **desviación estándar** o en su caso **la proporción**.

Esta distribución resulta de considerar **todas las muestras posibles** de una población; permite calcular la probabilidad que, dada una sola muestra, se tiene de acercarse al **parámetro** de la población.

A través de esta distribución se puede **estimar el error** para **cualquier tamaño** de muestra dado.

Constituyen una pieza importante de estudio por varias razones:

- ✓ En la mayoría de los casos, **la viabilidad** de un experimento determina **el tamaño** de la muestra.
- ✓ La distribución de muestreo es la distribución de probabilidad de **una muestra** de una población, en lugar de toda la población.
- ✓ Cuando el tamaño de la muestra es **lo suficientemente grande**, la distribución de muestreo también estará **cerca de lo normal**.
- ✓ Por lo tanto, dado lo anterior, la distribución de muestreo es totalmente determinada por dos valores: la **media** y la **desviación estándar**.

Nota: Estos parámetros son importantes para calcular la distribución de muestreo dada **la distribución normal** de toda la población.

Distribución muestral de la media y la desviación estándar

Se puede demostrar que **la media** de la distribución de muestreo es **la media de la población.**

En cuanto a la **desviación estándar**, esta es **diferente** para la distribución de muestreo en comparación con la población. Si la población es lo suficientemente grande, esto está dado por:

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Dónde:

- ✓ $\boldsymbol{\sigma}$: $\boldsymbol{Es\ la\ Desviación\ Estándar}$, y
- ✓ $\boldsymbol{\sigma_{\overline{x}}}$: $\boldsymbol{Es\ la\ media\ de\ la\ población}$

- **Otras distribuciones**

Lo anterior es válido únicamente cuando la población se distribuye normalmente.

Cuando esto no ocurre **la media** y **la desviación estándar** de la distribución muestral **serán diferentes** y dependerán del tipo de distribución de la población.

Nota 1: Cuando la distribución **es normal**, una de las distribuciones de probabilidad más simples, es **muy fácil** de **estudiar** y **analizar**. Se pueden encontrar **fácilmente** fórmulas matemáticas para las estadísticas de distribución muestral que se quieren encontrar.

Nota 2: Cuando la distribución **no es normal**, puede ser muy complicado y tales formulaciones **matemáticas sencillas** podrían ser **difíciles** de encontrar o hasta **imposibles** en algunos casos.

En estos casos, se utilizan **métodos aproximados** porque encontrar el valor exacto implicará el estudio de **cada muestra** de tamaño **n** tomada de la población, lo que es **muy difícil** y requiere **mucho tiempo**.

- **Error Estándar de la media**

Este error cuantifica las oscilaciones de la media muestral (o sea la media obtenida en los datos) alrededor de la media poblacional (verdadero valor de la media).

Se denomina como.

$$\boldsymbol{EEM: Error\ est\acute{a}ndar\ de\ la\ media}$$
$$\boldsymbol{SEM: Standard\ error\ of\ the\ mean\ (en\ Ingl\acute{e}s)}$$

Para calcularla se utiliza la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{EEM \text{ o } SEM = \frac{Desviaci\acute{o}n\ est\acute{a}ndar\ de\ la\ poblaci\acute{o}n}{Ra\acute{i}z\ cuadrada\ del\ tama\tilde{n}o\ de\ la\ muestra}}$$

Esto es:

$$\boldsymbol{sE_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Dónde:

- ✓ $\boldsymbol{S: Desviaci\acute{o}n\ Est\acute{a}ndar}$ **(estimación basada en la muestra).**
- ✓ $\boldsymbol{n: Tama\tilde{n}o\ de\ la\ Muestra}$

Nota 1: Se asume la independencia estadística de los valores de la muestra.

Nota 2: Esta estimación puede ser **comparada** con la fórmula de la **verdadera desviación estándar** de la **media** de la **muestra**:

$$\boldsymbol{SD_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Dónde:

σ Es **la verdadera** desviación estándar de la población.

4.1.9 TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL O TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

Determina que, en condiciones muy generales:

Si S_n es **la suma** de:

- ✓ n Variables aleatorias independientes**,** y de
- ✓ **Varianza** no nula pero finita,

Implica esto que la función de distribución de S_n **se aproxima** a una **distribución normal** (también llamada **distribución gaussiana, curva de Gauss o campana de Gauss**).

Nota: El teorema asegura que esto ocurre cuando **la suma** de estas variables aleatorias e independientes es lo **suficientemente grande**.

Matemáticamente se puede expresar este **teorema** de la siguiente forma:

Tomando la función densidad de la distribución normal: $N(\mu, \sigma^2)$, definida:

$$f_{\mu\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Dónde:

- ✓ μ: $Media$:
- ✓ σ^2: $Varianza$

Nota: El caso en el que su función de densidad sea $N(0, 1)$, a la distribución se le conoce como distribución **Normal Estándar.**

Ahora, S_n se define como la suma de n variables aleatorias que cumplen ser:

- **Independientes**,
- **Idénticamente distribuidas**, y
- Con una **media** μ y **varianza** σ^2 **finitas** ($\sigma^2 \neq 0$).

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Entonces, la **media** de S_n es $n * \mu$ y la **varianza** es $n * \sigma^2$

Nota: Se da lo anterior ya que son variables aleatorias independientes.

Para una mejor comprensión y utilización de este teorema, se realiza la estandarización de S_n, de la siguiente forma:

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

Nota: Se da esto para que la media de la nueva variable sea igual a cero y la desviación estándar sea igual a 1.

Por lo tanto, las variables

Así, las variables Z_n convergerán en distribución a la distribución normal estándar $N(0, 1)$, cuando:

$$n \to \infty \ (n\ tiende\ a\ infinito)$$

Por lo tanto, $\Phi\ (Z)$ es la función de distribución de $N(0, 1)$, para cada número Real Z y se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} P_r(Z_n \leq z) = \Phi\ (Z)$$

Dónde:

$$P_r: Probabilidad$$

- **Enunciado formal**

De acuerdo a lo anterior se puede determinar de una manera **Normalizada** y **Compacta** el **Teorema del Límite Central** de la siguiente Forma:

Sea $X_1,\ X_2,\ X_3, \dots,\ X_n$ un conjunto de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas con:

- $\mu: Media$
- $Varianza: 0 < \sigma^2 < \infty$

✓ $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

Se da entonces que:

$$\lim_{n\to\infty} P_r\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq z\right) = \Phi\ (Z)$$

Ocurre con bastante frecuencia encontrar esta formulación con la variable estandarizada Z_n en función de la media muestral $\overline{X_n}$ de la siguiente forma:

$$\frac{X_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Ya que son equivalentes.

Nota: Sí n es suficientemente **grande** y se da un conjunto de variables aleatorias independiente e idénticamente distribuidas:

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ de una distribución con media μ y $\sigma^2 \neq 0$ la variable aleatoria:

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ tiene aproximadamente una distribución normal con:

✓ $\mu_{\bar{X}} = \mu$, y

✓ $\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma^2/n$

Nota: Este teorema no define nada acerca de la distribución de X_i excepto la existencia de **la Media** y la **Varianza**.

○ **Propiedades**

– **La media** de **la distribución de muestreo** de la media será **igual a la media** de la población.

– Al **incremento** del tamaño de la muestra, la distribución de muestreo de la media se acercará a **la normalidad**, sin llegar a importar la forma de distribución de la población.

– El teorema del límite central **garantiza una distribución normal** cuando n es suficientemente grande.

– Existen **diferentes versiones del teorema**, en función de **las condiciones utilizadas** para asegurar **la convergencia**. Una de las más simples establece que es suficiente que las variables que se **suman** sean:

- ✓ **Independientes**,
- ✓ **Idénticamente** distribuidas,
- ✓ Con **valor esperado** finito, y
- ✓ **Varianza** finita.

– La **aproximación** entre las dos distribuciones es, en general, **mayor en el centro** de las mismas que en **sus extremos o colas**, motivo por el cual se prefiere el nombre **"teorema del límite central"** ("central" califica al límite, más que al teorema).

– Este teorema, perteneciente a **la teoría de la probabilidad**, encuentra aplicación en muchos campos relacionados, tales como:

- ✓ La inferencia estadística, o
- ✓ La teoría de renovación.

- **Estimación**

La teoría de la probabilidad se constituye en la base de **la Inferencia Estadística**, esta se aplica en los diferentes **conceptos de la probabilidad** para **la toma de decisiones bajo incertidumbre**.

- **Tipos de Estimación**

Existen dos tipos de estimaciones de una población:

ESTIMACIONES	CARACTERÍSTICAS
➢ **Estimación puntual**	Se utiliza para estimar **un parámetro** de la población.
➢ **Estimación Intervalo**	Dentro de **un intervalo** se estima el **parámetro** de la población.

CRITERIOS PARA SELECCIONAR UN BUEN ESTIMADOR

CRITERIOS	CARACTERÍSTICA
1. Imparcialidad	Una media de muestra **es un estimador**, **no tiene sesgos** de una media de una población.
2. Eficiencia	Refiere al **tamaño del error estándar** de la estadística, es decir, **menor variabilidad** de **las observaciones** con respecto a **la media.**
3. Coherencia	Se dice que si **al incrementar** el tamaño de la muestra, se conoce con certeza **el valor** se aproxima **al parámetro** de la población.
4. Suficiente	Cuando **la cantidad de la información** de una muestra estimada **no tendría otro estimador** de otra muestra de la información sobre el parámetro de la población.

- **Prueba Hipótesis e Intervalos de Confianza**

4.1.10 ESTIMACIÓN DE INTERVALO:

Consiste en un intervalo de valores donde se encuentra el parámetro de la población estimado.

- ✓ **Fórmula para las medias**

$$\bar{x} - Z\alpha\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) < \mu < \bar{x} + Z\alpha\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

- ✓ **Fórmula para proporciones**

$$p - Z\alpha\left(\frac{pq}{\sqrt{n}}\right) < \mu < p + Z\alpha\left(\frac{pq}{\sqrt{n}}\right)$$

4.1.10.1 ESTIMACIONES DE INTERVALO E INTERVALOS DE CONFIANZA

Es la probabilidad de una estimación de un intervalo con su **nivel de confianza**.

Confianza es **la credibilidad** que tiene la persona sobre el estudio u objeto a estimar.

4.1.10.2 TAMAÑO DE LA MUESTRA

Es **la cantidad de las observaciones** del estudio, el cual va a ser estimado de forma cuantitativa o proporcional.

4.1.10.3 HIPÓTESIS:

Es **una suposición** acerca de **un parámetro desconocido**.

Procedimiento

1. Se define **la hipótesis nula** acerca de la población.
2. Formula **la hipótesis alternativa** o **contradictoria.**
3. Se define **el criterio de decisión**.
4. Se **organiza** la información.
5. Se **calcula el estadístico** de la muestra.
6. Se **evalúa la estadística** de la muestra para tomar **la mejor decisión**.

4.1.10.4 NIVEL DE SIGNIFICANCIA

Es **un valor de un criterio** que permite **cuestionar una variable** por medio de **hipótesis** para tomar **la mejor alternativa** a estimar y lograr **la mejor decisión**.

4.1.11 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. El peso de los niños recién nacidos en una maternidad está dado por una distribución normal con media 3150 kg y cuya desviación estándar es de 155 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestra de 150 niños recién nacidos sea de 3200 kg?

Procedimiento

Z=(χ - μ) \ (σ \ √ n)

Z=(3200 - 3150) \ (155\ √150)

Z= 50 \ 12,65   Z= 3,95

P(X = 3200) = P(Z = 3,95) = 0,99 * 100 = 99%

---

2. Se ha seleccionado una muestra aleatoria para prever la inflación en el año 2000, en siete de los países. Las previsiones han sido de 1,2,2,1,2,3,1,2,9,9,2,1,9,1,2,1,2,2,1,2,3,1,2,9,9,2,1,9,1,2. Se utilizan los datos para construir un intervalo de la media muestral con un nivel de confianza del 99%, en estos 30 países.

Procedimiento

χ - Zα/2 (s/√n) < μ < χ + Zα/2 (s/√n)

3,1 – 1 (3 /√30) < μ < 3,1 + 1 (3 /√30)

3,1 – 0,55 < μ < 3,1 + 0,55

2,5 < μ < 3,65

3. Una fábrica de tornillos se tiene que 2% es defectuoso. Una empresa que utiliza de estos tornillos para equipos de sonido dice que el 2% de estos son más defectuosos de los que compran. Con un nivel de

confianza del 95%, un investigador de esta empresa selecciono una muestra de 1500 tornillos de que se tenga una media de 2,5%.

Procedimiento

Ho: μ ≤ 0,02

H1: μ > 0,02

Z = (0,025 – 0,02) /((√0,02(1 – 0,02) / 1500)

Z = (0,025 – 0,02) /((√0,02(0,98) / 1500)

Z = (0,005) /((0,00001307)

Z= 382

El valor de z estimado en la tabla es de 1,68

Como el valor calculado es mayor que el de la tabla, se concluye que no hay evidencias suficientes que el porciento de tornillos defectuosos es mayor que el 2%.

4.1.12 TALLER DE ENTRENAMIENTO

En los ejercicios que se le presentan a continuación pondrá en práctica todos los conceptos vistos en el desarrollo de la unidad, para entrar a resolverlos tenga presente los conceptos teóricos y los ejercicios de aprendizaje desarrollados durante la unidad, si tiene alguna duda trate de contactarse con alguno de sus compañeros o apele a su respectivo tutor por alguno de los medios o canales de comunicación dispuesto para ello.

1. La estatura media de los alumnos de un colegio es de 170 cm, con una desviación estándar de 8 cm.
   a) Encontrar la media muestral cuando n es de 60 personas.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 60 estudiantes tenga una estatura mayor de 172 cm?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 60 estudiantes tenga una estatura entre 165cm y 172 cm?

2. Un conjunto residencial está conformado por 300 apartamentos. Se seleccionaron 21 apartamentos y se observa que en promedio viven 3 personas por apartamento. Estime el total de personas que viven en el conjunto residencial.

3. De una población se escogieron al azar 15 personas y se les tomo la estatura. Los resultados en cm fueron: 162, 164, 165, 170, 175, 155, 165, 180, 165, 170, 145, 150. Estime la media y la varianza.

4. De un lote de 1.250 celulares se seleccionaron aleatoriamente 50 y se encontró que 1 de ellos estaba dañado ¿cuántos celulares se estima que estén en mal estado?

5. Una muestra aleatoria de 125 individuos a los que se ha medido el nivel de glucosa en sangre, obteniéndose una media muestral de 115 mg/cc. Se sabe que la desviación típica de la población es de 25 mg/cc. Obtener un intervalo de confianza, al 70%, para el nivel de glucosa en sangre en la población.

6. Se conoce que el contenido de fructosa de cierto alimento sigue una distribución normal, cuya varianza es conocida, teniendo un valor de 0,36. Se desea estimar el valor de la media poblacional mediante el valor de la media de una muestra, con un error máximo de 0,3 con una confianza del 95%. ¿Cuál ha de ser el tamaño de la muestra?

7. En un colegio el peso de los estudiantes cumple una distribución normal con media de 55 kg y una desviación típica de 15 kg. Si se extrae una muestra aleatoria de 30 jóvenes y para un nivel de significación del 10%, ¿En qué condiciones se rechazaría la hipótesis de que la media de la población es de 55 kgs?

8. En una Universidad de Antioquia Secundaria hay matriculados 5000 estudiantes. Una muestra seleccionada aleatoriamente de un 30% de estos, se les preguntó si utilizaban la cafetería de la institución. A lo que contestaron que no de 50.

   a) Estima el porcentaje de estudiantes que utilizan la cafetería del instituto
   b) Determinar con un nivel de confianza del 85%, el error máximo cometido con dicha estimación.

9. Una encuesta efectuada a 70 hogares sobre el consumo de gaseosa, con un tiempo medio de consumo de una familia es de 6, con una desviación típica de 3. ¿Sirve esta información para aceptar, con un nivel de significación del 7%, que el tiempo medio de consumo es de 8?

10. En un barrio se escogió al azar una muestra de 250 personas cuya media de ingresos mensuales resultaba igual a \$515.000. con una desviación típica de \$25.000 Si se toma un nivel de confianza del 90%, ¿cuál es el intervalo de confianza para la media de los ingresos mensuales de toda la población?

11. *La duración de las que bombillas de 110 w que una empresa fabrica sigue una distribución normal con una desviación estándar de 80 horas de duración. Su vida media se encuentra garantizada con una duración mínima de 750 horas. Se seleccionó al azar una muestra de 45 lámparas de un lote y, después de ser adquiridas, con una vida media de duración de 620 horas y con un valor de significancia del 5%. ¿La duración de las lámparas corresponde a su vida media?*

12. De acuerdo a lo trabajado en el módulo responde a las siguientes actividades:

    a. Realice un ejercicio de distribuciones muestrales de la media aplicado a su trabajo.
    b. Formule un problema de distribuciones muestrales proporcionales.
    c. Construya un ejercicio de intervalo confianza para media.
    d. Haga un ejercicio de prueba de hipótesis para medias y proporciones aplicado a la vida cotidiana.
    e. Debe realizar un proyecto a su vida cotidiana aplicando las Distribuciones Muestrales, Intervalos de Confianza y Prueba de Hipótesis.

5 GLOSARIO

Estadística inferencial: La **estadística inferencial** es una parte de la estadística que comprende los métodos y procedimientos que por medio de la inducción determina propiedades de una población estadística, a partir de una pequeña parte de la misma.

Muestreo: En estadística se conoce como **muestreo** a la técnica para la selección de una muestra a partir de una población.

Parámetro estadístico; una función definida sobre valores numéricos que caracteriza una población o un modelo.

Estimador: En estadística, un **estimador** es un estadístico (esto es, una función de la muestra) usado para estimar un parámetro desconocido de la población

Muestral Aleatorio Simple: Es considerado el método más sencillo. Mediante una tabla de números al azar se eligen las zonas que se quieren muestrear. Este tipo de muestreo posee algunos inconvenientes. Por un lado, supone definir de antemano los límites de un yacimiento, y no siempre se conocen con certeza. Por otro lado, el carácter aleatorio de las tablas numéricas provoca que en algunas áreas se acumulen las muestras, mientras que en otras permanecen intactas.

Distribuciones Muestrales: En estadística, la **distribución muestral** es lo que resulta de considerar todas las muestras posibles que pueden ser tomadas de una población. Su estudio permite calcular la probabilidad que se tiene, dada una sola muestra, de acercarse al parámetro de la población. Mediante la distribución muestral se puede estimar el error para un tamaño de muestra dado.

Error Estándar: El **error estándar** es la desviación estándar de la distribución muestral de un estadístico.[1] El término se refiere también a una estimación de la desviación estándar, derivada de una muestra particular usada para computar la estimación.

Estimación: En inferencia estadística se llama estimación al conjunto de técnicas que permiten dar un valor aproximado de un parámetro de una población a partir de los datos proporcionados por una muestra.

Intervalos de Confianza: En estadística, se llama a un par o varios pares de números entre los cuales se estima que estará cierto valor desconocido con una determinada probabilidad de acierto.

Prueba Hipótesis nula: En estadística, una **hipótesis nula** es una hipótesis construida para anular o refutar, con el objetivo de apoyar una hipótesis alternativa. Cuando se utiliza, la hipótesis nula se presume verdadera hasta que una prueba estadística en la forma de una prueba empírica de la hipótesis indique lo contrario. Si la hipótesis nula no es rechazada, esto no quiere decir que sea verdadera.

6 BIBLIOGRAFÍA

- **Fuentes Bibliográficas**

1. David R. Anderson, Dennis J. Sweeney, Thomas A. Williams. Estadística para administradores y economía. Cengage Learning Editores, 2004
2. Jay L Devore. Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias. Cengage Learning Editores, 2005
3. Andrés Rivadulla Rodríguez. Probabilidad e Inferencia Probabilística. Anthropos Editorial, 1991
4. LUIS RUIZ-MAYA PEREZ,FRANCISCO JAVIER MARTIN-PLIEGO LOPEZ. Fundamentos de Probabilidades. Thomson Paraninfo, 2005
5. Mark L. Berenson,David M. Levine,Timothy C Krehbiel. Estadística para Administración. Pearson Educación, 2006, 4 edición.
6. Anderson David R., Sweeney Dennis J. Estadística para administración y economía. Cengage Learning Editores, 2008. Edición 10
7. Martínez Bencardino Ciro Estadística básica aplicada. ECOE EDICIONES, 2003.
8. Weiers Ronald M. Introducción a la estadística para Negocios. Cengage Learning Editores, 2006. Edición 5.

- **Fuentes electrónicas o digitales**

http://apuntes.rincondelvago.com/muestreo-probabilistico.html

http://www.hiru.com/es/matematika/matematika_05200.html

http://www.tesisymonografias.net/concepto-estadistica-probabilistica/6/

http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_la_probabilidad

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/28/matematicas-28.html

http://www.monografias.com/trabajos11/tebas/tebas.shtml

http://webpages.ull.es/users/jjsalaza/curriculum/books/GOBCAN02.pdf