UNIREMINGTON®
CORPORACIÓN UNIVERSITARIA REMINGTON
RES. 2661 MEN JUNIO 21 DE 1996

ECUACIONES DIFERENCIALES

INGENIERÍA DE SISTEMAS

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Vicerrectoria de Educación a Distancia y virtual

2016

AUTOR

PABLO EMILIO BOTERO TOBÓN
pbotero@uniremington.edu.co

Nota: el autor certificó (de manera verbal o escrita) No haber incurrido en fraude científico, plagio o vicios de autoría; en caso contrario eximió de toda responsabilidad a la Corporación Universitaria Remington, y se declaró como el único responsable.

RESPONSABLES

Jorge Mauricio Sepúlveda Castaño
Decano de la Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería
jsepulveda@uniremington.edu.co

Eduardo Alfredo Castillo Builes
Vicerrector modalidad distancia y virtual
ecastillo@uniremington.edu.co

Francisco Javier Álvarez Gómez
Coordinador CUR-Virtual
falvarez@uniremington.edu.co

GRUPO DE APOYO

Personal de la Unidad CUR-Virtual
EDICIÓN Y MONTAJE

Primera versión. Febrero de 2011.
Segunda versión. Marzo de 2012
Tercera versión. noviembre de 2015
Cuarta versión 2016

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

1 MAPA DE LA ASIGNATURA

ECUACIONES DIFERENCIALES

PROPÓSITO GENERAL DEL MÓDULO

A través del Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral se obtienen herramientas y elementos para representar situaciones matemáticas, mediante un lenguaje matemático claro y preciso, pero es demasiado importante entender que las matemáticas son **el lenguaje de la ingeniería,** los ingenieros trabajan en diferentes áreas con diferentes principios, las matemáticas son **el lenguaje en común** que sirve para expresar, comprender y manipular los distintos fenómenos en las diferentes áreas de su trabajo, no solo debemos quedarnos en la solución de problemas, sino avanzar en la aplicación **real** y **concreta** de los mismos.

En el mismo sentido se habla de las ecuaciones como la base de la ingeniería, estas en particular nos sirven para establecer relaciones entre distintas variables, de manera que podamos, despejar, correlacionar, modelar o expresar relaciones en un sistema.

Sin las ecuaciones los problemas en la ingeniería no serían resueltos jamás, pues la formulación de un problema se resuelve más fácilmente haciendo uso de las mismas, ya sean lineales, cuadráticas, diferenciales, para tal fin existen métodos de soluciones que ayudan a resolver el problema en cada campo de la ingeniería.

OBJETIVO GENERAL

Analizar los conceptos del Cálculo y los fundamentos básicos de las Ecuaciones Diferenciales aplicados a la Física, la Economía, la Administración y el mercadeo como modelos de representación de diversas situaciones problémicas que involucren relaciones de cambio entre variables.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

UNIDAD 1

Reconocer los procesos de Derivación e Integración, sus aplicaciones y los conceptos fundamentales de las Ecuaciones Diferenciales.

UNIDAD 2

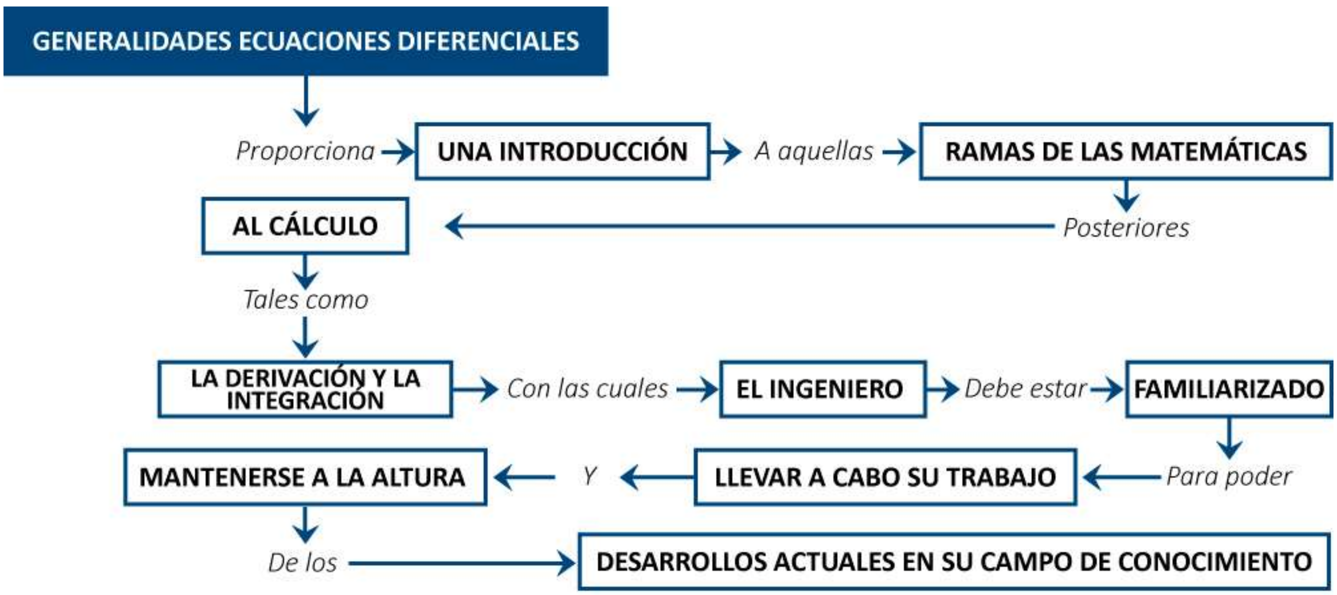
Solucionar Ecuaciones Diferenciales:
- Ordinarias de Primer Orden.
- Lineales con Coeficientes Constantes.
- Lineales Simultáneas.

UNIDAD 3

Resolver aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales utilizando Series e Integrales de Fourier y la Transformada de Laplace.

2 UNIDAD 1 GENERALIDADES

2.1.1 RELACIÓN DE CONCEPTOS



2.1.2 CONCEPTOS BÁSICOS

- **Cálculo:** En general el término **cálculo** (del latín calculus = piedra)[1] hace referencia al resultado correspondiente a la acción de calcular o contar. **Calcular**, por su parte, consiste en realizar las operaciones necesarias para prever el resultado de una acción previamente concebida, o conocer las consecuencias que se pueden derivar de unos datos previamente conocidos.

No obstante, el uso más común del término cálculo es el **lógico matemático**. Desde esta perspectiva, el cálculo consiste en un procedimiento mecánico, o algoritmo, mediante el cual podemos conocer las consecuencias que se derivan de unos datos previamente conocidos debidamente formalizados y simbolizados.

- **Derivación**: La derivación numérica es una técnica de análisis numérico para calcular una aproximación a la derivada de una función en un punto, utilizando los valores y propiedades de la misma.
- **Integración:** La **integración** es un concepto fundamental del cálculo y del análisis matemático, básicamente, una integral es una generalización de la suma de infinitos sumandos, infinitamente pequeños.

El **cálculo integral**, encuadrado en el cálculo infinitesimal, es una rama de las matemáticas en el proceso de integración o antiderivación, es muy común en la ingeniería y en la ciencia también; se utiliza principalmente para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución.

Fue usado por primera vez por científicos como Arquímedes, René Descartes, Isaac Newton, Gottfried Leibniz e Isaac Barrow. Los trabajos de este último y los aportes de Newton generaron el teorema fundamental del cálculo integral, que propone que la derivación y la integración son procesos inversos.

- **Ingeniería:** La **ingeniería** es el conjunto de conocimientos y técnicas científicas aplicadas al desarrollo, implementación, mantenimiento y perfeccionamiento de estructuras (tanto físicas como teóricas) para la resolución de problemas que afectan la actividad cotidiana de la sociedad.

Para ella, el estudio, conocimiento, manejo y dominio de las matemáticas, la física y otras ciencias es aplicado profesionalmente tanto para el desarrollo de tecnologías, como para el manejo eficiente de recursos y/o fuerzas de la naturaleza en beneficio de la sociedad. La ingeniería es la actividad de transformar el conocimiento en algo práctico.

Otra característica que define a la ingeniería es la aplicación de los conocimientos científicos a la invención o perfeccionamiento de nuevas técnicas. Esta aplicación se caracteriza por usar el ingenio principalmente de una manera más pragmática y ágil que el método científico, puesto que la ingeniería, como actividad, está limitada al tiempo y recursos dados por el entorno en que ella se desenvuelve.

Su estudio como campo del conocimiento está directamente relacionado con el comienzo de la Revolución Industrial, constituyendo una de las actividades pilares en el desarrollo de las sociedades modernas.

Ecuación Diferencial: Una **ecuación diferencial** es una ecuación en la que intervienen derivadas de una o más funciones desconocidas. Dependiendo del número de variables independientes respecto de las que se deriva.

2.1.3 OBJETIVO GENERAL

Reconocer los procesos de Derivación e Integración, sus aplicaciones y los conceptos fundamentales de las Ecuaciones Diferenciales.

2.1.4 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Explorar conceptos y procedimientos asociados con el tema de las derivadas, describiendo procedimientos asociados con las técnicas para el cálculo de derivadas y comparando, mediante la ejemplificación, resultados de cálculos de derivadas optimizando así los distintos procedimientos empleados.

- Explorar conceptos y procedimientos asociados con el tema de la integración conociendo los diferentes métodos de la misma, para su posterior aplicación.

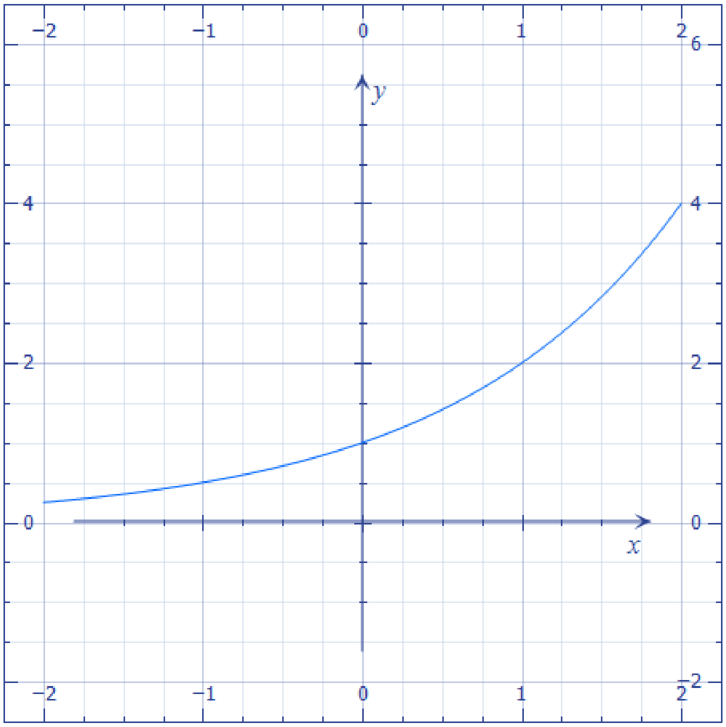
- Determinar los conceptos fundamentales de las Ecuaciones Diferenciales.

A continuación, encontrará unos conceptos teóricos, algunos ejemplos y ejercicios para que resuelva, de dos temas de suma importancia para el posterior desarrollo del módulo, temas que utilizará con mucha frecuencia.

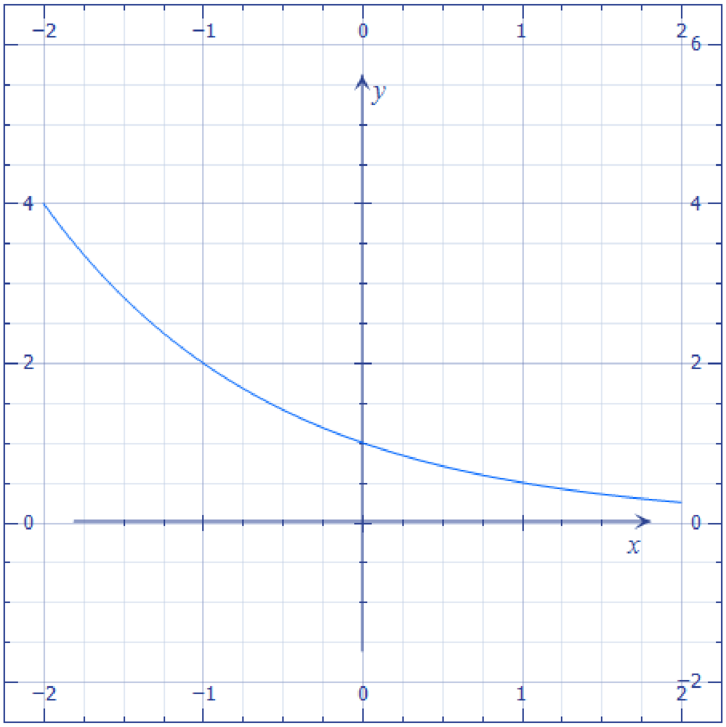
- **FUNCIÓN EXPONENCIAL**

Es una función de la forma $\boldsymbol{y = a^x}$ y que cumple las siguientes condiciones:

- $Dominio\ de\ la\ función \rightarrow \boldsymbol{D_f = R_e} = (-\infty, +\infty)$
- $Rango\ de\ la\ función \rightarrow \boldsymbol{R_f = R_e^+} = (\,\boldsymbol{0}, +\infty)$
- $Es\ una\ \boldsymbol{función\ Continua.}$
- $\boldsymbol{a \neq 1}$
- $Los\ puntos\ (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})\boldsymbol{y}\ (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{a})pertenecen\ a\ la\ gráfica$
- $\boldsymbol{Es\ Inyectiva}\ (\boldsymbol{uno\ a\ uno})\forall_{\boldsymbol{a \neq 1}}$
- $Es\ una\ \boldsymbol{Función\ Creciente\ si\ a > 1}$,
  $su\ gráfica\ está\ dada\ por$:



- *Es una* ***Función Decreciente si*** $\mathbf{0 < a < 1}$,
  su gráfica está dada por:



- $Las\ curvas$
  $* \ y = a^x$,

  $** \ y = (\frac{1}{a})^x$ $son\ Simétricas\ con\ respecto\ al\ eje\ OY$

➢ **Algunas propiedades de la potenciación:**

Recuerda algunas de las propiedades de la potenciación que te serán útiles para la solución de Ecuaciones Exponenciales:

- $a^m * a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\ con\ a \neq 0$
- $a^0 = 1, con\ a \neq 0$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}\ con\ a \neq 0$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Ejemplos de **Ecuaciones Exponenciales**:

Resolver las siguientes Ecuaciones exponenciales:

1. $2^x = 16$

Procedimiento

a. Para resolver este tipo de ecuaciones se igualan las bases, esto es:

$2^x = 2^4$**,** por lo tanto, si tienen la misma base (2), sus exponentes son iguales:

$x = 4$

b. Solución: $x = 4$

---

2. $3^x = 243$

a. Para resolver este tipo de ecuaciones se igualan las bases, esto es:

$\mathbf{3^x = 3^5}$, por lo tanto, si tienen la misma base ($\mathbf{3}$), sus exponentes son iguales:

$\mathbf{x = 5}$

b. Solución: $\mathbf{x = 5}$

---

3. $\mathbf{25^x = 125}$

a. Para resolver este tipo de ecuaciones se igualan las bases, esto es:

$\mathbf{5^{2x} = 5^3}$, por lo tanto, si tienen la misma base ($\mathbf{5}$), sus exponentes son iguales:

$$\mathbf{2x = 5 \rightarrow x = \frac{3}{2}}$$

b. Solución: $\mathbf{x = \frac{3}{2}}$

---

4. $\mathbf{2^{x+3} + 4^{x+1} - 320 = 0,}$

a. utilizando las propiedades de la potenciación, la ecuación puede escribirse:

$$\mathbf{2^x * 2^3 + 4^x * 4^1 - 320 = 0 \rightarrow 2^x * 2^3 + (2^x)^2 * 2^2 - 320 = 0}$$

Haciendo $** \ \mathbf{2^x = t,}$ se tiene:

$\mathbf{t * 2^3 + t^2 * 2^2 - 320 = 0 \rightarrow 4t^2 + 8t - 320 = 0}$ Dividiendo toda la ecuación por 4: $\mathbf{t^2 + 2t - 80 = 0}$

b. Factorizando:

$\mathbf{t^2 + 2t - 80 = 0 \rightarrow (t + 10) * (t - 8) = 0}$, cada factor a cero:

$\mathbf{t + 10 = 0 \rightarrow t = -10}$ **(no tiene solución, recuerde que a>1)**

$\mathbf{t - 8 = 0 \rightarrow t = 8}$

c. Se calcula $\mathbf{x}$ reemplazando en: $** \ \mathbf{2^x = t}$

$\mathbf{2^x = 8 \rightarrow 2^x = 2^3 \rightarrow x = 3}$

Ejercicios

Teniendo como modelo los ejemplos anteriores, resuelve para $\boldsymbol{x}$:

1. $4^x = 256$
2. $9^x = 1029$
3. $6^x = 216$
4. $5^{2x} - 6 * 5^x + 5 = 0$
5. $2^{x+1} = 16^{2x-3}$
6. $2^{1-x^2} = {}^{1}/_{8}$
7. $27^{x+1} = 9$
8. $e^{x+1} = e^{3x}$
9. $Simplifica\ la\ siguiente\ expresión\ (e^{x+1})(e^{4x-5})$
10. $e^{4x+1} = e^{x+1}$

- **Logaritmos**
  - **DEFINICIÓN:** Dado un número $\boldsymbol{R}^+$, no nulo y diferente de 1 $(\boldsymbol{a > o, a \neq 0, a \neq 1})$ y un número $\boldsymbol{N\ positivo\ y\ no\ nulo\ (N > 0, N \neq 0)}$**,** se llama **Logaritmo** en base **a** de **N** al **exponente** al que hay que elevar dicha base para obtener el número.

Se escribe de la siguiente forma:

$\log_a N = x$, dónde:

a: $Base$

N: $Número$

x: $Exponente$

Esta expresión logarítmica también se puede expresar en forma exponencial:

$\log_a N = x \qquad a^x = N$

NOTACIÓN	
NOTACIÓN LOGARÍTMICA	**NOTACIÓN EXPONENCIAL**
$\log_a N = x$	$a^x = N$

Ejemplos

NOTACIÓN LOGARÍTMICA	NOTACIÓN EXPONENCIAL
$\log_2 8 = 3$	$2^3 = 8$
$\log_3 81 = 4$	$3^4 = 81$
$\log_5 25 = 2$	$5^2 = 25$
$\log_8 512 = 3$	$8^3 = 512$

- **PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS**

- $\log_a a = 1 \; porque \; a^1 = 1$
- $\log_a 1 = 0 \; porque \; a^0 = 1$
- $\log_a a^m = m \; porque \; a^m = a^m$
- $\log_a -N \;\; No \; existe$
- $\log_a 0 \;\; No \; existe$
- El Logaritmo de un número $N > 1 \; es \; positivo \; si \; a > 1$
- El Logaritmo de un número $N > 1 \; es \; negativo \; si \; a < 1$
- $\log_a(M * N) = \log_a M + \log_a N$
- $\log_a(M/N) = \log_a M - \log_a N$
- $\log_a M^n = n * \log_a M$
- $\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$
- $\log_a N = \frac{\log N}{\log a}$ $(cambio \; de \; base \; de \; un \; logaritmo)$.

➢ **Logaritmos Naturales:** Llamados también Logaritmos Neperianos (John Neper), son aquellos que tienen como base el número $\boldsymbol{e}$ (llamado número Neperiano), su valor es:

$$e \approx 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995...$$

Nota: Cumplen las mismas propiedades de los Logaritmos Decimales (Base 10).

EJERCICIOS

1. Utilizando la notación Exponencial, encuentre el valor para x en cada uno de los siguientes ejercicios:
   - **a.** $\log_3 81 = x$
   - **b.** $\log_5 625 = x$
   - **c.** $\log_x 64 = 3$
   - **d.** $\log_{\frac{1}{2}} 64 = x$
   - **e.** $\log_7 343 = x$
2. Utilizando la definición de Logaritmo, resuelva los siguientes ejercicios:
   - **a.** $\log_2 64 + \log_3 81 \log_{\frac{1}{4}} 256 + \log_5 125 - \log_2 \sqrt{2}$
   - **b.** $\log_2 \frac{1}{64} - \log_5 \frac{1}{625} + \log_2 \frac{1}{16} - \log_4 \frac{1}{4}$
3. Utilizando las propiedades de los Logaritmos, resuelva las siguientes ecuaciones:

   a. $3\log x - \log 32 = \log x - \log 2$

   Solución: Se realizará el primer ejercicio como modelo.

   1. Aplicando las propiedades de los logaritmos, se tiene:

   $3\log x - \log 32 = \log x - \log 2 \rightarrow \log \frac{x^3}{32} = \log \frac{x}{2}$, como tienen la misma base (10), entonces:

   $$\frac{x^3}{32} = \frac{x}{2} \rightarrow \frac{x^3}{x} = \frac{32}{2} \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = 4$$

   b. $\log(x-2) + 1 = \log(x-1) + \log 2$

   c. $\log x + \log 50 = 3$

   d. $2\log x - \log(x+6) = 3\log 2$

   e. $\ln(x-1) - \ln(x^2-1) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$

   f. $\ln(\frac{x+1}{x}) + \ln 2 = \ln(x+3)$

Nota: En cada ejercicio se debe comprobar la validez de cada solución obtenida.

2.2 TEMA 1 DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN

A continuación se encuentran las diferentes formas de derivar y de integrar con ejemplos y ejercicios de cada una de ellas, realiza este repaso con responsabilidad (matemáticas II), ya que será de mucha utilidad en el desarrollo de este módulo.

a. Derivadas

ORDEN DERIVADA	FORMAS DE REPRESENTACIÓN			
La primera derivada	$y' = f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d[f(x)]}{dx}$	$D_x[f(x)]$
La segunda derivada	$y'' = f''(x)$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2[f(x)]}{dx^2}$	Derivadas de orden superior
La tercera derivada	$y''' = f'''(x)$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^3[f(x)]}{dx^3}$	
La cuarta derivada	$y^4 = f^4(x)$	$\frac{d^4y}{dx^4}$	$\frac{d^4[f(x)]}{dx^4}$	
La derivada de orden n	$y^n = f^n(x)$	$\frac{d^ny}{dx^n}$	$\frac{d^n[f(x)]}{dx^n}$	

- **La derivada de una constante** es igual a **cero**:

$$y = f(x) = c, donde\ c\ es\ una\ constante \rightarrow f'(\mathrm{x}) = 0$$

2.2.1 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $y = f(x) = 25$

   $y' = f'(x) = 0$

2. $y = g(x) = -350$

$y' = g'(x) = 0$

- **Derivada de una potencia de x**

$y = f(x) = x^n \rightarrow y' = f'(x) = nx^{n-1}$

2.2.2 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Si $f(x) = x^5$, hallar $f'(x)$

Procedimiento

Aplicando la propiedad, se tiene:

$f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$

2. Si $h(x) = x^{\frac{7}{3}}$, hallar $h'(x)$

Procedimiento

Aplicando la propiedad, se tiene:

$$h'(x) = \frac{7}{3}x^{\frac{7}{3}-1} = \frac{7}{3}x^{\frac{7-3}{3}} = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} = \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}$$

- **Derivada de una constante por una función potencia:**

$y = f(x) = cx^n \rightarrow y' = f'(x) = c * nx^{n-1}$

Nota 1: para aplicar esta ley la variable debe estar en el numerador.

Nota 2: si hay radicales, para aplicar esta ley se deben llevar a potencia con exponente fraccionario, aplicar la ley y luego volver a convertir a radical.

2.2.3 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Si $\boldsymbol{y = h(x) = 5x^{-3}}$, hallar $\boldsymbol{h'(x)}$

Procedimiento

Aplicando la propiedad, se tiene:

$$\boldsymbol{h'(x) = 5 * (-3)\, x^{-3-1} = -15x^{-4} = -\frac{15}{x^4}}$$

- **Derivada de una suma (diferencia):**
  Si $\boldsymbol{y = f(x) \pm g(x) \pm k(x) \ldots}$**,** entonces:

$$\boldsymbol{y' = f'(x) \pm g'(x) \pm k'(x) \ldots,}$$

Esta ley dice que la derivada de una suma (diferencia) de funciones es igual a la suma (diferencia) de las derivadas de cada función; es decir cuando hay una suma, se deriva cada función por separado y luego se juntan los resultados con el signo correspondiente.

2.2.4 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $\boldsymbol{y = f(x) = 3x^2 + 5}$

Procedimiento

Se deriva cada uno de los sumandos:

$$\boldsymbol{f'(x) = 3 * 2x^{2-1} + 0}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = 3 * 2x^{2-1} + 0 \rightarrow f'(x) = 6x}$$

2. $\boldsymbol{g(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x - 10}$**, hallar** $\boldsymbol{g'''(x)}$

Procedimiento

Para hallar la tercera derivada hay que partir siempre de la primera derivada y luego de la segunda.

y	=	$g(x)$	$4x^3 - 5x^2 + 3x - 10$	
y'	=	$g'(x)$	$4 * 3x^{3-1} - 5 * 2x^{2-1} + 3x^{1-1} - 0 = 12x^2 - 10x + 3$	Primera derivada
y''	=	$g''(x)$	$12x^2 - 10x + 3 =$ $2 * 12x^{2-1} - 10x^{1-1} + 0 = 24x - 10$	Segunda derivada
y'''	=	$g'''(x)$	$24x - 10 = 24x^{1-1} - 0$ $= 24$	Tercera derivada

- **Derivada de un Producto**

  Si $y = f(x) = g(x) * h(x)$**,** entonces:

$$y' = f'(x) = g'(x) * h(x) + h'(x) * g(x)$$

- **Derivada de un cociente:**

  $y = f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ con $h(x) \neq 0$, entonces:

$$y'(x) = f'(x) = \frac{g'(x) * h(x) - g(x) * h'(x)}{[h(x)]^2}$$

2.2.5 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Si

$y = f(x) = (5x - 7) * (2x + 9),$ hallar $f'(x)$

PROCEDIMIENTO

Se aplica la regla del **producto**:

FUNCIÓN	DERIVADA	FUNCIÓN	DERIVADA
$g(x)$	$g'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$5x-7$	5	$2x+9$	2

Entonces:

$y'(x) = 5 * (2x+9) + 2 * (5x-7)$, realizando los productos indicados, se tiene:

$$y'(x) = 10x + 45 + 10x - 14$$

Reduciendo términos semejantes:

$$y'(x) = 20x + 31$$

2. Si $y = f(x) = \frac{4x-5}{x^2-3x+2}$, hallar $f'(x)$

Procedimiento

Se aplica la regla del **cociente**:

$$y = f(x) = \frac{4x-5}{x^2-3x+2}$$

- $g(x) = 4x - 5 \rightarrow g'(x) = 4$
- $h(x) = x^2 - 3x + 2 \rightarrow h'(x) = 2x - 3$

Entonces:

$$y'(x) = f'(x) = \frac{4 * (x^2 - 3x + 2) - (2x-3) * (4x-5)}{(x^2-3x+2)^2}$$

Realizando los productos indicados:

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 12x + 8 - 8x^2 + 10x + 12x - 15}{(x^2-3x+2)^2}$$

Reduciendo términos semejantes en el numerador de la fracción:

$$f'(x) = \frac{-4x^2 + 10x - 7}{(x^2-3x+2)^2}$$

- **REGLA DE LA CADENA (O REGLA DE LA POTENCIA)**

Si $\boldsymbol{y = f(x) = u^n}$**,** donde u es una función escrita en términos de $\boldsymbol{x}$, entonces:

$$\boldsymbol{y' = f'(x) = nu^{n-1} * u'}$$

Otra forma de escribir lo mismo es:

$$\boldsymbol{f(x) = [g(x)]^n \rightarrow f'(x) = n[g(x)]^{n-1} * g'(x)}$$

Esta ley dice que si se tiene una expresión elevada a cualquier exponente, la derivada es igual al exponente multiplicado por la misma expresión elevada al exponente menos uno y multiplicada por la derivada de lo que está dentro del paréntesis.

2.2.6 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. **Si** $\boldsymbol{y = f(x) = (3x^2 - 5x + 4)^7}$**,** hallar $\boldsymbol{f'(x)}$

Procedimiento

Se hace $\boldsymbol{u}$ igual a todo lo que está dentro del paréntesis:

$$\boldsymbol{u = 3x^2 - 5x + 4}$$

Derivando $\boldsymbol{u}$:

$\rightarrow$

En términos de u queda: $\boldsymbol{u' = 6x - 5}$

Se tiene: $\boldsymbol{y = f(x) = (u)^7 \rightarrow y = f(x) = u^7}$

Derivando en función de $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{y = f(x) = u^7 \rightarrow f'^{(x)} = 7u^{7-1} * u' = 7u^6 * u'}$$

Recuperando la variable inicial (reemplazando):

$$\boldsymbol{f'^{(x)} = 7(3x^2 - 5x + 4)^6 * (6x - 5)}$$

- **Derivada de funciones exponenciales**

Sea $\boldsymbol{u = f(x),\ \ a > 0\ y\ a \neq 1}$

Entonces: $\boldsymbol{y = a^u \rightarrow y' = a^u * u' * \ln a}$

Esta ley dice que la derivada de una función exponencial es igual a la misma función exponencial multiplicada por la derivada del exponente y multiplicada por el logaritmo natural de la base. El logaritmo natural del número **e** es igual a uno ($\ln e = 1$)

2.2.7 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Si $y = f(x) = 5^{3x-10}$, Hallar la primera derivada

Procedimiento

$$y = f(x) = 5^{3x-10} \rightarrow y' = f'(x) = 5^{3x-10} * 3 * \ln 5$$

2. Si $y = f(x) = e^{7x^2-5x-4}$, hallar y'

Procedimiento

$$y = e^{7x^2-5x-4} \rightarrow y' = e^{7x^2-5x-4} * (14x - 5) * \ln e$$

Pero $\ln e = 1$, entonces

$$y = e^{7x^2-5x-4} \rightarrow y' = e^{7x^2-5x-4} * (14x - 5)$$

- **Derivada de la función logarítmica**

Si $y = f(x) = \log_b u \rightarrow y' = f'(x) = \frac{u'}{u * \ln b}$

2.2.8 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Si $y = f(x) = \ln(3x - 10)$, hallar $f'(x)$

Procedimiento

$$y = f(x) = \ln(3x - 10) \rightarrow f'(x) = \frac{D_x(3x - 10)}{(3x - 10)\ln e}$$

$y' = \frac{3}{3x-10}$, recuerde que $\ln e = 1$

2. Si $y = \ln(5x^4 + 8x - 12)$, hallar y'

Procedimiento

$$y' = \frac{D_x(5x^4 + 8x - 12)}{(5x^4 + 8x - 12) * \ln e} \rightarrow y' = \frac{20x^3 + 8}{5x^4 + 8x - 12}$$

Nota: en algunos casos para derivar funciones logarítmicas es necesario aplicar previamente una o varias de las propiedades de los logaritmos. Dichas propiedades se enuncian a continuación:

- **Logaritmo de una potencia:**

$$\log_b a^n = n * \log_b a$$

2.2.9 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. **Ejemplo 1:** Obtenga la primera derivada de:

   $y = \ln(3x - 4)^4$

   Procedimiento

- Se aplica la propiedad del logaritmo de una potencia:

  $y = \ln(3x - 4)^4 = 4\ln(3x - 4)$

- Se procede a derivar aplicando la derivada de un logaritmo natural:

$$y' = 4 * \frac{D_x(3x - 4)}{(3x - 4) * \ln e} \to y' = 4\frac{3}{(3x - 4)} = \frac{12}{3x - 4}$$

Derivada de las funciones trigonométricas:

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
$\sin u$	$\cos u * u'$
$\cos u$	$-\sin u * u'$
$\tan u$	$sec^2 u * u'$
$\cot u$	$-csc^2 u * \cot u * u'$

$\sec u$	$\sec u * \tan u * u'$
$\csc u$	$-\csc u * \cot u * u'$

2.2.10 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Halle la primera derivada de:

$$y = f(x) = \sin(3x^2 + 5x - 1)$$

Procedimiento

- Se aplica la propiedad para derivar la función seno:

$y = \sin u$	$y' = \cos u * u'$

Sea $u = 3x^2 + 5x - 1 \rightarrow u' = 6x + 5$

- Derivando se tiene:

$$y' = \cos(3x^2 + 5x - 1) * 6x + 5$$

- Ordenando la derivada:

$$y' = (6x + 5) * \cos(3x^2 + 5x - 1) *$$

2. Hallar la primera derivada de:

$$y = \sin\left(\frac{3x + 1}{2x - 3}\right)$$

Procedimiento

- Se aplica la propiedad para derivar la función seno:

$y = \sin u$	$y' = \cos u * u'$

Sea $\boldsymbol{u} = \frac{3x+1}{2x-3} \rightarrow \boldsymbol{u}' = \frac{3(2x-3)-2(3x+1)}{(2x-3)^2} = \frac{6x-9-6x-2}{(2x-3)^2} = -\frac{11}{(2x-3)^2}$

$$y' = \cos\left(\frac{3x+1}{2x-3}\right) * -\frac{11}{(2x-3)^2}$$

- Ordenando la derivada:

$$y' = -\frac{11}{(2x-3)^2} * \cos\left(\frac{3x+1}{2x-3}\right)$$

b. LEYES BÁSICAS DE INTEGRACIÓN.

- $$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c; \quad n \neq -1$$

2.2.11 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Ejemplo 1:

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{x^4}{4} + c$$

Ejemplo 2:

$$\int \sqrt[5]{x^2}\, dx = \int x^{2/5} dx = \frac{x^{2/5+1}}{2/5+1} + c = \frac{x^{7/5}}{7/5} + c = \frac{5}{7}\sqrt[5]{x^7} + c$$

Ejemplo3:

a) $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3-1}}{-3-1} + c = \frac{x^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{4x^4} + c$

b) $\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln x + c$

c) $\int dx = x + C$

Ejemplo 4:

$$\int dz = z + C$$

Ejemplo 5:

a) $\int dy = y + C$

b) $\int e^x dx = e^x + C$

c) $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$

Ejemplo 6:

$$\int 5^x dx = \frac{1}{\ln 5} 5^x + C$$

Ejemplo 7:

$$\int 7^x dx = \frac{1}{\ln 7} 7^x + C$$

- $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx = kF(x) + C$

Donde **k** es una constante.

Podemos ver que se efectúa la integral de la función, el resultado se multiplica por la constante **k** y al final sólo se escribe una sola constante de integración.

2.2.12 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Ejemplo1:

$$\int 10dx = 10\int dx = 10x + c$$

Ejemplo2:

$$\int \frac{11}{x}dx = 11\ln x + c$$

Ejemplo3:

$$\int \frac{-4}{y}dy = -4\ln y + c$$

Ejemplos4:

$$\int \frac{8}{x}dx = 8\int \frac{1}{x}dx = 8\ln x + C$$

Ejemplo 5:

$$\int \sqrt{3}dx = \sqrt{3}\int dx = \sqrt{3}x + c$$

Ejemplo 6:

$$\int 9x^{1.3}dx = 9\int x^{1.3}dx = \frac{9x^{2.3}}{2.3} + C$$

Ejemplos 7:

$$\int 6x^2 dx = 6\int x^2 dx = 6\frac{x^{2+1}}{2+1} + c = 6\frac{x^3}{3} + c = 2x^3 + c$$

Ejemplo 8: $\int \frac{8}{x^5} dx$

$$\int \frac{8}{x^5} dx = 8\int x^{-5} dx = 8\frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{2}{x^4} + C$$

Ejemplo 9:

$$\int 11e^x dx = 11\int e^x dx = 11e^x + C$$

Ejemplo 10:

$$\int \frac{3}{5} e^x dx = \frac{3}{5} e^x + c$$

Ejemplo11:

$$\int -8e^z dz = -8e^z + c$$

Ejemplo12:

$\int edx = ex + c$ Ya que e es una constante.

Ejemplo13:

$$\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + c$$

$$\int [f(x) \pm g(x) \pm h(x) \pm \ldots]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \pm \int h(x)dx \pm \ldots$$

Esto es: **La integral de una suma (o diferencia) es igual a la suma (o diferencia) de las integrales**.

Para aplicar la ley, se efectúa cada derivada independientemente y al final escribimos una sola constante de integración C.

2.2.13 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Ejemplo 1

$$\int (5x^2 + 6x - 10)dx = \int 5x^2 dx + \int 6x dx - \int 10 dx = \frac{5x^3}{3} + \frac{6}{2}x^2 - 10x + c$$

$$\frac{5x^3}{3} + 3x^2 - 10x + c$$

Ejemplo 2

$$\int (7x^4 - 3x^2 + 8x - 9)dx$$

SOLUCIÓN

$$7\int x^4 dx - 3\int x^2 dx + 8\int x dx - 9\int dx$$

$$\frac{7x^5}{5} - \frac{3x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 9x + C$$

Simplificando:

$$\frac{7x^5}{5} - x^3 + 4x^2 - 9x + C$$

Ejemplo 3

$$\int \frac{4x^5 - 6x^3 + 8x}{2x} dx$$

$$\int \frac{4x^5 - 6x^3 + 8x}{2x} dx = \int \frac{4x^5}{2x} dx - \int \frac{6x^3}{2x} dx + \int \frac{8x}{2x} dx$$

$$\int 2x^4 dx - \int 3x^3 dx + \int 4dx = 2\frac{x^5}{5} - 3\frac{x^4}{4} + 4x + c$$

Ejemplo 4

$$\int 5z^3 dx$$

$$\int 5z^3 dx = 5z^3 \int dx = 5z^3 x + c$$

Esto debido a que se está integrando x y no se está integrando z

---

Ejemplo 5

$$\int \left(3q^2 - \frac{2}{3}q + 5 \right) dq$$

$$\int \left(3q^2 - \frac{2}{3}q + 5 \right) dq = 3\int q^2 dq - \frac{2}{3}\int q dq + 5\int dq = 3\frac{q^3}{3} - \frac{2}{3}\frac{q^2}{2} + 5q + c$$

$$= q^3 - \frac{1}{3}q^2 + 5q + c$$

Ejemplo 6

$$\int y^2 (y + 3/2) dy$$

$$\int y^2 \left(y + \frac{3}{2} \right) dy = \int \left(y^3 + \frac{3}{2}y^2 \right) dy = \int y^3 dy + \int \frac{3}{2}y^2 dy = \frac{y^4}{4} + \frac{3}{2}\frac{y^3}{3} + c$$

$$\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^3 + c$$

Ejemplo 7

$$\int 3 * 2^x dx = 3\int 2^x dx = 3 * \frac{2^x}{\ln 2} + c$$

Ejemplo 8

$$\int \frac{5^x}{7} dx = \frac{1}{7}\int 5^x dx = \frac{1}{7}\frac{5^x}{\ln 5} + c$$

- **Integración con condiciones iniciales**. Las condiciones iniciales nos permiten determinar el valor de la constante **C**. Es decir entre muchas funciones, nos permite determinar una única función.

2.2.14 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Ejemplo1

Sí. $f'(x) = 5x$, y $f(1) = 4$. Determine: $f(x)$

NOTA: El procedimiento a seguir para este y para cualquier otro ejemplo es el siguiente:

1. Escriba una notación para la derivada que permita visualizar las dos variables.

$f'(x)$. También se puede escribir como: $\frac{d[f(x)]}{dx}$ *ó* $\frac{dy}{dx}$ esto es.

$f'(x) = \frac{d[f(x)]}{dx} = \frac{dy}{dx}$. Se utilizará la notación:. $\frac{dy}{dx}$

2. La ecuación dada se llama una **Ecuación Diferencial** (porque es una ecuación que incluye derivadas).

$$\frac{dy}{dx} = 5x$$

3. Se independizan las dos variables. Todo la que tenga **x** a un lado (incluyendo el dx) y todo lo que tenga $y = f(x)$ al lado contrario.

Separando variables queda:

$$dy = 5xdx$$

4. Integrando en ambos lados. No es necesario colocar dos constantes de integración.

$$\int dy = \int 5xdx$$

5. Resolviendo la integral:

$$y = \frac{5x^2}{2} + C$$

Recuerde que **y** es lo mismo que **f(x)** ($y = f(x)$)

6. Luego se utiliza la condición inicial o valor en la frontera para hallar **C**.

Para este caso la condición inicial es **f (1) = 4**. Esta condición quiere decir:

Para **x = 1, y = 4**

Se va a la función obtenida y se reemplaza tanto **x** como **y**, resulta una ecuación con una incógnita que es **C,** Despejando se tiene:

Para **x = 1, y = 4** Reemplazando **x** e **y** en el modelo se tiene:

$$4 = \frac{5(1)^2}{2} + C \Rightarrow 4 = \frac{5}{2} + C \Rightarrow 4 - \frac{5}{2} = C \Rightarrow \frac{8-5}{2} = C \Rightarrow \frac{3}{2} = C$$

La función queda:

$$y = \frac{5x^2}{2} + \frac{3}{2}$$

Se ha contestado la primera pregunta.

a. Con la función obtenida se pueden encontrar valores de x o de y según se necesite.

b. $f(x) \rightarrow y = \frac{5x^2}{2} + \frac{3}{2}$

c. $f(-3)$

$$f(-3) = \frac{5(-3)^2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{45}{2} + \frac{3}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

d. $f(2)$

$$f(2) = \frac{5(2)^2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{20}{2} + \frac{3}{2} = \frac{23}{2}$$

e. ¿Qué valor tiene la **x** cuando **y = 7**?

$$7 = \frac{5x^2}{2} + \frac{3}{2} \rightarrow 2*7 = 2*\frac{5x^2}{2} + 2*\frac{3}{2}$$

$$14 = 5x^2 + 3$$

$$14 - 3 = 5x^2$$

$$11 = 5x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{11}{5}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{11}{5}}$$

Integrales Trigonométricas		
$\int Sen\ x\, dx$	=	$-\cos x + C$
$\int Cos\ x\, dx$	=	$\text{Sen}\ x + C$
$\int Tanx\, dx$	=	$-\ln\|Cos\ x\| + C$
$\int Csc\ x\, dx$	=	$\ln\|Csc\ x + Cot\ x\| + C$
$\int Sec\ x\, dx$	=	$\ln\|Sec\ x + Tan\ x\| + C$
$\int Cot\ x\, dx$	=	$\ln\|Sen\ x\| + C$
$\int Sec^2\ x\, dx$	=	$Tan\ x + C$
$\int Csc\ x. Cot\ x\, dx$		$-Csc\ x + C$
$\int Sec\ x. Tan\ x\, dx$	=	$Sec\ x + c$
$\int Csc^2 x\, dx$	=	$-Cot\ x + c$
Integrales Trigonométricas Inversas		

$\int arc\ Sen\ x\ dx$	=	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$+C
$\int arc\ Csc\ x\ dx$	=	$\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$+C
$\int arc\ Cos\ x\ dx$	=	$\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$+C
$\int Arc\ Sec\ x\ dx$	=	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$+C
$\int arc\ Tan\ x\ dx$	=	$\frac{1}{1+x^2}+C$
$\int arc\ Cot\ x\ dx$	=	$\frac{-1}{1+x^2}+C$
Integrales Trigonométricas Hiperbólicas		
$\int Sen\ h\ x\ dx$	=	$\cos h\ x + C$
$\int Cos\ h\ x\ dx$	=	$\operatorname{sen} h\ x + C$
$\int Tan\ h\ x\ dx$	=	$\ln(\cos h\ x) + C$
$\int Csc\ h\ x\ dx$	=	$\tan(\operatorname{sen}\mathrm{h}\ h\ (\frac{x}{2})) + C$
$\int Sec\ h\ x\ dx$	=	$\tan(sen\ h\ x) + C$

$\int Cot\,h\,x\,dx$	=	$\ln(sen\,h\,x) + C$

PASOS PARA LA INTEGRACIÓN DE EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para la integración de expresiones trigonométricas, se debe tener en cuenta los siguientes aspectos.

Nota: No necesariamente este es el orden a seguir.

1. Determine inicialmente si la integral presenta la forma de alguna de las fórmulas básicas; Si es así efectuamos la integral.

2. Cuando hay una sola expresión trigonométrica, para hacer el cambio de variable se toma lo que está dentro de la expresión trigonométrica, es decir el ángulo.

3. Cuando hay dos o más expresiones trigonométricas en la misma integral, el cambio de variable se hace tomando una de las expresiones trigonométricas.

4. Lleve las expresiones trigonométricas a expresiones equivalentes en términos del seno y del coseno. (Esto a veces funciona).

5. Si es necesario utilice una o varias de las identidades trigonométricas.

2.2.15 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE:

Ejemplo1:

$\int 3x^2 \cos x^3 dx$

SOLUCIÓN

$$u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow \frac{du}{3x^2} = dx$$

Reemplazando en la integral:

$$\int 3x^2 \cos x^3 dx = \int 3x^2 \cos u \frac{du}{3x^2} = \int \cos u du = senu + C$$

$$\int 3x^2 \cos x^3 dx = senx^3 + C$$

Ejemplo 2:

$$\int \frac{x}{sen^2(3x^2+2)}dx$$

SOLUCIÓN

$$u = 3x^2 + 2 \Rightarrow du = 6xdx \Rightarrow \frac{du}{6x} = dx$$

- Reemplazando en la integral:

$$\int \frac{x}{sen^2(3x^2+2)}dx = \int \frac{x}{sen^2 u} * \frac{du}{6x} = \frac{1}{6}\int \frac{1}{sen^2 u}du$$

- Utilizando la identidad:

$$\csc u = \frac{1}{senu} \Rightarrow \csc^2 u = \frac{1}{sen^2 u}$$

- La integral queda:

$$\int \frac{x}{sen^2(3x^2+2)}dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{sen^2 u}du = \frac{1}{6}\int \csc^2 udu = \frac{1}{6}(-\cot u) + C$$

$$\int \frac{x}{sen^2(3x^2+2)}dx = -\frac{1}{6}\cot(3x^2+2) + C$$

Ejemplo 3

$$\int \frac{senx}{\cos^5 x} dx$$

Acá el cambio de variable se debe hacer por una de las dos funciones trigonométricas, en este caso por coseno.

$$u = \cos x \Rightarrow du = -sendx \Rightarrow \frac{du}{-senx} = dx$$

Reemplazando en la integral:

$$\int \frac{senx}{\cos^5 x} dx = \int \frac{senx}{u^5} * \frac{du}{-senx} = -\int \frac{1}{u^5} du = -\int u^{-5} du = -\frac{u^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{4u^4} + C$$

$$\int \frac{senx}{\cos^5 x} dx = \frac{1}{4\cos^4 x} + C = \frac{1}{4}\sec^4 x + C$$

Ejemplo 4:

$$\int \tan(5x-7)dx$$

SOLUCIÓN

$$u = 5x - 7 \Rightarrow du = 5dx \Rightarrow \frac{du}{5} = dx$$

$$\int \tan(5x-7)dx = \int \tan u * \frac{du}{5} = \frac{1}{5}\ln|\sec(u)| + C$$

$$\int \tan(5x-7)dx = \int \tan u * \frac{du}{5} = \frac{1}{5}\ln\left|\sec(5x-7)\right| + C$$

Ejemplo5:

El siguiente ejemplo fue tomado de uno de los libros del autor Purcell

Resolver:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx$$

SOLUCIÓN

$$\int \frac{senx - \cos x}{senx}dx = \int\left(\frac{senx}{senx} - \frac{\cos x}{senx}\right)dx = \int \frac{senx}{senx}dx - \int \frac{\cos x}{senx}dx$$

$$\int dx - \int \frac{\cos x}{senx}dx$$

$$\int dx = x$$

$$\int \frac{\cos x}{senx}dx \to u = senx \to \frac{du}{dx} = \cos x \to \frac{du}{\cos x} = dx$$

$$\int \frac{\cos x}{senx}dx = \int \frac{\cos x}{u}\frac{du}{\cos x} = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln|senx| + C$$

$$\int \frac{\cos x}{senx}dx = \ln|senx| + C$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x} dx = x + \ln|senx| + C$$

2.2.16 EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

Halle la primera derivada para cada una de las siguientes funciones.

1. $f(x) = 9x^3 - \frac{3}{5x^2} + 4\sqrt{3x-1} + x$
2. $f(x) = (4x-3)\cdot(7-3x^2)$
3. $f(x) = (5x-3)^3(7-2x)$
4. $f(x) = (6x^2 - 7x + 4)^4$
5. $y = \frac{7x-2}{5x+3}$
6. $y = \frac{4x+2}{(3-2x)^3}$
7. $h(x) = \sqrt[3]{\frac{5x+2}{3x-4}}$
8. $g(x) = sen(\sqrt{7x+1})$
9. $f(x) = \tan\left(\frac{10+3}{x-2}\right)$
10. $f(x) = \sec(5x - 2^{3x+5})$
11. $h(x) = \ln\left(\frac{11x+3}{7x^2+2x-9}\right)$
12. $g(x) = \sqrt{3^{2x} - e^x}$
13. $f(x) = senx \cdot \ln x$
14. $f(x) = \frac{\cos 3x - 1}{\sqrt{8-3x}}$

Resolver las siguientes integrales utilizando los métodos vistos:

1. $\int \frac{5x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 9x + 10}{x+2} dx$
2. $\int x^2 \sqrt[4]{3x+1}\, dx$

3. $\int 7x sen(x^2+35)dx$
4. $\int \tan^3 x \cot^2 dx$
5. $\int \frac{3x+1}{\sqrt[5]{3x^2+2x+3}}dx$

2.3 TEMA 2 DEFINICIÓN ECUACIONES DIFERENCIALES

Definición:

Es aquella que relaciona, de **manera no trivial***, a una **función desconocida** y **una o más derivadas** de **esta función desconocida** con respecto a **una o más variables independientes**.

ECUACIÓN	CARACTERÍSTICA
Ecuación Diferencial ordinaria	Cuando **la función desconocida** depende de **una sola variable**.
Ecuación Diferencial Parcial	Cuando la **función desconocida** depende de más de **más d**

*Cuando se hace referencia a la **"Manera no Trivial"**, se tiene como propósito descartar ecuaciones diferenciales que satisfacen la definición, son siempre verdaderas sin importar cuál sea la función desconocida (realmente son identidades, por ejemplo:

ECUACIÓN	CARACTERÍSTICA
$Sen^2\left(\frac{dy}{dx}\right)+Cos^2\left(\frac{dy}{dx}\right)=1$	Esta ecuación la satisface cualquier función que sea derivable en una variable.
$\left(\frac{dy}{dx}-y\right)^2=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2y\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$	Es claro que corresponde al Producto Notable: $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$ Por lo cual la función la satisface cualquier función derivable.
$(\frac{dy}{dx}+y)^3=(\frac{dy}{dx})^3+3(\frac{dy}{dx})^2*y+3\frac{dy}{dx}*y^2+y^3$	Es claro que corresponde al Producto Notable: $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

	Por lo cual la función la satisface cualquier función derivable
$1+tan^2\left(\frac{dy}{dx}\right) = sec^2(\frac{dy}{dx})$	Esta ecuación la satisface cualquier función que sea derivable en una variable.
$5\frac{dy}{dx}-6y=6$	Esta ecuación la satisface cualquier función que sea derivable en una variable.
$(x^3-y^2)dx+(x^4+y^{-3})dy=10$	Esta ecuación la satisface cualquier función que sea derivable en una variable.

DEFINICIONES FUNDAMENTALES

En este aparte, el trabajo se centrará en las **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.**

Se entiende por <u>**Ecuación Diferencial Ordinaria**</u> aquella que tiene:

$\boldsymbol{y\ como\ Variable\ Dependiente}$ y $\boldsymbol{x\ como\ Variable\ Independiente}$

Se expresa en de la forma:

$$F(x,y,y^{(1)},y^{(2)},\dots,y^{(n)}=0$$

Dada para algún entero positivo $\boldsymbol{n}$. Despejando de esta ecuación la **<u>derivada más alta</u>**, se obtienen una o más ecuaciones de orden $\boldsymbol{n}$ de la forma:

$$y^{(n)}=G(x,y,y^{(1)},y^{(2)},\dots,y^{(n-1)}$$

Lo anterior lo podemos mirar a través de un ejemplo que mostrará claramente lo que se pretende mostrar:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x(\frac{dy}{dx})-x^2=0$$

Esta ecuación es equivalente a las Ecuaciones Diferenciales:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x^2+4y}-x}{2} \quad \mathbf{y} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{-\sqrt{x^2+4y}-x}{2}$$

- **ECUACION DIFERENCIAL LINEAL:**

Es aquella de **primer grado en la variable dependiente** y **sus derivadas**, por lo tanto la **Ecuación lineal (ordinaria)** general de orden n (se puede decir que una ecuación diferencial es lineal si lo es en todas sus derivadas y también en su Variable dependiente), está dada por:

$$P_0(x)y^{n-1} + \cdots + P_{n-1}(x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + P_n(x)y = r(x)$$

Nota: Una ecuación diferencial que no pueda expresarse de esta forma ***no es lineal.***

Ejemplo 1: $\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\left(\frac{dy}{dx}\right) + y = \sin x$	Los términos $3x\left(\frac{dy}{dx}\right)$ y $\sin x$, no alteran el hecho de que la ecuación sea lineal, ya que, por definición dicha condición viene determinada únicamente por la manera de relacionarse entre si **la variable dependiente** y **sus derivadas**.
Ejemplo 2: $\frac{dy}{dx} + 4xy = 0$	Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal de **primer orden**.
Ejemplo 3: $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 0$	Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal de **segundo orden**.
ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES	
Ejemplo 4: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2y\left(\frac{dy}{dx}\right) + y = cos\ x$	Es no Lineal ya que aparece en uno de sus términos la variable y multiplicada por una de sus derivadas: $2y\left(\frac{dy}{dx}\right)$
Ejemplo 3 $\frac{d^2y}{dx^2} + sen\ y = 0$	Es no Lineal, ya que en ella interviene la función $sen\ y$, la cual es una **función no lineal** de y
OTRAS ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES	

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5(\frac{dy}{dx})^3 - 4y = x$
2. $y\left(\frac{dy}{dx}\right) - 2x = 2$
3. $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$
4. $\frac{dy}{dx} - y = e^y$
5. $\frac{dy}{dx} - -y = \cos y$

- **Orden de una ecuación Diferencial**

El orden de una Ecuación Diferencial es igual al de la derivada de más alto orden que aparece de manera no trivial en la ecuación, en otras palabras, la derivada de más alto orden determina el orden de los factores de la Ecuación Diferencial.

Ejemplos:

ECUACIÓN	ORDEN
1. $\frac{dy}{dx} - 4xy = 0$	Ecuación Diferencial de primer orden.
2. $xy + \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}$	Ecuación Diferencial de segundo orden.
3. $\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{5d^3y}{dx^3} = 12$	Ecuación Diferencial de cuarto orden.

- **Grado de una Ecuación Diferencial**

Escriba aquí la ecuación.

El grado de una Ecuación Diferencial está dado por **el exponente entero positivo** de la **derivada más alta presente en la ecuación.**

Ejemplos:

ECUACIÓN	ORDEN y GRADO
1. $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 4y = x$	Ecuación Diferencial Ordinaria de **segundo orden** y de primer grado.
2. $(\frac{dy}{dx})^2 + 3xy = 0$	Ecuación Diferencial Ordinaria de **primer orden** y de segundo grado.

- **Algunas Aplicaciones**

1. Para la **Sicología** surge una Ecuación Diferencial que representa **un modelo de aprendizaje:**

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2p}{\sqrt{n}} y^{\frac{3}{2}}(1-y)^{\frac{3}{2}}$$

Dónde:

- La variable y representa el nivel de habilidad del individuo como una función del tiempo t
- Las constantes p y n dependen del **individuo considerado** y de la naturaleza de **la tarea que se esté aprendiendo**.

> **Nota**: Esta **Ecuación Diferencial** es:
> - ✓ De **primer orden**,
> - ✓ **No lineal**, y
> - ✓ **No homogénea**.

2. Esta ecuación diferencial surge en el estudio de **circuitos eléctricos** que consisten de:

   - Un inductor L,
   - Corriente q,
   - Un resistor R, y
   - Un capacitor C, al cual se aplica una fuerza electromotriz $E_{(t)}$.

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E_{(t)}$$

> **Nota**: Esta **Ecuación Diferencial** es de:
> - ✓ **Segundo orden**,
> - ✓ **Lineal con coeficientes constantes**, y
> - ✓ **No homogénea**.

3. Otras Ecuaciones Diferenciales

ECUACIÓN	CARACTERÍSTICA
$y^3 + y^2 - 5y = 0$	Es de: ➢ **Orden 3**, ➢ **Lineal** con coeficientes constantes, ➢ **Homogénea.**
$x(\frac{d^2y}{dx^2})^2 + \frac{dy}{dx} = Cos\ (xy)$	Es de: ➢ **Primer orden**, ➢ **No lineal,** y ➢ **No homogénea.**
$(x^2+1)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + Sen\ x\left(\frac{dy}{dx}\right) + 4y = x\ Cosx$	Es de: ➢ **Segundo orden,** ➢ **Lineal con coeficientes variables,** ➢ **No homogénea.**

Nota: El concepto de orden también se extiende a las ecuaciones parciales como se muestra en los siguientes ejemplos:

ECUACIÓN	CARACTERÍSTICA
$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	Se conoce como **la ecuación de calor** y es de: ➢ **Primer orden** en t, ➢ **Segundo orden** en x.
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	Se conoce como la **ecuación de Laplace** y es de: ➢ Segundo orden en x, y ➢ Segundo orden en y.

$c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	Se conoce como **la ecuación de onda** y es de: ➢ Segundo orden en x, ➢ Segundo orden en y, y ➢ Segundo orden en t.

Nota 1: Como aplicaciones, las ecuaciones **de Laplace**, **de Calor** y **de Onda** tienen un enorme significado para la Física Teórica y su estudio ha estimulado el desarrollo de muchas ideas matemáticas relevantes.

Nota 2: Las **ecuaciones diferenciales parciales** aparecen en problemas relacionados con:

- **Campos eléctricos,**
- **Dinámica de fluidos,**
- **Difusión, y**
- **Movimiento ondulatorio.**

Su teoría **es muy diferente** de la de **las ecuaciones diferenciales ordinarias** y notablemente más difícil en casi todas sus facetas.

Ejercicio de Aprendizaje: El siguiente ejemplo es tomado del libro Ecuaciones diferenciales de Moisés Villena Muñoz, capítulo I.

Determinar si la función de primer orden $y=f(x)=\frac{x^4}{16}$ es solución de la ecuación $\frac{dy}{dx}-xy^{\frac{1}{2}}=0$.

Procedimiento:

1. Se obtiene la derivada de la función $y=f(x)=\frac{x^4}{16}$, esto es:

$\frac{dy}{dx}=\frac{4x^3}{16}$, Simplificando se tiene: $\frac{dy}{dx}=\frac{x^3}{4}$

2. Reemplazando esta derivada en $\frac{dy}{dx}-xy^{\frac{1}{2}}=0$, se tiene que:

$$\frac{x^3}{4} - x\left(\frac{x^4}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \rightarrow \frac{x^3}{4} - x\left(\frac{x^{\frac{4}{2}}}{16^{\frac{1}{2}}}\right) = 0 \rightarrow \frac{x^3}{4} - x\left(\frac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{16}}\right) = 0 \rightarrow$$

$\frac{x^3}{4} - x\left(\frac{x^2}{4}\right) = 0$, Efectuando el producto indicado, se tiene:

$$\frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4} = 0 - - - - \rightarrow 0 = 0$$

Por lo tanto, la función $y = f(x) = \frac{x^4}{16}$, es solución para **la Ecuación Diferencial** $\frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{2}} = 0$.

Dadas las siguientes Ecuaciones Diferenciales, determine: su orden, si es Ordinaria o Parcial y si es Lineal o no Lineal:

2.3.1 EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

*Ecuación Diferencial	Características
1. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 2y = x^4$	
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + (a + b\cos 2x)y = 0$	
3. $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$	
4. $\frac{d^4y}{dx^4} + x\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$	
5. $\frac{d\left(x\frac{dy}{dx}\right)}{dx} + xy = 0$	
6. $(x + y)dy = (x - y)dx$	

7. $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u \frac{\partial u}{\partial t}$	
8. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \varphi(x, y, z)$	

*Taller tomado de C. Ray Wylie, páginas 7 y 8.

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Recuerde que:
Se entiende por Ecuación Diferencial Ordinaria aquella que tiene:

- *y* como Variable Dependiente, y
- *x* como Variable Independiente

Recuerde que:
El grado de una Ecuación Diferencial está dado por el exponente entero positivo de la derivada más alta presente en la ecuación.

Recuerde que:
El orden de una Ecuación Diferencial es igual al de la derivada de más alto orden que aparece de manera no trivial en la ecuación, en otras palabras, la derivada de más alto orden determina el orden de los factores de la Ecuación Diferencial.

Recuerde que:
El concepto de orden también se extiende a las ecuaciones parciales.

Tenga presente que:

Como aplicaciones, las ecuaciones **de Laplace, de Calor** y **de Onda** tienen un enorme significado para la Física Teórica y su estudio ha estimulado el desarrollo de muchas ideas matemáticas relevantes.

3 UNIDAD 2 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Pegue la dirección de un video que ayude a la comprensión de la unidad

3.1.1 RELACIÓN DE CONCEPTOS

- **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden:** Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es una ecuación diferencial ordinaria donde intervienen derivadas de primer orden respecto a una variable independiente.

- **Ecuaciones Diferenciales lineales con Coeficientes Constantes**: La resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales se simplifica mucho si las ecuaciones son de coeficientes constantes. En el caso de una ecuación de primer orden la búsqueda de un factor integrante nos lleva en la mayoría de los casos a una ecuación en derivadas parciales. Si la ecuación es de orden superior, a no ser que sea una ecuación de Euler o similar, tendremos que proponer una solución que no viene dada, en general, por funciones elementales.

- **Ecuaciones Diferenciales Lineales simultáneas**: Las ecuaciones diferenciales ordinarias simultáneas consisten en dos o más ecuaciones con derivadas de dos o más funciones desconocidas de una sola variable independiente.

3.1.2 OBJETIVO GENERAL

- Solucionar Ecuaciones Diferenciales:
    - Ordinarias de Primer Orden.
    - Lineales con Coeficientes Constantes.
    - Lineales Simultáneas.

3.1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Solucionar Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden.
- Solucionar Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales con Coeficientes Constantes.
- Solucionar Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales Simultáneas.

3.2 TEMA1 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

Definición:

Una Ecuación Diferencial ordinaria de primer orden, es una ecuación donde intervienen derivadas de primer orden respecto a una variable independiente.

Se pueden expresar, junto con su condición inicial, en forma:

a. **Explícita**:

$$\frac{dy}{dx} = f\,(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

b. **Implícita**:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \qquad con\; y(x_0) = y_0$$

Ejercicios enunciados tomados de: B, González, D, Hernández y otros; Matemática Aplicada y Estadística.

$\boldsymbol{Ejercicio\ de\ Aprendizaje\ 1}$: **Variables Separadas**:

Resolver la siguiente Ecuación Diferencial de Primer Orden

$(1 + e^x)y\,dy = e^x dx$ Hallar la solución que pasa por $(0, 1)$

Procedimiento

a.

ECUACIÓN	OPERACIÓN
$(1+e^x)y\,dy = e^x dx$	Despejando $y\,dy$ se tiene
$y\,dy = \dfrac{e^x}{1+e^x}dx$	Integrando a ambos lados,
$\displaystyle\int y\,dy = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx$	Efectuando la integración
$\dfrac{y^2}{2} = \ln(1+e^x)+c$	Despejando y se tiene,
$y^2 = 2\ln(1+e^x)+c$	Sacando raíz cuadrada a ambos lados
$\sqrt{y^2} = \sqrt{2\ln(1+e^x)+c}$	Se obtiene,
$y = \pm\sqrt{2\ln(1+e^x)+c}$	

b. Para obtener la solución particular que pasas por el punto $(0,1)$, se considera la **solución positiva** de la ecuación:

$$y = \sqrt{2\ln(1+e^x)+c}\ *$$

Como esta pasará por el punto $(0,1)$, **se tiene que** $y(0) = 1$ Por lo tanto y reemplazando los valores en la anterior ecuación * se tiene que:

$$*\ y(0) = \sqrt{2\ln(1+e^0)+c} = 1 \rightarrow$$

$$\sqrt{2\ln(1+1)+c} = 1 \rightarrow \sqrt{2\ln(2)+c} = 1$$

Elevando al cuadrado a ambos lados de la ecuación se tiene:

$$\sqrt{2\ln(2)+c}^{\,2} = 1^2 \rightarrow\ 2\ln(2)+c = 1 \rightarrow c = 1-2\ln 2$$

Entonces, l**a solución particular** está dada por:

$$y = \sqrt{2\ln(1+e^x)+c} \rightarrow y = \sqrt{2[\ln(1+e^x) - \ln 2] + 1} \rightarrow$$

Recuerde que: $\ln A - \ln B = \ln\left(\frac{A}{B}\right)$, Propiedades de los logaritmos, entonces:

$$y = \sqrt{1 + 2\ln\frac{1+e^x}{2}}$$

Ejercicio de Aprendizaje 2: Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

Resolver la siguiente Ecuación Diferencial de Primer Orden:

$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x}$, Se tiene que: $y(1) = 1$

Solución:

a. Separando denominadores en la segunda parte de la igualdad se tiene:

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x} - \frac{y}{x} \rightarrow * \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y}{x}$, Otra forma de escribir la ecuación

b. Realizando cambio de variable se tendría: $** z = \frac{y}{x} \rightarrow y = xz$, por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

c. Reemplazando en $* \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y}{x}$ Se tiene:

$$z + x\frac{dz}{dx} = 1 - z \;{**}\!\rightarrow x\frac{dz}{dx} = 1 - 2z$$

d. Reuniendo las variables iguales a un mismo lado de la ecuación, se tiene:

$\frac{dz}{1-2z}=\frac{dx}{x}$ Multiplicando el numerador y el denominador del primer término de la igualdad por -2 se tiene:

$-\frac{1}{2}*\frac{(-2)}{1-2z}dz=\frac{dx}{x}$, Integrando a ambos lados de la igualdad se tiene:

$-\frac{1}{2}\ln(1-2z)=\ln x+c \rightarrow$ Aplicando la siguiente propiedad de los logaritmos: $\ln x^a=a\ln x$, se tiene que:

$$\ln(1-2z)^{-\frac{1}{2}}=\ln x+\ln C \rightarrow \ln(1-2z)^{-\frac{1}{2}}=\ln Cx \rightarrow (1-2z)^{-\frac{1}{2}}=Cx$$

$\frac{1}{\sqrt{1-2z}}=Cx \rightarrow \frac{1}{Cx}=\sqrt{1-2z}$, Elevando al cuadrado ambos lados de la

Ecuación $\left(\frac{1}{Cx}\right)^2=\left(\sqrt{1-2z}\right)^2 \rightarrow (1-2z)=Cx^{-2} \rightarrow -2z=Cx^{-2}-1 \rightarrow z=\frac{1}{2}-\frac{C}{x^2} \rightarrow$

Nota: Aparentemente se pierde el 2 que multiplica o divide a C, pero este pasa a ser parte de la constante.

Pero $Z=\frac{y}{x}$, Entonces:

$\frac{y}{x}=\frac{1}{2}-\frac{C}{x^2}$, **despejando** y: $\rightarrow y=x\frac{1}{2}-x\frac{C}{x^2}$, **Simplificando:** ** $y=\frac{x}{2}-\frac{C}{x}$

e. Calculando la solución particular que verifica $y(1)=1$,

Reemplazando en ** $y=\frac{x}{2}-\frac{C}{x}$

$$y=\frac{1}{2}-\frac{C}{1} \rightarrow y=\frac{1}{2}-C=1 \rightarrow C=\frac{1}{2}-1 \rightarrow C=-\frac{1}{2}$$

f. La solución particular buscada, reemplazando en ** $y=\frac{x}{2}-\frac{C}{x}$ está dada por:

$$y=\frac{x}{2}-\frac{-\frac{1}{2}}{x} \rightarrow y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}$$

Ejercicio de Aprendizaje 3: Ecuaciones Diferenciales Lineales

Resolver la siguiente Ecuación Diferencial Lineal

$$x\frac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$$

Procedimiento

a. Dividiendo por x ambos miembros de la igualdad, se tiene:

$$\frac{x\frac{dy}{dx}}{x} + \frac{4y}{x} = \frac{x^3}{x} - \frac{x}{x} \to \frac{dy}{dx} + \frac{4}{x}y = x^2 - 1$$

b. Se multiplica la ecuación por un factor integrante dado por:

$e^{\int \frac{4}{x}dx}$, realizando la integral indefinida indicada:

$= e^{4\ln x}$, aplicando las propiedades de los logaritmos:

$= e^{\ln x^4}$, por propiedades de los logaritmos se obtiene:

$= x^4$

$x^4 * \frac{dy}{dx} + x^4 * \frac{4}{x}y = x^4 * x^2 - x^4 * 1$ Efectuando los productos indicados

$x^4 * \frac{dy}{dx} + 4x^3y = x^6 - x^4$, Que se puede expresar como:

$\frac{d}{dx}(x^4y) = x^6 - x^4$, integrando a ambos lados:

$\int \frac{d}{dx}(x^4y) = \int (x^6 - x^4)dx \to x^4y = \frac{x^7}{7} - \frac{x^5}{5} + C$ **,dividiendo por x^4 ,se tiene:**

$$\frac{x^4y}{x^4} = \frac{\frac{x^7}{7}}{x^4} - \frac{\frac{x^5}{5}}{x^4} + \frac{C}{x^4} \to y = \frac{x^3}{7} - \frac{x}{5} + \frac{C}{x^4}$$

Ejercicio de Aprendizaje 4: Ecuaciones Diferenciales Exactas

Resolver la siguiente Ecuación Diferencial:

$$(x^3 + xy^2) + (x^2y + y^3) = 0$$

a. Tomando:

- $M\,(x, y) = x^3 + xy^2$, y
- $N\,(x, y) = x^2y + y^3$

Se cumple entonces que:

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial(x^3 + xy^2)}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial(x^2y + y^3)}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$$

Como ambas ecuaciones coinciden, se trata entonces de una Ecuación Exacta, entonces:

$$u(x, y) = \int M(x, y)dx + C(y) = \int (x^3 + xy^2)dx + C(y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + C(y)$$

b. Para calcular $C(y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = x^2y + C'(y) = N(x, y) = x^2y + y^3 \to C'(y) = y^3$$

c. Integrando a ambos lados:

$$\int C'(y) = \int y^3 \to C(y) = \frac{y^4}{4} +$$

d. La solución general será:

Recuerde que: $\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+C(y)$ **y** $C(y)=\frac{y^4}{4}+C$

Reemplazando se tiene que:

$$u(x,y)=C \rightarrow \frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}=C \quad (C\ Constante)$$

Multiplicando por 4:

$$4*\frac{x^4}{4}+4*\frac{x^2y^2}{2}+4*\frac{y^4}{4}=4*C$$

Nota: Aparentemente se pierde el 4 que multiplica a C, pero este pasa a ser parte de la constante.

$$x^4+2x^2y^2+y^4=C \rightarrow (x^2+y^2)^2=C \qquad (C\ Constante)$$

***Ejercicio de Aprendizaje* 5: *Ejercicio de Aplicación*:**

Tomado el enunciado de: B, González, D, Hernández y otros; Matemática Aplicada y Estadística

Problema: Inicialmente había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas su masa disminuyó en un 3%. Si en un instante cualquiera la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad de sustancia presente, determinarla cantidad que queda después de 24 horas.

Procedimiento

Datos del problema:
$Sustancia\ radiactiva = 100 miligramos\ (inicialmente)$
$C(t) = Cantidad\ de\ sustancia\ radiactiva\ en\ el\ instante\ t$

a. **Se sabe que al cabo de 6 $horas$ quedan:**

$C(6)=(100-3)mg=97\ mg$ **:** Condiciones iniciales del problema.

b. **La rapidez** de desintegración **es proporcional** a la **cantidad de sustancia** presente, es decir:

$\frac{dC}{dt} = kC,$ donde k **es la constante de proporcionalidad**.

c. De acuerdo a los planteamientos teóricos, tal ecuación admite por solución:

$C(t) =* A\,e^{kt}$, donde A y k son constantes para determinar **su valor.**

d. En el instante inicial $t = 0$ quedan **97** $miligramos$ de la sustancia, reemplazando en $C(t) =* A\,e^{kt}$, se tiene:

$$C(0) =* A\,e^{k*0} \rightarrow C(0) = Ae^{0} = 100 \rightarrow A = 100$$

e. En el instante inicial $t = 6$ y se cuenta con 100 $miligramos$ de la sustancia, reemplazando en $C(t) =* A\,e^{kt}$, se tiene:

$C(6) =* 100e^{6k} = 97 \rightarrow e^{6k} = \frac{97}{100}$, sacando Ln a ambos lados de la ecuación, se tiene:

$\ln e^{6k} = \ln\frac{97}{100} \rightarrow 6k\ \ln e = \ln\frac{97}{100}$ Pero $\ln e = 1$,

Entonces: $6k = \ln\frac{97}{100} \rightarrow k = \frac{1}{6} * \ln\frac{97}{100}$

f. La cantidad de sustancia radiactiva en el instante t, está dada por la ecuación:

$$C(t) = 100e^{\frac{1}{6}*\ln\frac{97}{100}}$$

g. La cantidad remanente, transcurridas **24 horas** sería:

$$C(24) = 100e^{\frac{24}{6}*\ln\frac{97}{100}} = 100e^{-0.12} \cong 88.5\ mg$$

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Recuerde que: Una Ecuación Diferencial ordinaria de primer orden, se puede expresar de dos formas:

c. **Explícita:**

$$\frac{dy}{dx} = f\,(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

d. **Implícita:** $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \qquad con\; y(x_0) = y_0$

3.3 TEMA 2 SOLUCIÓN Y USOS DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL HOMOGÉNEA CON COEFICIENTES CONSTANTES.

- **Forma General**: Una Ecuación Diferencial Homogénea de Orden Superior se presenta de la siguiente forma**:**

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

Nota 1: Si $f(x) = 0$ $\mathit{Ecuación\ Diferencial\ Homogénea}$.

Nota 2: Si $f(x) \neq 0$ $Ecuación\ Diferencial\ No\ Homogénea$

- **Solución general:** Esta ecuación Diferencial tiene como solución general la función:

$$y = e^{mx}$$

Por lo tanto la **Ecuación Auxiliar** está dada por:

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0$$

- **Otra Forma General de presentación** de una Ecuación Diferencial Homogénea de Orden Superior:

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

Cumple con las mismas condiciones dadas por:

a.

Nota 1: Si $f(x) = 0$ $Ecuación\ Diferencial\ Homogénea$
Nota 2: Si $f(x) \neq 0$ $Ecuación\ Diferencial\ No\ Homogénea$

b. Para ser combinada en una solución completa tiene como solución general la función:

$$y = e^{mx}$$

En esta, m es una constante por determinar, todas las derivadas de esta función son semejantes, salvo en el coeficiente numérico.

Para que $y = e^{mx}$ sea una solución se debe verificar que:

$$e^{mx}\,(am^2 + bm + c) = 0$$

Pero e^{mx} nunca será **cero,** por lo tanto se tiene que cumplir que:

$$am^2 + bm + c = 0 \; **$$

** $am^2 + bm + c = 0$ Es una ecuación algebraica conocida como **Ecuación Característica** o **Auxiliar**.	Sus **raíces** determinan las únicas soluciones posibles de la supuesta forma e^{mx}.

Nota: En la práctica no se obtiene sustituyendo $y = e^{mx}$ **en la ecuación diferencial dada y luego simplificando, sino sustituyendo, en la ecuación dada:**

- y'' por m^2
- y' por m
- y por 1

Como es una función Cuadrática, será satisfecha por dos valores de m , por lo tanto

Se tendrían las raíces m_1 y m_2, con sus respectivas soluciones:

$$y_1 = e^{m_1 x} \qquad y \qquad y_2 = e^{m_2 x}$$

Ejercicio de Aprendizaje 1:

Encuentre la solución completa para la ecuación diferencial:

$$y'' - 4y' - 5y = 0$$

Procedimiento

a. La ecuación **Característica** o **Auxiliar** sería:

$$m^2 - 4m - 5 = 0$$

b. Factorizando:

$$(m - 5)(m + 1) = 0$$

c. Igualando cada factor a 0:

$$(m - 5) = 0 \rightarrow m = 5$$

$$(m + 1) = 0 \rightarrow m = -1$$

Por lo tanto sus raíces serían:

$\boldsymbol{m_1 = 5 \qquad y \qquad m_2 = -1}$

d. Como los valores de $\boldsymbol{m}$ son **diferentes**, una solución completa sería:

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-x}}$$

Ejercicio de Aprendizaje 2:

Encuentre la solución completa para la ecuación diferencial:

$$\boldsymbol{y'' + 4y' + 4y = 0}$$

Procedimiento

a. La ecuación **Característica** o **Auxiliar** sería:

$$\boldsymbol{m^2 + 4m + 4 = 0}$$

b. Factorizando:

$$\boldsymbol{(m+2)(m+2) = 0}$$

c. Igualando cada factor a $\boldsymbol{0}$**:**

$$\boldsymbol{(m+2) = 0 \rightarrow m = -2}$$

$$\boldsymbol{(m+2) = 0 \rightarrow m = -2}$$

Por lo tanto sus raíces serían:

$\boldsymbol{m_1 = -2 \qquad y \qquad m_2 = -2}$

d. Como los valores de $\boldsymbol{m}$ son **iguales**, una solución completa de la ecuación dada:

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-2x}}$$

Después de3 analizar la teoría al respecto y los ejercicios anteriores, se puede determinar el siguiente esquema:

ECUACIÓN DIFERENCIAL:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

ECUACIÓN CARACTERÍSTICA:

$$am^2 + bm + c = 0$$

Naturaleza de las **raíces** de la **Ecuación Característica**	Condición de **los coeficientes** de **la Ecuación Característica**	**Solución completa** de la **Ecuación Diferencial**
$Reales\ y\ Desiguales$ $m_1 \neq m_2$	$b^2 - 4ac > 0$	$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$
$Reales\ e\ Iguales$ $m_1 = m_2$	$b^2 - 4ac = 0$	$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_1 x}$
**$Complejas\ Conjugadas$ $m_1 = p + iq$ $m_2 = p - iq$	$b^2 - 4ac < 0$	$y = e^{px}(A cos\ qx + B sen\ qx)$

Tomado de C. RAY WYLIE. Página 56

**$Complejas\ Conjugadas$: En este módulo solo se hará la referencia de este tema y no se profundizará en el mismo.

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

- **Recuerde que**: una Ecuación Diferencial Homogénea de Orden Superior se presenta de la siguiente forma**:**

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

- **Recuerde que: Si** $f(x) = 0$ $es\ una\ Ecuación\ Diferencial\ Homogénea.$
- **Recuerde que: Si** $f(x) \neq 0$ $es\ una\ Ecuación\ Diferencial\ No\ Homogénea$
- **Recuerde que**: Este tipo de ecuaciones tienen como solución general la función:

$$y = e^{mx}$$

- **Recuerde que**: la **Ecuación Auxiliar,** para solucionar este tipo de ecuaciones diferenciales, está dada por:

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0$$

3.4 TEMA 3: ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES SIMULTÁNEAS

- **Generalidades**

En muchos problemas de matemáticas existen varias **variables dependientes** y no solo una, cada una de ellas en función de una sola variable independiente, por lo tanto, el planteamiento de este tipo de problemas conduce a un sistema de **Ecuaciones Diferenciales Simultáneas**, que se forma por un número de Ecuaciones igual al número de variables dependientes que existan.

Un ejemplo ilustrativo de este tipo de ecuaciones está dado en la lLeyes de Newton:

$$m * \frac{d^2x_1}{dt^2} = F_1(x_1, x_2, x_3, t, x_1', x_2', x_3')$$

$$m * \frac{d^2x_1}{dt^2} = F_2(x_{1,}x_{2\,,}x_3, t, x_1', x_2', x_3')$$
$$m * \frac{d^2x_1}{dt^2} = F_3(x_{1,}x_{2\,,}x_3, t, x_1', x_2', x_3')$$

Dónde:

CONCEPTO	EQUIVALENCIA
m	**Masa** de la partícula.
(x_1, x_2, x_3)	**Coordenadas espaciales.**
(F_1, F_2, F_3)	Componentes de **la fuerza actuante** sobre la partícula en dicha posición (pueden ser en función de: La **posición**, La **velocidad** y del **Tiempo.**

- **Conceptualización teórica de los Sistemas Lineales de Ecuaciones de Primer Orden**

Tomando un sistema de n Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden, como se da a continuación:

$$x_1' = p_{11}(t) * x_1 + p_{12}(t) * x_2 + \cdots + p_{1n}(t) * x_n + q_1(t)$$

$$x_2' = p_{21}(t) * x_1 + p_{22}(t) * x_2 + \cdots + p_{21}(t) * x_n + q_2(t)$$
$$\vdots$$
$$x_n' = p_{n1}(t) * x_1 + p_{n2}(t) * x_2 + \cdots + p_{nn}(t) * x_n + q_n(t)$$

Utilizando un Sistema Matricial, quedaría:

$$x' = P\,(t) * x + q(t)$$

Dónde:

- $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

- *La Derivada*:

$$x' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

- $$P(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \dots & p_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \dots & p_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

- $$q = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix}$$

Nota: Esta notación permite:

- Simplificar la escritura.
- Enfatizar el paralelismo entre los sistemas y las ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden.

- **Solución del Sistema:**

Se dice que un vector x con componentes $x = \{\emptyset, t\}$, es solución para el sistema si **sus componentes** satisfacen **todas las ecuaciones** del sistema.

En forma general:

Suponga que $P \; y \; q$ son continuos en un intervalo $\alpha < t < \beta$.

a. Se estudia la ecuación Homogénea dada por:

$$x' = P(t) * x \; (Ecuación\; 1)$$

Nota: Una vez esta ecuación esté resuelta se resuelve la ecuación No Homogénea.

b. Sea :

b. Sean $x_1 = \begin{bmatrix} x_{1j}(t) \\ x_{2j}(t) \\ \vdots \\ x_{nj}(t) \end{bmatrix}$ Soluciones específicas de la ecuación Homogénea,

entonces:

Si x_1 y x_2 son soluciones del sistema 1 (ecuación 1), entonces:

$C_1 * x_1 + C_2 * x_2$, también serían solución, donde:

C_1 y C_2 Son **Constantes Arbitrarias.**

Este es el principio de **SUPERPOSICIÓN** que se comprueba nada más que diferenciando la solución propuesta y se sustituye en 1 (ecuación 1).

Conclusiones

- Aparentemente se pueden encontrar infinitas soluciones, se debe cuestionar entonces acerca del número mínimo de soluciones independientes que generan todas y cada una de las soluciones del sistema.

- Se puede afirmar que existirán n soluciones:

  Sean $x_1, x_2, \dots, x_n$, considerando la matriz formada por estos vectores columna – cada columna es uno de estos vectores -

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

- Estas soluciones serán Linealmente Independientes en cada punto t del intervalo: $\alpha < t < \beta$ Si y sólo sí el determinante es diferente de **CERO** en ese punto. Al Determinante de X se le llama **Wronskiano** de las n soluciones.

Ejemplo: Dada la derivada:

$\boldsymbol{x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}$ Encontrar las raíces, los vectores vinculados y las respectivas soluciones.

Procedimiento

a. Se supone que: $\boldsymbol{x = e^{rt}.a}$

b. Se obtiene: $\boldsymbol{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = r.\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}}$

c. Realizando las operaciones indicadas (recuerde operaciones entre matrices), se obtendría:

$$\boldsymbol{\begin{bmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{bmatrix} = 0}$$

d. Solucionando la matriz, se tiene:

$$\boldsymbol{(1-r)*(1-r)-1*4=0 \to 1-2r+r^2-4=0}$$

- ✓ Reduciendo términos semejantes y ordenando el polinomio:

$$\boldsymbol{r^2-2r-3=0,}$$

- ✓ Factorizando, $\boldsymbol{(r-3)(r+1)=0}$
- ✓ Igualando cada factor a cero:

$$\boldsymbol{r-3=0 \to r=3}$$

$$\boldsymbol{r+1=0 \to r=-1}$$

- ✓ Las Raíces serán: $\boldsymbol{r_1 = 3 \quad y \quad r_2 = -1}$

e. De acuerdo a lo anterior los vectores asociados son:
   - $\boldsymbol{r_1 = 3 \to -2a_{11} + a_{21} = 0 \to a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}$
   - $\boldsymbol{r_2 = -1 \to 2a_{12} + a_{22} = 0 \to a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}$

f. Las soluciones son:

$$x_1 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.e^{3t} \quad y \quad x_2 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.e^{-t}$$

g. El **Wronskiano** es: $W(x_1, x_2) = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & -2\end{bmatrix}.\ e^{2t}$

h. **Solucionando el determinante**:

$$W(x_1, x_2) = [(1) * (-2) - (1) * (2)].e^{2t} \rightarrow$$

$$W(x_1, x_2) = -4e^{2t}$$

i. Como $-4e^{2t} \neq 0 \rightarrow$ la solución general está dada por:

$$x = C_1.e^{3t}.\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + C_2.e^{-t}.\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$$

Que también se puede escribir de la forma:

$$x_1 = C_1.e^{3t} + C_2.e^{-t} \quad y \quad x_2 = 2.C_1.e^{3t} - 2.C_2.e^{-t}$$

3.4.1 EJERCICIO DE APRENDIZAJE

El siguiente ejercicio, tomado de J. Albizuri, J.J. Anza, C. Bastero y M. Martínez: Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales, se realizará como un complemento de lo visto anteriormente, pero no se profundizará en el tema, es una ilustración de lo que es un sistema No Homogéneo.

- Sea el sistema $x' = P(t).x + Q(t)$,
- Resuelto el sistema homogéneo: $x' = P(t).x$, y
- Tomando $\gamma(t)$ como la matriz fundamental de las soluciones

Se manejarán varios casos:

A. Si $P(t) = A$, **Matriz Constante Diagonizable**

a. Se llamará $\boldsymbol{T}$ a la matriz de los vectores propios de $\boldsymbol{A}$ realizando el cambio de variable, se tiene: $\boldsymbol{x = T.y}$

b. Resulta, entonces: $\boldsymbol{T.y' = A.T.y + Q(t)}$ **,** pero $\boldsymbol{T}$ **es No Singular.**

Actividad: Consultar que significa el término **No Singular,** en matemáticas**.**

Entonces: $\boldsymbol{y' = T^{-1}.A.T.y + T^{-1}.Q(t)}$ **,** pero:

$\boldsymbol{T^{-1}.A.T = D}$, (**Matriz Diagonal de los Valores Propios**)

Por lo tanto, $\boldsymbol{y' = D.y + T^{-1}.Q(t)}$ y sus componentes:

$\boldsymbol{y_1' = r_1.y_1 + h_1(t)}$ (No hay suma en índices repetidos)

c. Luego: $\boldsymbol{y_1 = e^{rt}.\int e^{-rt}.\ h_1(t).dt + C_1\,.e^{rt}}$

d. Deshaciendo el cambio de variable: $\boldsymbol{x = T.y}$

B. Variación de los Parámetros

a. Conocida $\boldsymbol{x = \gamma(t).u}$

Nota: $\boldsymbol{u}$ Debe ser determinada de modo que el vector $\boldsymbol{x}$ sea solución del sistema.

Sea $\boldsymbol{x' = P(t).x + Q(t),}$

b. Sustituyendo, se tiene:

$$\boldsymbol{\gamma'(t).u + \gamma(t).u' = P(t).\gamma(t).u + Q(t)}$$

Pero:

$\boldsymbol{\gamma'(t) = P(t).\gamma(t)}$ ya que las columnas de j son solución de la homogénea, luego:

$$\boldsymbol{u = \int [\gamma^{-1}(t).\ Q(t)]dt + C}$$

c. La solución general será:

$$x = .\gamma(t). \int [\gamma^{-1}(t).\ Q(t)]dt + \gamma(t)\ .C$$

3.4.2 EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Determine el tipo de ecuación diferencial y encuentre una solución completa para cada una de las siguientes Ecuaciones Diferenciales dadas a continuación:

a. $y'' + y' - 2y = 0$

b. $y'' - 3y = 0$

c. $10y'' + 6y' + y = 0$

d. $y'' + 5y' + 4y = 0$

e. $y'' + 5y' = 0$

f. $y'' + 10y' + 26y = 0$

2. Encuentre la solución particular de cada una de las ecuaciones diferenciales siguientes de forma que satisfagan las condiciones dadas:

a. $y'' + 3y' - 4y = 0 \rightarrow \quad y = 4,\ \ y' = -2,\ cuando\ x = 0$

b. $y'' - 4y = 0 \rightarrow \quad y = 1,\ \ y' = -1,\ cuando\ x = 0$

3. Resuelva los siguientes problemas de aplicación:

Enunciados tomados de Benito J. González Rodríguez y otros. Ecuaciones Diferenciales de primer orden: Problemas resueltos.

a. Cuando un objeto absorbe calor del medio que lo rodea sigue la Ley de Newton. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es de $20^\circ C$, se deja caer en un recipiente con agua hirviendo. Calcular el tiempo que dicha barra tardará en alcanzar los $90^\circ C$, si se sabe que su temperatura aumentó $2^\circ C$. ¿Cuánto tardará la barra en alcanzar los $98^\circ C$?

Nota: Dados los siguientes elementos, solucionar el problema determinado:

La Ecuación Diferencial que modeliza dicho fenómeno está dada por:

$T'(t) = K[T(t) - T_a]$ Y su solución general está dada por:

$T(t) = T_a + Ce^{Kt}$

$$T_a = Temperatura\ Ambiente$$

b. Un tanque está lleno de 100litros de agua en los que se han disuelto 20 kilogramos de sal. Otra mezcla que contiene 1 kilogramo de sal por litro es bombeada al tanque a razón de 7 litros por minuto. La solución mezclada es bombeada hacia el exterior a razón de 8 litros por minuto. Determinar la función que da la cantidad de sal en cada instante. ¿Se vaciará totalmente el tanque?

c. La rapidez con que cierto medicamento se disemina en el flujo sanguíneo se rige por la ecuación diferencial:

$$\frac{dX}{dt} = A - BX,\ \ X(0) = 0$$

Dónde $A\ y\ B\ son\ constantes\ positivas$. La función $X(t)$ describe la concentración del medicamento en el flujo sanguíneo en un instante cualquiera t Encontrar el valor límite de X **cuando** $t \to \infty$. ¿Cuánto tarda la concentración en alcanzar la mitad de este valor límite?

4. Encuentre un sistema de Ecuaciones diferenciales que tenga como solución:

$x = c_1e^t + c_2e^{2t}$, y

$y = c_1e^t + 3c_2e^{2t}$

5. Encuentre un sistema de Ecuaciones diferenciales que tenga como solución:

- $x = c_1e^{-t} + c_2e^t + c_3e^{2t}$, y
- $y = c_1e^{-t} - c_2e^t + 3c_2e^{2t} + 2c_3e^{2t}$

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

- **Recuerde que:** Aparentemente se pueden encontrar infinitas soluciones, se debe cuestionar entonces acerca del número mínimo de soluciones independientes que generan todas y cada una de las soluciones del sistema.

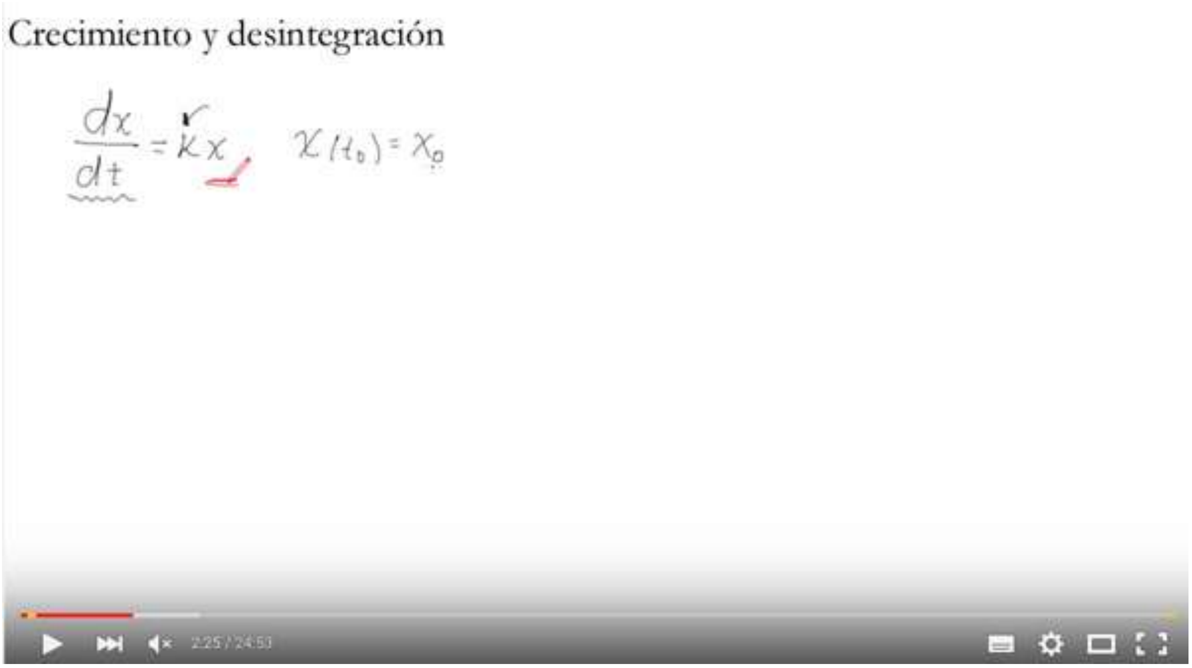
- **Recuerde que:** Se puede afirmar que existirán n soluciones:

Sean $x_1, x_2, \dots, x_n$, considerando la matriz formada por estos vectores columna – cada columna es uno de estos vectores -

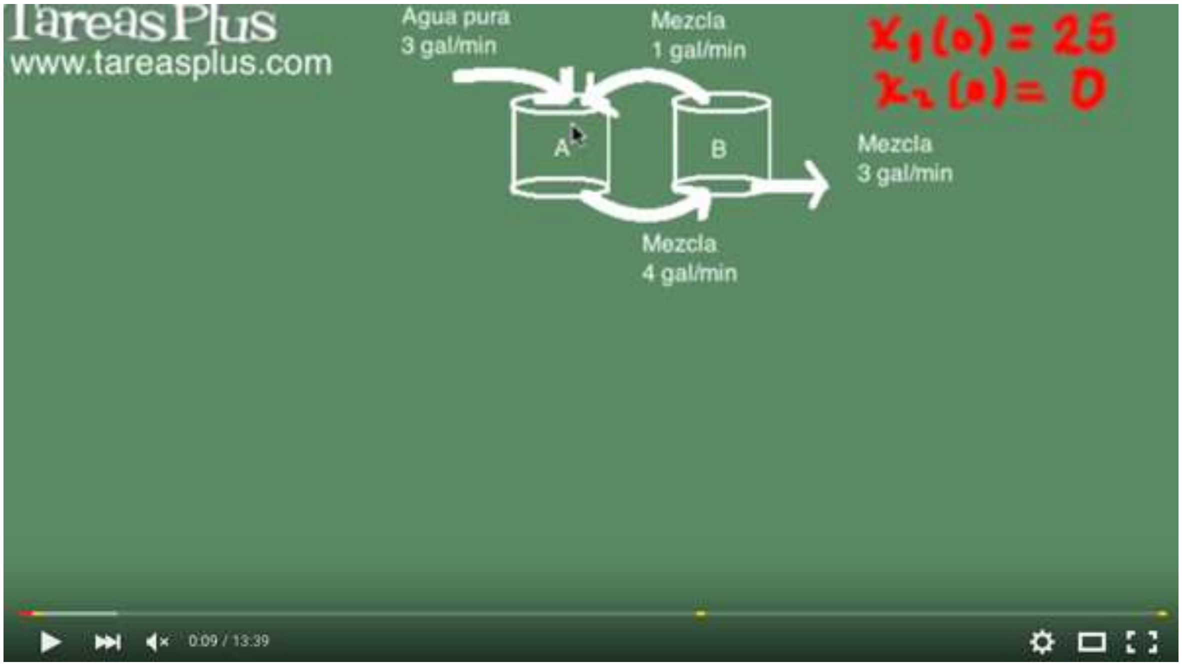
$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

Recuerde que: Estas soluciones serán Linealmente Independientes en cada punto t del intervalo: $\alpha < t < \beta$ Si y sólo sí el determinante es diferente de **CERO** en ese punto. Al Determinante de X se le llama **Wronskiano** de las n soluciones.

4 UNIDAD 3 APLICACIONES DE LA ECUACIONES DIFERENCIALES

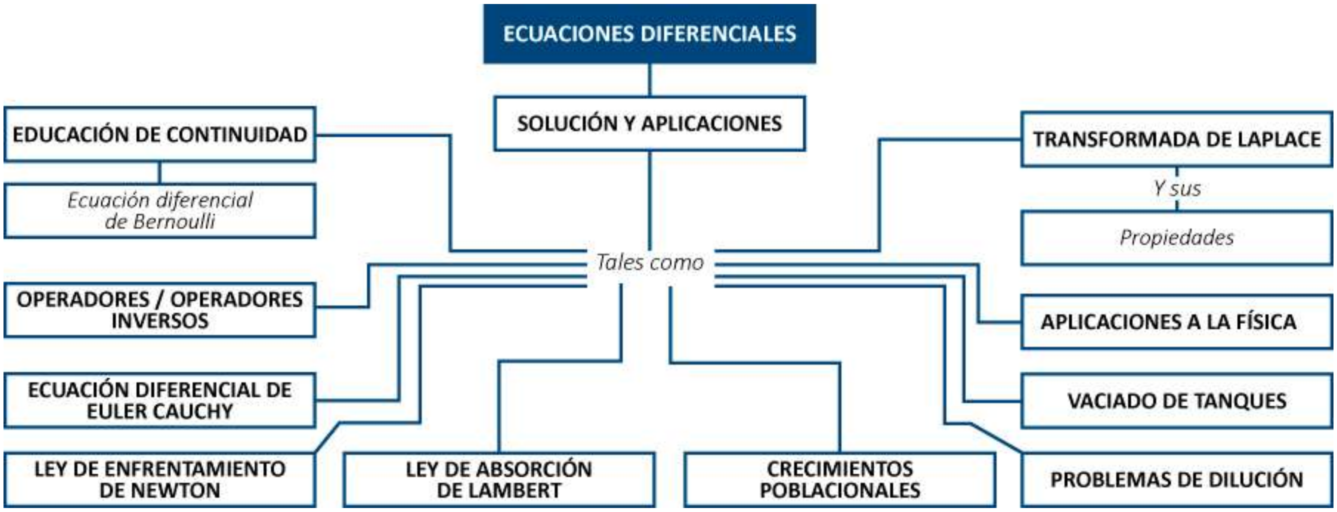


Crecimiento Poblacional. (Aplicaciones Ecuaciones diferenciales de primer orden) Enlace



Aplicación sistema de ecuaciones diferenciales parte 1 (problema de mezclas) Enlace

4.1.1 RELACIÓN DE CONCEPTOS



- **Ecuación de Continuidad:** En física, una **ecuación de continuidad** expresa una ley de conservación de forma matemática, ya sea de forma integral como de forma diferencial.

- **Ley de Enfriamiento**: Cuando la diferencia de temperaturas entre un cuerpo y su medio ambiente no es demasiado grande, el calor transferido en la unidad de tiempo hacia el cuerpo o desde el cuerpo por conducción, convección y radiación es aproximadamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio externo.

- **Ley de Absorción:** En óptica, la **ley de Beer-Lambert**, también conocida como **ley de Beer** o **ley de Beer-Lambert-Bouguer** es una relación empírica que relaciona la absorción de luz con las propiedades del material atravesado.

- **Crecimiento Poblacional** o **crecimiento demográfico:** es el cambio en la población en un cierto plazo, y puede ser cuantificado como el cambio en el número de individuos en una población por unidad de tiempo para su medición. El término crecimiento demográfico puede referirse técnicamente a cualquier especie, pero refiere casi siempre a seres humanos, y es de uso frecuentemente informal para el término demográfico más específico tarifa del crecimiento poblacional, y es de uso frecuente referirse específicamente al crecimiento de la población del mundo.

4.1.2 OBJETIVO GENERAL

Resolver Ecuaciones Diferenciales en sus diferentes aplicaciones.

4.1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Aplicar las ecuaciones Diferenciales en la solución de problemas con diferentes aplicaciones.

2. Aplicar la Transformada de Laplace en la solución de problemas.

4.2 TEMA 1 APLICACIONES

- **ECUACIÓN DE CONTINUIDAD**

En física, una ecuación de continuidad expresa una ley de conservación de forma matemática, ya sea de forma integral como de forma diferencial; con esta ecuación se construyen modelos en diferentes áreas del conocimiento que dependen del tiempo dando como resultado una o varias Ecuaciones Diferenciales.

La ecuación de continuidad determina que la **Tasa de Acumulación** de una variable $\boldsymbol{x}$ en un tanque, en su forma más sencilla (pude ser una ciudad, un órgano humano, un banco, entre otros) es igual a la **tasa de entrada** menos **la tasa de salida (estas pueden ser constantes o variables), resumiendo, se tendría:**

$\boldsymbol{T_a = t_e - t_s}$ **, dónde:**

$\boldsymbol{T_a}$: $\boldsymbol{Tasa\ de\ acumulación}$

$\boldsymbol{t_e}$: $\boldsymbol{tasa\ de\ entrada}$

$\boldsymbol{t_s}$: $\boldsymbol{tasa\ de\ salida}$

Ahora, asumiendo que la **Tasa de Acumulación** de una variable es $\boldsymbol{x}$ y que la tasa de entrada en función del tiempo es $\boldsymbol{E\ (t)}$ y la tasa de salida es $\boldsymbol{S\ (t)}$, la tasa de acumulación está dada por la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = E\ (t) - S\ (t)}$$

Ejemplo: El siguiente ejemplo es tomado del libro Ecuaciones diferenciales con aplicaciones en Maple de Jaime Escobar A. (Profesor titular de la Universidad de Antioquia).

La concentración de glucosa en la sangre aumenta por ingesta de comidas ricas en azúcares, si se suministra glucosa a una razón constante R (en mg/min). Al mismo tiempo, la glucosa se transforma y se elimina a una tasa proporcional a la concentración presente de Glucosa. Si $\boldsymbol{C(t)}$representa la concentración de glucosa en un instante $\boldsymbol{t}$, entonces $\boldsymbol{E\ (t) = R}$ y $\boldsymbol{S\ (t) = kC(t)}$, la ecuación Diferencial que rige este fenómeno, dada por la ecuación de continuidad, es:

$$\frac{dC(t)}{dt} = E\ (t) - \ S\ (t) = R - kC(t)$$

- **ECUACIÓN DIFERENCIAL DE BERNOULLI**

La **ecuación diferencial de Bernouilli** es una Ecuación diferencial ordinaria de **Primer Orden**, formulada por **Jacob Bernoulli**. Esta ecuación fue transformada, por **Gottfried Leibniz** en 1693 y por **Johann Bernoulli** en 1697, en una **ecuación diferencial lineal de primer orden**, mediante la sustitución, $y^{1-n} = v^1$, que se caracteriza por adoptar la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P\ (x)y = Q(x)\ y^{\alpha}$$

Dónde $P\ (x)\ \ y\ \ Q\ (x)$, son **Funciones Continuas** en un intervalo abierto:

$(a, b) contenido\ en\ R_e$ y α es un número real cualquiera.

- **Solución General para la ecuación de Bernoulli:**

a. Omitiendo los casos particulares $\alpha = 0\ \ y\ \alpha = 1$ **y** dada la ecuación $\frac{y'}{y^{\alpha}} + \frac{P(x)}{y^{(\alpha-1)}} = Q(x)$ **Ecuación 1** se tiene que:

Al definir $Z(x) = \frac{1}{y^{(\alpha-1)}}$ o su equivalente ** $Z = y^{1-\alpha}$, se obtienen las siguientes igualdades:

$Z'(x) = -\frac{\alpha-1}{y^{\alpha}}y' \rightarrow\ Z'(x) = -\left(\frac{y'}{y^{\alpha}}\right) * (\alpha - 1)$, despejando $\left(\frac{y'}{y^{\alpha}}\right)$, se obtiene:

$\frac{y'(x)}{y^{\alpha}} = -\frac{1}{\alpha-1} * Z'(x)$, por lo tanto la ecuación 1 se puede escribir como:

$$Z'(x) + (1 - \alpha) * P(x) * Z(x) = (1 - \alpha) * Q(x)$$

Solucionando esta ecuación como una **Ecuación Diferencial Lineal**, se obtiene

$$Z(x) = \frac{(1-\alpha)\int Q(x)e^{(1-\alpha)\int P(x)dx}dx + C}{e^{(1-\alpha)\int P(?)dx}},\ C \in R_e\ Constante$$

b. Como: $** Z = y^{1-\alpha}$, entonces,

$$y^{(\alpha-1)} = \frac{e^{(1-\alpha)\int P(x)dx}}{(1-\alpha)\int Q(x)e^{(1-\alpha)\int P(x)dx}dx + C} \rightarrow y(x) = \sqrt[\alpha-1]{\frac{e^{-(\alpha-1)\int P(x)dx}}{(1-\alpha)\int Q(x)e^{(1-\alpha)\int P(x)dx}dx + C}}$$

c. Las funciones que satisfacen la Ecuación Diferencial se pueden calcular utilizando la ecuación:

$$y(x) = \frac{e^{-\int P(x)dx}}{\sqrt[\alpha-1]{(1-\alpha)\int Q(x)e^{(1-\alpha)\int P(x)dx}dx + C}}$$

Con $C \in R_e$ y el factor integrante se puede definir en el intervalo: $0 < x < \infty$

- Casos Particulares de la Ecuación de Bernoulli

Se dan dos casos particulares:

- Cuando $\alpha = 0$

La ecuación se reduce a una Ecuación Diferencial Lineal **cuya solución está dada por:**

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)\, e^{\int P(x)dx}dx + C$$

- Cuando $\alpha = 1$

Se tiene una Ecuación diferencial Lineal (**Ecuación con Variables Separables**) cuya solución está dada por:

$$\ln y(x) = \int [Q(x) - P(x)]dx + C$$

Ejercicio de Aprendizaje

Resolver la siguiente Ecuación Diferencial:

$$xy' + y = x^4y^3 \quad \textbf{Ecuación 1}$$

a. Se realiza el cambio de variable, se hace $Z = y^{-2}$ y se reemplaza en la Ecuación 1:

$$y^2 = \frac{1}{z} \rightarrow 2yy' = -\frac{1}{z^2}z' \quad \textbf{Ecuación 2}$$

b. Multiplicando la ecuación 1 por: $\frac{2y}{x}$ se tiene:

$(xy' + y) * \frac{2y}{x} = (x^4y^3) * \frac{2y}{x}$, realizando las operaciones indicadas:

$\frac{2xyy'}{x} + \frac{2yy}{x} = \frac{2yx^4y^3}{x}$ Simplificando,

$$2yy' + \frac{2}{x}y^2 = 2x^3y^4 \quad \textbf{Ecuación 3}$$

c. Sustituyendo la ecuación 2 en la ecuación3:

$-\frac{z'}{z^2} + \frac{2}{x} * \frac{1}{z} = \frac{2x^3}{z^2} \rightarrow -\frac{z'}{z^2} + \frac{2}{xz} = \frac{2x^3}{z^2}$, multiplicando la ecuación por z^2,

Se tiene: $\left(-\frac{z'}{z^2} + \frac{2}{xz}\right) * z^2 = \left(\frac{2x^3}{z^2}\right) * z^2$, realizando el producto indicado y simplificando, se tiene:

$z' - \frac{2z}{x} = -2x^3$ Que es **Ecuación Diferencial Lineal**

d. Para resolver la Ecuación Diferencial anterior, se calcula, primero, el **Factor Integrante** típico de la Ecuación de Bernoulli:

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$$

e. Resolviendo la ecuación:

$$\left(\frac{z}{x^2}\right)' = -2x^3 * \frac{1}{x^2} = -2x \Longrightarrow \frac{z}{x^2} = \int -2x\,dx = -2\int x\,dx = -2\frac{x^2}{2} + C_1 = -x^2 + C_1$$

f. Deshaciendo el cambio de variable, se tiene:

$$\frac{z}{x^2} = -x^2 + C_1 \rightarrow z = C_1x^2 - x^4$$

g. Teniendo en cuenta que el cambio que se realizó fue: $Z = y^{-2}$:entonces:

$\frac{1}{y(x)^2} = C_1x^2 - x^4$, despejando $y(x)$ se obtendría: $y(x) = \frac{\pm 1}{\sqrt{C_1x^2 - x^4}}$

- **Operador Diferencial**

Un **Operador Diferencial** es un operador lineal definido como una función del operador de diferenciación. Ayuda, **como una cuestión de notación**, considerar a la diferenciación como una operación abstracta, que acepta una función y regresa otra.

Se puede dar con una variable o varias variables, acontinuación se analizarán cada uno de estos casos:

- **Operador con una Variable**

Realizar la derivada en sí misma es el uso más común del operador, su notación está

dada por:

NOTACIÓN	CARACTERÍSTICA

$\dfrac{d}{dx}$	Se utilizan cuando se quiere hacer explícita una variable respecto a la cual se toman las derivadas ordinarias.
D_x	
D	Sólo se utiliza cuando está clara la variable respecto a la cual se deriva (sin necesidad de explicitarla).
$\dfrac{d^n}{dx^n}$, D_x^n , D^n	Para las derivadas de **Orden Superior (Enésimas).**

❖ **Operadores Lineales Ordinarios**

La utilización de la notación D^k para la derivada $k-$é$sima$ se debe al matemático Oliver Heasivide, quién consideraba los Operadores Diferenciales Lineales de la forma:

- $\{\mathfrak{L}: C^1(\Omega) \to C^0(\Omega), con\ \Omega \subset R_e\}$
- $\left\{\mathfrak{L}: (f)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) D^k f(x), con\ x \in R_e\right\}$

Dónde:

$$\begin{cases} a_k(x): Funciones\ definidas\ sobree\ l\ dominio\ \Omega\,. \\ C^1(\Omega): Funciones\ diferenciales\ con\ continuidad\ en\ el\ dominio\ \Omega. \\ C^0: Funciones\ continuas\ en\ el\ mismo\ dominio. \end{cases}$$

Nota: En el estudio de las Ecuaciones Diferenciales:

• La derivada simple es, como se ha dicho, un operador diferencial lineal sobre el conjunto de funciones reales de variable real.
• Una ecuación diferencial ordinaria se puede expresar mediante un operador lineal en la forma $\zeta_y = f$, donde y es la función incógnita.

✓ Propiedades de los operadores diferenciales

- ✓ La **Diferenciación es Lineal**, esto es:

$$D\,(f+g)=(Df)+(Dg), \qquad D(af)=a(Df)$$

$$f \text{ y } g \text{ son funciones y } a \text{ es una constante}$$

Cualquier polinomio en D con funciones como coeficientes, es también un **Operador Diferencial. También se pueden componer operadores diferenciales con la siguiente regla:**

$$D_1 \; o \; D_2(f)=D_1(D_2(f))$$

Nota: Esta propiedad dota al conjunto de los **operadores lineales**, sobre un cierto **espacio** de **funciones reales**, de estructura de **espacio vectorial** sobre R_e y de módulo izquierdo sobre el mismo conjunto de funciones. Eso último implica a su vez que el conjunto de operadores constituyen un **álgebra asociativa**.

- ❖ Operadores inversos

Dado un **operador diferencial lineal** sobre un espacio de **funciones reales** de una sola variable real con **condiciones de contorno** **homogénea**, en el que todas las funciones que intervienen **son continuas**, existe un operador inverso que es un **operador integral**, este está dado por la función de Green. En forma explícita una Ecuación Diferencial de orden n sin constante, está dada por:

- $\mathfrak{L}\{y(x)\}=f(x), \; \text{dónde} \; y(x) \epsilon D$
- $D=\left\{z \,\epsilon\, C^1(R_e) \mid \sum_{j=0}^{n} a_{ij}\, D^j(z)=b_i\right\}, \text{dónde} \; i \,\epsilon\, \{0,\dots,n\}$

Cuando se da de esta forma existe un operador integral k que está dado por la siguiente función:

$$y(x)=k\{f(x)\}\int_{-\infty}^{+\infty} G\,(\bar{x},x) f(x) d\bar{x}$$

Para lo cual se cumple que: $k \; o \; \mathfrak{L}\{z\}=\mathfrak{L} \; o \; k\,\{z\}=z(x), \; \forall z \,\epsilon\, D$

4.2.1 CASO CON VARIAS VARIABLES

De igual forma, al caso de una variable, cuando se consideran derivadas respecto a variables diferentes, las **Derivadas Parciales,** pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial x_i = \partial_i, \qquad \frac{\partial^n}{\partial x_{i1} \dots \partial x_{in}} = \partial^n_{x_{i1} \dots x_{in}} = \partial^n_{i1 \dots in}$$

Un operador lineal en derivadas parciales de orden n tiene la siguiente forma:

$$\mathfrak{L} = \sum_{k=0}^{n} a_{i1 \dots ik}(x) \partial^k_{i1 \dots ik}(.)$$

Nota: Uno de los operadores diferenciales más frecuentes es el **operador laplaciano**, que se expresa en coordenadas cartesianas de la siguiente forma:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial_k^2} = \nabla^2$$

- Se tomó como referencia para estas aplicaciones: Ecuacion de cauchy-euler, por WikiMatematica.org

4.2.2 ECUACIÓN DIFERENCIAL EULER - CAUCHY

La misma facilidad relativa, con la que fue posible encontrar soluciones explicitas de **ecuaciones diferenciales lineales** de **orden superior** con **coeficientes constantes** o **en general**, no se consigue con las ecuaciones lineales con coeficientes variables. Cuando una Ecuación Diferencial tiene **coeficientes variables**, lo que se puede esperar es encontrar una solución en la forma de **una serie infinita,** pero en este caso no se realizará de esta forma ya que la Ecuación Diferencial que se resolverá tiene coeficientes variables cuya solución puede expresarse en términos de potencia de x, sen, cos y funciones logarítmicas.

Nota: El método de solución es bastante similar al de las ecuaciones con **coeficientes constantes**.

La Ecuación Diferencial de **Euler - Cauchy,** está determinada en una ecuación lineal de la forma:

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$$

Dónde los coeficientes $a_n, a_{n-1,} a_1, a_0$ son constantes, la característica de este tipo de ecuación es que el grado: $k_{n,n-1,\dots,1,0}$ de los coeficientes xk coincide con el orden n de diferenciación $\frac{d^k y}{dx^k}$

- **Solución Ecuación Diferencial Euler - Cauchy**

La solución de ecuaciones de orden superior se obtiene de la misma forma; asimismo la **Ecuación no Homogénea** $ax^2y'' + bxy' + cy = q(x)$

Se resuelve mediante una variación de parámetros, una vez determinada la función complementaria y_c.

Se prueba una solución de la forma $y = x^m$, dónde m es un valor a calcular

Cuando se sustituye e^{mx} en una ecuación lineal con **coeficientes constantes**, en forma análoga sucederá cuando se sustituye x^m cada término de una ecuación se convierte en un polinomio en m multiplicado por x^m,

Ya que:

$$a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = a_k x^k * m * (m-1) * (m-2) * \dots * (m-k+1)$$
$$= a_k m * (m-1) * (m-2) * \dots * (m-k+1) x^m$$

Al sustituir $y = x^m$, se da una solución para la **Ecuación Diferencial**, siempre que m sea una solución de la **ecuación auxiliar**.

Se deben considerar 3 casos diferentes en la solución de la ecuación cuadrática que se presenta:

- **Si las raíces son Reales y diferentes.**
- **Si las raíces son Reales e iguales.**
- **Si las raíces son Complejas** (las raíces aparecen como un par conjugado**).**

Se analizarán cada uno de los casos, a partir de un ejemplo determinado:

- **Caso 1: Si las raíces son Reales y diferentes.**

Sean m_1 y m_2 **raíces** de la ecuación dada con $m_1 \neq m_2$ entonces,
$y_1 = x^{m_1}$ y $y_2 = x^{m_2}$ Forman un conjunto fundamental de soluciones.

4.2.3 EJEMPLO DE APRENDIZAJE

Resuelva la siguiente Ecuación Diferencial: $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$

a. Se diferenciará dos veces, se obtiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$

b. Se sustituye en la Ecuación Diferencial:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 4y = x^2m(m-1)x^{m-2} - 2xmx^{m-1} - 4x^m = 0 \Longrightarrow$$

c. Algebraicamente se tiene:

$$x^m\,(m^2 - 3m - 4) = 0$$

d. Factorizando:

$$m^2 - 3m - 4 = (m+1)(m-4) = 0$$

e. Igualando cada factor a cero:

$$m + 1 = 0 \Rightarrow m = \ -1$$

$$m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4$$

f. De acuerdo con las raíces, la solución está dada por:

$$y = C_1x^{-1} + C_2x^4$$

- **Caso 2: Si las raíces son Reales e iguales.**

Cuando $m_1 = m_2$**,** se obtiene una sola solución $y = x^m$

Por lo tanto el discriminante de los coeficientes es cero y de la fórmula cuadrática se deduce que las raíces deben ser:

$$\boldsymbol{m_1 = \frac{-(b-\alpha)}{2\alpha}}$$

Nota: se puede escribir una segunda solución $\boldsymbol{y_2}$ pero antes debe escribir la ecuación de cauchy en la forma estándar, esto es:

$$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{b}{\alpha x}\frac{dy}{dx} + \frac{c}{\alpha x^2}y = 0}$$

- Realizando las identificaciones, se tiene que:

$$\boldsymbol{p(x) = \frac{b}{\alpha x}\ y \int \left(\frac{b}{\alpha x}\right) dx = \frac{b}{\alpha}\ln(x)}$$

- Por lo tanto:

$$\boldsymbol{y_2 = x^{m_1}\int \frac{e^{-\frac{b}{\alpha}\ln x}}{x^{2m_1}}dx \Longrightarrow y_2 = x^{m_1}\int x^{-\frac{b}{\alpha}}x^{2m_1}dx}$$

$\boldsymbol{y_2 = x^{m_1}\int x^{-\frac{b}{\alpha}}x^{\frac{b-\alpha}{\alpha}}dx,}$ realizando las operaciones indicadas:

$\boldsymbol{y_2 = x^{m_1}\int x^{-\frac{b}{\alpha}+\frac{b-\alpha}{\alpha}}dx \Longrightarrow y_2 = x^{m_1}\int x^{\frac{-b+b-\alpha}{\alpha}}dx,}$ simplificando:

$$\boldsymbol{y_2 = x^{m_1}\int x^{\frac{-\alpha}{\alpha}}dx \Longrightarrow y_2 = x^{m_1}\int x^{-1}dx \Longrightarrow y_2 = x^{m_1}\int \frac{dx}{x} \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{y_2 = x^{m_1}\ \ln x}$$

- La solución general está dada por:

$$y = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_1} \ln x$$

- **TRANSFORMADA DE LAPLACE**

La **transformada de Laplace** de una función $f(t)$ definida (en ecuaciones diferenciales, o en análisis matemático o en análisis funcional) para todos los números positivos $t \geq 0$, es la función $F(s)$, definida por:

$$F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Nota: Se da siempre y cuando la integral esté definida.

Cuando $f(t)$, **no es una función** sino **una distribución** con una singularidad en **cero (0)**, está dada por:

$$F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Nota1: Cuando se habla de la transformada de Laplace, generalmente se refiere a la **versión unilateral**.
Nota 2: También existe la transformada de Laplace bilateral, que se define: $$F_B(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$
Nota 3: La transformada de Laplace $F(s)$, existe para todos los números reales $s > a$, donde a es una **constante** que depende del comportamiento de crecimiento de $f(t)$,
$\mathfrak{L}$ Es llamado el **operador** de la transformada de Laplace.

- **Propiedades**

a. **Linealidad:**

$$\mathfrak{L}\{af(t)+bg(t)\}=a\mathfrak{L}\{f(t)\}+b\mathfrak{L}\{g(t)\}$$

b. Derivación:

$$\mathfrak{L}\{f'(t)\}=s\mathfrak{L}\{f(t)\}-f(0)$$

$$\mathfrak{L}\{f''(t)\}=s^2\mathfrak{L}\{f(t)\}-f(0)-f'(0)$$

En general (para la derivación):

$$\mathfrak{L}\{f^{(n)}(t)\}=s^n\mathfrak{L}\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

$$\mathfrak{L}\{f^{(n)}(t)\}=s^n\mathfrak{L}\{f(t)\}-\sum_{i=1}^{n}s^{n-i}f^{i-1}(0)$$

c. Integración

$$\mathfrak{L}\left\{\int_{0^-}^{t}f(\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{s}\mathfrak{L}\{f\}$$

d. Dualidad:

$$\mathfrak{L}\{tf(t)\}=-F'(s)$$

e. Desplazamiento de la frecuencia:

$$\mathfrak{L}\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$$

f. Desplazamiento Temporal

$$\mathfrak{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\, u\,(t-a)$$

Nota: La función $u\,(t)$ es la Función **Escalón unitario**.

g. Desplazamiento Potencia $n-\acute{e}sima$

$$\mathfrak{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n D_s^n[F(s)]$$

Convolución: En matemática, el teorema de convolución establece que bajo determinadas circunstancias, la *Transformada de Fourier* de una convolución es el producto punto a punto de las transformadas. En otras palabras, la convolución en un dominio (por ejemplo el dominio temporal) es equivalente al producto punto a punto en el otro dominio (es decir dominio espectral). Sean f y g dos funciones cuya convolución se expresa con $f * g$. (Notar que el asterisco denota convolución en este contexto, y no multiplicación; a veces es utilizado también el símbolo ($\otimes$).

Sea $\mathcal{F}$ el operador de la transformada de Fourier, con lo que $\mathcal{F}[f]$ y $\mathcal{F}[g]$ son las transformadas de Fourier de **f** y **g**, respectivamente. Entonces:

$$\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi}(\mathcal{F}[f]) \cdot (\mathcal{F}[g])$$

donde $\cdot$ indica **producto punto**. También puede afirmarse que:

$$\mathcal{F}[f \cdot g] = \frac{\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]}{\sqrt{2\pi}}$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier $\mathcal{F}^{-1}$, podemos escribir:

$$f * g = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]]$$

Esto es un extracto del artículo *Teorema de convolucion* de la enciclopedia libre Wikipedia. En Wikipedia hay disponible una lista de los autores.

Tomado de:www.cyclopaedia.es/wiki/Teorema-de-convolucion

En general: $\mathfrak{L}\{f * g\} = F(s)G(s)$

h. Transformada de Laplace de una función con período:

$$\mathfrak{L}\{f\} = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)dt$$

i. Condiciones de Convergencia

$\mathfrak{L}\left\{\left(e^{t^2}\right)\right\}$: Crece más rápido que e^{-st}, no pueden ser obtenidas por Laplace porque e^{t^2} es una función exponencial de ángulos.

- **Tablas de propiedades de la transformada de Laplace**

A continuación encontrará las tablas que le permitirán resolver problemas sobre Laplace:

Tabla de propiedades de la Transformada de Laplace

	$\ell[af(t)] = aF(s)$
Linealidad	$\ell[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$
Desplazamiento en el tiempo	$\ell[f(t-\tau)u(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s)$
Impulso	$\ell[\delta(t)] = 1$
Desplazamiento de frecuencia	$\ell[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$
Derivada	$\ell\left[\dfrac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$
Integral	$\ell\left[\int_a^t f(t)dt\right] = \dfrac{F(s)}{s} + \dfrac{\left[\int_a^t f(t)dt\right]_{t=0}}{s}$

Teorema del valor inicial	$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$
Teorema del valor final	$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$
Tiempo por una función	$\ell[tf(t)] = \dfrac{-dF(s)}{ds}$ donde $F(s) = \ell[f(t)]$
	$\ell[f(at)] = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$
	$\ell[t^n f(t)] = (-1)^n \dfrac{d^nF(s)}{ds^n}$
	$\ell\left[f\left(\dfrac{t}{a}\right)\right] = aF(as)$
	$\ell\left[\dfrac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(s)ds$

Pares de Transformadas de Laplace

f(t)		*F(s)*
1	Impulso unitario	1
$u(t)$	Escalón unitario	$\dfrac{1}{s}$
a	Escalón	$\dfrac{a}{s}$
at	Rampa	$\dfrac{a}{s^2}$
$e^{\mp at}$	Exponencial	$\dfrac{1}{s \pm a}$
$\operatorname{sen} \omega t$	Seno	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	Coseno	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\operatorname{sen} \omega t$	Seno amortiguado	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos \omega t$	Coseno amortiguado	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
t^n		$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n e^{-at}$		$\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$t\cos \omega t$		$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\dfrac{t}{2\omega}\operatorname{sen} \omega t$		$\dfrac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$

f(t)		*F(s)*
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$		$\dfrac{1}{s^n}$
$\dfrac{t^{n-1}e^{\mp at}}{(n-1)!}$	Rampa amortiguada	$\dfrac{1}{(s\pm a)^n}$
$\dfrac{1}{a}(1-e^{-at})$		$\dfrac{1}{s(s+a)}$
$\dfrac{1}{a^2}(at-1+e^{-at})$		$\dfrac{1}{s^2(s+a)}$
$\dfrac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$		$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$
$\dfrac{1}{b-a}(be^{-bt}-ae^{-at})$		$\dfrac{s}{(s+a)(s+b)}$
$\dfrac{1}{ab}\left[1+\dfrac{1}{a-b}(be^{-at}-ae^{-bt})\right]$		$\dfrac{1}{s(s+a)(s+b)}$
$sh\,\omega t$		$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$ch\,\omega t$		$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$
$\dfrac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\operatorname{sen}\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t$		$\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$
$-\dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\operatorname{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t-\arctan\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$		$\dfrac{s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$
$1-\dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\operatorname{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t+\arctan\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$		$\dfrac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$
$2\lvert K\rvert e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)$	K es un nº complejo = $\lvert K\rvert\theta$	$\dfrac{K}{s+\alpha-\beta j}+\dfrac{K^*}{s+\alpha+\beta j}$
$2t\lvert K\rvert e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)$	K es un nº complejo = $\lvert K\rvert\theta$	$\dfrac{K}{(s+\alpha-\beta j)^2}+\dfrac{K^*}{(s+\alpha+\beta j)^2}$

4.2.4 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

A continuación se mostrarán ejemplos de algunas de las propiedades de la transformada de Laplace.
Los ejercicios fueron tomados de:
www.mty.itesm.mx/etie/deptos/m/ma-841/laplace/tma4.htm

1. Determine (usando la propiedad de **Linealidad**):

$$\mathfrak{L}\{4t-3+2\cos(5t)\}$$

Procedimiento

a. Utilizando la propiedad de **Linealidad,** se tiene:

$$\mathfrak{L}\{4t-3+2\cos(5t)\} = 4\,\mathfrak{L}\,(t) - 3\mathfrak{L}\{1\} + 2\mathfrak{L}\{\cos(5t)\}$$

b. De acuerdo a la **tabla de Transformadas**:

$$4\,\mathfrak{L}\,(t) - 3\mathfrak{L}\{1\} + 2\mathfrak{L}\{\cos(5t)\} = 4\frac{1}{s^2} - 3\frac{1}{s} + 2\frac{s}{s^2+5^2}$$

c. Algebraicamente (determinando el M.C.M):

$$4\frac{1}{s^2} - 3\frac{1}{s} + 2\frac{s}{s^2+5^2} = \frac{4(s^2+25)-3s(s^2+25)+2s^3}{s^2(s^2+25)}$$

d. Realizando las operaciones indicadas:

$$\frac{4(s^2+25)-3s(s^2+25)+2s^3}{s^2(s^2+25)} = \frac{4s^2+100-3s^3-75s+2s^3}{s^2(s^2+25)}$$

e. Simplificando:

$$\frac{4s^2+100-3s^3-75+2s^3}{s^2(s^2+25)} = \frac{100-75s+4s^2-s^3}{s^2(s^2+25)}$$

f. La solución está dada por:

$$\mathfrak{L}\{4t-3+2\cos(5t)\} = \frac{100-75s+4s^2-s^3}{s^2(s^2+25)}$$

2. Determine (Utilizando el primer **Teorema de Translación**):

Actividad: Consulte los conceptos teóricos del Teorema de Translación.

$\mathfrak{L} = \{sen\ (2t)e^{3t}\}$

Procedimiento

a. Para utilizar el primer teorema de translación, se reconoce que:

$$f(t) = sen\ (2t)\ \ y\ \ e^{\alpha t} = e^{3t}$$

b. Entonces:

$$\mathfrak{L} = \{sen\ (2t)\ e^{3t}\} = \mathfrak{L}\{sen\ (2t)\}|\ cuando\ s \to s - 3$$

c. Utilizando la **tabla de transformadas** , se tiene que:

$$\mathfrak{L}\{sen\ (2t)\}|\ cuando\ s \to s - 3 = \left.\frac{2}{s^2 + 2^2}\right|\ cuando\ s \to s - 3$$

d. Reemplazando, se tiene:

$$\left.\frac{2}{s^2 + 2^2}\right|\ cuando\ s \to s - 3 = \frac{2}{(s - 3)^2 + 2^2}$$

e. Resolviendo el polinomio y simplificando:

$$\frac{2}{(s - 3)^2 + 2^2} = \frac{2}{s^2 - 6s + 9 + 4} = \frac{2}{s^2 - 6s + 13}$$

f. Por lo tanto la solución sería:

$$\mathfrak{L} = \{sen\ (2t)e^{3t}\} = \frac{2}{s^2 - 6s + 13}$$

3. Determine (Utilizando el primer **la Transformada de la Derivada**):

Enunciado del problema: Sabiendo que $y\ (0) = 3\ \ y\ que\ \ y'(0) = -1$, simplifique el siguiente polinomio:

$$\mathfrak{L}\{y''(t) + 3y'(t) - 4y(t)\}$$

Procedimiento

a. Aplicando la propiedad de **Linealidad,** se tiene:

$$\mathfrak{L}\{y''(t) + 3y'(t) - 4y(t)\} =** \mathfrak{L}\{y''(t)\} + 3\mathfrak{L}\{y'(t)\} - 4\mathfrak{L}\{y(t)\}$$

b. Por el teorema de **la transformada de la derivada:**

$$\mathfrak{L}\{y''(t)\} + 3\mathfrak{L}\{y'(t)\} - 4\mathfrak{L}\{y(t)\} = s^2\mathfrak{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0)$$

c. Reemplazando los valores conocidos, se tiene:

$$s^2\mathfrak{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) = s^2\mathfrak{L}\{y(t)\} - s(3) - (-1)$$

d. Además:

$$\mathfrak{L}\{y'(t)\} = s\mathfrak{L}\{y(t)\} - y(0) = s\mathfrak{L}\{y(t)\} - 3$$

e. Retomando la expresión ** y reemplazando los valores:

$$\mathfrak{L}\{y''(t)\} + 3\mathfrak{L}\{y'(t)\} - 4\mathfrak{L}\{y(t)\} = s^2\mathfrak{L}\{y(t)\} - 3s + 1 + 3\,(s\mathfrak{L}\{y(t)\} - 3) - 4\mathfrak{L}\{y(t)\}$$

f. Algebraicamente (agrupando términos):

$$s^2\mathfrak{L}\{y(t)\} - 3s + 1 + 3\,(s\mathfrak{L}\{y(t)\} - 3) - 4\mathfrak{L}\{y(t)\} = \left(s^2 + 3s - 4\right)\mathfrak{L}\{y(t)\} - 3s - 8$$

g. Por lo tanto la solución sería:

$$\mathfrak{L}\{y''(t) + 3y'(t) - 4y(t)\} = (s^2 + 3s - 4)\,\mathfrak{L}\{y(t)\} - 3s - 8$$

---

4. Determine (Utilizando el primer **la Transformada de la Integral**):

$$\mathfrak{L}^{-1} = \left\{\frac{1}{s\,(s^2+4)}\right\}$$

Procedimiento

a. Se reconoce que:

$$\frac{F\,(s)}{s} = \frac{1}{s(s^2+4)}$$

b. Multiplicando por s los dos miembros de la igualdad y simplificando se tiene:

$$\frac{F(s)}{s} * (s) = \frac{1}{s(s^2+4)} * (s) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{(s^2+4)}$$

c. Aplicando el teorema de **la Transformada de la Integral,** se tiene:

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} = \int_0^t \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} dt$$

d. Utilizando la **tabla de Transformadas**:

$$\int_0^t \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} dt = \int_0^t \frac{1}{2}\, Sen\,(2t)dt$$

e. Desarrollando la integral definida:

$$\int_0^t \frac{1}{2}\, Sen\,(2t)dt = \frac{1}{2}\int_0^t Sen\,(2t)dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}cos\,(2t) + \frac{1}{2}\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}cos\,(2t) + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}cos(2t)$$

f. La solución, entonces, está dada por:

$$\mathfrak{L}^{-1} = \left\{\frac{1}{s\,(s^2+4)}\right\} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}cos(2t)$$

5. Determine (usando el **Teorema de Convolución**):

$$\mathfrak{L}\left\{\int_0^t e^t\, sen\,(t-\sigma)d\sigma\right\}$$

Procedimiento

a. Para este caso:

$$\left\{\int_0^t e^t\, sen\,(t-\sigma)d\sigma\right\} = f * g$$

Dónde: $\boldsymbol{f(t) = e^t}$ y $\boldsymbol{g(t) = sen(t)}$

b. Utilizando el teorema de Convolución, se tiene:

$$\int_0^t e^t\, sen\,(t-\sigma)d\sigma = \mathfrak{L}\{f(t)\} * \mathfrak{L}\{g(t)\}$$

c. Pero:

$$\mathfrak{L}\{f(t)\} = \mathfrak{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1} \quad \text{y} \quad \mathfrak{L}\{g(t)\} = \mathfrak{L}\{sen(t)\} = \frac{1}{s^2+1}$$

d. La solución está dada por:

$$\mathfrak{L}\left\{\int_0^t e^t\, sen\,(t-\sigma)d\sigma\right\} = \frac{1}{s-1} \times \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$$

4.2.5 EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

Resuelva los siguientes ejercicios justificando cada uno de los procesos realizados (recuerde se anexó la tabla de Transformadas de Laplace, la cual necesitará para el desarrollo de los mismos):

1. Determine:

a. $\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{3s-1}{s^2+4}\right\}$ **(Por la propiedad de Linealidad).**

b. $\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{5s}{(s+4)^3}\right\}$ **(Por la propiedad de Translación).**

c. $\mathfrak{L}\left\{\frac{sen(2t)}{t}\right\}$ **(Por el teorema de la Transformada de la Integral).**

d. $\mathfrak{L}^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s-1}{s+1}\right)\right\}$ **(Por el teorema de Derivada de la Transformada).**

e. $\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$ **(Por el Teorema de Convolución).**

2. Para cada una de los siguientes conceptos de aplicación:

- Ley de Enfriamiento de Newton.
- Ley de Absorción de Lambert.
- Crecimientos poblacionales.
- Problemas de Dilución.
- Vaciado de tanques.
- Aplicaciones a la Física.

a. Definición matemática concreta de cada uno de ellos.
b. Un ejemplo, desarrollado, de cada uno de ellos, justificando cada uno de los pasos realizados durante el proceso (Si necesita apoyo solicítelo al respectivo tutor y utilice la bibliografía recomendada).

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Recuerde que: Se deben considerar 3 casos diferentes en la solución de la ecuación cuadrática que se presenta en la Ecuación de Euler - Cauchy

- **Si las raíces son Reales y diferentes.**
- **Si las raíces son Reales e iguales.**
- **Si las raíces son Complejas** (las raíces aparecen como un par conjugado**).**

Recuerde:

Nota1: Cuando se habla de la transformada de Laplace, generalmente se refiere a la **versión unilateral**.
Nota 2: También existe la transformada de Laplace bilateral, que se define: $$F_B(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$
Nota 3: La transformada de Laplace $F(s)$, existe para todos los números reales $s > a$, donde a es una **constante** que depende del comportamiento de crecimiento de $f(t)$,
$\mathfrak{L}$ Es llamado el **operador** de la transformada de Laplace.

5 PISTAS DE APRENDIZAJE

Recuerde que:

Se entiende por **Ecuación Diferencial Ordinaria** aquella que tiene:

- $y\ como\ Variable\ Dependiente$, y
- $x\ como\ Variable\ Independiente$

Recuerde que:

El grado de una Ecuación Diferencial está dado por **el exponente entero positivo** de la **derivada más alta presente en la ecuación.**

Recuerde que:

El orden de una Ecuación Diferencial es igual al de **la derivada de más alto orden** que aparece de manera no trivial en la ecuación, en otras palabras, **la derivada de más alto orden** determina el orden de los factores de la Ecuación Diferencial.

Recuerde que:

El concepto de orden también se extiende a las ecuaciones parciales.

Tenga presente que:

Como aplicaciones, las ecuaciones **de Laplace**, **de Calor** y **de Onda** tienen un enorme significado para la Física Teórica y su estudio ha estimulado el desarrollo de muchas ideas matemáticas relevantes.

Recuerde que: Una Ecuación Diferencial ordinaria de primer orden, se puede expresar de dos formas:

c. **Explícita**:

$$\frac{dy}{dx} = f\,(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

d. **Implícita**:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \qquad con\ y(x_0) = y_0$$

Recuerde que: una Ecuación Diferencial Homogénea de Orden Superior se presenta de la siguiente forma**:**

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

Recuerde que: Si $f(x) = 0$ $es\ una\ \textbf{Ecuación Diferencial Homogénea}$.

Recuerde que: Si $f(x) \neq 0$ $es\ una\ \textbf{Ecuación Diferencial No Homogénea}$

Recuerde que: Este tipo de ecuaciones tienen como solución general la función:

$$y = e^{mx}$$

Recuerde que: la **Ecuación Auxiliar**, para solucionar este tipo de ecuaciones diferenciales, está dada por:

$$a_n m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0$$

Recuerde que: Aparentemente se pueden encontrar infinitas soluciones, se debe cuestionar entonces acerca del número mínimo de soluciones independientes que generan todas y cada una de las soluciones del sistema.

Recuerde que: Se puede afirmar que existirán n soluciones:

Sean $x_1, x_2, \dots, x_n$, considerando la matriz formada por estos vectores columna – cada columna es uno de estos vectores -

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

Recuerde que: Estas soluciones serán Linealmente Independientes en cada punto t del intervalo: $\alpha < t < \beta$ Si y sólo sí el determinante es diferente de **CERO** en ese punto. Al Determinante de X se le llama **Wronskiano** de las n soluciones.

Recuerde que: Se deben considerar 3 casos diferentes en la solución de la ecuación cuadrática que se presenta en la Ecuación de Euler - Cauchy

- **Si las raíces son Reales y diferentes.**
- **Si las raíces son Reales e iguales.**
- **Si las raíces son Complejas** (las raíces aparecen como un par conjugado**).**

Recuerde:

Nota1: Cuando se habla de la transformada de Laplace, generalmente se refiere a la **versión unilateral**.
Nota 2: También existe la transformada de Laplace bilateral, que se define: $$F_B(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$
Nota 3: La transformada de Laplace $F(s)$, existe para todos los números reales $s > a$, donde a es una **constante** que depende del comportamiento de crecimiento de $f(t)$,
$\mathfrak{L}$ Es llamado el **operador** de la transformada de Laplace.

6 GLOSARIO

Cálculo: En general el término **cálculo** (del latín calculus = piedra)[1] hace referencia al resultado correspondiente a la acción de calcular o contar. **Calcular**, por su parte, consiste en realizar las operaciones necesarias para prever el resultado de una acción previamente concebida, o conocer las consecuencias que se pueden derivar de unos datos previamente conocidos.

No obstante, el uso más común del término cálculo es el **lógico matemático**. Desde esta perspectiva, el cálculo consiste en un procedimiento mecánico, o algoritmo, mediante el cual podemos conocer las consecuencias que se derivan de unos datos previamente conocidos debidamente formalizados y simbolizados.

Derivación: La derivación numérica es una técnica de análisis numérico para calcular una aproximación a la derivada de una función en un punto, utilizando los valores y propiedades de la misma.

Integración: La **integración** es un concepto fundamental del cálculo y del análisis matemático, básicamente, una integral es una generalización de la suma de infinitos sumandos, infinitamente pequeños.

El **cálculo integral**, encuadrado en el cálculo infinitesimal, es una rama de las matemáticas en el proceso de integración o antiderivación, es muy común en la ingeniería y en la ciencia también; se utiliza principalmente para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución.

Fue usado por primera vez por científicos como Arquímedes, René Descartes, Isaac Newton, Gottfried Leibniz e Isaac Barrow. Los trabajos de este último y los aportes de Newton generaron el teorema fundamental del cálculo integral, que propone que la derivación y la integración son procesos inversos.

Ingeniería: La **ingeniería** es el conjunto de conocimientos y técnicas científicas aplicadas al desarrollo, implementación, mantenimiento y perfeccionamiento de estructuras (tanto físicas como teóricas) para la resolución de problemas que afectan la actividad cotidiana de la sociedad.

Para ella, el estudio, conocimiento, manejo y dominio de las matemáticas, la física y otras ciencias es aplicado profesionalmente tanto para el desarrollo de tecnologías, como para el manejo eficiente de recursos y/o fuerzas de la naturaleza en beneficio de la sociedad. La ingeniería es la actividad de transformar el conocimiento en algo práctico.

Otra característica que define a la ingeniería es la aplicación de los conocimientos científicos a la invención o perfeccionamiento de nuevas técnicas. Esta aplicación se caracteriza por usar el ingenio principalmente de una manera más pragmática y ágil que el método científico, puesto que la ingeniería, como actividad, está limitada al tiempo y recursos dados por el entorno en que ella se desenvuelve.

Su estudio como campo del conocimiento está directamente relacionado con el comienzo de la Revolución Industrial, constituyendo una de las actividades pilares en el desarrollo de las sociedades modernas.

Ecuación Diferencial: Una **ecuación diferencial** es una ecuación en la que intervienen derivadas de una o más funciones desconocidas. Dependiendo del número de variables independientes respecto de las que se deriva.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden: Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es una ecuación diferencial ordinaria donde intervienen derivadas de primer orden respecto a una variable independiente.

Ecuaciones Diferenciales lineales con Coeficientes Constantes: La resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales se simplifica mucho si las ecuaciones son de coeficientes constantes. En el caso de una ecuación de primer orden la búsqueda de un factor integrante nos lleva en la mayoría de los casos a una ecuación en derivadas parciales. Si la ecuación es de orden superior, a no ser que sea una ecuación de Euler o similar, tendremos que proponer una solución que no viene dada, en general, por funciones elementales.

Ecuaciones Diferenciales Lineales simultáneas: Las ecuaciones diferenciales ordinarias simultáneas consisten en dos o más ecuaciones con derivadas de dos o más funciones desconocidas de una sola variable independiente.

Ecuación de Continuidad: En física, una **ecuación de continuidad** expresa una ley de conservación de forma matemática, ya sea de forma integral como de forma diferencial.

Ley de Enfriamiento: Cuando la diferencia de temperaturas entre un cuerpo y su medio ambiente no es demasiado grande, el calor transferido en la unidad de tiempo hacia el cuerpo o desde el cuerpo por conducción, convección y radiación es aproximadamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio externo.

Ley de Absorción: En óptica, la **ley de Beer-Lambert**, también conocida como **ley de Beer** o **ley de Beer-Lambert-Bouguer** es una relación empírica que relaciona la absorción de luz con las propiedades del material atravesado.

Crecimiento Poblacional o **crecimiento demográfico:** es el cambio en la población en un cierto plazo, y puede ser cuantificado como el cambio en el número de individuos en una población por unidad de tiempo para su medición. El término crecimiento demográfico puede referirse técnicamente a cualquier especie, pero refiere casi siempre a seres humanos, y es de uso frecuentemente informal para el término demográfico más específico tarifa del crecimiento poblacional, y es de uso frecuente referirse específicamente al crecimiento de la población del mundo.

7 BIBLIOGRAFÍA

Este capítulo recomienda al estudiante las fuentes de consulta bibliográficas y digitales para ampliar su conocimiento, por lo tanto deben estar en la biblioteca digital de la Remington. Utilice la biblioteca digital http://biblioteca.remington.edu.co/es/ para la consulta de bibliografía a la cual puede acceder el estudiante.

Fuentes bibliográficas

WYLIE, C. RAY. Matemáticas Superiores para Ingeniería. Cuarta edición en español. Mc Graw Hill.

ESCOBAR A, JAIME. Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones en Maple. Texto en la página web: http:/matemáticas.udea.edu.co/jescobar/

EDWARDS C. Henry, PENNEY David E. Ecuaciones diferenciales. 4 edición. Pearson Educación, 2001. 800 páginas

ZILL Dennis G., SANCHEZ FRAGOSO Francisco. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. 8 Edición. Cengage Learning Editores, 2006. 464 páginas

JOVER Isabel Carmona. Ecuaciones Diferenciales. Edición 4. Pearson Educación, 1992. 648 páginas

ZILL Dennis, CULLEN Michael. Ecuaciones diferenciales: con problemas de valores en la frontera. 7 edición. Cengage Learning Editores, 2009. 616 páginas.

RICARDO Henry. Ecuaciones diferenciales: una introducción moderna. Reverte, 2008. 445 páginas.

NAGLE R. Kent, SAFF Edward B., SNIDER Arthur David. Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4 edición. Pearson Educación, 2005. 816 páginas.

ACERO, Ignacio, LÓPEZ, Mariló. Ecuaciones diferenciales: teoría y problemas. 2 edición. Editorial Tebar, 2007. 236 páginas.

BORRELLI Robert L COLEMAN Courtney S. Ecuaciones diferenciales: una perspectiva de modelación. Ilustrada edición. Oxford University Press, 2002. 828 páginas.

SIMMONS George F., ROBERTSON John S. Ecuaciones diferenciales: con aplicaciones y notas históricas. 2 edición. McGraw-Hill, 2002. 658 páginas

7.1.1 FUENTES DIGITALES

- matematicas.udea.edu.co/~jescobar/
- www.matematicas.unal.edu.co/cursos/./ecuadif.html
- copernico.escuelaing.edu.co/ceciba/facultad./upload//ECDI.pdf
- copernico.escuelaing.edu.co/ceciba/facultad./file/./EDPA.pdf

- fisica.udea.edu.co/Docs/CNM-305.htm
- copernico.escuelaing.edu.co/ceciba/facultad.../upload/.../ECDI.pdf
- cienciasbasicas.lasalle.edu.co/.../**ecuaciones**-**diferenciales**.html
- Ecuación de cauchy-euler, por WikiMatematica.org
- www.cyclopaedia.es/wiki/Teorema-de-convolucion