www.uniremington.edu.co

UNIREMINGTON®
CORPORACIÓN UNIVERSITARIA REMINGTON
RES. 2661 MEN JUNIO 21 DE 1996

PRECÁLCULO

INGENIERÍA DE SISTEMAS

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Vicerrectoría de Educación a Distancia y virtual

2016

UNIREMINGTON®
CORPORACIÓN UNIVERSITARIA REMINGTON
RES. 2661 MEN JUNIO 21 DE 1996

El módulo de estudio de la asignatura Pre cálculo es propiedad de la Corporación Universitaria Remington. Las imágenes fueron tomadas de diferentes fuentes que se relacionan en los derechos de autor y las citas en la bibliografía. El contenido del módulo está protegido por las leyes de derechos de autor que rigen al país.

Este material tiene fines educativos y no puede usarse con propósitos económicos o comerciales.

AUTOR

Pablo Emilio Botero Tobón
pbotero@uniremigton.edu.co

Nota: el autor certificó (de manera verbal o escrita) No haber incurrido en fraude científico, plagio o vicios de autoría; en caso contrario eximió de toda responsabilidad a la Corporación Universitaria Remington, y se declaró como el único responsable.

RESPONSABLES

Jorge Mauricio Sepúlveda Castaño
Decano de la Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería
jsepulveda@uniremington.edu.co

Eduardo Alfredo Castillo Builes
Vicerrector modalidad distancia y virtual
ecastillo@uniremington.edu.co

Francisco Javier Álvarez Gómez
Coordinador CUR-Virtual
falvarez@uniremington.edu.co

GRUPO DE APOYO

Personal de la Unidad CUR-Virtual
EDICIÓN Y MONTAJE

Primera versión. Febrero de 2011.
Segunda versión. Marzo de 2012
Tercera versión. noviembre de 2015

Derechos Reservados

BY NC SA

Esta obra es publicada bajo la licencia Creative Commons.
Reconocimiento-No Comercial-Compartir Igual 2.5 Colombia.

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

1 MAPA DE LA ASIGNATURA

PRECÁLCULO

$ax^2+bx+c=0$

$y=\left(\frac{b\times a}{2}\right)-h$

PROPÓSITO GENERAL DEL MÓDULO

Con este módulo se pretende entregar al estudiante las herramientas necesarias que le permitan desenvolverse de forma eficiente en todas las áreas del conocimiento.

OBJETIVO GENERAL

Construir, a través de un lenguaje matemático simple, modelos matemáticos que les permitan la explicación de los fenómenos cotidianos, generando una conciencia del trabajo en equipo bajo la firme convicción de responsabilidad y respeto, para el afianzamiento de las fortalezas y superación de las debilidades, capacitando al estudiante para el uso de los conceptos del álgebra en situaciones problémicas.

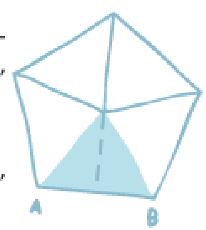
$\frac{a}{\sqrt{x}}$

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

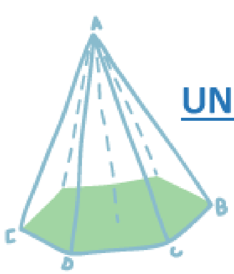
* Realizar adecuadamente operaciones con números fraccionarios, las leyes de potenciación y radicación, operaciones con polinomios, la factorización y las fracciones algebraicas, facilitando así, trabajos posteriores en el área de las matemáticas.

* Manejar correctamente las relaciones matemáticas que involucren una o dos variables, permitiendo el análisis y solución de una situación específica dada.

* Analizar el modelo lineal, a través de la representación de situaciones problémicas mediante el lenguaje matemático, facilitando de esta manera la manipulación matemática, soluciones generales, no particulares y realizando su representación gráfica.



$y(-a)+\left(\frac{-}{2}-a\right)$



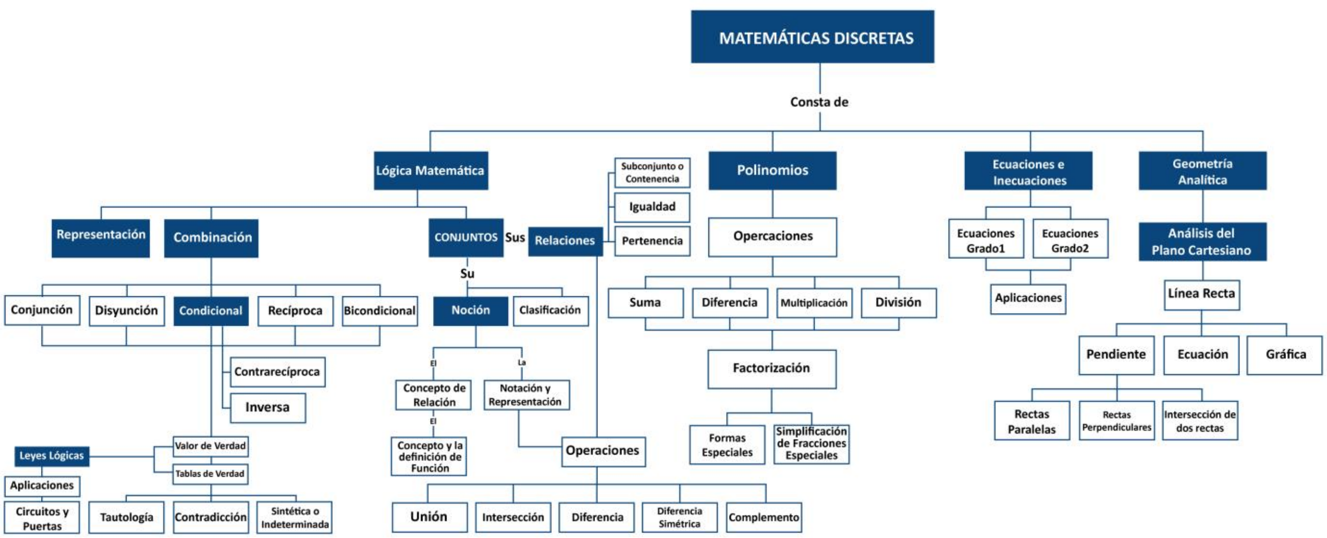
UNIDAD 1 | UNIDAD 2 | UNIDAD 3 | UNIDAD 4

$\times\left(\frac{2\pi}{a}-b\right)$

2 UNIDAD 1 MATEMÁTICAS DISCRETAS

Lógica proposicional: [Enlace]()

MAPA DE CONCEPTOS



Lógica matemática: Es una parte de la lógica y la matemática, que consiste en el estudio matemático de la lógica, y en la aplicación de dicho estudio a otras áreas de la matemática y de las ciencias. La lógica matemática tiene estrechas conexiones con las ciencias de la computación y la lógica filosófica.
La lógica matemática estudia los sistemas formales en relación con el modo en el que codifican o definen nociones intuitivas de objetos matemáticos como conjuntos, números, demostraciones, y algoritmos, utilizando un lenguaje formal.

La lógica matemática suele dividirse en cuatro subcampos: teoría de modelos, teoría de la demostración, teoría de conjuntos y teoría de la recursión. La investigación en lógica matemática ha jugado un papel fundamental en el estudio de los fundamentos de las matemáticas. Actualmente se usan indiferentemente como **sinónimos** las expresiones: lógica simbólica (o logística), lógica matemática, lógica teorética y lógica formal.[1]

La lógica matemática no es la «lógica de las matemáticas» sino la «matemática de la lógica». Incluye aquellas partes de la lógica que pueden ser modeladas y estudiadas matemáticamente.

Tomado de: Lógica matemática - Wikipedia, la enciclopedia libre

*es.wikipedia.org/wiki/**Lógica matemática***

Proposición lógica: Una **proposición** es una oración con valor referencial o informativo, de la cual se puede predicar su veracidad o falsedad, es decir, que puede ser falsa o verdadera pero no ambas a la vez.

La proposición es la expresión lingüística del razonamiento, que se caracteriza por ser verdadera o falsa empíricamente, sin ambigüedades. Son proposiciones las oraciones aseverativas, las leyes científicas, las fórmulas matemáticas, las fórmulas y/o esquemas lógicos, los enunciados cerrados o claramente definidos. No son proposiciones las opiniones y suposiciones; los proverbios, modismos y refranes; los enunciados abiertos no definidos; las oraciones interrogativas, exclamativas, imperativas, desiderativas y dubitativas; las interjecciones en general; ni las operaciones aritméticas.

Tomado de: El Webatario: Proposición Lógica

webatario.blogspot.com/2008/02/proposicin-lgica.html

Valor de verdad de una proposición: Depende no solamente de las relaciones entre las palabras del lenguaje y los objetos en el mundo, sino también del estado del mundo y del conocimiento acerca de ese estado. El valor de verdad de la oración *Juan canta* depende no solamente de la persona denotada en *Juan* y el significado del verbo *cantar*, sino también del momento cuando esta oración es expresada. Juan probablemente canta ahora, pero ciertamente que no siempre está cantando.

Proposiciones Simples o Atómicas: Son aquellas que carecen totalmente de conectivos lógicos y que, por lo tanto, son inseparables. En este grupo se encuentran las proposiciones **predicativas**, que son aquellas en la cual se afirma o atribuye una característica respecto de un objeto, como, por ejemplo, *Juan Pérez es profesor*; y las proposiciones **relacionales**, en las cuales existe una relación de dependencia, estableciendo un enlace entre dos o más objetos, como, por ejemplo, *Caracas es la capital de Venezuela.*

Proposición Compuesta o Molecular

Son aquellas que resultan de la combinación de varias proposiciones simples, unidas por uno o más conectivos lógicos y que pueden ser separadas y descompuestas en proposiciones más simples. Su valor de verdad depende del de las proposiciones que la componen.

CONECTIVOS LÓGICOS:

En lógica, una **conectiva lógica**, o simplemente **conectiva**, (también llamado **operador lógico** o **conectores lógicos**) es un símbolo o palabra que se utiliza para conectar dos fórmulas bien formadas o sentencias (atómicas o moleculares), de modo que el valor de verdad de la fórmula compuesta depende del valor de verdad de las fórmulas componentes.

NEGACION DE UNA PROPOSICIÓN:

La negación clásica es una operación sobre un valor de verdad, típicamente, el valor de una proposición, que produce un valor de verdadero cuando su operando es falso, y un valor de falso cuando su operando es verdadero.

CONJUNCIÓN: Una **conjunción lógica** (comúnmente simbolizada como **Y** o $\wedge$) es, en lógica y matemáticas, un operador lógico que resulta en verdadero si los dos operadores son verdaderos.

DISYUNCION INCLUSIVA: Dadas dos proposiciones a y b se establece que la disyunción inclusiva ($\boldsymbol{p \vee q}$ **:** $\boldsymbol{que\ se\ lee\ p\ o\ q}$), es Verdadera si al menos una de las proposiciones es verdadera.

DISYUNCION EXCLUSIVA: El operador lógico **Disyunción exclusiva** también llamado **o exclusivo**, simbolizado como **XOR**, **EOR**, **EXOR**, $\veebar$ o $\oplus$ es un tipo de disyunción lógica de dos operandos que es verdad si solo un operando es verdad pero no ambos.

IMPLICACIÓN: En el cálculo lógico de deducción natural este tipo de expresiones se formalizan simbólicamente como:

$$A \to B$$

Que se interpretan como más adelante se explica; siendo A causa o conjunto de causas y B efecto o conjunto de efectos.

EQUIVALENCIA: Dos fórmulas lógicas son equivalentes si tienen los mismos valores de verdad para todos los posibles valores de verdad de sus componentes atómicos.

Tautología: Si la tabla de verdad de la proposición es siempre verdadera, independientemente de la verdad o falsedad de las proposiciones simples.

Contradicción: Si la tabla de verdad es siempre falsa.

Contingencia, indeterminada o Sintética**: Si es verdadera y falsa.**

Conjunto: En matemáticas, un **conjunto** es una colección de elementos considerada en sí misma como un objeto. Los elementos de un conjunto pueden ser cualquier cosa: personas, números, colores, letras, figuras, etc. Se dice que un **elemento** (o **miembro**) pertenece al conjunto si está definido como incluido de algún modo dentro de él.

Ejemplo: el conjunto de los colores del arcoíris es:

AI = {Rojo, Naranja, Amarillo, Verde, Azul, Añil, Violeta}

Un conjunto suele definirse mediante una propiedad que todos sus elementos poseen. Por ejemplo, para los números naturales, si se considera la propiedad de ser un número primo, el conjunto de los números primos es:

P = {2, 3, 5, 7, 11, 13,...}

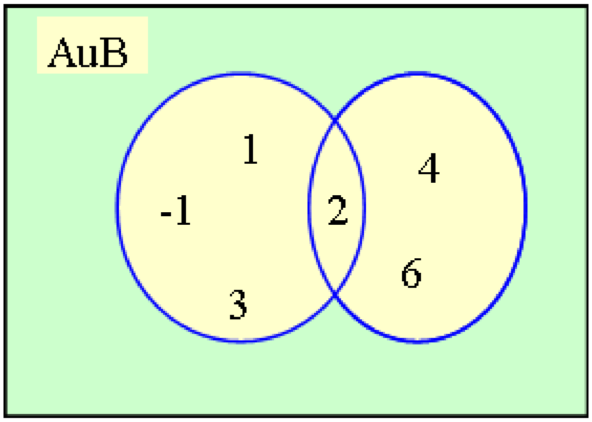
OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS:

- Unión de conjuntos:

Al realizar esta operación estamos conformando un nuevo conjunto, que se llama **conjunto solución**, que contiene todos los elementos o miembros de los conjuntos que se estén uniendo, sin que ninguno de sus miembros se repita en el conjunto solución. Por ejemplo:

Dados: A = {-1, 1, 2, 3} B = {2, 4, 6} C= {4, 5, 7, 8}

A u B = {-1, 1, 2, 3, 4, 6



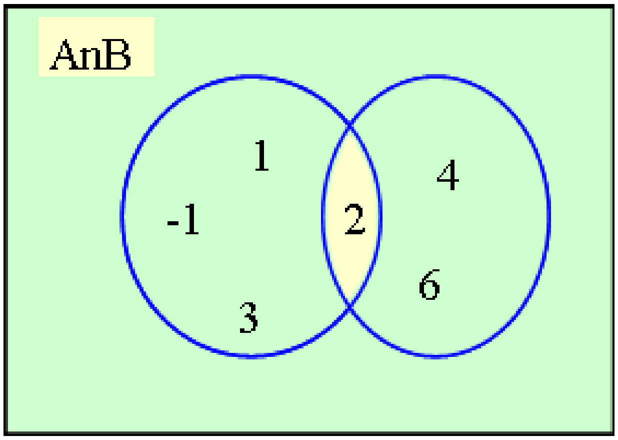
Observe que el resultado A u B no contiene elementos repetidos

A u B u C = {-1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

Intersección de conjuntos:

Esta operación entre conjuntos conforma un nuevo conjunto que contenga los elementos o miembros **comunes** a los conjuntos que hagan parte de esta operación. Por ejemplo, si consideramos los conjuntos **A, B y C** arriba mencionados, al operar; se obtiene:

A n B = {2}



B n C = {4}

A n B n C = { } Puesto que **no hay ningún elemento** que esté en los tres conjuntos.

(A u B) n C Observe que en este ejemplo se está aplicando la propiedad asociativa para la operación de unión entre **A** y **B** y a su resultado hacer la intersección con **C.**

(A u B) n C = {4}

Diferencia de conjuntos:

Cuando se analiza la diferencia entre **A** y **B**, se obtiene como respuesta **exclusivamente** los elementos del conjunto **A.** Por ejemplo, si consideramos los conjuntos **A, B, C** que aparecen arriba:

A - B = {1, 1, 3}

B - C = {2, 6}

B - A = {4, 6}

C - B = {5, 7, 8}

- Diferencia simétrica de conjuntos:

Se presenta cuando se consideran todos los elementos que **sólo pertenecen los conjuntos,** sin tener en cuenta lo que tienen en común. En otras palabras, en la diferencia simétrica no se tiene en cuenta **ningún elemento de la intersección** entre los conjuntos, los demás **sí.** Por ejemplo, dados los conjuntos

A = {-1, 1, 2, 3,}   B = {2, 4, 6}   C = {4, 5, 7, 8}

y U = {-1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} (Conjunto Universal o referencial)

- Complemento de un conjunto:

Se buscan todos los elementos que le hagan falta a un conjunto para convertirse o ser el **conjunto universal o referencial.** Por ejemplo:

A´= {4, 5, 6, 7}

B´= {-1, 1, 3, 5, 7, 8}

C´= {-1, 1, 2, 3, 6,}

(A u B) ´= {5, 7, 8}

Tomado de: Operaciones entre conjuntos - Artigoo

artigoo.com › Cómo se hace y Educación › Educación

Mínimo común múltiplo: Símbolo m.c.m. Es el menor de todos los números posibles que contiene exactamente a dos o más números.

Factorizar: "**FACTORIZACION**. El proceso de escribir un polinomio como el producto de polinomios (o factores) irreducibles se llama **Factorización o descomposición en factores irreducibles**." Díez, 2002, p.8).

Igualdad: Una igualdad es una expresión que indica que dos o más cantidades tienen el mismo valor.

Ecuación: "Una **ecuación** es una proposición que indica que dos expresiones son iguales." (Haeussler & Richard, 1977, p.33).

Identidad: "Una ecuación se llama **identidad** si todos los números del dominio de la variable la satisfacen." (Zill & Dewar, 1995, p.62).

Desigualdad: Una desigualdad es un enunciado que indica que un número es mayor que otro; o que un número es mayor o igual que otro; o que un número es menor que otro; o que un número es menor o igual que otro.

Inecuación: Es una desigualdad con incógnitas.

Racionalizar*:* Utilizando un proceso matemático cambiar una raíz que está en el numerador para el denominador o viceversa.

Expresión algebraica: "Si números representados por símbolos, se combinan mediante operaciones de suma, resta, multiplicación, división o extracción de raíces, entonces la expresión resultante es llamada expresión algebraica." (Haeussler & Richard, 1977, p.17).
Productos notables: Son fórmulas que permiten multiplicar polinomios por simple inspección.

Raíz de una ecuación: "Una solució*n* o **raíz,** de una ecuación es cualquier número que, sustituido en la ecuación, la convierte en una proposición verdadera." (Zill & Dewar, 1995, p.62).

2.1.1 OBJETIVO GENERAL

Aplicar los conceptos de la lógica matemática y de conjuntos en los problemas típicos de la tecnología informática e ingeniería de sistemas.

2.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Hallar el valor de verdad de una proposición, elaborando tablas de verdad de proposiciones compuestas, determinando si es una proposición compuesta, tautología o contradicción.
- Utilizar las leyes del álgebra proposicional para la simplificación de proposiciones compuestas.
- Utilizar la lógica matemática en la solución y simplificación de circuitos con puertas.
- Describir un conjunto por extensión y por comprensión y Hallando las diferentes operaciones que se realizan entre conjuntos: Unión, intersección, complemento, diferencia.
- Identificar los diferentes grupos en los cuales pueden incluirse los números, identificando expresiones matemáticas que conducen a operaciones no válidas en el campo de los números reales.

2.2 TEMA 1 LÓGICA MATEMÁTICA

http://www.slideshare.net/videoconferencias/logica-matemtica-introduccin-a-la-logica

- **Proposición:** Es una frase de la cual podemos decir que es verdadera o es falso pero no ambas a la vez.

Inferencia Lógica: Enlace

Ejemplos:

- Trece es un número primo: **Proposición verdadera**
- En base 10, 8 + 3 = 12: **Proposición falsa**
- ¿Qué hora es?: **No es proposición.**
- Bonito: **No es proposición.**

REPRESENTACIÓN DE LAS PROPOSICIONES.

Las proposiciones se representan por letras minúsculas, las letras más utilizadas son: $\boldsymbol{p, q, r, s}$.

> **Nota**: Una proposición **o siempre es verdadera o siempre es falsa**, esto es lo que se llama **el valor de verdad de la proposición**.

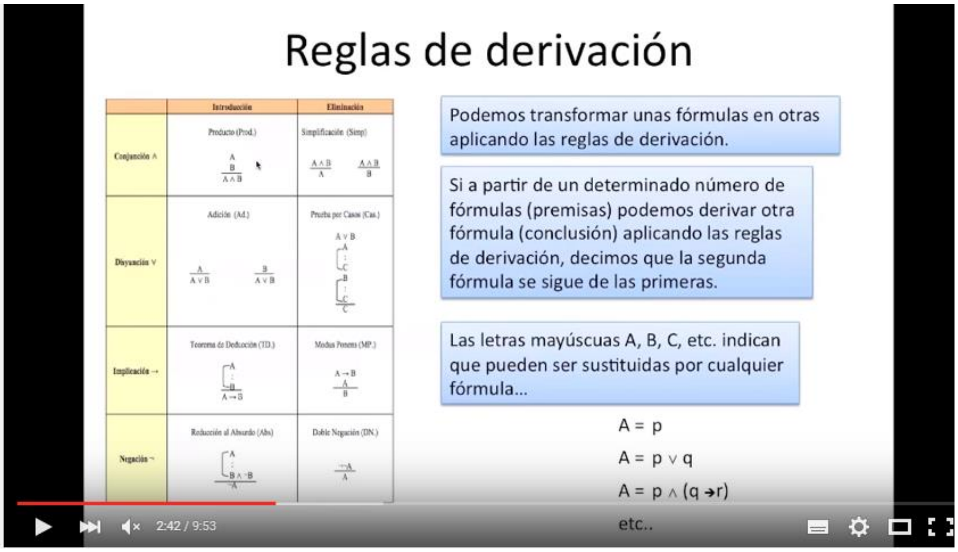
COMBINACIÓN DE PROPOSICIONES

Consiste en combinar **dos o más proposiciones** y determinar **el valor de verdad de dicha combinación**, para ello se utilizan los símbolos o conectivos lógicos.

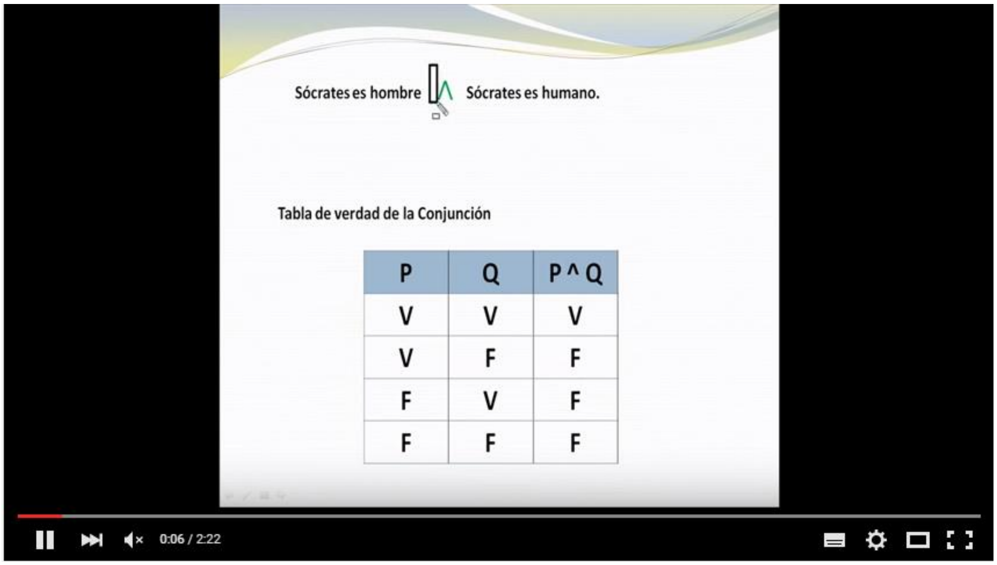
1. **Conjunción:** El signo gramatical es la letra y, el signo lógico es $\wedge$.

La conjunción de las proposiciones $p\ y\ q$ se símboliza como: $p \wedge q$

Valor de verdad de la conjunción: La **conjunción es verdadera** solo cuando las dos proposiciones $p\ y\ q$ **son <u>verdaderas</u>**, en caso contrario **es falsa**.



La conjunción: [Enlace]()



Tablas de Verdad 6: [Enlace]()

2.2.1 EJERCICIO DE APRENDIZAJE

Sean las siguientes proposiciones:

PROPOSICIÓN	ENUNCIADO
p	5 es divisor de 105
q	18 es múltiplo de 3
$p \wedge q$	5 es divisor de 105 y 18 es múltiplo de 3

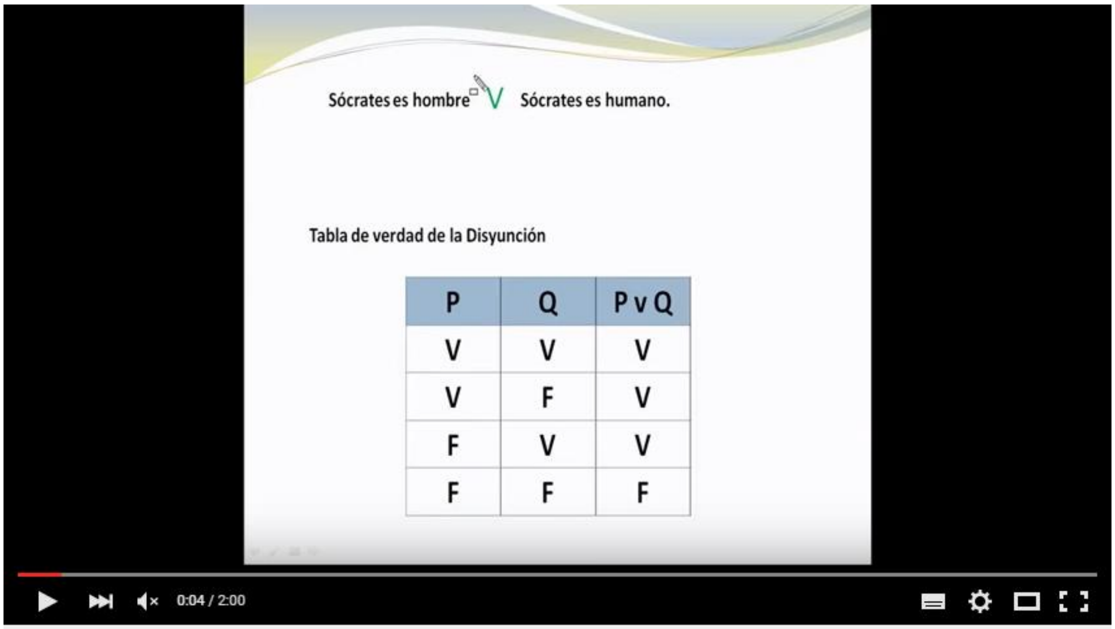
Conclusión:Como p es verdadera, q es verdadera, entonces $p \wedge q$ es verdadera.

TABLA DE VERDAD DE LA CONJUNCIÓN (http://www.youtube.com/watch?v=JBl2b8GMQeI&feature=related)

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

2. **Disyunción:** Signo gramatical es la letra o, el signo lógico es $\vee$, la disyunción de las proposiciones p o q se símboliza como:$p \vee q$

Valor de verdad de la disyunción: La disyunción **es falsa** cuando las **dos proposiciones p y q son falsas** de resto es **verdadera**.



Tablas de Verdad 4: [Enlace]

Repaso de lógica 5 - Disyunción: [Enlace]

Esta disyunción se llama **disyunción inclusiva**, que corresponde en el lenguaje corriente a la expresión **y / o**

La **o exclusiva** es verdadera cuando **p es verdadera** o **cuando q es verdadera** pero **no cuando ambas son verdaderas**, para representar la **o exclusiva** se utiliza el símbolo: $p \underline{\vee} q$

Nota: Cuando digamos disyunción únicamente nos referimos a la **disyunción inclusiva**, para indicar conjunción exclusiva se dirá **disyunción exclusiva**.

TABLA DE VERDAD DE LA DISUYUNCIÓN

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

TABLA DE VERDAD DE LA DISUYUNCIÓN EXCLUSIVA

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V

F	V	V
F	F	F

DE VERDAD

3. Negación:

Signo gramatical NO,

signo lógico: $\sim$ *o* $\neg$ (cualquiera de los dos es válido como negación).

Repaso de lógica 6 - Negación: Enlace

Repaso de lógica 6 - Negación: Enlace

La negación de una proposición es otra proposición que **tiene como valor de verdad el opuesto**, es decir, si $\boldsymbol{p}$ **es verdadera**, $\neg \boldsymbol{p}$ **es falsa**, y se $\boldsymbol{p}$ **es falsa**, $\neg \boldsymbol{p}$ **es verdadera**.

TABLA DE LA NEGACIÓN

$\boldsymbol{p}$	$\neg \boldsymbol{p}$
V	**F**
F	**V**

2.2.2 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones y el valor de verdad de su negación.

1. .

- p 4 es divisor de 12:

Como 4 es divisor de 12	La proposición p es verdadera.

- La negación de la proposición es:

4 no es divisor de 12	Se simboliza $\neg p$ y es falsa

2.

- q: 15 es un número primo:

Como 15 no es un número primo	La proposición q es falsa.

- La negación de la proposición q es:

15 es un número primo	Se simboliza $\neg q$ y es verdadera

3.

La ecuación $4x - 11 = 9$ tiene solución en los naturales y 17 es un número primo.

Solución:

a. Sea p: La ecuación $4x - 11 = 9$ tiene solución en los naturales:

Para determinar el valor de verdad de p, se debe solucionar la ecuación y determinar si este valor es un número natural.

Solución de la ecuación

$$4x - 11 = 9 \rightarrow 4x = 9 + 11 \rightarrow 4x = 20 \rightarrow x = \frac{20}{4} \rightarrow x = 5$$

Como 5 es un número natural, la proposición p es verdadera.

b. Sea q: 17 es un número primo. Esta proposición es verdadera.

c. Como ambas proposiciones son verdaderas, entonces, la conjunción:

La ecuación $4x - 11 = 9$ tiene solución en los naturales **y** 17 es un número primo.	
Que se simboliza: $p \wedge q$	Es verdadera

4.

$\sqrt{-2}$ ***no es un número real o*** $\sqrt[3]{-8} = -2$

Solución

Sea p: $\sqrt{-2}$ ***es un número real***, entonces

$\neg p$ ***no es un número real***

Sea $q = \sqrt[3]{-8} = -2$

- Como $\sqrt{-2}$ no es un número real, $\neg p$ es verdadera
- Como $\sqrt[3]{-8} = -2$ Es verdadera, entonces q es verdadera.

La Disyunción:

$\sqrt{-2}$ ***no es un número real o*** $\sqrt[3]{-8} = -2$

que se simboliza $\neg p \vee q$ es verdadera.

Leyes de la lógica que involucran los conectivos ∧,∨, ¬

LEYES	EXPLICACIÓN
LEYES IDEMPOTENTES	$p \wedge p = p$ $\quad p \vee p = p$

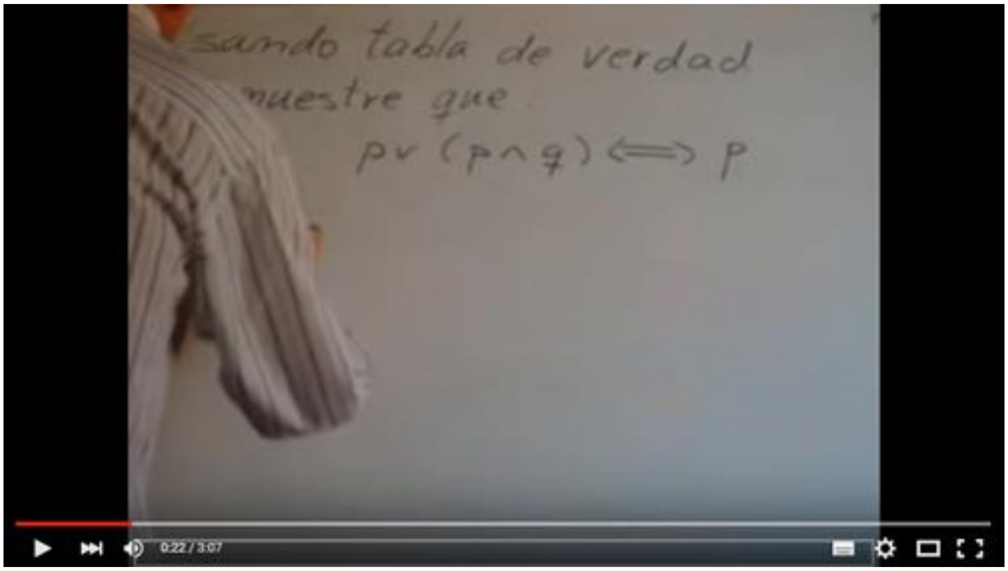
	Se puede ver que $p \wedge p = p$ es **verdadera** cuando **p es verdadera** y es **falsa** cuando **p es falsa**, igual sucede con $p \vee p = p$
LEYES DE IDENTIDAD PARA LA $\wedge$ Y PARA LA $\vee$	$p \vee (v) = (v)$ $p \vee (f) = p$ $p \wedge (v) = p$ $p \wedge (f) = (f)$
LEYES COMNUTATIVAS	$p \wedge q = q \wedge p \quad p \vee q = q \vee p$ Ejemplo: p : La señora Mercedes Pérez es bonita q : El señor Castillo es inteligente Se puede ver que las proposiciones compuestas $p \wedge q = q \wedge p$ son equivalentes.
LEYES ASOCIATIVAS	$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r) \quad p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$
LEYES DISTRIBUTIVAS	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ Ejemplo: Considera las tres proposiciones: p : Susana hará su tarea. q : Susana lavará su automóvil. r : Susana leerá un libro. La primera ley distributiva dice que:

	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ Estas dos proposiciones quedaran de la siguiente manera en lenguaje corriente: $p \vee (q \wedge r)$: Susana hará su tarea o, lavará su automóvil y leerá un libro. $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$: Susana hará su tarea o lavará su automóvil y Susana hará su tarea o leerá un libro.
LEY DE DOBLE NEGACIÓN	$\neg(\neg p) = p$
LEY DEL TERCER EXCLUIDO	$p \vee \neg p = (v)$
LEY DE CONTRADICCIÓN	$\neg p \wedge p = (f)$
LEYES DE DEMORGAN. (http://www.youtube.com/watch?v=EJaSm0Y7HCA)	$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ Ejemplo: Niegue las declaraciones compuestas: El primer hijo es una niña y el segundo hijo es un niño. Esta noche estudiaré o esta noche iré a jugar fútbol.

	SOLUCIÓN Sean: p : El primer hijo es una niña q : El segundo hijo es un niño. $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ El primer hijo no es una niña o el segundo hijo no es un niño. Esta noche no estudiaré y no iré a jugar fútbol.
LEYES DE ABSORCIÓN	$p \vee (p \wedge q) = p \quad p \wedge (p \vee q) = p$

2.2.3 EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

Usando tablas de verdad demuestre las leyes anteriores.



Lógica matemática.01 [Enlace]

5. Implicación o condicional.

- Forma gramatical: *Si entonces*
- Signo lógico: $\rightarrow$ *o* $\Rightarrow$: Se lee entonces o implica

Repaso de lógica 4 - El condicional: [Enlace]

TABLAS DE VERDAD, REVISADAS, versión compacta: Enlace

Ejemplo1:

Si ganas el año, **entonces** te regalo una bicicleta.

Ejemplo2:

Si Juan nació en Palmira, **entonces** es vallecaucano.

Nota: La proposición escrita después de la palabra **si** se denomina **antecedente** o **hipótesis** y la proposición escrita después de la palabra **entonces** se denomina **conclusión**, **consecuente** o **tesis**.

$$\underset{\textit{Hipótesis o Antecedente}}{p} \Rightarrow \underset{\textit{Conclusión, consecuente o tesis}}{q}$$

TABLA DE VERDAD DE UN CONDICIONAL:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V

V	F	F
F	V	V
F	F	V

Valor de verdad del condicional: El condicional $p \rightarrow q$ es **falso** sólo cuando el **antecedente es verdadero** y **el consecuente es falso**, en los demás casos es verdadera.

Según **(Uribe, 1990)** Para justificar lo anterior observe las siguientes posibilidades:

a. Si una **hipótesis verdadera** conduce a una **conclusión verdadera** es porque el **razonamiento ha sido correcto**, por lo tanto el **condicional es verdadero**.
b. Si una **hipótesis verdadera** conduce a una **conclusión falsa**, es porque **el razonamiento ha sido incorrecto,** por lo tanto el **condicional es falso**.
c. Partiendo de una **hipótesis falsa** y **razonando correctamente** se puede obtener **una conclusión verdadera**. En este caso el **condicional es verdadero**.

Ejemplo:

$$\left.\begin{matrix} 2 = 3 \\ 3 = 2 \end{matrix}\right\} \textit{Hipótesis} \quad \textit{falsa}$$

Sumando miembro a miembro, se obtiene la igualdad:

$$5 = 5\}$$ Conclusión verdadera.

Luego es verdad que de hipótesis falsas se pueden obtener conclusiones verdaderas.

d. Partiendo de una **hipótesis falsa** y razonando **correctamente**, se puede obtener **una conclusión falsa**, en este caso **el condicional es verdadero.**

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 3 = 5 \\ 4 = 9 \end{array}\right\}$$ Hipótesis falsa.

Sumando miembro a miembro se obtiene:

$$7 = 14\}$$ Conclusión falsa

Luego **es verdad** que de una hipótesis falsa **se** obtenga una conclusión verdadera.

RECÍPROCA DE UN CONDICIONAL

Si se tiene, el condicional $\boldsymbol{p \rightarrow q}$ su recíproca se simboliza por $\boldsymbol{q \rightarrow p}$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
V	V	V	V
V→	F→	F	V

F←	←V	V	F
F	F	V	V

Contra recíproca. Si se tiene el condicional $\boldsymbol{p \rightarrow q}$ su contrarrecíproca se simboliza por $\boldsymbol{\neg q \rightarrow \neg p}$.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{\sim q}$	$\boldsymbol{\sim p}$	$\boldsymbol{p \rightarrow q}$	$\boldsymbol{q \rightarrow p}$	$\boldsymbol{\sim q \rightarrow \sim p}$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F
F	V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Se puede ver que el condicional $\boldsymbol{p \rightarrow q}$ y su contrarrecíproco $\boldsymbol{\sim q \rightarrow \sim p}$ son equivalentes, es decir:

$$\boldsymbol{p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p}$$

$\Leftrightarrow$: ***se lee Equivalente a …***

2.2.4 EJERCICIO DE APRENDIZAJE

Halle **la recíproca**, la **contra recíproca** y el **valor de verdad** de cada condicional de:

Si **9 es impar**, entonces **9 es divisible entre 2**.

Dónde:

- $\boldsymbol{p}: \mathbf{9}\ \boldsymbol{es\ impar}$
- $\boldsymbol{q}: \mathbf{9}\ \boldsymbol{esdivisible\ p\acute{o}r}\ \mathbf{2}$

Como $\boldsymbol{p}$ es verdadero y $\boldsymbol{q}$ es falsa, entonces el condicional $\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{q}$ es falso.

- **Recíproca:** $\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{p}$ Si **9 es divisible entre 2**, entonces **9 es impar**, como $\boldsymbol{q}$ es falsa y $\boldsymbol{p}$ es verdadero, entonces **la recíproca** es verdadera.

- **Contra recíproca:** $\sim \boldsymbol{q} \to \sim \boldsymbol{p}$ Si **9 no es divisible entre 2**, entonces **9 no es número impar**. **No** $\boldsymbol{q}$ es verdadera, **no** $\boldsymbol{p}$ es falsa, $\sim \boldsymbol{q} \to \sim \boldsymbol{p}$ es falsa.

INVERSA

$$\neg p \to \neg q$$

Actividad: Realice **la tabla de verdad** para este caso y compruebe que:

$$p \to q = \neg q \to \neg p \wedge \qquad q \to p = \neg p \to \neg q$$

6. DOBLE IMPLICACIÓN O BICONDICIONAL.

1Lógica Proposicional: Intro de Creación de Tabla | MrNievesPR [Enlace]

- Forma gramatical: *Si y solo sí*
- Signo lógico: $\leftrightarrow$ ***o*** $\Leftrightarrow$ Se lee **si y solo sí**

Ejemplos:

- Un número es impar **si y solo si** es múltiplo de 2
- $x^2 = 4$ **Si y solo si** $x = 2 \vee x = -2$

Nota: Todo **bicondicional** puede descomponerse en **dos condicionales.**

Para ello analicemos el siguiente ejemplo:

Un número es impar si y solo si es múltiplo de 2

Que se puede escribir como:

Si **x es un número par** entonces es **múltiplo de 2** y **si x es múltiplo de 2** entonces **es un número par**, que equivale a:

$(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{p})$ Doble Condicional

Es decir:

$$\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q} \equiv (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{p})$$

Valor de verdad del Bicondicional: Bicondicional $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$ es verdadero cuando $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ tienen igual valor de verdad**,** es decir, cuando ambos son verdaderos o ambos son falsos.

TABLA DE VERDAD DEL BICONDICIONAL

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{q}$

V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Nota: Cuando se realiza una tabla de verdad para un sistema de proposiciones se obtiene como resultado una de las siguientes respuestas:

TAUTOLOGÍAS	Es un conjunto de proposiciones que **siempre es verdadera** sin importar el valor de verdad de las proposiciones que la componen.
CONTRADICCIONES	Es un conjunto de proposiciones que **siempre es falsa** sin importar el valor de verdad de las proposiciones que la componen.
INDETERMINACIONES O SINTÉTICOS	Es un conjunto de proposiciones que **algunas veces es falsa** y **algunas veces es verdadera.**

LEYES DE LA LÓGICA QUE INVOLUCRAN LOS CONECTIVOS $\rightarrow \wedge \Leftrightarrow$

7. OTRA FORMA DEL CONDICIONAL

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

8. LEY DEL MODUS PONEN

La proposición:

$$\left[p \wedge (p \rightarrow q)\right] \rightarrow q$$

Es una tautología, es decir siempre es verdadera.

9. LEY DEL SILOGISMO

La proposición:

$$\left[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)\right] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Es una tautología.

- Aplicaciones de las leyes de la lógica

2.2.5 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Pruebe que $\neg(p \rightarrow q) = p \wedge \neg q$ Uribe (1990)

Procedimiento

Paso 1:

$\neg(p \rightarrow q) = \neg(\neg p \vee q)$… Definición ALTERNATIVA DEL CONDICIONAL.

Paso 2:

$\neg(\neg p \vee q) = \neg(\neg p) \wedge \neg q = p \wedge \neg q$…

Ley de Demorgan y Ley de la doble negación

Paso 3:

Queda **demostrado** que:

$$\neg(p \to q) = p \wedge \neg q$$

2. Pruebe que la proposición $(p \wedge q) \to p$ Es una **tautología.** Uribe (1990)

Procedimiento

Paso 1:

$$(p \wedge q) \to p = \neg(p \wedge q) \vee p$$ …

Definición **alternativa del condicional**.

Paso 2:

$$\neg(p \wedge q) \vee p = (\neg p \vee \neg q) \vee p$$ …Ley de Demorgan

Paso 3:

$$\left(\neg p \vee \neg q\right) \vee p = \left(\neg p \vee p\right) \vee \neg q$$ ...

Ley asociativa de la ∨

Paso 4

$$\left(\neg p \vee p\right) \vee \neg q = \left(v\right) \vee \neg q$$ ...

Ley del tercer excluido.

Paso 5:

$$\left(v\right) \vee \neg q = \left(v\right)$$ ...

Ley idéntica de la de la ∨

Conclusión: Como la proposición $\neg\left(p \rightarrow q\right) = p \wedge \neg q$ es **verdadera**, entonces es una **tautología**.

3. Pruebe que la proposición $\left[\left(p \rightarrow q\right) \wedge \left(\neg q\right)\right] \rightarrow \left(\neg p\right)$ es una **tautología**. Uribe (1990)

Procedimiento

Paso 1:

$$\left[\left(p \rightarrow q\right) \wedge \left(\neg q\right)\right] \rightarrow \left(\neg p\right) = \neg\left[\left(p \rightarrow q\right) \wedge \left(\neg q\right)\right] \vee \left(\neg p\right)$$ ...

definición **alternativa de** $\longrightarrow$

Paso 2:

$$\neg[(p \to q) \wedge (\neg q)] \vee (\neg p) = [\neg(p \to q) \vee \neg(\neg q)] \vee (\neg p)\ldots$$

Ley de Demorgan

Paso 3:

$$[\neg(p \to q) \vee \neg(\neg q)] \vee (\neg p) = [\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q)] \vee \neg p$$

Definición **alternativa de** $\longrightarrow$

Paso 4:

$$[\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q)] \vee \neg p = [(\neg(\neg p) \wedge \neg q) \vee \neg(\neg q)] \vee \neg p\ldots.$$

Ley de Demorgan.

Paso 5:

$$[(\neg(\neg p) \wedge \neg q) \vee \neg(\neg q)] \vee \neg p = [(p \wedge \neg q) \vee q] \vee \neg p\ldots.$$

Ley doble negación.

Paso 6:

$$[(p \wedge \neg q) \vee q] \vee \neg p = [(p \vee q) \wedge (q \vee \neg q)] \vee \neg p \ldots$$

Ley distributiva

Paso 7:

$$[(p \vee q) \wedge (q \vee \neg q)] \vee \neg p = [(p \vee q) \wedge (v)] \vee \neg p \ldots$$

Ley tercer excluido.

Paso 8:

$$[(p \vee q) \wedge (v)] \vee \neg p = (p \vee q) \vee \neg p$$

Ley idéntica de la $\wedge$

Paso 9:

$$(p \vee q) \vee \neg p = (p \vee \neg p) \vee q \ldots$$

Ley asociativa de $\vee$

Paso 10:

$(v) \vee q$ ... Ley del tercer excluido.

Paso 11:

$(v) \vee q = (v)$.....Ley idéntica de la ∧

2.2.6 EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Determine el valor de verdad de: La solución de la inecuación $x^2 - 16 \geq 0$ es $x \in [-4, 4]$ y La recta que pasa por los puntos $(2, 2) \wedge (7, 7)$ tiene como ecuación $y = x$

2. Ejemplos: Construya la tabla de verdad para:
   a. $(p \vee \neg q) \wedge p$
   b. $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
   c. $(p \vee q) \underline{\vee} (\neg p)$
   d. Demuestre que $\neg(p \wedge q)$ es equivalente a $\neg p \vee \neg q$
   e. Demuestre que $\neg p \wedge \neg q$ es lógicamente equivalente a $\neg(p \vee q)$

3. Demuestre que $\neg p \vee q \equiv p \Rightarrow q$

4. Compruebe que la proposición $[p \wedge (p \rightarrow q)] \wedge \neg q$ es una contradicción

5. Pruebe que la proposición: $\neg[\neg(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)]$ es una contradicción. Uribe (1990), el proceso está realizado, justifique cada uno de los pasos dados en su procedimiento de demostración, tenga como modelo los ejercicios de aprendizaje realizados en el tema.

Procedimiento

$\neg[\neg(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)] = \neg[\neg(\neg p \wedge q)] \wedge \neg(\neg p \vee q)$ Ley de Demorgan

$\neg[\neg(\neg p \wedge q)] \wedge \neg(\neg p \vee q) = (\neg p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \vee q)$ Doble negación.

$(\neg p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \vee q) = (\neg p \wedge q) \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q)$ Ley de Demorgan

$(\neg p \wedge q) \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) = (\neg p \wedge q) \wedge (p \wedge \neg q)$ Doble negación

$(\neg p \wedge q) \wedge (p \wedge \neg q) = (\neg p \wedge p) \wedge (q \wedge \neg q)$ Asociativa de la ∧

$(\neg p \wedge p) \wedge (q \wedge \neg q) = (f) \wedge (f) = (f)$ Ley de contradicción.

Luego $\neg[\neg(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)]$ es una contradicción.

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

A continuación, encontrará un resumen que le será de gran utilidad en su proceso de aprendizaje de la Lógica Matemática

LOGICA MATEMATICA

En las matemáticas para demostrar teoremas e inferir resultados matemáticos que puedan ser aplicados en investigaciones. En la computación para revisar programas. En general la lógica se aplica en la tarea diaria, ya que cualquier trabajo que se realiza tiene un procedimiento lógico, por el ejemplo; para ir de compras al supermercado un ama de casa tiene que realizar cierto procedimiento lógico que permita realizar dicha tarea. Si una persona desea pintar una pared, este trabajo tiene un procedimiento lógico, ya que no puede pintar si antes no prepara la pintura, o no debe pintar la parte baja de la pared si antes no pintó la parte alta porque se mancharía lo que ya tiene pintado, también dependiendo si es zurdo o derecho, él puede pintar de izquierda a derecha o de derecha a izquierda según el caso, todo esto es la aplicación de la lógica.

LÓGICA PROPOSICIONAL

Clases de proposiciones

Hay dos clases de proposiciones: Dadas dos proposiciones ***p y q:***

PROPOSICIÓN	CARACTERÍSTICA	EJEMPLO
Proposiciones Simples	También denominadas atómicas. Son aquellas proposiciones que no se pueden dividir.	El cielo es azul. (Verdadero)
Proposiciones Compuestas	También denominadas moleculares. Son aquellas que están formadas por dos o más proposiciones simples unidas por los operadores lógicos.	- Fui al banco, pero el banco estaba cerrado. - Los lectores de este libro son jóvenes o universitarios.

		- Si el miércoles próximo me saco la lotería entonces te regalaré un auto.

CONECTIVOS LÓGICOS

Definición: Son elementos que sirven de enlace entre las proposiciones, para formar otra, denominada proposición molecular.

Conectivos lógicos más empleados son:

CONECTIVO Y REGLA	CARACTERÍSTICA	EJEMPLO
NEGACIÓN Regla: La negación de una proposición verdadera es falsa. La negación de una proposición falsa es verdadera.	Es un elemento lógico que actúa independientemente de la proposición. Se denota: $\sim \boldsymbol{p}$ ***se lee no p*** Es un elemento lógico que actúa independientemente de la proposición.	*Sea* $\boldsymbol{p}$: ***Lina ve televisión*** Su negación sería: $\sim\boldsymbol{p}$: ***Lina no ve televisión***
CONJUNCIÓN REGLA.- Es verdadera la proposición conjuntiva únicamente cuando las dos proposiciones son verdaderas (p y q), en cualquier otro caso es falsa.	Es la unión de dos o más proposiciones mediante el conectivo lógico: $\wedge$ se lee: “y”, “pero”, “también”, “sin embargo”, “además”, $\boldsymbol{p}$ ***y*** $\boldsymbol{q}$	Ejemplo: $\boldsymbol{p}$: La casa está sucia. $\boldsymbol{q}$: La empleada la limpia mañana $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$: La casa esta sucia y la empleada la limpia mañana

	Entre otros.	
DISYUNCIÓN REGLA. - Una proposición disyuntiva es verdadera cuando por lo menos uno de sus componentes es verdadero. Es falsa sólo cuando todos sus componentes son falsos $\boldsymbol{p\ O\ q}$	Une proposiciones mediante el conectivo lógico $\vee$: $\boldsymbol{O}$ se lee: $\boldsymbol{p\ O\ q}$	$\boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{Nelson\ est\acute{a}\ caminando}$ $\boldsymbol{q}$: $\boldsymbol{Lina\ juega\ ajedrez}$ $\boldsymbol{p}\ \vee \boldsymbol{q}$: $\boldsymbol{N}elson\ est\acute{a}$ $caminando\ \boldsymbol{o}\ Lina\ juega\ ajedrez$
Disyunción Exclusiva REGLA. - Es verdadera la proposición cuando la primera proposición es verdadera y la segunda es falsa o cuando la primera proposición es falsa y la segunda verdadera.	Es la unión de dos o más proposiciones mediante el conectivo lógico $\vee$: $\boldsymbol{O}$ Se lee $\boldsymbol{O\ p\ O\ q}$, pero no ambos.	Escribe dos ejemplos que ilustren este conectivo.
CONDICIONAL **REGLA.** Una proposición condicional es falsa cuando la primera proposición es verdadera y la segunda es falsa. Es verdadera en cualquiera de las otras formas.	Viene a ser la combinación de dos proposiciones mediante el conectivo: “si… entonces”, representado por: $\rightarrow$ Se lee: $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$ $si\ \boldsymbol{p\ entonces\ q}$	$\boldsymbol{p}$: Si me gano la lotería $\boldsymbol{q}$: Compro un carro $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$: Si me gano la lotería entonces Compro un carro.
BICONDICIONAL **REGLA.** Una proposición bicondicional es verdadera cuando, o sus dos componentes son verdaderos	Es la unión de dos proposiciones mediante el conectivo: “sí y sólo si”,	$\boldsymbol{p}$: Simón Bolívar vive. $\boldsymbol{q}$: Montalvo está muerto. $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$: Simón Bolívar vive $s\acute{\imath}\ y\ solo\ si$ Montalvo está muerto.

o sus dos componentes son falsos. Esto es, es verdadera cuando las proposiciones tienen el mismo valor de verdad (o son verdaderos o son falsos)	Representado por: $\leftrightarrow$ Se lee: $\boldsymbol{p \leftrightarrow q}$ $\boldsymbol{p}$ *sí y solo si* $\boldsymbol{q}$	

En Resumen, los conectivos lógicos se pueden determinar de la siguiente forma

OPERACIÓN LÓGICA	SÍMBOLO DEL CONECTOR LÓGICO	REPRESENTACIÓN	LECTURA
Negación	$\sim$	$\boldsymbol{\sim p}$	***no p***
Conjunción	$\wedge$	$\boldsymbol{p \wedge q}$	***p y q***
Disyunción	V	$\boldsymbol{p}$V$\boldsymbol{q}$	***p o q***
Disyunción Exclusiva	V	V$\boldsymbol{p}$V$\boldsymbol{q}$	***o p o q***
Condicional (Implicación)	$\rightarrow$	$\boldsymbol{p \rightarrow q}$	***p entonces q***
Bicondicional	$\leftrightarrow$	$\boldsymbol{p \leftrightarrow q}$	***p sí y solo si q***

Valores de verdad para cada uno de los Operadores Lógicos:

Las proposiciones tienen valores contrarios.

NEGACIÓN	
p	$\sim p$
V	F
F	V

CONJUNCIÓN		
p	q	$p \wedge q$
$*V$	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Es Verdadera** cuando las proposiciones son Verdaderas, en los demás casos es Falsa.

DISYUNCIÓN		
p	q	$p \vee q$
V	V	V

$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$
$**\ \boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$

Es Falsa** cuando las proposiciones son Falsas, en los demás casos es Verdadera.

DISYUNCIÓN EXCLUSIVA		
$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\vee \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$
$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$
$***\ \boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$
$***\ \boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$

Es ***Verdadera cuando las proposiciones tienen valores contrarios, cuando tienen el mismo valor es Falsa.

CONDICIONAL		
$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$
$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$

**** $\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$

Es ****Falsa cuando la primera proposición es verdadera y la segunda es Falsa, en los demás casos es verdadera.

BICONDICIONAL		
$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \leftrightarrow q}$
***** $\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	V
$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$	F
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	F
***** $\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	V

Es *****Verdadera cuando las proposiciones tienen el mismo valor, cuando tienen el diferente valor es Falsa.

TABLAS DE VERDAD

Estas tablas pueden construirse haciendo una interpretación de los signos lógicos: La interpretación corresponde al sentido que estas operaciones tienen dentro del razonamiento.

Puede establecerse una correspondencia entre los resultados de estas tablas y la deducción lógico matemática. En consecuencia, las tablas de verdad constituyen un *método de decisión* para chequear si una proposición es o no un teorema.

Al solucionar una tabla de valores se encontrará como solución una de las siguientes alternativas:

$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{v}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{v}^{**}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{v}$ ***	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{v}^{**}$	$\boldsymbol{v}$

Ejemplo:

$\sim$ (**no**)

$\wedge$ (**y**)

$\vee$(**o**)

$\rightarrow$ (**entonces**)

$\leftrightarrow$ (**sí y sólo si**

	$\boldsymbol{q}$	$\sim$	$\sim(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$	$\leftrightarrow$	$\sim \boldsymbol{p}$	$\vee$	$\sim \boldsymbol{q}$
$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$

1. $\textit{Dado el siguiente polinomio, determinar su valor de verdad}$:

v	f	v	f	v	f	v	v
f	v	v	f	v	v	v	f
f	f	v	f	v	v	v	v
	q	$\sim$	$\sim(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	$\sim p$	$\vee$	$\sim q$
v	v	f	v	v	f	f	f
v	f	v	f	v	f	v	v
f	v	v	f	v	v	v	f
f	f	v^{**}	f	v ***	v	v^{**}	v

ALTERNATIVA DE SOLUCIÓN	CARACTERÍSTICA
Tautología	Cuando los valores de verdad del operador principal son todos verdaderos
Contradicción (Falacia)	Cuando los valores de verdad del operador principal son todos Falsos.
Sintética o Indeterminada o Contingencia	Cuando los valores de verdad del operador principal hay por lo menos una verdad o una falsedad.

$\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

Nota: para asignar los valores se debe tomar el número 2^n, donde n ***es el número de proposiciones***

En este caso hay dos proposiciones: Se tomarían $2^n = 2^2 = 4$ ***valores***

Se toman ** y se obtiene como resultado ***

Actividad: Tiempo para su realización: No debe exceder a los 20 minutos

$Dados\ los\ siguientes\ polinomios, determinar\ su\ valor\ de\ verdad,$ Construya las respectivas tablas:

$\boldsymbol{a.} \sim (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \leftrightarrow\ \sim \boldsymbol{p}\ \ \wedge\!\sim \boldsymbol{q}$

a. $\sim \boldsymbol{p} \rightarrow (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \leftrightarrow\ (\sim \boldsymbol{p}\ \ \wedge\!\sim \boldsymbol{q}) \rightarrow \boldsymbol{q}$

b. $[\boldsymbol{p} \leftrightarrow (\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r})] \leftrightarrow\ [(\sim \boldsymbol{p}\ \ \rightarrow\!\sim \boldsymbol{q}) \rightarrow \boldsymbol{r}]$

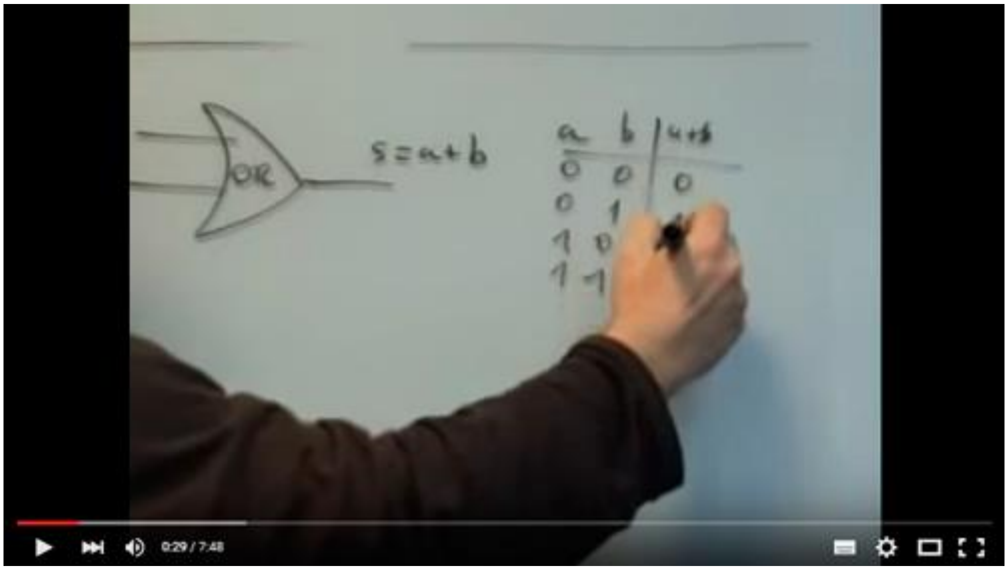
Recuerde:

Si tiene2 proposiciones: $\boldsymbol{2^n = 2^2 = 4\ valores}$

Si tiene 3 proposiciones: $\boldsymbol{2^n = 2^3 = 8\ valores}$

2.3 TEMA 2 CIRCUITOS Y PUERTAS

Curso de Electrónica Digital: Compuertas Lógicas Enlace



Tecnologia Puertas Logicas Tablas Centro de Formación en Estepona Usero [Enlace]

COMPUERTAS LÓGICAS [Enlace]

(http://www.profesormolina.com.ar/electronica/componentes/int/comp_log.htm)

Un circuito lógico es un tipo de **circuito eléctrico** de uso común en **computadores** y otros **aparatos electrónicos** (como calculadoras, equipos de sonido, televisores, relojes digitales y consolas de disco compacto).

Los **circuitos lógicos** más sencillos, llamados **puertas** o **compuertas**, tienen las siguientes propiedades:

1. La **corriente fluye al circuito** por **uno** o **dos conectores** llamados **líneas de entrada** y **desde el circuito** a través de **un conector** llamado **línea de salida**.

2. La corriente en **las líneas de entrada** o **salida** puede tener cualquiera de los **dos niveles de tensión posibles**. El **nivel más alto** se denota por **1** y el **nivel inferior** por **0**. (Algunas veces al **nivel 1 se le denomina cerrado** o **verdadero**; al **nivel 0** se le puede llamar **abierto** o **falso**).

3. El nivel de tensión de la **línea de salida** depende del (o los) **nivel** (o **niveles**) de **tensión** de la (s) **línea** (**s**) de **entrada**, de acuerdo a **reglas de lógica** (que ya se vieron en la sección pasada).

Los tres tipos básicos de puertas son:

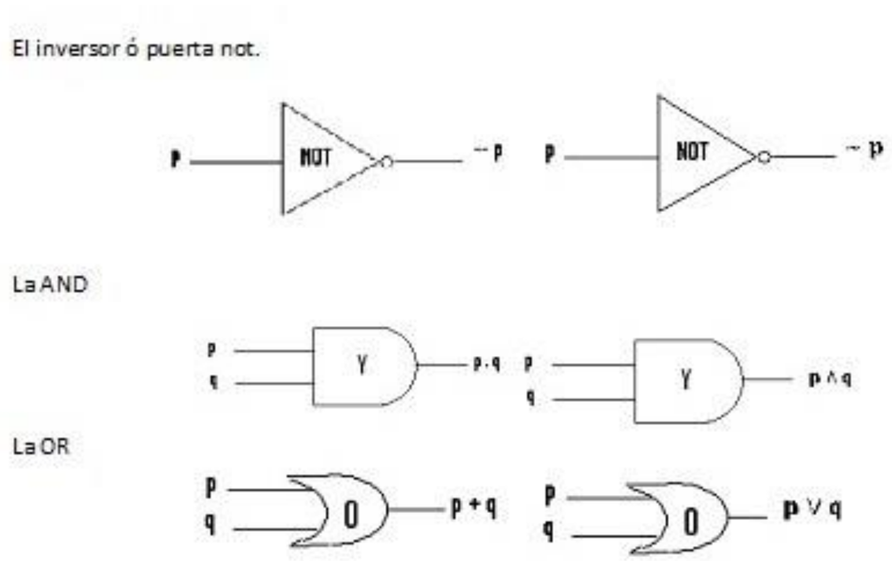


Figura 21. Tipos principales de puertas

(Autor Elkin Ceballos Gómez)

En la figura anterior se muestran los **símbolos estándar** para los inversores, las puertas **AND** (∧) y las **puertas OR** (∨).

En cada caso, las líneas de entrada aparecen a la izquierda del diagrama y las salidas aparecen a la derecha.

El **nombre de cada línea** denota el nivel de tensión o valor de verdad de esa línea; los símbolos $\sim \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}.\boldsymbol{q}$ (ó $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$) $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$(ó $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$) se definen por las tablas de salida siguientes:

(http://www.youtube.com/watch?v=55PY-sWrQiA&feature=related)

Puerta NOT	
$\boldsymbol{p}$	$\sim \boldsymbol{p}$
1	**0**
0	**1**

Se puede ver que: $\sim \boldsymbol{p} = \boldsymbol{1} - \boldsymbol{p}$

Puerta AND		
$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**0**
0	**0**	**0**

Puerta OR		
p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

2.3.1 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Diseñe un circuito lógico cuyas entradas sean p, q, r, s y cuya salida sea

$$(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$$

Procedimiento

Se necesita conectar una puerta AND y una puerta OR con una puerta AND. La figura 22 indica cómo.

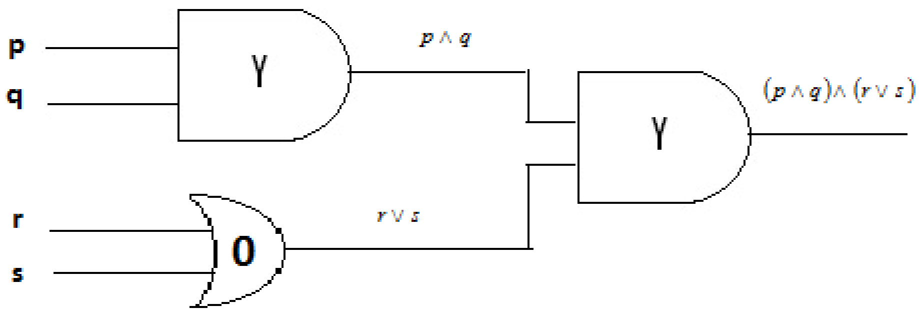


Figura 22. Diseño de un circuito lógico.

(Autor Elkin Ceballos Gómez)

2. Diseñe un circuito que tenga como entrada p, q, r, s y como salida $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$

Procedimiento

Se necesita dos puertas AND y una puerta OR. El circuito se observa en la figura 23

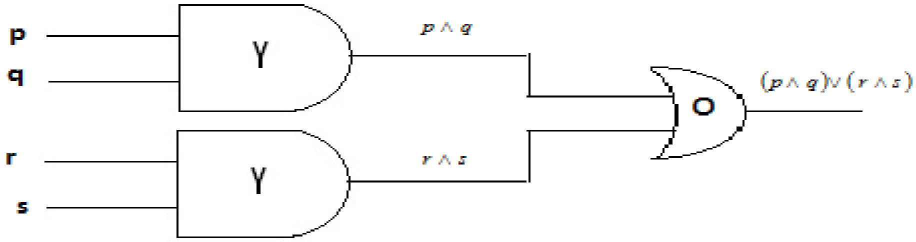


Figura 23. Diseño de un circuito lógico.

(Autor Elkin Ceballos Gómez)

- Leyes de los circuitos

Los circuitos lógicos cumplen las leyes de lógica, es decir, en circuitos lógicos también se cumple:

LEYES	DESCRIPCIÓN
LEYES IDEMPOTENTES	$\boldsymbol{p \wedge p = p}$ $\quad$ $\boldsymbol{p \vee p = p}$
LEYES ASOCIATIVAS	$\boldsymbol{(p \wedge q)r = p(q \wedge r)}$ $\boldsymbol{(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)}$
LEYES CONMUTATIVAS	$\boldsymbol{p \wedge q = q \wedge p}$ $\boldsymbol{p \vee q = q \vee p}$
LEYES DISTRIBUTIVAS	$\boldsymbol{p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)}$ $\boldsymbol{p(q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)}$
LEYES DE DEMORGAN	$\boldsymbol{\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q}$ $\boldsymbol{\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q}$
LEYES DE ABSORCIÓN	$\boldsymbol{p \vee (p \wedge q) = p}$ $\boldsymbol{p \wedge (p \vee q) = p}$

Nota: Estos fundamentos se emplean con frecuencia para simplificar el diseño de circuitos. Si dos circuitos realizan la misma función y uno tiene menos puertas y conectores que el otro, se prefiere el más sencillo, ya que es más barata su fabricación o compra y porque es menos probable que falle por sobre calentamiento o por esfuerzo físico. Con mucha frecuencia también será más eficiente en relación al consumo de energía y velocidad de operación.

(http://www.youtube.com/watch?v=GCn8Benwy3g)

PUERTAS: NAND, NOR Y XOR

La figura 24 muestra los **símbolos estándar** para las NAND, NOR y XOR y sus **salidas**. Los nombres son las abreviaturas de **NOT – AND**, **NOT – OR** Y **EXCLUSIVE – OR**, respectivamente.

SÍMBOLOS ESTÁNDAR (ABREVIATURAS)	NOMBRES
NAND	**NOT – AND**
NOR	**NOT – OR**
XOR	**EXCLUSIVE – OR**

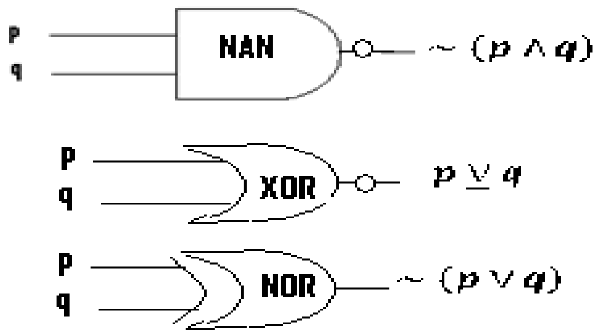


Figura 24. Más tipos de puertas.
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

2.3.2 EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Realizar las tablas de verdad de cada una de estas compuertas.
2. Construya un circuito lógico cuyas entradas sean p, q, r y la salida sea $(\neg p \wedge q) \wedge \neg r$. Elabore la tabla de verdad para dicho circuito, indique la(s) condición(es) que se debe cumplir para que la salida sea verdadera.
3. Elabore un circuito lógico con entradas p, q, r, la salida sea $p \vee \neg(q \wedge r)$ Elabore la tabla de verdad para dicho circuito, indique la(s) condición(es) que se debe cumplir para que la salida sea verdadera.
4. Construya un circuito lógico cuyas entradas sean p, q, r y la salida sea $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge r)$. Elabore la tabla de verdad para dicho circuito, indique la(s) condición(es) que se debe cumplir para que la salida sea verdadera.
5. Construya un circuito lógico cuyas entradas sean p, q, r y la salida sea $(\neg p \vee r) \wedge \neg q$. Elabore la tabla de verdad para dicho circuito, indique la(s) condición(es) que se debe cumplir para que la salida sea verdadera.

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tener presente: Los circuitos lógicos más sencillos, llamados puertas o compuertas, tienen las siguientes propiedades:

1. La corriente fluye al circuito por uno o dos conectores llamados líneas de entrada y desde el circuito a través de un conector llamado línea de salida.

2. La corriente en las líneas de entrada o salida puede tener cualquiera de los dos niveles de tensión posibles. El nivel más alto se denota por 1 y el nivel inferior por 0. (Algunas veces al nivel 1 se le denomina cerrado o verdadero; al nivel 0 se le puede llamar abierto o falso).

3. El nivel de tensión de la línea de salida depende del (o los) nivel (o niveles) de tensión de la (s) línea (s) de entrada, de acuerdo a reglas de lógica (que ya se vieron en la sección pasada).

2.4 TEMA 3 TEORÍA DE CONJUNTOS

- **Definiciones y conceptos**.

Conjunto: Conjunto es una agrupación, asociación, reunión, colección **bien definida de elementos**, objetos o cosas. (http://www.youtube.com/watch?v=qo2FnKUuiZk).

También se puede decir que es **una agrupación de elementos** que cumplen **una misma condición** o tienen **una misma característica.**

Ejemplos:

1. Los países suramericanos.
2. Los números pares menores o iguales que 100.
3. Los números primos.
4. Los números de uno hasta el diez.
5. Las letras de abecedario.
6. El número de estudiante de un salón.

- **Notación y representación de conjuntos**

Los conjuntos se denotan con **letras mayúsculas** (tomando las primeras letras del alfabeto).

- ✓ **Los objetos** que conforman el conjunto se llaman **elementos** y pueden ser: Letras minúsculas,
- ✓ Números, o
- ✓ cosas que se puedan identificar.

Los **elementos** se **encierran entre llaves** y **separados por comas** o se colocan dentro de **líneas curvas cerradas**, llamadas **diagramas.**

Ejemplo: Para representar el conjunto A cuyos elementos son las vocales, lo podemos hacer de la siguiente manera.

1. Mediante llaves: $A = \{a, \quad e, \quad i, \quad o, \quad u\}$
2. Mediante el **diagrama de Venn****:

Nota: Diagrama de Venn

Los **diagramas de Venn** son esquemas usados en la teoría de conjuntos, tema de interés en matemática, lógica de clases y razonamiento diagramático. Estos diagramas muestran **colecciones** (*conjuntos*) de **cosas** (*elementos*) por medio de líneas cerradas. La línea cerrada exterior abarca a todos los elementos bajo consideración, el conjunto universal *U*, también llamado conjunto de Referencia.

Tomado de: **Diagrama de Venn - Wikipedia, la enciclopedia libre**

es.wikipedia.org/wiki/**Diagrama_de_Ven**

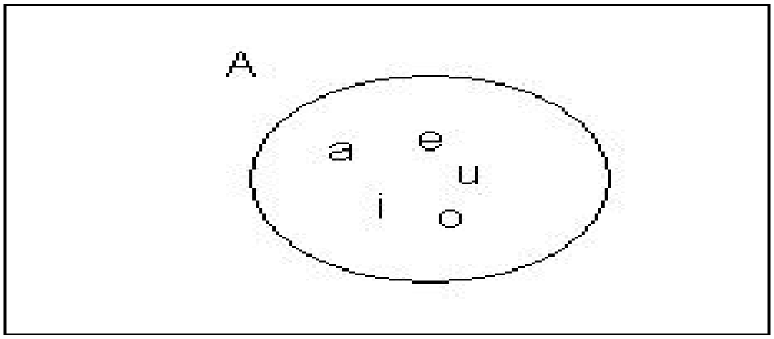


Figura 18. Representación de un conjunto utilizando diagrama de Venn.

(Autor Elkin Ceballos Gómez)

Ejemplo: Conjunto C compuesto por los números de 1 al 5

1. Mediante llaves: $C = \{1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5\}$
2. Mediante el diagrama de Venn:

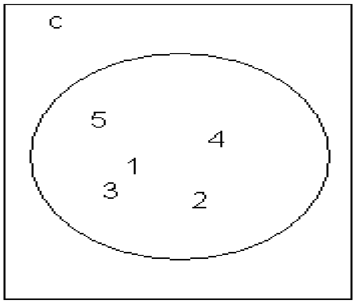


Figura 19. Representación de un conjunto mediante diagrama de Venn.

(Autor Elkin Ceballos Gómez)

Nota: El **conjunto Universal** o de **Referencia** (más utilizado este término) se **simboliza con la letra U** y se representa por **un rectángulo**, y dentro del rectángulo se colocan los demás conjuntos.

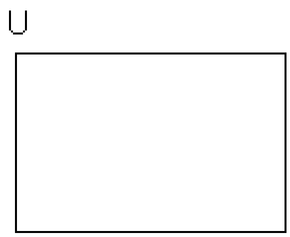


Figura 20. Representación del conjunto universal

(Autor Elkin Ceballos Gómez)

RELACIÓN DE PERTENENCIA EN CONJUNTOS

(http://www.youtube.com/watch?v=hdszX2gkLFs)

Dado el conjunto: $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{3},\ \mathbf{5},\ \mathbf{6}, \mathbf{7},\ \mathbf{8}\}$

- Se dice que un elemento pertenece a este conjunto utilizando el símbolo:

$$\in \textit{ que se lee: pertenece a} \ldots$$

Ejemplo:

Para indicar que $\mathbf{1}$ es un elemento de $\boldsymbol{A}$, se simboliza por: $\mathbf{1} \in \boldsymbol{A}$

Para indicar que $\mathbf{7}$ es un elemento de $\boldsymbol{A}$, se simboliza por: $\mathbf{7} \in \boldsymbol{A}$

- Se dice que un elemento no pertenece a este conjunto utilizando el símbolo:

$$\notin \textbf{\textit{ que se lee: no pertenece a}} \ldots$$

Ejemplo:

Para indicar que $\mathbf{2}$ no es un elemento de $\boldsymbol{A}$, se simboliza por: $\mathbf{2} \notin \boldsymbol{A}$

Para indicar que $\boldsymbol{a}$ no es un elemento de $\boldsymbol{A}$, se simboliza por: $\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{A}$

NOTA: La relación de pertenencia o de no pertenencia se presenta solamente de elemento a conjunto, es decir, **un elemento pertenece** o **no pertenece** a un conjunto, pero **un conjunto no pertenece a un elemento.**

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS:

- Relación de contenencia o subconjunto.

(http://www.slideshare.net/Yady29/conjuntos-y-subconjuntos-presentation)

"DEFINICIÓN

- Un conjunto A es SUBCONJUNTO de B sí y solo sí todos los elementos **de** A son elementos de B
- Se simboliza escribiendo: $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ " (Uribe Cálad, 1990, p.267).

Se lee: – "*A está contenido en B*", o

– "*A es subconjunto de en B*"

Ejemplo:

Dados los conjuntos:

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A = \{4, \quad 3, \quad 5, \quad 1\}$$

$$B = \{1, \quad 2, \quad 7, \quad 8\}$$

$$C = \{7, \quad 8, \quad 9\}$$

$$E = \{1, \quad 2, \quad 3, \quad 12\}$$

Se concluye que:

Los conjuntos: A, B, C, F son parte del **conjunto** D, es decir, son subconjuntos del conjunto D, ya que todos los elementos de cada uno de estos conjuntos esta o pertenecen al conjunto D.

El **conjunto** E no es subconjuntos de D, ya que algunos de sus elementos no están en el conjunto D.

Se tiene entonces que:

$\boldsymbol{A \subset D,\ B \subset D,\ C \subset D,\ E \not\subset D}$

Verdadero o falso - problema 105 [Enlace]

Nota: Esta notación también se puede dar de la siguiente forma:

Si se simboliza escribiendo: $\boldsymbol{B \supset A}$

Se lee: – "$\boldsymbol{B\ contiene\ a\ \ A}$", o

– "$\boldsymbol{B\ es\ superconjunto\ de\ \ A}$"

SUPERCONJUNTO: Porque lo contiene **totalmente**.

En el ejemplo que se tiene, se leería:

$D \supset A$: D es un superconjunto de A o D contiene a A.

$D \supset B$: D es un superconjunto de B o D contiene a A

$D \supset C$: D es un superconjunto de C o D contiene a A

$D \not\supset E$: D no es un superconjunto de E o D no contiene a A

RELACIÓN DE IGUALDAD.

(http://www.slideshare.net/fernanda26/conjuntos-y-subconjuntos-bueno-presentation)

Un conjunto A es igual a un conjunto B, si se cumple que:

A tiene los mismos elementos de B y B tiene los mismos elementos de A, esto se indica como: $A = B$.

Para indicar que A es igual a B se debe cumplir:

$$A \subset B \wedge B \subset A$$

- **Determinación de un conjunto:** Los conjuntos se pueden determinar de dos formas:

a. Por comprensión: Cuando se indica la propiedad o característica común que cumplen todos y cada uno de los elementos del conjunto.
b. Por extensión: Cuando se nombran uno a uno los elementos del conjunto. (http://www.youtube.com/watch?v=heq4UFFzN0o)

2.4.1 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Exprese el conjunto D formado por los **días de la semana**:

2.

a. Por comprensión:

Solución:

$$D = \{x / x \quad es\ un\ día\ de\ la\ semana\}$$

Se lee: ***x, tal que x es un día de la semana***

b. Por extensión:

Solución:

$$D = \{lunes, martes, miercoles, jueves, viernes, sábado, domingo\}$$

2. Exprese el conjunto F formado por las vocales:

Solución:

c. Por comprensión: $F = \{x / x \quad es\ una\ vocal\}$

Se lee: ***x, tal que x es una vocal***

Por extensión: $F = \{a, e, i, o, u\}$

CLASES DE CONJUNTOS:

CONJUNTO UNIVERSAL O DE REFERENCIA

SÍMBOLO: U

Conjunto que se toma como base para formar otros conjuntos.

CONJUNTO UNITARIO: Es aquel que está formado por un solo elemento

Ejemplo: $A = \{3\}$

CONJUNTO VACIO:

SÍMBOLO: Φ

Es aquel conjunto que no tiene elementos.

$\Phi = \{\ \}$

Ejemplos:

$\Phi = \{\ \}$. Es un conjunto vacío.

NOTA 1: El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

NOTA 2:

- ✓ $A = \{0\}$. Es un conjunto unitario (Porqué tiene el cero como elemento).
- ✓ $A = \{\Phi\}$ Es un conjunto unitario (Porqué tiene el conjunto vacío como elemento).

CONJUNTO FINITO:

Es aquel conjunto en el cual **sus elementos** se pueden contar y su **cuenta termina**.

Ejemplo:

$C = \{2, 3, 6\}$. Es un **conjunto finito** porque solo tiene **tres elementos**.

CONJUNTO INFINITO:

Es aquel que tiene un número indeterminado de elementos, es decir, **no es posible contarlos todos**.

Ejemplo:

$D = \{x / x \text{ es un número par}\}$. Es imposible saber cuántos números pares hay.

CAMPO NUMÉRICO:

NOTA: Para los siguientes temas deben tener bien claros los siguientes conjuntos de números:

Números naturales:**N** (http://www.youtube.com/watch?v=OqSy17-8Wsg&feature=fvwrel

Números enteros: **Z** (http://www.youtube.com/watch?v=Vtd8_XmJPE4)

Números racionales: **Q** (http://www.youtube.com/watch?v=TAZcU5JUd0s)

Números irracionales: **Q'** (http://www.youtube.com/watch?v=WBsdEIfeVfw)

Numeraos Reales**: IR.** (http://www.youtube.com/watch?v=fLpDD_mlk4o&feature=fvst)

CONJUNTOS NUMÉRICOS: los conjuntos numéricos son agrupaciones de números que guardan una serie de propiedades estructurales. Sus características estructurales más importantes son:

1. Dotados de operadores, admiten **estructura Algebraica** estable.

2. Están dotados de **propiedades topológicas** (o pueden llegar a estarlo).

3. Admiten **relación de orden**.

4. Admiten **relación de equivalencia**.

5. Son representables mediante **diagramas** de **Hasse**, **diagramas de Euler** y diagramas de **Venn**, pudiéndose tomar una combinación de ambos en un diagrama de **Euler-Venn** con la forma característica de cuadrilátero y además pudiéndose representar internamente **un diagrama de Hasse** (es una recta).

6. Todos los conjuntos numéricos se construyen desde una **estructura más simple** hasta otra **más compleja.**

7. El orden de construcción de los conjuntos numéricos (de menor a mayor complejidad) es el siguiente:

- Números naturales
  - ✓ El 1
  - ✓ Números primos
  - ✓ Números compuestos
- Números enteros
  - ✓ El cero
  - ✓ Números enteros negativos
  - ✓ Números enteros positivos
- Números racionales

Para el conjunto de los números racionales puede escribirse:

$$\mathbb{Q} \subset \operatorname{Frac}(\mathbb{Z}) = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0 \right\}$$

$$\mathbb{Q} = \operatorname{IrrFrac}(\mathbb{Z}) = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z};\ q > 0\ \wedge\ \operatorname{mcd}(|p|, q) = 1, \right\}$$

Tomado de: es.wikipedia.org/wiki/Número_racional

Números irracionales

Los números irracionales más conocidos son identificados mediante símbolos especiales; los tres principales son los siguientes:

1. π (Número "pi" 3,14159 ...): razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.
2. e (Número "e" 2,7182 ...): $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
3. Φ (Número "áureo" 1,6180 ...): $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Los irracionales y **los trascendentes** no se pueden expresar mediante una fracción de dos enteros con **denominador no nulo**; tienen infinitas cifras decimales aperiódicas, tales como: $\sqrt{5}, \pi$, el número real log2, cuya trascendencia fue mentada por Euler en el siglo XVIII .

Tomado de: es.wikipedia.org/wiki/Número_irracional

Números reales

Un número real puede ser un *número racional* o un *número irracional*. Los números racionales son aquellos que pueden expresarse como el cociente de dos números enteros, tal como 3/4, -21/3, 5, 0, 1/2, mientras que los irracionales son todos los demás. Los números racionales también pueden describirse como aquellos cuya representación decimal es eventualmente periódica, mientras que los irracionales tienen una expansión decimal aperiódica:

Ejemplos

1/4 = 0,25**0**0**0**0... Es un número racional puesto que es periódico a partir del tercer número decimal.

5/7 = 0,**714285**714285**714285**7.... Es racional y tiene un período de longitud 6 (repite 714285).

$\frac{\sqrt[3]{7}+1}{2} = 1{,}456465591386194\ldots$ es irracional y su expansión decimal es aperiódica.

Otra forma de clasificar los números reales es en *algebraicos* y *trascendentes*. Un número es algebraico si existe un polinomio de coeficientes racionales que lo tiene por raíz y es trascendente en caso contrario. Obviamente, todos los números racionales son algebraicos: si $\frac{p}{q}$ es un número racional, con *p* entero y *q* natural, entonces es raíz del de la ecuación *qx*=*p*. Sin embargo, no todos los números algebraicos son racionales.

Ejemplos

El número $\frac{\sqrt[3]{7}+1}{2}$ es algebraico puesto que es la raíz del polinomio $8x^3 - 12x^2 + 6x - 8$

Un ejemplo de número trascendente es $\ln 3 = 1{,}09861228866811\ldots$

Tomado de: es.wikipedia.org/wiki/Número_real

Número imaginario

En matemáticas, un *número imaginario* es un número complejo cuya parte real es igual a cero, por ejemplo: $5i$ es un número imaginario, así como i o $-i$ son también números imaginarios. En otras palabras, es un número de la forma:

$$z = x + yi \ : \quad x = 0$$

Un número imaginario puede describirse como el producto de un número real por la *unidad imaginaria* **i**, en donde la letra **i** denota la raíz cuadrada del numero complejo -1:

$$i = \sqrt{-1}$$

Fue en el año 1777 cuando Leonhard Euler le dio a $\sqrt{-1}$ el nombre de **i**, por **imaginario**, de **manera despectiva** dando a entender que no tenían una **existencia real**. Gottfried Leibniz, en el siglo XVII, decía que $\sqrt{-1}$ era una especie de anfibio entre el ser y la nada.

Tomado de: es.wikipedia.org/wiki/Número imaginario

Extensiones de los números reales

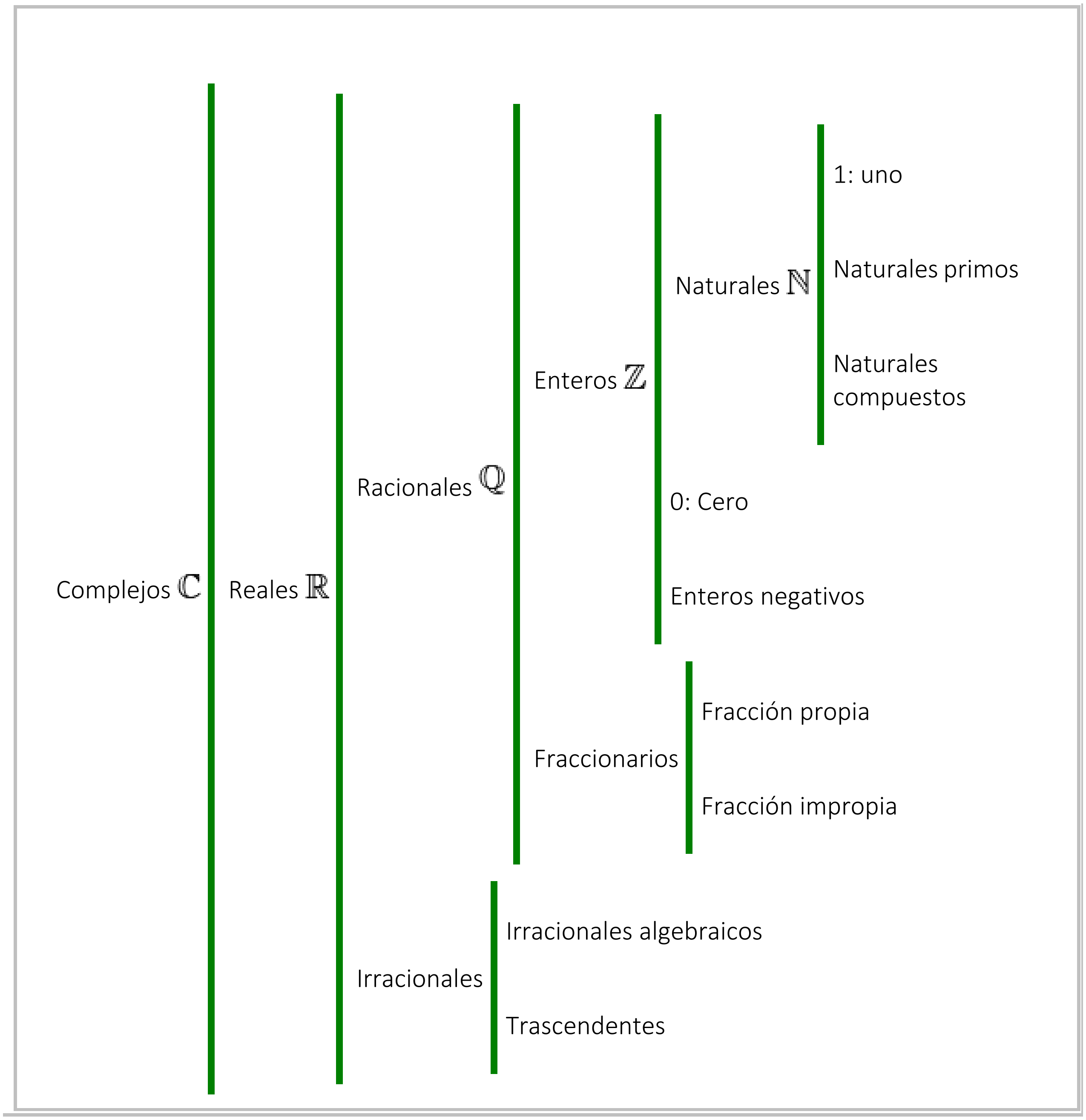
- ✓ Números complejos
- ✓ Números complejos algebraicos

8. Todos los conjuntos numéricos son a su vez, subconjuntos del

Conjunto C de los números complejos.

9. El conjunto de los conjuntos numéricos es representable a través del diagrama del Dominó o de Llaves.

Los números enteros constituyen a los naturales. Los racionales son fracciones y enteros



Tomado:es.wikipedia.org/wiki/Conjuntos_numéricos

Números naturales

Puesto que los números naturales se utilizan para contar objetos, el cero puede considerarse el número que corresponde a la ausencia de los mismos. Dependiendo del área de la matemática, el conjunto de los números naturales puede presentarse entonces de dos maneras distintas:

- ✓ Definición sin el cero:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

- ✓ Definición con el cero:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Donde la **N** de *natural* se suele escribir en "negrita de pizarra".

Históricamente, el uso del cero como numeral fue introducido en Europa en el siglo XII con la conquista musulmana de la península ibérica,[1] pero no se consideraba un número natural.

Sin embargo, con el desarrollo de la teoría de conjuntos en el siglo XIX, el cero se incluyó en las definiciones conjuntistas de los números naturales. Esta convención prevalece en dicha disciplina,[3] y otras, como la teoría de la computación.[4] En particular, el estándar DIN 5473 adopta esta definición.[4] Sin embargo, en la actualidad ambos convenios conviven.

Para distinguir ambas definiciones a veces se introducen símbolos distintos. Por ejemplo, si se incluye el cero en los naturales, al conjunto de los números naturales sin el cero se lo llama conjunto de los enteros positivos y se lo denota como $\mathbb{N}^*$. Alternativamente también se utiliza $\mathbb{N} - \{0\}$.

Por el contrario, cuando el 0 no se considera un número natural (cosa que es conveniente, por ejemplo, en divisibilidad y teoría de números), al conjunto de los naturales con el cero se lo llama conjunto de los números cardinales y se lo denota $\mathbb{N}_0$.

Tomado: es.wikipedia.org/wiki/Número_natural

NÚMEROS ENTEROS

Los **números enteros** son un conjunto de números que incluye a los números naturales distintos de cero (1, 2, 3, ...), los negativos de los números naturales (..., −3, −2, −1) y al 0. Los enteros negativos, como −1 o −3 (se leen «menos uno», «menos tres», etc.), son menores que todos los enteros positivos (1, 2,...) y que el cero. Para resaltar la diferencia entre positivos y negativos, a veces también se escribe un signo «más» delante de los positivos: +1, +5, etc. Cuando no se le escribe signo al número se asume que es positivo. El conjunto de todos los números enteros se representa por la letra $\mathbb{Z}$ = {..., −3, −2, −1, 0, +1, +2, +3,...}, que proviene del alemán *Zahlen* («números», pronunciado [ˈtsaːlən]).

Los números enteros no tienen parte decimal.

−783 y 154 son números enteros

45,23 y −34/95 no son números enteros

Al igual que los números naturales, los números enteros pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse, de forma similar a los primeros. Sin embargo, en el caso de los enteros es necesario calcular también el signo del resultado.

Los números enteros extienden la utilidad de los números naturales para contar cosas. Pueden utilizarse para contabilizar pérdidas: si en un colegio entran 80 alumnos nuevos de primer curso un cierto año, pero hay 100 alumnos de último curso que pasaron a educación secundaria, en total habrá 100 − 80 = 20 alumnos menos; pero también puede decirse que dicho número ha aumentado en 80 − 100 = −20 alumnos.

También hay ciertas magnitudes, como la temperatura o la altura toman valores por debajo del cero. La altura del Everest es 8848 metros por encima del nivel del mar, y por el contrario, la orilla del Mar Muerto está 423 metros por debajo del nivel del mar; es decir, su altura se puede expresar como −423 m.

Tomado: es.wikipedia.org/wiki/Número_entero

Números enteros

Números con signo

Signo (matemáticas).

Los números naturales 1, 2, 3,... son los números ordinarios que se utilizan para contar. Al añadirles un signo *menos* **(«−»)** delante se obtienen los números negativos:

Un **número entero negativo** es un número natural como 1, 2, 3, entre otros. precedido de un signo *menos*, **«−»**. Por ejemplo −1, −2, −3, entre otros. Se leen «menos 1», «menos 2», «menos 3»,...

Además, para distinguirlos mejor, a los números naturales se les añade un signo *más* **(«+»)** delante y se les llama números positivos.

Un **número entero positivo** es un número natural como 1, 2, 3,... precedido de un signo *más*. **«+».**

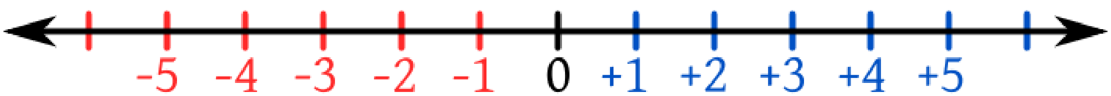
Nota: El cero **no es positivo ni negativo,** y puede escribirse con signo ***más*** o ***menos*** o **sin signo** indistintamente, ya que **sumar** o **restar cero** es igual **a no hacer nada**. Toda esta colección de números son los llamados **«enteros».**

Los **números enteros** son el conjunto de todos los números enteros con signo (**positivos y negativos**) junto con el 0. Se les representa por la letra **Z**, también escrita en «negrita de pizarra» **como $\mathbb{Z}$** :

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots\}$$

La recta numérica

Los números enteros negativos son más pequeños que todos los positivos y que el cero. Para entender como están ordenados se utiliza la recta numérica:



Tomado: es.wikipedia.org/wiki/Número_entero

El cero

El **cero** (0) es el signo numérico de valor nulo, que en notación posicional ocupa los **lugares** donde no hay una cifra significativa. Si está situado a la derecha de un número entero, **decuplica su valor** (Multiplica por **diez**). Colocado **a la izquierda**, no lo modifica.

Utilizándolo como número, se pueden realizar con él operaciones algebraicas: sumas, restas, multiplicaciones, entre otros. Pero, por ser la expresión del valor nulo (nada, nadie, ninguno...), puede dar lugar a expresiones indeterminadas o que carecen de sentido.

El cero es el elemento del **conjunto ordenado** de los **números enteros** ($\mathbb{Z}$, ≤) que sigue al −1 y precede al 1.

Nota 1: Algunos matemáticos lo consideran perteneciente al conjunto de los **naturales** ($\mathbb{N}$) ya que estos también se pueden definir como el conjunto que nos permite contar el número de elementos que contienen los demás conjuntos, y **el conjunto vacío no tiene ningún elemento**.

Nota 2: El **número cero se** puede representar como **cualquier número más su opuesto** (o, equivalentemente, menos él mismo): . $X+(-X)=0$

Números racionales

En matemáticas, se llama **número racional** a todo número que puede representarse como el cociente de dos números enteros (más precisamente, **un entero** y **un natural positivo**) es decir, una **fracción común *a/b*** con **numerador *a*** y **denominador *b*** distinto de cero.

El término «**racional**» alude a fracción o parte de un todo. El conjunto de los números racionales se denota por **Q** (o bien $\mathbb{Q}$, en negrita de pizarra) que deriva de «cociente» (***Quotient*** en varios idiomas europeos). Este conjunto de números **incluye** a los **números enteros** ($\mathbb{Z}$), y es **un subconjunto** de los **números reales** ($\mathbb{R}$).

La **escritura** decimal de **un número racional** es, o bien un número decimal finito, o bien periódico. Esto es cierto no solo para números escritos en **base 10** (sistema decimal), también lo es en **base binaria**, **hexadecima**l o cualquier otra **base entera**. Recíprocamente, todo número que admite una **expansión** finita o periódica (en cualquier **base entera**), es un **número racional**.

Un **número real** que **no es racional**, se llama número irracional; la **expansión decimal** de los **números irracionales**, a diferencia de los racionales, es infinita *no-periódica*.

En sentido estricto, **número racional** es el conjunto de **todas las fracciones equivalentes** a **una dada**; de todas ellas, se toma como ***representante canónico*** de dicho número racional a la fracción irreducible. Las fracciones equivalentes entre sí –número racional– son una clase de equivalencia, resultado de la aplicación de una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$.

Tomado: es.wikipedia.org/wiki/Número_racional

Números irracionales

No existe una notación universal para indicarlos, como $\mathbb{I}$, que es generalmente aceptada. Las razones son que el conjunto de **Números Irracionales** no constituyen ninguna estructura algebraica, como sí lo son los Naturales ($\mathbb{N}$), los Enteros ($\mathbb{Z}$), los Racionales ($\mathbb{Q}$), los Reales ($\mathbb{R}$) y los Complejos ($\mathbb{C}$), por un lado, y que la $\mathbb{I}$ es tan apropiada para designar al conjunto de Números Irracionales como al conjunto de Números Imaginarios Puros, lo cual puede crear confusión.

Fuera de ello, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, es la denotación del conjunto por definición.

Clasificación

Tras distinguir los números componentes de la recta real en tres categorías: (naturales, enteros y racionales), podría parecer que ha terminado la clasificación de los números, pero aún quedan "huecos" por rellenar en la recta de los **números reales**. Los números irracionales son los elementos de dicha recta que cubren los vacíos que dejan **los números racionales**.

Los números irracionales son los elementos de la recta real que no pueden expresarse mediante el cociente de dos enteros y se caracterizan por poseer infinitas cifras decimales no periódicas. De este modo, puede definirse al número irracional como un decimal infinito no periódico.

En general, toda **expresión en números decimales** es solo **una aproximación en números racionales** al número irracional referido, por ejemplo, el número racional **1,4142135** es solo una aproximación **a 7 cifras decimales** del número irracional raíz cuadrada de 2, el cual **posee infinitas cifras decimales no periódicas**.

Entonces, se dice con toda propiedad que el número raíz cuadrada de dos es *aproximadamente* igual a 1,4142135 en **7 decimales**, o bien es ***igual*** **a 1,4142135**… donde los tres puntos hacen referencia a **los infinitos decimales** que hacen falta y que jamás se terminarían de escribir.

Debido a ello, los números irracionales más conocidos son identificados mediante símbolos especiales; los tres principales son los siguientes:

1. π (**Número "pi" 3,14159**…): razón entre la **longitud** de una circunferencia y su **diámetro**:

$$\pi = \frac{Longitud\ de\ la\ circunferencia}{Diámetro}$$

2. e (**Número "e"** 2,7182 **…**): $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

3. Φ (Número "áureo" 1,6180 …): $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Los números irracionales se clasifican en dos tipos:

1.- Número algebraico: Son la solución de alguna ecuación algebraica y se representan por un número finito de **radicales libres** o **anidados**; si **"x"** representa ese número, al **eliminar radicales del segundo miembro** mediante operaciones inversas, queda una **ecuación algebraica** de cierto grado.

Nota: Todas **las raíces no exactas** de cualquier orden son **irracionales algebraicos**. Por ejemplo, el número áureo es una de las raíces de la ecuación algebraica $x^2 - x - 1 = 0$ por lo que es **un número irracional algebraico.**

2.- Número trascendente: **No pueden representarse** mediante **un número finito de raíces libres o anidadas**; provienen de las llamadas funciones trascendentes (trigonométricas, logarítmicas y exponenciales, entre otras). También surgen al escribir números decimales no periódicos al azar o con un patrón que **no lleva periodo definido**, respectivamente, como los dos siguientes:

$$0,193650278443757...$$

$$0,101001000100001...$$

Nota 1: Los llamados números trascendentes tienen especial relevancia ya que **no pueden ser solución de ninguna ecuación algebraica**. Los números π y e son **irracionales trascendentes**, puesto que **no pueden expresarse mediante radicales**.

Nota 2: Los **números irracionales no son numerables**, es decir, no pueden ponerse en **biyección** con el conjunto de los **números naturales**. **Por extensión**, los **números reales tampoco son contables** ya que incluyen **el conjunto de los irracionales**.

Tomado: es.wikipedia.org/wiki/Número_irracional

Números reales

En matemáticas, los números reales (designados por $\mathbb{R}$) incluyen tanto a los **números racionales** (positivos, negativos y el cero) como **a los números irracionales**; y en otro enfoque, (**trascendentes** y **algebraicos**).

Los irracionales y **los trascendentes** (1970) no se pueden expresar **mediante una fracción de dos enteros** con **denominador no nulo**; tienen infinitas cifras decimales aperiódicas, tales como: $\sqrt{5}, \pi$, el número real log2, cuya trascendencia fue mentada por Euler en el siglo XVIII .

Los **números reales** pueden ser **descritos y construidos de varias formas,** algunas simples aunque carentes del **rigor necesario** para los propósitos formales de matemáticas y otras más complejas pero **con el rigor necesario** para el trabajo matemático formal.

Durante los siglos XVI y XVII el cálculo avanzó mucho aunque carecía de una base rigurosa, puesto que en el momento **no se consideraba necesario** el **formalismo** de **la actualidad**, y se usaban expresiones como **«pequeño», «límite», «se acerca»,** sin una definición precisa. Esto llevó a una serie de paradojas y problemas lógicos que hicieron evidente la necesidad de crear una **base rigurosa** para **la matemática**, la cual consistió de **definiciones formales y rigurosas** (aunque ciertamente **técnicas**) del concepto de número real.

Tomado: es.wikipedia.org/wiki/Número_real

Número imaginario

En matemáticas, un número imaginario es **un número complejo** cuya parte **real es igual a cero**, por ejemplo: $\mathbf{5i}$ es un número imaginario, así como $\mathbf{i}$ o $-\mathbf{i}$ son también **números imaginarios**. En otras palabras, es un número de la forma:

$$\boldsymbol{z = x + yi, con\ x = 0}$$

Un número imaginario puede describirse como el producto de un número real por la *unidad imaginaria* $\boldsymbol{i}$, en donde la letra $\boldsymbol{i}$ denota la raíz cuadrada de -1:

$$\boldsymbol{i = \sqrt{-1}}$$

Nota: En ingeniería electrónica y campos relacionados, la **unidad imaginaria** es a menudo escrita como $\boldsymbol{j}$ para evitar la confusión con **la intensidad de una corriente eléctrica**, tradicionalmente denotada por **i**.

Tomado: es.wikipedia.org/wiki/Número_imaginario

Extensiones de los números reales

- ✓ Números complejos

Los **números complejos** son una extensión de los números reales y forman el mínimo cuerpo algebraicamente cerrado que los contiene. El conjunto de los números complejos se designa como $\mathbb{C}$, siendo $\mathbb{R}$ el conjunto de los reales se cumple que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Los números complejos incluyen todas las raíces de los polinomios, a diferencia de los reales. Todo **número complejo** puede representarse como la suma de un número real y un número imaginario (que es un múltiplo real de la unidad imaginaria, que se indica con la letra **i**).

Los números complejos son **la herramienta de trabajo** del **álgebra**, **análisis**, así como de ramas de **las matemáticas puras** y **aplicadas** como **variable compleja**, **ecuaciones diferenciales**, **aerodinámica** y **electromagnetismo** entre otras de gran importancia. Además los números complejos se utilizan por doquier en matemáticas, en **muchos campos de la física** (notoriamente en la mecánica cuántica) y **en ingeniería**, especialmente en **la electrónica** y **las telecomunicaciones**, por su utilidad para representar las **ondas electromagnéticas** y la **corriente eléctrica**.

En matemáticas, estos números **constituyen un cuerpo** y, en general, se consideran como **puntos del plano**: el plano complejo. Una propiedad importante que caracteriza a los números complejos es el teorema fundamental del álgebra-pero que se demuestra aún en un curso de variable compleja-, que afirma que:

> "Cualquier **ecuación algebraica** de grado $\boldsymbol{n}$ tiene exactamente $\boldsymbol{n}$ **soluciones complejas**".

NOTA: Los números Complejos contienen a los números reales y los imaginarios puros y constituyen una de **las construcciones teóricas más importantes de la inteligencia humana**. Los análogos del cálculo diferencial e integral con números complejos reciben el nombre de **variable compleja** o **análisis complejo**.

Tomado: es.wikipedia.org/wiki/Número_complejo

- ✓ Números complejos algebraicos

Un **número algebraico** es cualquier **número real** o **complejo** que es solución de una ecuación polinómica de la forma:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

Dónde:

$n > 0 (a_n \neq 0)$, es el grado del polinomio.

$a_i \in \mathbb{Z}$, **los coeficientes** del polinomio son números enteros.

Ejemplos

Todos los números racionales son **algebraicos** porque toda fracción de la forma $\boldsymbol{a}/\boldsymbol{b}$ es solución de:

$bx - a = 0, donde\ a \in \mathbb{Z}\ y\ b\epsilon\mathbb{Z}_0$.

Todos los números construibles son algebraicos.

Algunos números irracionales como: $\sqrt{2}$ y $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ también son algebraicos porque son soluciones de $x^2 - 2 = 0$ y $8x^3 - 3 = 0$, respectivamente.

Otros irracionales no son algebraicos, como π (Lindemann, 1882) y e (Hermite, 1873), son, en consecuencia, trascendentes

i es algebraico, siendo raíz de $x^2 + 1 = 0$.

Clasificación de los complejos

Si un número real o complejo **no es algebraico**, se dice que es trascendente.

Si un **número algebraico** es solución de una **ecuación polinómica de grado** n, y **no es solución de una ecuación polinómica** de grado menor $m < n$, entonces se dice que es un *número algebraico de grado* n ($n > 0$).

Nota 1: Los números racionales son **números algebraicos de primer grado**, pues para todo racional $r = \frac{p}{q}, con\ p, q \in \mathbb{Z}$, siempre se puede escribir una **ecuación polinómica** de **grado uno** con **coeficientes enteros** $qx - p = 0$ cuya solución es precisamente.

Nota 2: En cambio, **los irracionales** -aunque pueden ser **números algebraicos- nunca pueden ser números algebraicos** de **grado 1**.

Tomado: es.wikipedia.org/wiki/Número_algebraico

Operaciones entre conjuntos: (http://www.youtube.com/watch?v=4DapEUZuqyg)

- Unión de conjuntos: Se denota por ∪

Es el conjunto formado por todos los elementos de ambos conjuntos sin repetir ninguno, se determina por compresión de la siguiente forma: $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x}/\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\}$

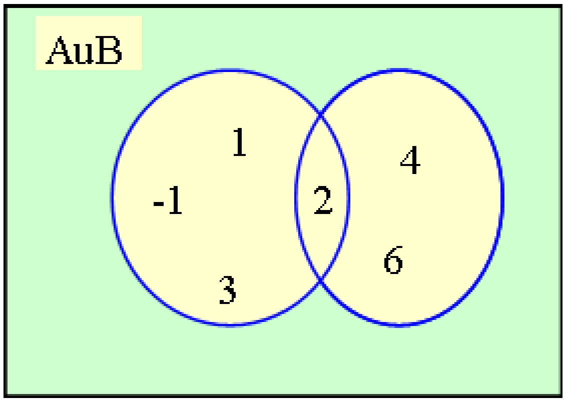
Al realizar esta operación se está conformando un **nuevo conjunto**, que se llama conjunto solución, que contiene todos los elementos o miembros de los conjuntos que se estén uniendo, sin que ninguno de sus miembros se repita en el conjunto solución.

2.4.2 EJERCICIO DE APRENDIZAJE

Dados: A = {-1, 1, 2, 3} B = {2, 4, 6} C= {4, 5, 7, 8}

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ = {-1, 1, 2, 3, 4, 6}

Gráficamente:



Observe que el resultado $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ no contiene elementos repetidos

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}$ = {-1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

- Intersección de conjuntos: Se denota por ∩

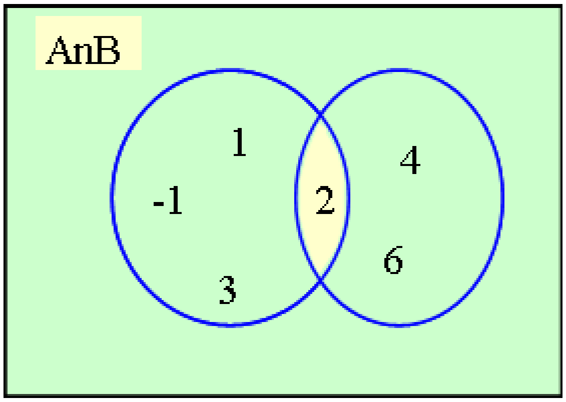
Esta operación entre conjuntos conforma un **nuevo conjunto** que contenga los elementos o miembros comunes a los conjuntos que hagan parte de esta operación, se determina por comprensión de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{A \cap B = \{x/x \in A \ \wedge x \in B\}}$$

2.4.3 EJERCICIO DE APRENDIZAJE:

a. Si se consideran los conjuntos **A, B y C** arriba mencionados, al operar; se obtiene:

$$\boldsymbol{A \cap B = \{2\}}$$



$\boldsymbol{B \cap C = \{4\}}$

b. Si se realiza la intersección entre los **tres conjuntos**, se tiene que:

$\boldsymbol{A \cap B \cap C = \{\,\}}$

Puesto que no hay ningún elemento que esté en los tres conjuntos.

c. Si se realiza la siguiente operación $\boldsymbol{(A \cup B) \cap C}$ Observe que en este ejemplo se está aplicando **la propiedad asociativa** para la operación de **unión** entre A y B y a su resultado **hacer la intersección** con C.

$$\boldsymbol{(A \cup B) \cap C = \{4\}}$$

Diferencia de conjuntos:

Cuando se analiza la diferencia entre A y B, se obtiene como respuesta **exclusivamente** los elementos del conjunto A.

Se determina por comprensión de la siguiente forma:

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$B - A = \{x/x \in B \wedge x \notin A\}$$

2.4.4 EJERCICIO DE APRENDIZAJE

Si se consideran los conjuntos A, B, C que aparecen arriba:

- ✓ $A - B = \{1, -1, 3\}$
- ✓ $B - C = \{2, 6\}$
- ✓ $B - A = \{4, 6\}$
- ✓ $C - B = \{5, 7, 8\}$

Diferencia simétrica de conjuntos:

Diferencia simetrica Enlace

(http://www.youtube.com/watch?v=Zf1lbTI5VBQ&feature=related)

De acuerdo a la definición planteada y dados los siguientes conjuntos:

U = {-1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} (Conjunto Universal o referencial)

A = {-1, 1, 2, 3,}

B = {2, 4, 6}

C = {4, 5, 7, 8}

Determine analíticamente las siguientes operaciones entre ellos:

$\boldsymbol{A \triangle B =}$

$\boldsymbol{A \triangle C =}$

$\boldsymbol{C \triangle B = \{2, 5, 6, 7, 8\}}$

$\boldsymbol{A \triangle B \triangle C =}$

$$\boldsymbol{A \triangle U =}$$

Se presenta cuando se consideran todos los elementos que sólo pertenecen los conjuntos, sin tener en cuenta lo que tienen en común. En otras palabras, en la diferencia simétrica no se tiene en cuenta ningún elemento de la intersección entre los conjuntos, los demás **sí.**

Se determina por comprensión de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{A \triangle B = \{x / x \in (A \cup B \ \wedge x \notin (A \cap B\}}$$

2.4.5 EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

Complemento de un conjunto:

Complemento de un Conjunto *Enlace*

(http://www.youtube.com/watch?v=pmsIwykFB20)

Se buscan todos los elementos que le hagan falta a un conjunto para convertirse o ser el conjunto universal o referencial.

Se determina por comprensión de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{A' = \{x / x \in U \wedge x \notin A\}}$$

También se puede definir como: $\boldsymbol{A' = U - A}$

CONJUNTO PRODUCTO:

http://www.youtube.com/watch?v=wkuDztU4FBg&feature=related)

$$\boldsymbol{A \times B = \{(a, b) / a \in A \text{ y } b \in B\}}$$

Sean A y B dos conjuntos. El conjunto producto de A y B, expresado como AXB, está formado por todas las parejas ordenadas (a, b) donde $a \in A \quad y \quad b \in B$.

Para determinar todos los elementos de un conjunto producto, se suele utilizar el diagrama de árbol.

2.4.6 EJERCICIO DE APRENDIZAJE

$$A = \{1, \quad 2, \quad 3\}$$

1. Determinar el complemento de cada uno de los conjuntos arriba determinados:

Solución:

A´= {4, 5, 6, 7}

B´= {-1, 1, 3, 5, 7, 8}

C´= {-1, 1, 2, 3, 6,}

(A ∪ B)´= {5, 7, 8}

Tomado de: Operaciones entre conjuntos - Artigoo

artigoo.com › Cómo se hace y Educación › Educación

2. Sean los siguientes conjuntos:

$U = \{x / x \ es \ un \ número \ entero \ del \ uno \ hasta \ el \ veint \, e\}$

$A = \{2, 5, 7, 11, 15, 16\ 19, 20\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Entonces:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 19, 20\}$

$A \cap B = \{2, 5, 7\}$

$A - B = \{11, 15, 16, 19, 20\}$

$B - A = \{1, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$

$A \Delta B = B \Delta A = \{1, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 19, 20\}$

$A' = \{1, 3, 4\ 6, 8, 9, 10, 12, 14, 17, 18\}$

$B' = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

$B = \{2, \quad 4\}$

$C = \{3, \quad 4, \quad 5\}$

Determine:

1. AXB

SOLUCIÓN

$AXB = \{(1,2), (1,4)\ (2,2), (2,4)\ (3,2), (3,4)\}$

2. BXC

SOLUCIÓN

$BXC = \{(2,3), (2,4), (2,5), (4,3), (4,4), (4,5)\}$

2.4.7 EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Elabore un diagrama que resuma los aspectos fundamentales de la teoría de conjuntos.
2. Para los siguientes ejercicios tome como conjunto universal el conjunto de los números reales. Describa los siguientes conjuntos por extensión:
   a. $A = \{x / 4x - 9 = 7\}$
   b. $B = \{x / 3x^2 + 20x - 7 = 0\}$
   c. $C = \{x / x^2 = 16\}$
   d. $D = \{x / x^2 - x - 12 = 0\}$
   e. $E = \{x / x \text{ es un número entero del cero al } 5\}$
3. Para los conjuntos anteriores halle:
   a. $A \cup C$
   b. $D - E$
   c. $E - A$
   d. $E - (A \cup B)$
   e. $E \cap D$
4. Sean los conjuntos:

   $U = \{x / x \text{ es un número entero del uno al } 10\}$

   $A = \{1, 2, 4, 6, 9, 10\}$

   $B = \{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$

   Halle:

   a. $A \cup B$
   b. $A \cap B$
   c. $A - B$
   d. $B - A$
   e. $A \Delta B$
   f. A'
   g. B'
   h. $(A \cup B)'$
   i. $(A \cap B'$
   j. AXB

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tener en cuenta:

π **(Número "pi" 3,14159...)**: razón entre la **longitud** de una circunferencia y su **diámetro**:

$$\pi = \frac{Longitud\ de\ la\ circunferencia}{Diámetro}$$

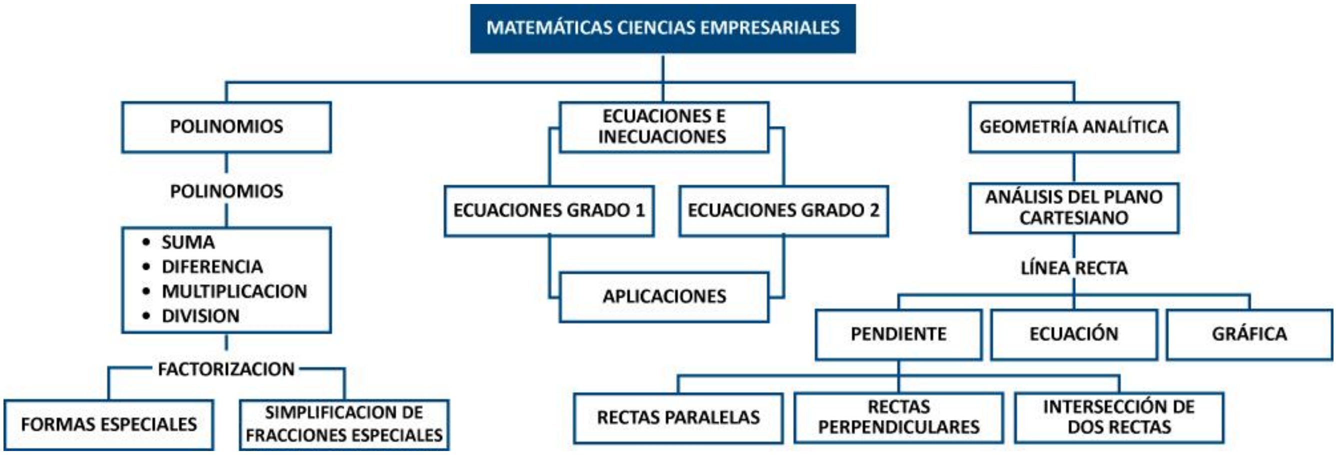
e **(Número "e"** 2,7182 ...**)**: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Φ (Número "áureo" 1,6180 ...): $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Traer a la memotria: Los números racionales son **números algebraicos de primer grado**, pues para todo racional $r = \frac{p}{q}, con\ p, q \in \mathbb{Z}$, siempre se puede escribir una **ecuación polinómica** de **grado uno** con **coeficientes enteros** $qx - p = 0$ cuya solución es precisamente r.

3 UNIDAD 2 MATEMÁTICAS OPERATTIVAS

Mapa de Conceptos



3.1.1 OBJETIVO GENERAL

Realizar adecuadamente operaciones con números fraccionarios, las leyes de potenciación y radicación, operaciones con polinomios, la factorización y las fracciones algebraicas, facilitando así, trabajos posteriores en el área de las matemáticas.

3.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar los diferentes grupos en los cuales pueden incluirse los números, identificando expresiones matemáticas que conducen a operaciones no válidas en el campo de los números reales.
- Operar con potencias enteras y fraccionarias, revisando los exponentes enteros positivos, el exponente cero, los exponentes enteros negativos, los exponentes racionales, los procedimientos para la racionalización de numeradores y denominadores.
- Definir los conceptos algebraicos.
- Realizar las diferentes operaciones con polinomios y expresiones algebraicas.
- Establecer las reglas básicas de la factorización, utilizándolas para la descomposición factorial de expresiones.
- Simplificar expresiones algebraicas racionales.

3.2 TEMA 1 CONCEPTOS PREVIOS

A continuación del mapa conceptual se dieron las definiciones de cada uno de los conjuntos numéricos, ahora presentaremos un breve resumen de los mismos:

Campos numéricos

- **Números dígitos:** conjunto compuesto por los números con los cuales se forman los demás números. Por lo tanto los números dígitos están formados por los números 0, 1, 2, 3, 4, 5,6, 7, 8 y 9. A estos números se les asigna la letra D.
- **Números naturales:** conjunto formado por todos los enteros positivos. A estos números se les asigna la letra N. Son los números que utilizamos para contar.

Tomado de (http://www.youtube.com/watch?v=QqSy17-8Wsg&feature=fvwrel)

$$N = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,....\}$$

- **Números enteros**: conjunto formado por los enteros positivos, enteros negativos y el cero. A estos números se les asigna la letra Z. (http://www.youtube.com/watch?v=Vtd8_XmJPE4)

$$Z = \{...,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,...\}$$

Nota: $N = Z^{+}$

- **Números racionales:** un número racional es todo número que se pueda escribir como un cociente entre dos números enteros, con el denominador diferente de cero. (http://www.youtube.com/watch?v=TAZcU5JUd0s).

  Los matemáticos le asignaron la letra Q. De tal manera que la definición matemática de los números racionales es:

$Q = \frac{p}{q}$ Donde $p \ y \ q$ son números enteros y q no puede ser cero ($q \neq 0$).

A los números racionales pertenecen:

- ✓ Todos los enteros.
- ✓ Todos los fraccionarios.
- ✓ **Los decimales finitos.**

- Como 1.324 que tiene tres decimales.
- Como 0.25 que tiene dos decimales.
- Como 0.3 que tiene un decimal.

✓ **Los decimales infinitos periódicos.** Son aquellos que tienen infinitos decimales pero que todos o algunos se repiten con cierta secuencialmente.

Ejemplos:

$5.3434343434...$ Se repite el tres y el cuatro.

$3{,}5322222222...$ Se repite el dos.

$0{,}023512512512...$ Se repite el cinco, el uno y el dos.

✓ **Los números mixtos:** un número mixto es un número que tiene una parte entera y una parte que es un fraccionario. Es un número de la forma $a\frac{b}{c}$, donde $a, b\ y\ c$ son números enteros $c \neq 0$.

Ejemplo: $3\frac{2}{7},\ 4\frac{5}{8},\ 8\frac{1}{2}$

- **Conversión de número mixto en fraccionario.**

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tener en cuenta: para convertir un número mixto en fraccionario, el numerador del fraccionario que se obtendrá de forma:

- Multiplicando la parte entera por el denominador del número mixto y sumándole al resultado el numerador,
- El denominador del fraccionario es el mismo denominador del mixto.

Es decir, se debe aplicar la siguiente igualdad.

$$a\,\frac{b}{c} = \frac{a * c + b}{c}$$

3.2.1 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Convierta los siguientes números mixtos en números fraccionarios:

$\boldsymbol{a}.\ \mathbf{7\frac{2}{3}} = = \mathbf{\frac{7*3+2}{3}} = \mathbf{\frac{21+2}{3}} = \mathbf{\frac{23}{3}}$

$\boldsymbol{b}.\ 2\frac{1}{5} = \frac{2*5+1}{5} = \frac{10+1}{5} = \frac{11}{5}$

$\boldsymbol{c}.\ \mathbf{4\frac{6}{11}} = \mathbf{\frac{4*11+6}{11}} = \mathbf{\frac{44+6}{11}} = \mathbf{\frac{50}{11}}$

$\boldsymbol{d}.\ \mathbf{-3\frac{4}{7}} = \mathbf{-\frac{3*7+4}{7}} = \mathbf{-\frac{21+4}{7}} = \mathbf{-\frac{25}{7}}$

- **Conversión de fraccionario en número mixto**

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tenga presente: un número mixto es el resultado de efectuar la división indicada en una fracción impropia.

- El numerador sea mayor que el denominador, es decir, que **el fraccionario sea impropio, esto es** : $numerador > denominador$.
- Para convertir un fraccionario a mixto, se divide el numerador del fraccionario entre su denominador, el cociente de esta división pasará a ser la parte entera del mixto, y
- El residuo pasará a ser su numerador y el denominador será el mismo del fraccionario.

Si $\frac{a}{b}$ $es\ una\ fracción\ impropia\ (a > b),\ al\ expresarla\ en\ forma\ de\ número\ mixto$:

$$\frac{a}{b} = (Cociente\ de\ \frac{a}{b})(\frac{RESIDUO}{DIVISOR})$$

EJEMPLO: convertir $\frac{17}{3}$ en número mixto:

DIVIDENDO (D): 17	**DIVISOR (d): 3**
RESIDUO (R): 2	**COCIENTE (C): 5**

El número mixto quedaría: $\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$

Traer a la memoria: el cociente es el resultado de dividir el dividendo por el divisor $(\frac{Dividendo}{Divisor})$.

Si al efectuar la división el residuo es cero (división exacta), quiere decir que tenemos como resultado un número entero, esto es: si nos piden convertir la fracción impropia $\frac{20}{5}$ en número mixto, tendríamos:

$$\frac{20(Dividendo)}{5(Divisor)} = 4(cociente)\frac{0(Residuo)}{5(divisor)} = 4 \in Z$$

3.2.2 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Convierta las siguientes fracciones impropias en números mixtos:

a. $\frac{\mathbf{21}}{\mathbf{4}}$

Procedimiento

1. $21 \div 4 = 5$ $(Parte\ entera\ del\ número\ mixto)$.
2. El residuo de la división es 1.
3. 4 sería el denominador de la parte fraccionaria del número mixto.

Por lo tanto:

$$\frac{\mathbf{21}}{\mathbf{4}} = \mathbf{5}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

a. Convertir $\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{5}}$ en número mixto.

Procedimiento

1. $13 \div 5 = 2$ $(Parte\ entera\ del\ número\ mixto)$.

2. El residuo de la división es 3.

3. 5 sería el denominador de la parte fraccionaria del número mixto.

Entonces:

$$\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{5}} = \mathbf{2}\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$$

b. Convertir $\frac{5}{6}$ en número mixto.

Procedimiento:

No es posible, ya que **el numerador** (a) es menor que **el denominador** (b): $(\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b})$

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tener en cuenta: Se puede comprobar la validez de este resultado convirtiendo el mixto a fraccionario.

$$5\frac{1}{4} = \frac{5*4+1}{4} = \frac{20+1}{4} = \frac{21}{4}$$

- Números irracionales

Un número irracional es todo número que no se puede escribir como un cociente entre dos números enteros (http://www.youtube.com/watch?v=WBsdEIfeVfw). Podemos ver que un número no puede ser racional e irracional al mismo tiempo, o sea si es racional no puede ser irracional, o lo contrario, si es irracional no puede ser racional. A los irracionales los matemáticos le asignaron la letra H o la Q'.

A los irracionales pertenecen las raíces reales no exactas y los decimales infinitos no periódicos. Son ejemplo de estos números:

$\sqrt{5}$, $\sqrt[5]{28}$, $2{,}5732596451 \ldots$

- **Números decimales infinitos no periódicos:** en estos números sus cifras decimales no se repiten con ningún tipo de periodicidad. Por ejemplo 4,25674136..., 0,0254785... . Estos números resultan de las raíces no exactas.

- **Números reales.** Están formados por la suma de los racionales más los irracionales. Son los números con los cuales vamos trabajar en este curso. Los matemáticos le asignaron la letra IR

  (http://www.youtube.com/watch?v=fLpDD_mIk4o&feature=fvst). Todos los campos numéricos anteriores pertenecen a los números reales.

- **Números imaginarios:** a estos números pertenece la raíz par de todo número negativo. Se distinguen por la letra I. Por ejemplo $\sqrt{-4}$. Si dices que $\sqrt{-4} = 2$ cometes un error grave ya que no hay un número que multiplicado por sí mismo dos veces (y más general un número par de veces) de cómo resultado un número negativo.

Para solucionar este problema y poder operar con este tipo de números nacieron los números imaginarios en los cuales se definen las raíces pares de los números negativos:

$$\sqrt[n]{-1} = i, \text{con}, n \in a\ los\ números\ pares$$

Entonces: $\sqrt{-1} = i$, la raíz **par** de cualquier **número negativo** se puede escribir en términos de **i**. Por ejemplo:

a. $\sqrt{-4} = \sqrt{-1 * 4} = \sqrt{4} * \sqrt{-1} = 2 * i = 2i$

b. $\sqrt{-25} = \sqrt{-1 * 25} = \sqrt{25} * \sqrt{-1} = 5 * i = 5i$

Tenga presente: $\sqrt{a * b} = \sqrt{a} * \sqrt{b}$

Sean $a, b \in R_e$, i $\in imaginarios$

Entonces:

$$C = a \pm bi$$

- **Números complejos:** son aquellos que están conformados por la suma(resta) de una parte real y una parte imaginaria, se simbolizan por C y se expresan de la siguiente manera:
- **Ley de los signos**
  Para la multiplicación y para la División
  (http://www.youtube.com/watch?v=qHdUDPqyrxI)

La ley de signos para la multiplicación dice que el producto de signos iguales tiene como resultado signo positivo y el producto de signos contrarios tiene como resultado signo negativo.

La ley de signos para la división se aplica igual que la ley de signos para la multiplicación.

Lo podemos ver en el siguiente cuadro.

LEY DE SIGNOS					
MULTIPLICACIÓN			DIVISIÓN	
$(+) * (+)$	+		$\frac{(+)}{(+)}$	+
$(-) * (-)$	+		$\frac{(-)}{(-)}$	+
$(+) * (-)$	-		$\frac{(+)}{(-)}$	-
$(-) * (+)$	-		$\frac{(-)}{(+)}$	-

3.2.3 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

- $(-3) * (2) = -6$
- $(-5)(-4) = 20$
- $\frac{(-3)}{(6)} = -\frac{1}{2}$
- $\frac{(10)}{(-5)} = -\frac{2}{1} = -2$
- $\frac{(-12)}{(-8)} = \frac{12}{8} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
- $\frac{28}{36} = \frac{7}{9}$

- PROPIEDAD DE LOS SIGNOS PARA LA SUMA.

La propiedad de los signos para la suma dice que:

- ✓ **Signos iguales** se suman y se conserva el signo que tienen los números, y
- ✓ **Signos contrarios** se restan y se conserva el signo del número mayor.

3.2.4 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

- $\mathbf{3+5=+8}$
- $\mathbf{-5-4=-9}$
- $\mathbf{-2+1=-1}$
- $\mathbf{-70+40=-30}$
- $\boldsymbol{b-6b=-5b}$
- $\mathbf{5-2=+3}$
- $\mathbf{3-7=-4}$
- $\mathbf{-7+10=+3}$
- $\boldsymbol{36a+50a=+86a}$
- $\boldsymbol{301z-520z=-219z}$

- Valor absoluto

El valor absoluto de un número $\boldsymbol{a}$, se expresa como $|\boldsymbol{a}|$, representa la distancia del número a al número cero, es por esta razón que el valor absoluto de cualquier número es positivo. (http://www.youtube.com/watch?v=4mSl7-FezoA&feature=relmfu)

3.2.5 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

- $|3|=3$
- $|-2|=2$

- $\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}$
- $7+|-2|=7+2=9$
- $|3-(5*2)+1|=|3-10+1|=|-6|=6$

Algunas propiedades de los números reales	
LEY CONMUTATIVA	$\begin{cases} a+b=b+a & Suma \\ ab=ba & \Pr oducto \end{cases}$
LEY DISTRIBUTIVA	$a(b+c)=ab+ac$
LEY ASOCIATIVA	$\begin{cases} a+(b+c)=(a+b)+c & Suma \\ a(bc)=(ab)c & Multiplica\ ción \end{cases}$
LEY DEL MÓDULO	✓ **PARA LA SUMA**: el número real **0** es llamado el módulo de la suma, ya que para todo número real **a** se cumple que: $a+0=0+a=a$ ✓ **PARA LA MULTIPLICACIÓN:** el número real **1** es llamado el módulo de la multiplicación, ya que para todo número real **a**, se cumple: $a*1=1*a=a$
LEY DEL INVERSO	**a. PARA LA SUMA:** para todo número real **a** existe un único número real (llamado inverso aditivo de a o negativo de a), representado por **−a**, de tal manera que: $a+(-a)=-a+a=0$ **b. PARA LA MULTIPLICACIÓN: p**ara todo número real **a** $\neq 0$ existe un único número real (llamado recíproco o

	inverso multiplicativo de a, representado por $\frac{1}{a}$, de tal manera que: $a*\frac{1}{a}=\frac{1}{a}*a=1$

3.2.6 EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

De acuerdo a cada una de las definiciones de las propiedades anteriores, en el siguiente cuadro coloca la propiedad que cumple cada uno de los ejemplos enunciados:

EJEMPLO	PROPIEDAD
$2(3)(4)=(2*3)4=2(3*4)=24$	
$7*1=1*7=7$	
El inverso aditivo de 3, es -3, ya que 3 – 3 = 0.	
$3+7=7+3=10$ $(5)(3)=(3)(5)=15$	
$3+5+10=3+(5+10)=(3+5)+10=18$	
$3+0=0+3=3$	
El recíproco de −7/5 es −5/7, ya que (-7/5)*(-5/7) = 1.	

El recíproco de 7 es 1/7, ya que 7*1/7 = 1.	
El inverso aditivo de −5, es 5, ya que -5 + 5 = 0.	
$3(4+2)=3*4+3*2=18$	
El recíproco de 1/3 es 3, ya que 1/3*3 = 1.	

DIVISIÓN DE CERO Y DIVISIÓN ENTRE CERO	
0/b con b$\neq$ **0** y b$\in$ ***Re***	= 0
0/0	ES INDETERMINADO (**No se acepta** como **respuesta** pero hay diferentes formas de eliminarlo que se verán más adelante).
a/o con a$\neq$ **0** y a$\in$ ***Re***	ES INDEFINIDO o lo que es lo mismo ∞ (infinito), siendo $+\infty$cuando **a** es **positivo y** $-\infty$ cuando **a** es **negativo**.

- Signos de agrupación

Los signos de agrupación se emplean para indicar que las cantidades encerradas en ellos deben considerarse como **un todo,** o sea, como una sola cantidad; por esto siempre se deben efectuar primero las operaciones indicadas dentro de los signos de agrupación. Por ejemplo, en la siguiente operación.

$3(5-2)$ Primero se debe efectuar la operación dentro del paréntesis (cinco menos dos) y luego efectuar la multiplicación por tres.

$3(5-2)=3(3)=3*3=9$

Los signos de agrupación son de cuatro clases:

1. **Potencias** o **exponentes**.
2. **Multiplicaciones** y **divisiones**.
3. **Sumas** y **restas**.

SIGNO DE AGRUPACIÓN	NOMBRE
( )	Paréntesis ordinario o paréntesis.
[ ]	Paréntesis angular o corchete.
{ }	Llaves.
$\overline{\quad}$	Vínculo o barra.

La forma en que se emplean los signos de agrupación es por lo general la siguiente:

{[()]}: Llave, paréntesis, corchete

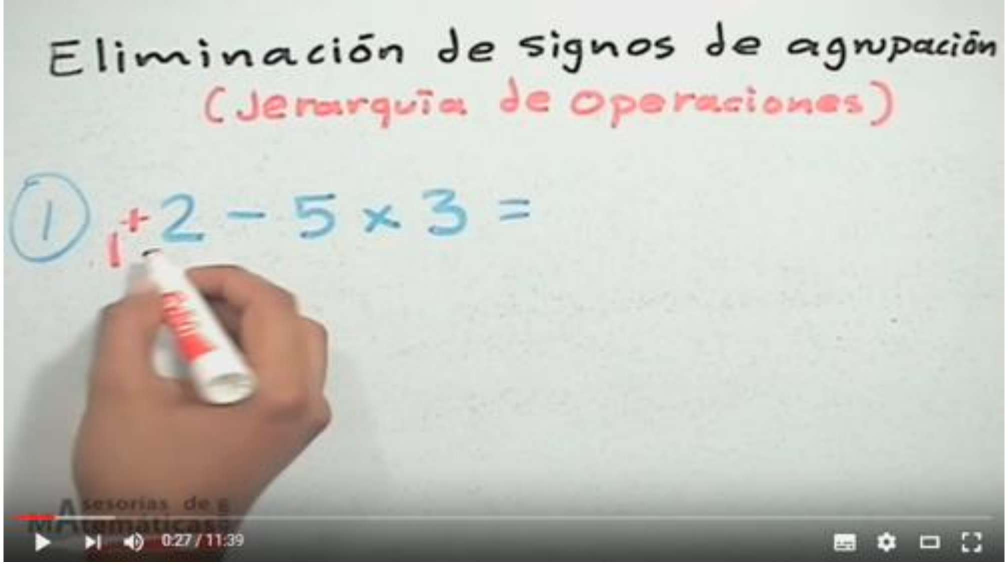
← →

Nota: Las operaciones se deben efectuar de **adentro hacia fuera**, como lo indican las flechas.

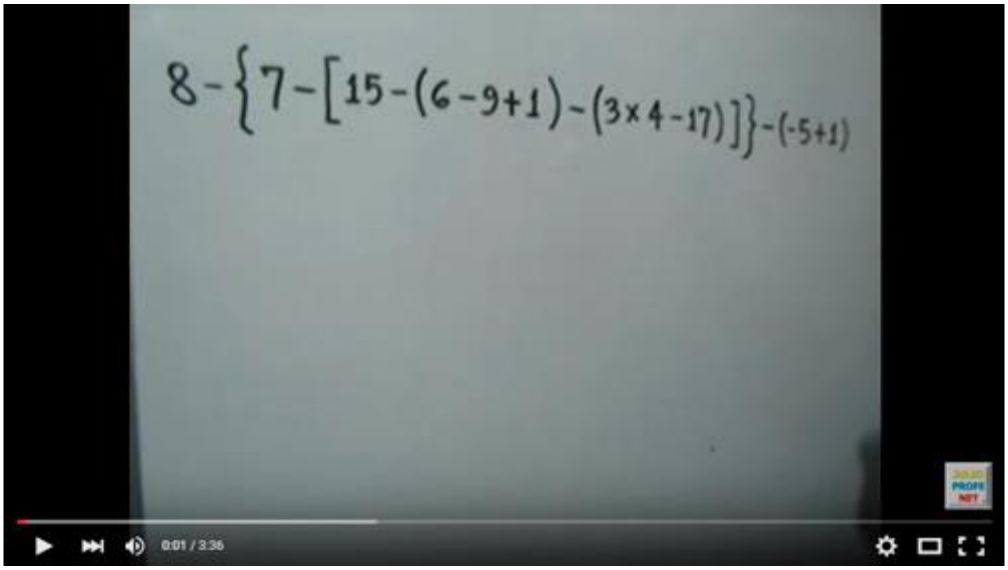
- Prioridad en las operaciones

Cuando se efectúan operaciones aritméticas o algebraicas se debe tener el siguiente orden.

Nota: tenga en cuenta que cuando hay signos de agrupación se debe desarrollar primero las operaciones que hay dentro de ellos.



Eliminación de signos de agrupación (jerarquias) [Enlace]



Operaciones con enteros y signos de agrupación - Ejercicio 4 [Enlace]

3.2.7 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Resuelva: $3*4+5$

Procedimiento

Primero se efectúa la multiplicación **3*4= 12** y luego la suma o sea **12+5= 17**, en general $3*4+5=12+5=17$

2. Resuelva: $3*(4+5)$

Procedimiento

Primero se efectúa lo que tenemos dentro del paréntesis.

$$3*(4+5)=3*(9)=3*9=27$$

3. Resuelva: $5+20\div(18-2*4)$

Procedimiento

$$5+20\div(18-2*4)=5+20\div(18-8)=5+20\div(10)=5+20\div10=5+2=7$$

Primero efectúo todo lo del paréntesis empezando por la multiplicación de 2*4=8 luego 18-8=10, este es el resultado del paréntesis. Queda $5+20\div10$

Se debe efectuar primero la división $20\div10=2$ quedando 5+2 por último

Se efectúa esta suma 5+2=7.

4. Encuentre el resultado de:

10 – 3{4 + 5[7 – 4(4)]}

Procedimiento

a. Se elimina primero el paréntesis (rojo), por ser el más interno (Recuerde que si entre el signo de agrupación y el número no hay un signo, se indica una multiplicación):

10 – 3{4 + 5[7 – 4(4)]} = 10 – 3{4 + 5[7 – 4*4]} =

10 -3{4 + 5[7 – 16]} = 10 -3{4 + 5[-9]}

b. Se elimina el corchete (verde):

10 -3{4 + 5[– 9]} = 10 -3{4 + 5* - 9 } (recuerde ley de signos al multiplicar).

10 -3{4 - 45 }

c. Se elimina la llave (amarillo):

10 -3{4 - 45 } = 10 -3{- 41 } = 10 – 3 * - 41, se efectúa el producto indicado (recuerde que - * - = +)

10 + 123 = 133

5. Encuentre el resultado de:

$$7-\frac{15}{3+2}$$

Procedimiento:

a. Se resuelve la operación indicada en la fracción:

$$7-\frac{15}{3+2}=7-\frac{15}{5}$$

b. Se simplifica la fracción y se efectúa la resta que queda indicada:

$7-\frac{15}{5}$ = 7–$3=4$

6. Encuentre el resultado de:

3^2*6+5

Procedimiento

a. Se realiza la potencia : $(3^2=9)$

$9*6+5$

b. Se realiza el producto (9*6 = 54) y luego la suma que queda indicada:

$54+5=59$

- **Mínimo común múltiplo m. c. m.**

El mínimo común múltiplo entre dos o más números es el menor número que los contiene exactamente.

Cuando se afirma que un número **a** contiene exactamente a un número **b** se quiere decir que si se divide el número **a** entre el número **b** el resultado será **un número entero**.

Minimo Común Multiplo - Método Práctico [Enlace]

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tenga presente: cuando se dice que el m.c.m. entre dos o más números es el menor número que los contiene exactamente, no se está afirmando que sea el menor de los números. De hecho el **m.c.m.** de dos o más números nunca será el menor de los números. Será el número que los contiene a todos en menor proporción.

3.2.8 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Determine el m.c.m. entre **2** y **4.**

- Si pensaste que es el número **2**:

Recuerda que: el m.c.m nunca será el número menor

- Si dijiste que es el número 4:

Estás en lo correcto

Ya que si dividimos:

$\frac{4}{2} = 2 \epsilon Z\ (Número\ entero)$, y

$\frac{4}{4} = 1 \epsilon Z\ (Número\ entero)$

2. Determine el m.c.m. entre **6** y **4**

- Si pensaste que es el número **12**:

Estás en lo correcto

Ya que:

$$\frac{12}{6} = 2 \epsilon Z, \text{ y } \frac{12}{4} = 3 \epsilon Z$$

El **12** contiene **2** veces al número **6** y contiene **3** veces al número **4** y podemos ver que ambos son números enteros.

- Si pensaste que es el número **6**:

Traer a la memoria: si dividimos el **6** entre el **4** el resultado no es un número entero.

- Si pensaste que es el número **24**:

Tener en cuenta que: aunque el **24** contiene exactamente al **6** y al **4** no es el menor número que los contiene exactamente.

Por lo tanto:

El menor número que contiene exactamente al **6** y al **4** es el número **12**.

- ✓ Método para determinar el m.c.m.

Para hallar el Mínimo Común Múltiplo (m.c.m.) de dos o más números, se procede de la siguiente forma:

1. Se **Factoriza** o **se descompone** cada número como **un producto** de sus **factores primos**. Esto es dividir cada número primero por 2 luego por 3, por 5, por 7,... que son los números primos.
2. El m.c.m. resulta de **multiplicar los factores primos**, con su mayor exponente, **sin repetirlos**.

3.2.9 EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Como tarea consulta cuál es la definición de los números primos y resalta con color amarillo, en el siguiente cuadro, los números primos entre 1 y 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	783	74	75	76	77	78	79	80

81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2. Del mismo cuadro elabora una tabla con los factores de:

- 2:
- 3:
- 5:
- 7:

3. Define el carácter de divisibilidad de cada uno de los números anteriores, completa:

- Un número es divisible por 2 cuando:
- Un número es divisible por 3 cuando:
- Un número es divisible por 5 cuando:
- Un número es divisible por 7 cuando:

4. Determine el m.c.m. entre 10, 50, 70, 14, 20.

Nota: Tome este ejercicio como modelo para que resuelva los que se le plantean más adelante

Procedimiento:

Puedes ver que ya no es tan fácil saber cuál es el m.c.m. de estos números por esto debemos describir un método para determinarlo.

a. Se descomponen los números en sus factores primos:

$$\mathbf{10 = 2 * 5}$$

$$\mathbf{50 = 2 * 5 * 5 = 2 * 5^2}$$

$$\mathbf{70 = 2 * 5 * 7}$$

$\mathbf{14 = 2 * 7}$

$$\mathbf{20 = 2 * 2 * 5 = 2^2 * 5}$$

b. Se toman factores comunes y no comunes con el mayor exponente (sin repetir números):

m.c.m. = $\mathbf{2^2 * 5^2 * 7 = 4 * 25 * 7 = 700}$

c. Solución:

El m.c.m de 10, 50, 70, 14, 20 es 700

d. Verifiquemos que al dividir 700 por cada uno de los números dados se obtenga un número entero:

$\mathbf{\frac{700}{10} = 7 \epsilon Z}$

$\mathbf{\frac{700}{50} = 14 \epsilon Z}$

$\mathbf{\frac{700}{70} = 10 \epsilon Z}$

$\mathbf{\frac{700}{14} = 50 \epsilon Z}$

$\mathbf{\frac{700}{20} = 35 \epsilon Z}$

e. Se concluye entonces que 700 es el m.cm. y es el **menor número** que se deja dividir exactamente por los números dados.

Nota: Otra forma de obtener el m.c.m.

- Se listan los números como se muestra en el cuadro a continuación.
- Se divide cada uno de ellos por el menor número primo (en este caso es el 2) y se coloca el resultado debajo de cada uno de ellos.
- En caso de no ser divisible por dicho factor se coloca, en el cajón de abajo el mismo número.
- Se realizan tantas divisiones por el factor tantas veces como sea necesario.
- Una vez agotado el factor, se toma el siguiente número primo y se agota el proceso anterior.
- Cuando un número no tiene más divisiones se coloca el número 1 cuantas veces sea necesario.
- El m.c.m. se obtiene de multiplicar los factores primos que quedan indicados en la columna de la derecha.

NÚMEROS					FACTORES
10	50	70	14	20	2
5	25	35	7	10	2
5	25	35	7	5	5
1	5	7	7	1	5
1	1	7	7	1	7
1	1	1	1	1	
m.c.m.					2*2*5*5*7= 700

3.2.10 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

5. Determine el m.c.m. entre 36, 45, 40 y 6.

PROCEDIMIENTO

a. Se descomponen los números en sus factores primos:

$$\mathbf{36 = 2 * 2 * 3 * 3 = 2^2 * 3^2}$$

$$\mathbf{45 = 3 * 3 * 5 = 3^2 *} 5$$

$$\mathbf{40 = 2 * 2 * 2 * 5 = 2^3 * 5}$$

$$\mathbf{6 = 2 * 3}$$

b. Se toman factores comunes y no comunes con su mayor exponente

- Los únicos factores de estos números son el 2, el 3 y el 5, el mayor exponente de cada número:
- Del número 2 es el exponente 3,
- Del 3 es el exponente 2, y
- Del 5 es el exponente 1.

Por lo tanto: el m.c.m. es:

$$\mathbf{2^3 * 3^2 * 5 = 8 * 9 * 5 = 360}$$

OTRA FORMA:

NÚMEROS				FACTORES
36	**45**	**40**	**6**	**2**
18	**45**	**20**	**3**	**2**

9	45	10	3	2
9	45	5	3	3
3	15	5	1	3
1	5	5	1	5
1	1	1	1	
m.c.m.				2*2*2*3*3*5= 360

Determine el m.c.m. entre **44, 48, 66 y 18.**

- **Procedimiento:**

6.1 Se descomponen los números en sus factores primos:

44= $\mathbf{2*2*11=2^2}$*11

48= $\mathbf{2*2*2*2*3=2^4*3}$

66= $\mathbf{2*3*11}$

18= $\mathbf{2*3*3=2*3^2}$

6.2 Se toman factores comunes y no comunes con su mayor exponente:

- Del número **2** es el exponente **4**.
- Del número **3** es el exponente **2**.
- Del número **11** es el exponente **1.**

6.3 **Por lo tanto el m.c.m es:**

$\mathbf{2^4}$ *$\mathbf{3^2}$*11 =16*9*11 = 1584

- Otra forma:

NÚMEROS				FACTORES
44	48	66	18	2
22	24	33	9	2
11	12	33	9	2
11	6	33	9	2
11	3	33	9	3
11	1	11	3	3
11	1	11	1	11
1	1	1	1	
M.C.M.				$2^4 * 3^2 * 11$ =16*9*11 =1584

3.2.11 EJERCICIO DE ENTRENAMIENTO

Encuentre el m.c.m de los siguientes números, realizándolo de las dos formas propuestas en el desarrollo del módulo:

a. 2, 5, 10, 15, 20

b. 3, 6, 9, 18, 27

c. 7, 14, 21

d. 2, 4, 16, 80

e. 2, 5, 6, 8, 9

f. 10, 12, 16, 32, 40

- Números fraccionarios

Concepto de fraccionario: a continuación, se presenta un concepto muy general sin profundizar mucho acerca del tema.

Un número fraccionario es todo número de la forma: $\frac{p}{q}$, donde $\boldsymbol{p, q \in Z \; y \; q \neq o}$

El número **p** se llama **numerador** y el número **q** se llama **denominador**.

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tenga en cuenta que: el signo de un fraccionario puede ir en el medio, en el numerador o en el denominador; esto es:

$$-\frac{p}{q} = \frac{-p}{q} = \frac{p}{-q}$$

Nota: Aplicando la ley de los signos para la división se justifica lo anterior.

CLASES DE FRACCIONARIOS:

- **Fracción propia:** Es aquella donde el numerador es menor que el denominador.

Ejemplo:

a. $\frac{3}{5}\;(3 < 5)$

b. $\frac{7}{9}\;(7 < 9)$

- **Fracción impropia:** Es aquella donde el numerados es mayor que el denominador, estos fraccionarios se pueden convertir a número mixto.

Ejemplo:

$$\boldsymbol{a.}\ \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{8}}(\mathbf{9} > \mathbf{8})$$

$$\boldsymbol{b.}\ \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}}(\mathbf{7} > \mathbf{5})$$

http://www.youtube.com/watch?v=S1vm9Mp2YWY&feature=related

http://www.youtube.com/watch?v=FrmL5gldBjA&feature=related

- **Operaciones con fraccionarios:**
- **Multiplicación:** se debe multiplicar numeradores entre sí y denominadores entre sí. Recuerde que primero se debe efectuar la ley de signos y posteriormente simplificar si es necesario.

(http://www.youtube.com/watch?v=x1-9xugvcm8Entonces)

De manera general:

$\frac{a}{b}*\frac{c}{d}=\frac{a*c}{b*d} \quad b \neq 0 \wedge d \neq 0$	a y c: Numeradores b y d: Denominadores

3.2.12 EJERCICIO DE APRENDIZAJE

$$\frac{2}{3}*\frac{5}{7}=\frac{2*5}{3*7}=\frac{10}{21} \qquad \frac{-14}{9}*\frac{6}{35}=-\frac{4}{15}$$

- **División**: se invierte el fraccionario divisor y luego se multiplica. (http://www.youtube.com/watch?v=va9eoz7q_vQ&feature=fvwrel)

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a*d}{b*c} \quad c \neq 0, \quad b \neq 0 \wedge d \neq 0$ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c} = \frac{a*d}{b*c}; con$ $b \neq o, c \neq o, d \neq 0$	a y c: Numeradores b y d: Denominadores

3.2.13 EJERCICIO DE APRENDIZAJE

$$\boldsymbol{a.}\ \frac{6}{5} \div \frac{-2}{3} = \frac{6}{5} * \frac{3}{-2} = \frac{18}{-10} = -\frac{18}{10} = -\frac{9}{5}$$

$$\boldsymbol{b.}\ \frac{10}{3} \div \frac{5}{4} = \frac{10}{3} * \frac{4}{5} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

También se puede realizar de la siguiente manera:

$$\frac{10}{3} \div \frac{5}{4} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{5}{4}} = \frac{10 * 4}{3 * 5} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

- **Suma y resta:** para sumar o restar números fraccionarios se presentan dos casos. Fraccionarios de igual denominador y fraccionarios de diferente denominador.

✓ **Suma (resta) de fraccionarios de igual denominado**r: se deja el mismo denominador y se suman (y/o restan) los numeradores.

3.2.14 EJERCICIO DE APRENDIZAJE

$$\boldsymbol{a.}\ \frac{3}{7} + \frac{5}{7} - \frac{10}{7} = \frac{3 + 5 - 10}{7} = -\frac{2}{7}$$

Nota: Se coloca el mismo denominador 7, se suman y/o restan los numeradores (como esté indicado en la operación) y se simplifica la fracción resultante si es del caso.

$$\boldsymbol{b.}\ \frac{-9}{5}+\frac{16}{5}-\frac{3}{5}=\frac{-9+16-3}{5}=\frac{4}{5}$$

$$\boldsymbol{c.}\ \frac{13}{x}-\frac{25}{x}+\frac{4}{x}+\frac{28}{x}=\frac{13-25+4+28}{x}=\frac{20}{x}$$

✓ **Suma (resta) de fraccionarios de diferente denominador**: inicialmente fraccionarios de diferente denominador no se pueden sumar de forma directa; para poderlos sumar se deben llevar a un denominador común, dicho denominador común es el m.c.m. de los denominadores de los fraccionarios a sumar. En realidad, lo que se hace es que se amplifican todos los fraccionarios, de tal manera que el denominador común para todos sea el m.c.m. de sus denominadores.

El procedimiento a efectuar es el siguiente:

1. Halle el **m.c.m**. de los **denominadores**.
2. El **m.c.m**. será el **denominador común** para todos los fraccionarios.
3. Como se cambió el denominador, también se deben cambiar los numeradores de cada fraccionario. Para cada fraccionario **el nuevo numerador** se obtiene al **dividir el m.c.m**. por **el denominador de cada fracción** y el resultado **multiplicarlo** por el respectivo numerador.
4. Después de esto se procede como en el caso anterior.

Suma y resta de fracciones con diferente denominador |parte 1 [Enlace]

3.2.15 EJERCICIO DE APRENDIZAJE

Realizar la siguiente operación entre fraccionarios:

$$\frac{7}{5} - \frac{4}{3} + \frac{10}{9}$$

Procedimiento:

a. Se halla el m.c.m. de los denominadores:

NÚMEROS			FACTORES
5	3	9	3
5	1	3	3
5	1	1	5
1	1	1	
m.c.m			3*3*5 = 45

El m.c.m. de los denominadores (del 5, el 3 y del 9) es el 45. Esto es m.c.m.= 45.

b. Ahora debemos transformar cada fraccionario de manera que todos queden con 45 como denominador, realicemos cada fraccionario por separado:

- $\frac{7}{5}=\frac{\frac{45}{5}*7}{45}=\frac{9*7}{45}=\frac{63}{45},$

El m.c.m. se divide por denominador y se multiplica por el respectivo numerador, lo mismo se hace con cada una de las fracciones.

- $\frac{4}{3}=\frac{\frac{45}{3}*4}{45}=\frac{15*4}{45}=\frac{60}{45}$
- $\frac{10}{9}=\frac{\frac{45}{9}*10}{45}=\frac{5*10}{45}=\frac{50}{45}$

c. Entonces:

$\frac{7}{5}-\frac{4}{3}+\frac{10}{9}=\frac{63}{45}-\frac{60}{45}+\frac{50}{45}$, como ya tienen el mismo denominador:

$$\frac{63}{45}-\frac{60}{45}+\frac{50}{45}=\frac{63-60+50}{45}=\frac{53}{45}$$

Realizar la siguiente operación entre fraccionarios:

$\frac{3}{4}-\frac{7}{10}-\frac{5}{8}$

Procedimiento:

a. Se halla el m.c.m. de los denominadores:

NÚMEROS			FACTORES
4	10	8	2
2	5	4	2

1	5	2	2
1	5	1	5
1	1	1	
m.c.m.			2*2*2*5 = 40

El m.c.m. de los denominadores (del 4, el 10 y del 8) es el 40. Esto es m.c.m.= 40.

b. Ahora se debe transformar cada fraccionario de manera que todos queden con 40 como denominador, realicemos cada fraccionario por separado

- $\frac{3}{4} = \frac{\frac{40}{4}*3}{40} = \frac{10*3}{40} = \frac{30}{40}$
- $\frac{7}{10} = \frac{\frac{40}{10}*7}{40} = \frac{4*7}{40} = \frac{28}{40}$
- $\frac{5}{8} = \frac{\frac{40}{8}*5}{40} = \frac{5*5}{40} = \frac{25}{40}$

c. Se realiza la operación indicada (suma – resta) de fracciones con el mismo denominador

$$\frac{7}{5} - \frac{4}{3} + \frac{10}{9} = \frac{30}{40} - \frac{28}{40} - \frac{25}{40} = \frac{30 - 28 - 25}{40} = -\frac{23}{40}$$

Realizar la siguiente operación entre fraccionarios:

$$\left(\frac{3}{2} \div \frac{5}{4}\right) - \left(\frac{7}{3} * \frac{1}{2}\right)$$

Procedimiento:

a. En estos ejercicios primero se debe efectuar las operaciones indicadas dentro de los signos de agrupación:

$$\left(\frac{3}{2} \div \frac{5}{4}\right) - \left(\frac{7}{3} * \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} * \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{7}{3} * \frac{1}{2}\right) =$$

$\left(\frac{3*4}{2*5}\right) - \left(\frac{7*1}{3*2}\right) = \left(\frac{12}{10}\right) - \left(\frac{7}{6}\right)$, simplificando:

$$\left(\frac{6}{5}\right) - \left(\frac{7}{6}\right)$$

b. Se realiza la diferencia indicada de fracciones:

$\frac{6}{5} - \frac{7}{6}$ El m.c.m. de **5** y **6** es:

NÚMEROS		FACTORES
5	6	2
5	3	3
5	1	5
1	1	
m.c.m.		2*3*5 = 30

d. Ahora se debe transformar cada fraccionario de manera que todos queden con 40 como denominador:

$$\frac{6}{5} - \frac{7}{6} = \frac{\frac{30}{5} * 6}{30} - \frac{\frac{30}{6} * 7}{30} = \frac{6 * 6}{30} - \frac{5 * 7}{30} = \frac{36}{30} - \frac{35}{30}$$

e. Como tienen el mismo denominador:

$$\frac{36}{30} - \frac{35}{30} = \frac{36 - 35}{30} = \frac{1}{30}$$

3.2.16 EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Realice un mapa o esquema para ubicar los diferentes campos numéricos. Ver c maptools
2. Clasifica los siguientes números y completa el esquema

$1 \in \boldsymbol{N} \in \boldsymbol{Z}+ \in \boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Q} \in \boldsymbol{Re} \in \boldsymbol{C}$	8/2
3.1416…	-16/4
$\sqrt{5}$	1/3
- 3	π
¾	e
1.5	$\sqrt{16}$
LOG 2	$\sqrt{-25}$
7/5	4i

3. Escriba con sus propias palabras los números o expresiones que no hacen parte de los números reales.
4. Realice las siguientes operaciones teniendo en cuenta el orden de las operaciones y los signos de agrupación.

1. $5-9\{4-4[7+5(9*2-5*4)]\}$
2. $4+7\{9-8-5[4+7+2(6-7*2-4*5)]\}$

5. Realice las siguientes operaciones con fraccionarios

a) $\frac{4}{9}-\frac{7}{30}+\frac{1}{45}$

b) $\left(\frac{3}{4}-\frac{11}{8}\right)\div\left(\frac{7}{10}-\frac{3}{5}\div\frac{9}{4}\right)$

c) $3-\cfrac{5}{8+\cfrac{2}{7+\cfrac{3}{9-\cfrac{1}{10}}}}$

3.3 TEMA 2 POTENCIACIÓN RADICACIÓN Y RACIONALIZACIÓN

Definiciones y Conceptos

- **Potenciación:** la definición de potencia está relacionada con la definición de exponente, pero entendiendo como potencia aquella que está formada de una **base** (número que se repite) y un **exponente** (veces que se repite el número)

$$base^{exponente}$$

Esto es, potenciar significa multiplicar por sí misma la base las veces que indica el exponente, por ejemplo:

$$\mathbf{2^5}$$

Dónde:

7. **2 es la base** (Número que se repite como factor), y
8. **5 es el exponente** (número de veces que se repite el 2 como factor).

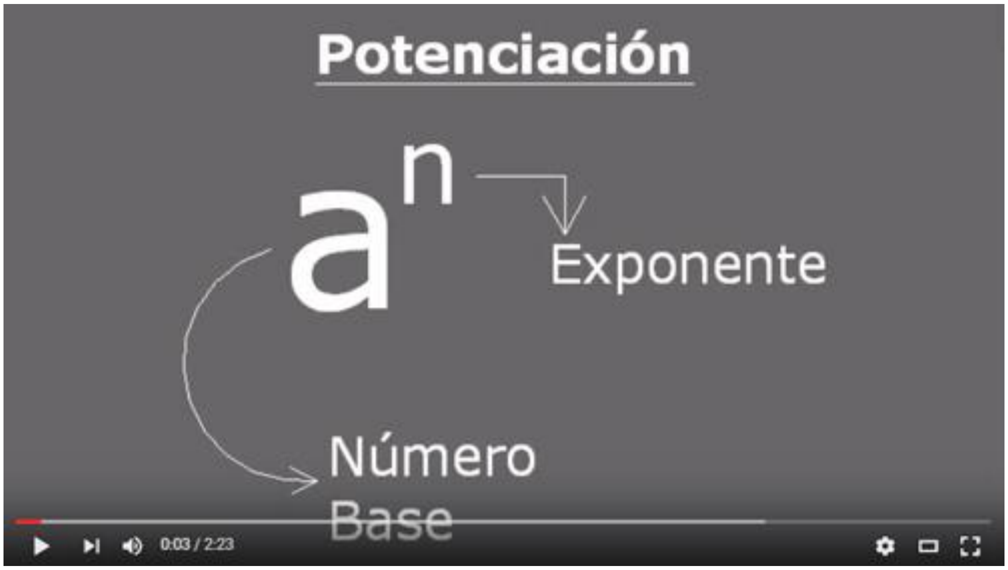
Quedaría entonces: $\mathbf{2^5 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 32}$

Observe a continuación el significado de algunas expresiones:

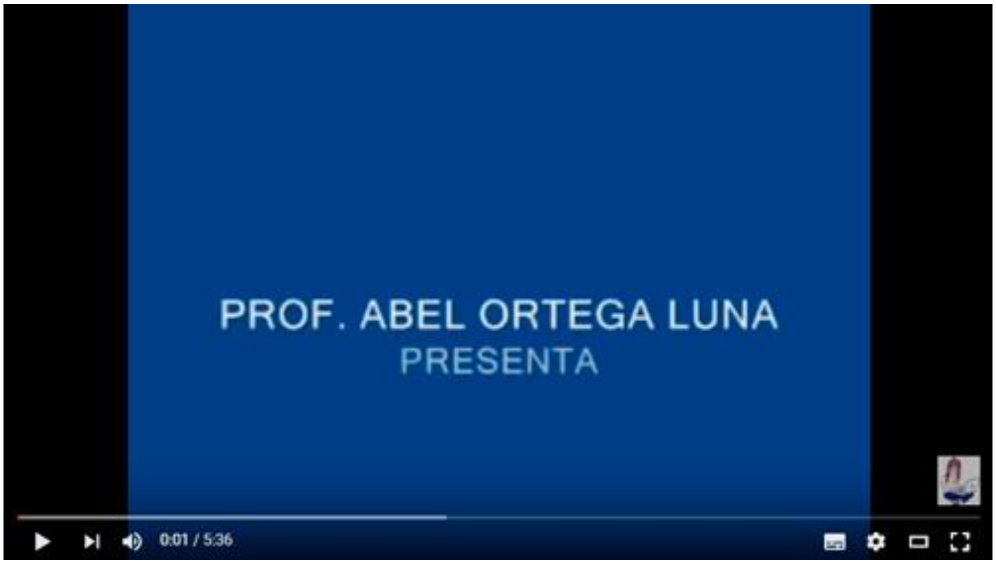
- $\boldsymbol{x^n = x * x * x * x \ldots x}$: Quiere decir multiplicar **x** por sí misma **n** veces.
- $\mathbf{3^4 = 3 * 3 * 3 * 3 = 81}$
- $\boldsymbol{\frac{1}{x^n} = \frac{1}{x*x*x*x\ldots}\ con\ x \neq o}$
- $\mathbf{\frac{1}{5^3} = \frac{1}{5*5*5}}$

NOTA: el exponente negativo no significa que la cantidad sea negativa o positiva; lo anterior quiere decir que exponente negativo en el numerador significa que se debe cambiar la base para el denominador y cambiarle de signo al exponente; y el exponente negativo en el denominador, significa que se debe cambiar la base al numerador y cambiando el signo al exponente.

$$x^{-n} = \frac{1}{x^{n}} \quad \text{y} \quad \frac{1}{x^{-n}} = x^{n}$$



Exponentes negativos [Enlace]



POTENCIA CON EXPONENTE NEGATIVO [Enlace]

Resumiendo, exponente negativo significa **intercambiar** la base entre numerador y denominador y cambiarle el signo al exponente.

- ✓ $\mathbf{7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{7*7} = \frac{1}{49}}$
- ✓ $\frac{1}{5^{-6}} = 5^6 = 5*5*5*5*5*5 = 15.625$
- ✓ $\mathbf{2x^{-3} = \frac{2}{x^3}}$
- ✓ $(2x)^{-3} = \frac{1}{(2x)^3} = \frac{1}{2x*2x*2x} = \frac{1}{8x^3}$

$\boldsymbol{Nota}$: $\mathbf{(-x)^n \neq -x^n}$

- $\mathbf{(-2)^2 \neq -2^2}$
- $\mathbf{(-2)^2 = (-2)*(-2) = 4}$
- $\mathbf{-2^2 = -(2)*(2) = -4}$
- $\mathbf{4 \neq -4}$

- <u>Signo de x^n</u>:

$$\boldsymbol{x^n \begin{Bmatrix} Es\ positivo\ si\ n\ es\ par, sin\ importar\ el\ signo\ de\ la\ base \\ Es\ negativo\ si\ n\ es\ impar\ y\ la\ base\ es\ negativa \end{Bmatrix}}$$

Ejemplos

a. $\mathbf{(-3)^4}$:

- ✓ Sin efectuar la operación se sabe que el resultado es positivo porque el exponente es par.
- ✓ Realizando la operación se tiene:

$$\mathbf{(-3)^4 = (-3)*(-3)*(-3)*(-3) = 81}$$

Nota: No confundir $(-\mathbf{3})^{\mathbf{4}}$ Con $-\mathbf{3}^{\mathbf{4}}$ En el primer caso estamos elevando una base negativa a una potencia par, por lo tanto, el resultado es positivo **(81),** en el segundo caso estamos elevando una base positiva a un exponente par y luego multiplicamos el resultado por **(-1),** por lo tanto el resultado es negativo $(-\mathbf{81})$; esta expresión significa: $-\mathbf{1} * \mathbf{3}^{\mathbf{4}}$.

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tenga presente que: En términos generales $(-\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{n}}$ no siempre es lo mismo que. $-\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}$.

Por ejemplo cual será el resultado de $(-5)^{-3}$.

Procedimiento:

Sin efectuar la operación sabemos que el resultado es negativo porque la base es negativa y el exponente es impar, comprobemos la afirmación anterior efectuando la operación:

$$(-\mathbf{5})^{-\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{1}}{(-\mathbf{5})^{\mathbf{3}}} = \frac{\mathbf{1}}{(-\mathbf{5}) * (-\mathbf{5}) * (-\mathbf{5})} = \frac{\mathbf{1}}{-\mathbf{125}} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{125}}$$

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Traer a la memoria que: Todo número (diferente de cero) elevado al exponente cero es igual a 1, esto es:

$$x^0 = 1, siempre\ que\ x \neq o$$

Nota: Se entiende potencia cero como una cantidad dividida por sí misma, por eso el resultado es uno.

Tener en cuenta que : para dividir cantidades que tengan la misma base, se coloca la misma base y se restan los exponentes

- **Radicación:** es una operación **contraria a la potenciación**, lo que se busca en este caso es encontrar la base. (http://www.youtube.com/watch?v=ZWzhMm5aRHw)

Sí, $2^3 = 8$entonces, también es cierto que$\sqrt[3]{8} = 2$

En términos generales,

$$a^n = X \to \sqrt[n]{X} = a.$$

La expresión: $\sqrt[n]{x}$ se llama **radical**, la n se llama índice o raíz y la x se llama radicando (pero también la podemos llamar base). $n \neq \mathbf{0}$

Signo de$\sqrt[n]{X}$. (Todo lo que vamos a afirmar es sólo para la raíz principal).

$$\sqrt[n]{X}\left\{\begin{matrix} Positivo, si\ x\ es\ positivo \\ Negativo, si\ x\ es\ negativo\ y\ n\ es\ impar \\ No\ está\ definido, si\ x\ es\ negativo\ y\ n\ es\ par \end{matrix}\right\}$$

3.3.1 EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Resuelve

a. $\sqrt[4]{\mathbf{81}}$ =

b. $\sqrt[3]{\mathbf{-8}} =$

c. $\sqrt{\mathbf{-36}}$=

d. $\sqrt[100]{\mathbf{-45}}$ =

2. ¿En cuál de los campos numéricos se podrían definir los ejemplos de los numerales c y d?

3. Defínelos y determina su valor en dicho campo.

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tener en cuenta: en términos generales y para facilitar su manipulación matemática, **un radical**, se puede convertir en **una potencia** con exponente fraccionario, donde **la base es el radicando** (la x) y **el exponente** es un número fraccionario cuyo **numerador** es **el exponente del radicando** y el **denominador** es el índice radical, así:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}, \text{ con } n \neq 0$$

3.3.2 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

- Cuando se da en forma de raíz:

  a. $\sqrt[7]{x^2} = x^{7/2}$

  b. $\sqrt{x} = x^{1/2}$

  c. $\sqrt[5]{(6x-1)} = (6x-1)^{1/5}$

  d. $\sqrt[3]{2x} = (2x)^{1/3}$

  e. $2\sqrt[3]{x} = 2\,x^{1/3}$

- En caso contrario, si nos dan un exponente fraccionario:

  a. $x^{7/4} = \sqrt[4]{x^7}$

  b. $5y^{3/7} - 9 = 5\sqrt[7]{y^3} - 9$

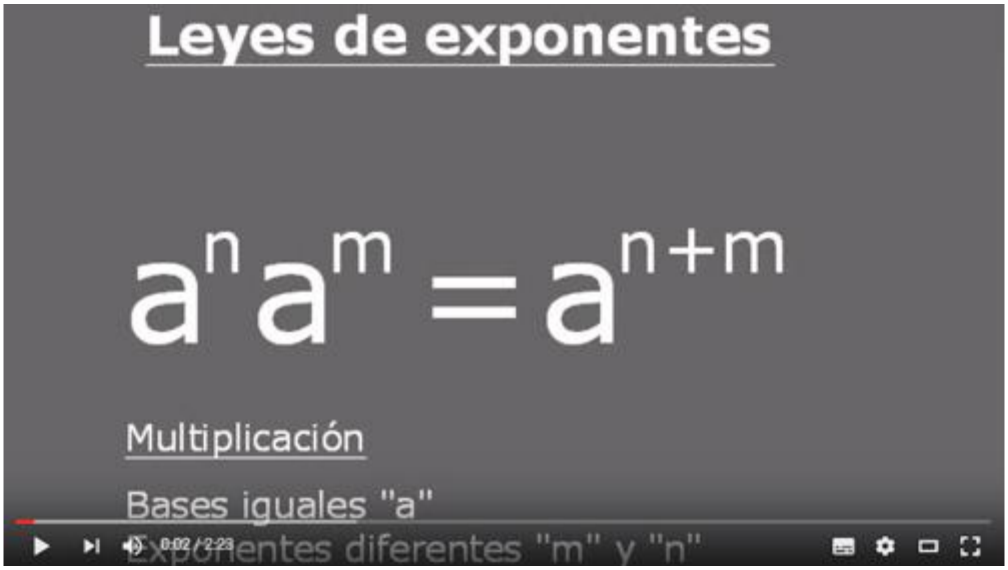
- Propiedades de la potenciación

Nota 1: si hay radicales, para aplicar estas propiedades, una buena acción es convertir el radical a potencia con exponente fraccionario, el resultado final se debe dar en raíz.

Nota 2: el resultado final se debe expresar con exponentes positivos.

1. Para **multiplicar** cantidades (sean números, variables o polinomios) de **bases iguales**, se escribe **la misma base** y se **suman los exponentes**.

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$



Multiplicando exponentes con bases iguales [Enlace]

3.3.3 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

a. $\sqrt[m]{x} + \sqrt[n]{x} = x^{1/m} + x^{1/n} = x^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$

b. $3^2 * 3^3 * 3^5 = 3^{2+3+5} = 3^{10}$

c. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x} = x^{\frac{2}{3}} + x^{1/4} = x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}} = x^{8+3/12} = x^{11/12}$, se da

La respuesta en forma de radical:

$x^{11/12} = \sqrt[12]{x^{11}}$

---

2. Para **dividir** cantidades (sean números, variables o polinomios) de **bases iguales**, se escribe **la misma base** y se **restan los exponentes**.

$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$, con x≠ 0

(http://www.youtube.com/watch?v=m1wF_YoN1Uc)

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Traer a la memoria: si la expresión está en forma de raíz, se debe expresar en forma de exponente fraccionario y su respuesta en forma de raíz.

3.3.4 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

2.1. $\frac{5^{16}}{5^{14}} = 5^{16-14} = 5^2$

2.2. $\frac{4^3}{4^8} = 4^{3-8} = 4^{-5}$, se debe expresar con exponente positivo, quedaría: $\frac{1}{4^5}$

2.3. $\frac{\sqrt[7]{y^5}}{\sqrt[2]{y}} = \frac{y^{5/7}}{y^{1/2}} = y^{\frac{5}{7}-\frac{1}{2}} = y^{10-7/14} = y^{\frac{3}{14}} = \sqrt[14]{y^3}$

3. Para **elevar una Potencia** a **un exponente**, se escribe **la base de la potencia** y **se multiplican los exponentes**.

$(x^m)^n = x^{m*n}$

(http://www.youtube.com/watch?v=9QfWuEOystA)

NOTA: cuando se habla de **raíz de raíz** : $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}$, se **multiplican los índices radicales entre sí**, es decir:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[(m*n)]{x}$$

3.3.5 EJERCICIOS DEAPRENDIZAJE

1. $(x^2)^3 = x^{2*3} = x^6$

2. $\sqrt[2]{\sqrt[5]{x^3}} = \sqrt[2*5]{x^3} = \sqrt[10]{x^3}$,

Al expresarlo como <u>exponente fraccionario</u>, quedaría:

$$x^{\frac{3}{10}}$$

3. $\frac{25^3}{5^n}*5$, pero $25 = 5^2$, entonces:

$\frac{25^3}{5^n}*5 = \frac{(5^2)^3}{5^n} * 5 = \frac{5^{2*3}}{5^n}$ *5, multiplicando **exponentes** aplicando **las propiedades** correspondientes se tiene:

$5^6 * 5^1 * 5^{-n} = 5^{6+1} 5^{-n} = 5^7 * 5^{-n} = 5^{7-n}$

Propiedad distributiva del producto o multiplicación: cuando se tiene un **producto** o **multiplicación** elevada a un exponente, se **eleva** cada factor a dicho **exponente**, así:

$(x * y)^n = x^n * y^n$, se da en ambos sentidos$x^n * y^n = (x * y)^n$

También se cumple para **la raíz de un producto:**

$\sqrt[n]{x * y} = \sqrt[n]{x} * \sqrt[n]{y}$, se cumple $\sqrt[n]{x} * \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x * y}$

3.3.6 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $(5 * 4)^2$ = $5^2 * 4^2$ = 25 * 16 = 400

2. $\sqrt{18}$ = $\sqrt{9 * 2}$ = $\sqrt{9} * \sqrt{2}$ = $\sqrt{3^2} * \sqrt{2}$ = $3 * \sqrt{2}$

Nota: para realizar este tipo de ejercicios, recuerde descomponer el respectivo número en sus factores primos y expresarlo en forma de potencia.

3. $(2x)^5$ = $2^5 * x^5$ = $32 * x^5$

4. Actividad: $\sqrt[3]{x^2}\ \sqrt[3]{y^5}$: de acuerdo a la propiedad ¿cómo quedaría el ejercicio?, de ser posible expresa tu respuesta con exponente fraccionario.

Propiedad distributiva del cociente o división: cuando se tiene un cociente o una división elevada a **un exponente** o está bajo **una misma raíz**, se **eleva** (o se le **extrae la raíz**, si es del caso) el numerador y el denominador a dicho exponente (o dicha raíz), esto es:

$$1.\ (\frac{x}{y})^n = \frac{x^n}{y^n}\ \sigma\ \frac{x^n}{y^n} = (\frac{x}{y})^n, \text{ con } y \neq o$$

$$2.\ \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}, \text{ con } y \neq 0$$

3.3.7 EJERCICIO DE APRENDIZAJE

Explica detalladamente, en cada uno de los ejemplos siguientes, el proceso llevado a cabo e indica qué propiedad se aplicó en cada uno de los pasos desarrollados.

1. $(\frac{5}{3})^3$, se elevan el numerador y el denominador al exponente indicado (3), quedaría

$\frac{5^3}{3^3}$ *desarrollando las potencias indicadas, se tiene*:

$$\frac{5 * 5 * 5}{3 * 3 * 3} = \frac{125}{27}$$

2. $\sqrt[6]{\dfrac{x}{7}} = \dfrac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{7}}$ se expresa tanto el numerador como el denominador en la raíz indicada (6).

3. $\dfrac{(2x^3\,y^4)^3}{(6x^2y)^5}$, se aplica la propiedad distributiva, tanto en el numerador como en el denominador de la fracción:

$\dfrac{(2)^3(x^3)^3(y^4)^3}{(6)^5(x^2)^5(y^1)^5}$, multiplicandas exponentes en el numerador y en el denominador de la fracción, tenemos:

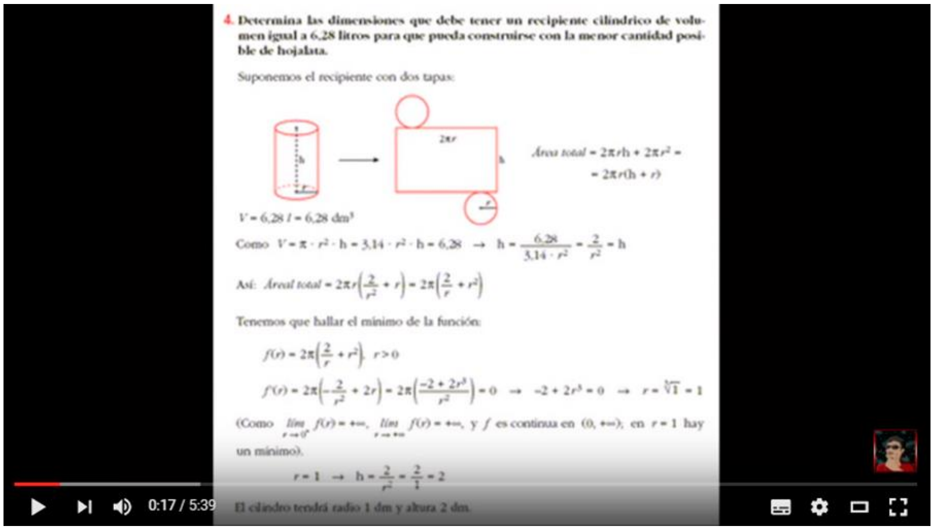
$\dfrac{2^3x^{3*3}y^{4*3}}{6^5x^{2*5}y^{1*5}} = \dfrac{2^3x^9y^{12}}{6^5x^{10}y^5}$, aplicando las propiedades correspondientes a la potenciación y conociendo que 6=2*3, tenemos:

$$\frac{2^3x^9y^{12}}{(2*3)^5x^{10}y^5} = \frac{2^3x^9y^{12}}{2^5*3^5x^{10}y^5} = \frac{2^{3-5}x^{9-10}y^{12-5}}{3^5} =$$

$\dfrac{2^{-2}x^{-1}y^7}{3^5}$, expresando con exponentes positivos obtenemos como solución:

$$\frac{y^7}{2^2 3^2 x^1} = \frac{y^7}{2^2 * 3^2\, x}$$

Para profundizar sobre el tema anterior, visite la siguiente página:



Potenciación: Explicación de Nivel Básico [Enlace]()

Racionalización

Racionalizar consiste en **eliminar los radicales de** una expresión matemática. Dicha eliminación de radicales se puede hacer en el **denominador** o en el **numerador**, según se especifique o según sea la necesidad.

Para poder eliminar el radical se debe **multiplicar** toda la expresión que contiene el radical por **la unidad** expresada de **una manera especial** (una cantidad dividida por sí misma, es igual a la unidad, siendo la cantidad diferente de cero).

Recuerda: $\frac{x}{x}$ = 1, cuando x$\neq 0$

- **Racionalización de monomios**:

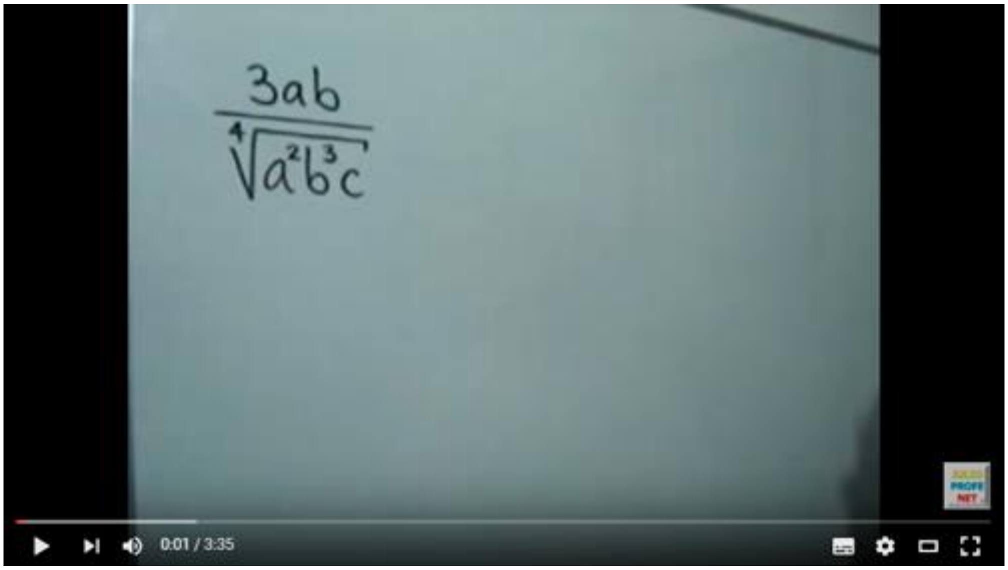
Se debe indicar multiplicación y división de la expresión a racionalizar: por la **misma raíz** con **la misma base**.

NOTA 1: para hallar el exponente de la base, se hace la siguiente pregunta. ¿Cuánto le falta a la base anterior para ser igual a la raíz?

NOTA 2: numeradores, sólo se efectúa la multiplicación de numeradores.

NOTA 3: si se racionalizan denominadores, sólo se efectúa la multiplicación de denominadores.

(http://www.youtube.com/watch?v=LVNth46dPfU)



Racionalizar una expresión algebraica *Enlace*

3.3.8 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Racionalice las siguientes fracciones:

$\boldsymbol{a.\ \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}}$

Procedimiento

Racionalizamos el denominador, multiplicando el numerador y el denominador de la fracción por $\boldsymbol{\sqrt[3]{x^2}}$, o sea $\boldsymbol{x^2}$ es la cantidad que le falta a **x** para ser **un cubo perfecto** y así obtener su raíz exacta, entonces:

$\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} * \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$, Efectuando el producto indicado y simplificando, tenemos:

$$\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x*x^2}} = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}\ \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{x^{\frac{3}{3}}} = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

$\boldsymbol{b.\ \dfrac{10}{\sqrt[5]{2x}}}$

Procedimiento

Racionalizamos el denominador, multiplicando el numerador y el denominador de la fracción por $\sqrt[5]{(2x)^4}$, o sea $(2x)^4$ es la cantidad que le falta a **2x** para obtener su raíz exacta, entonces:

$\frac{10}{\sqrt[5]{2x}} * \frac{\sqrt[5]{(2x)^4}}{\sqrt[5]{(2x)^4}}$ Efectuando el producto indicado y simplificando, tenemos:

$$\frac{10\sqrt[5]{(2x)^4}}{\sqrt[5]{(2x)*(2x)^4}} = \frac{10\sqrt[5]{(2x)^4}}{\sqrt[5]{(2x)^5}} = \frac{10\sqrt[5]{(2x)^4}}{(2x)^{\frac{5}{5}}} = \frac{10\sqrt[5]{(2x)^4}}{(2x)} = \frac{5\sqrt[5]{2^4x^4}}{x} = \frac{5\sqrt[5]{16x^4}}{x}$$

Nota: en ambos casos **(a y b)** desaparecieron **los radicales** del **denominador**.

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tenga presente: en la raíz $\sqrt[m]{x^n}$, $n < m$ no se puede sacar raíz a la potencia.

C. $\frac{\sqrt{x}}{z}$

Procedimiento

Racionalizamos el numerador, multiplicando el numerador y el denominador de la fracción por $\sqrt{x}$, o sea x es la cantidad que le falta a **z** para ser **un cuadrado perfecto** y así obtener su raíz exacta, entonces:

$\frac{\sqrt{x}}{z} * \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ Efectuando el producto indicado y simplificando, tenemos:

$$\frac{\sqrt{x*x}}{z\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x^2}}{z\sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{2}{2}}}{z\sqrt{x}} = \frac{x}{z\sqrt{x}}$$

1.2. $\sqrt[7]{x^4}$

Procedimiento

Racionalizamos el numerador, multiplicando el numerador y el denominador (en este caso es 1) de la fracción por $\sqrt[7]{x^3}$, o sea x^3 es la cantidad que le falta a x^4 para ser **una** raíz exacta, entonces:

$\sqrt[7]{x^4} * \frac{\sqrt[7]{x^3}}{\sqrt[7]{x^3}}$ Efectuando el producto indicado y simplificando, tenemos:

$$\frac{\sqrt[7]{x^3 * x^4}}{\sqrt[7]{x^3}} = \frac{\sqrt[7]{x^7}}{\sqrt[7]{x^3}} = \frac{x^{\frac{7}{7}}}{\sqrt[7]{x^3}} = \frac{x}{\sqrt[7]{x^3}}$$

NOTA: En ambos casos (c y d) desaparecieron los radicales del numerador.
NOTA: En ambos casos desaparecieron los radicales del numerador.

- **Racionalización de binomios con raíz cuadrada**:

Se debe indicar multiplicación y división de toda la expresión por la conjugada de la expresión a racionalizar.

La conjugada de un binomio es el mismo binomio pero con el signo intermedio cambiado. Por ejemplo la conjugada de

$\sqrt{x} + \sqrt{y}$ es $\sqrt{x} - \sqrt{y}$

Ejemplos

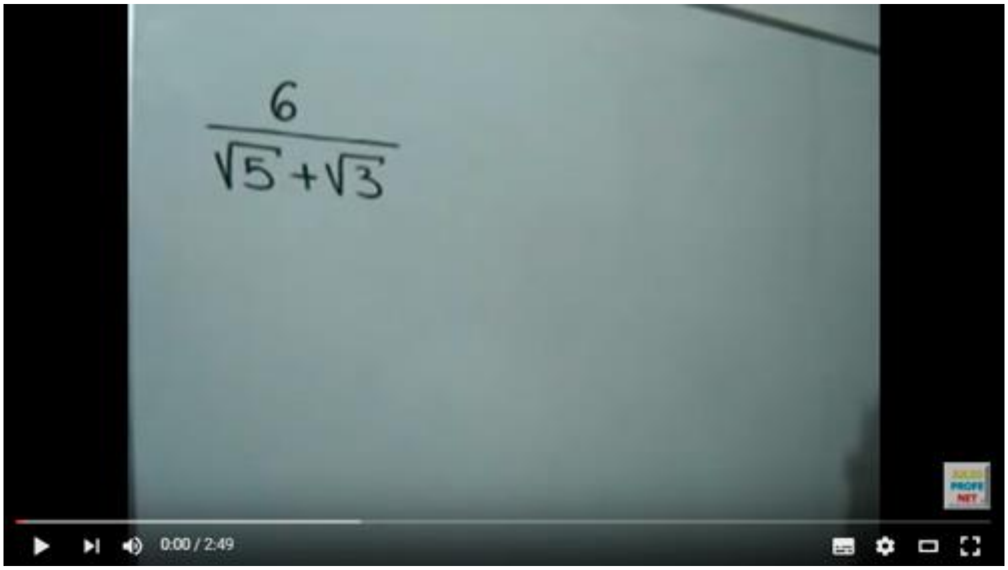
La conjugada de $\sqrt{3} - z$ es $\sqrt{3} + z$

La conjugada de $5 - 2\sqrt{5x}$ *es* $5 + 2\sqrt{5x}$

Cuando se multiplica un binomio por su conjugada, el resultado es igual a la primera cantidad elevada al cuadrado menos la segunda cantidad elevada al cuadrado. En otras palabras, siempre buscaremos una diferencia de cuadrados, así:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y}\ ) * (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = x - y$$

Nota: se puede observar que cuando se multiplica un binomio por su **conjugada** desaparecen los radicales.



Racionalización mediante conjugación [Enlace]

3.3.9 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Racionalice las siguientes fracciones:

$$\boldsymbol{a.} \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3 - \sqrt{2}}}$$

Procedimiento:

1. Se determina la conjugada, en este caso, del denominador: La conjugada de:

$3-\sqrt{2}$ Es $3+\sqrt{2}$

2. Se multiplica el numerador y el denominador de la fracción por dicha conjugada:

$$\frac{5}{3-\sqrt{2}} * \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{5*(3+\sqrt{2})}{3-\sqrt{2} * 3+\sqrt{2}} =$$

3. En el denominador obtenemos una diferencia de cuadrados:

$$\frac{5*(3+\sqrt{2})}{(3)^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{5*(3+\sqrt{2})}{9-2} =$$

4. Simplificando, obtenemos como solución: $\frac{5*(3+\sqrt{2})}{7}$

b. $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$

Procedimiento

1. Se determina la conjugada, en este caso, del denominador: La conjugada de:

   $\sqrt{x}+1$ Es $\sqrt{x}-1$

2. Se multiplica el numerador y el denominador de la fracción por dicha conjugada:

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} * \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)*\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)*(\sqrt{x}-1)} =$$

3. En el denominador obtenemos una diferencia de cuadrados:

$$\frac{(x-1)*\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x})^2-(1)^2} = \frac{(x-1)*\sqrt{x}-1}{x-1} =$$

4. Simplificando, obtenemos como solución: $\sqrt{x} - 1$

c. $\dfrac{9}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}$

Procedimiento:

1. Se determina la conjugada, en este caso, del denominador: La conjugada de:

$\sqrt{2} + \sqrt{5}$ Es $\sqrt{2} - \sqrt{5}$

2. Se multiplica el numerador y el denominador de la fracción por dicha conjugada:

$$\frac{9}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} * \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{9 * (\sqrt{2} - \sqrt{5})}{(\sqrt{2} + \sqrt{5}) * (\sqrt{2} - \sqrt{5})}$$

3. En el denominador obtenemos una diferencia de cuadrados:

$$\frac{9 * (\sqrt{2} - \sqrt{5})}{(\sqrt{2^2}) - \sqrt{5^2}}$$

4. Simplificando, obtenemos como solución:

5. $\dfrac{9*(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{2 - 5} = -\dfrac{9*(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{3} = -3 * (\sqrt{2} - \sqrt{5})$

6. **Multiplicando por el signo menos, también se puede expresar como:**

$$3 * (\sqrt{5} - \sqrt{2})$$

Se puede ver que en todos los ejemplos desaparecieron los radicales del denominador

3.3.10 EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

- ✓ En la expresión: $(-3)^4$ identifique: la base, el exponente y diga cuál es el resultado.
- ✓ En la expresión -3^4 Identifique: la base, el exponente y diga cuál es el resultado.

  ¿Las expresiones de los numerales 1 y 2 son iguales? Explique.

- ✓ A continuación, encontrarás un ejercicio de potenciación solucionado:

$$\frac{\left(10a^{3}b^{-2}c\right)^{-2}}{\left(15a^{-2}bc^{4}z^{-2}\right)^{3}} = \frac{(10a^{-6}b^{-4}c^{-2})}{(15a^{4}b^{-2}c^{6})} = \left(\frac{10a^{-6-4}b^{-4-2}c^{-2-6}}{15}\right) =$$

$$\frac{2}{3}a^{-10}b^{-6}c^{-8} = \frac{2}{3a^{10}b^{6}c^{8}}$$

a) ¿Crees que está solucionado correctamente? Sí------, no--------- ¿Por qué?

b) Sí no es correcta la solución ¿cuál y cómo sería el desarrollo del mismo? Justifica adecuadamente cada uno de los pasos que realices en la sustentación del mismo.

- ✓ Soluciona los siguientes ejercicios justificando cada una de las propiedades que apliques en la solución de los mismos:
  - $\left(\frac{9a^{-1}b^{3}c}{6a^{2}b^{4}c^{-3}}\right)^{-2}$
  - $\sqrt[5]{x^{2}} * \sqrt{x} * \sqrt[10]{x^{3}}$

- ✓ ¿Cuál es el signo de las siguientes potencias? determina si el resultado es el correcto, si no lo es debes encontrar la solución correcta aplicando las propiedades correspondientes:

a. $(-5)^{-20} = \frac{1}{(-5)^{20}} = \frac{1}{5^{20}}$, Sí________, No________ ¿por qué?

Justificación:

b. $2^{-13} = \frac{1}{2^{13}}$, Sí________, No________ ¿por qué?

Justificación: ____

c. $\frac{1}{3^{-21}} = -\frac{1}{3^{21}}$, Sí________, No________ ¿por qué?

Justificación: ____

d. $\left[(-2)^{3}\right]^{4}$ = 4096, Sí________, No________ ¿por qué?

Justificación: ____

- ✓ Racionalice:

a. El autor realizó el siguiente ejercicio, revísalo y determina si está bien o mal desarrollado justificando cada uno de los pasos:

$$* \left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{7^2}-\sqrt{3^2}}{16\,(\sqrt{7}-\sqrt{3})} = \frac{7-3}{16(\sqrt{7}-\sqrt{3}\,)} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{16}\ \frac{4}{16\,(\sqrt{7}-\sqrt{3}\,)} =$$

$$\frac{1}{4\,(\sqrt{7}-\sqrt{3}\,)}$$

b. $\frac{x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$, al resolver este ejercicio el autor obtuvo como resultado: $\sqrt{x}-\sqrt{2}$

¿Es válido dicho resultado? Sí________, No_________ ¿Por qué?

Verifica el resultado realizando el ejercicio y justificando cada uno de los pasos.

c. Realiza el siguiente ejercicio justificando cada uno de los procedimientos realizados: $\frac{5}{\sqrt{x-1}}$

3.4 TEMA 3 POLINOMIOS

- **Conceptos**

Término algebraico: un término algebraico es una expresión que se compone de un**:**

Signo,

Coeficiente,

Literal, y

Exponente

Por ejemplo, en el término algebraico:

$$7x^5$$

ELEMENTO	NOMBRE	CARACTERÍSTICA

+	**Signo**	Se encuentra siempre a **la izquierda** del término. Indica si el término **es positivo** o si el término **es negativo**; en algunos casos cuando el signo **es positivo** dicho signo **no se coloca**.
7	Coeficiente	Es **el número** que acompaña a **la base** (parte literal). El coeficiente **indica las veces** que se toma **la base** como **sumando**. Cuando el coeficiente es el **número 1**, en la mayoría de las **veces no se coloca.**
X	Parte literal	Por lo general se toma cualquier **letra de alfabeto,** las más utilizadas son: **a, b ,c, x, y, z**
5	Exponente	Indica las veces que se toma **la base** como **factor** (las veces que se multiplica la base por sí misma). Cuando el exponente es el **número 1 no va escrito**.

Actividad: Dados los siguientes términos algebraicos $-4X^3$ Y $3X^2$complete el siguiente esquema:

ELEMENTOS DE $-4X^3$	**NOMBRE**	**ELEMENTOS DE $3X^2$**	**NOMBRE**
		+	Signo
	Coeficiente		
X			
			Exponente

- **Expresión algebraica**

Una **expresión algebraica** es **una combinación** de **letras**, **números** y **signos** de **operaciones**. Las **letras** suelen representar **cantidades desconocidas** y se denominan **variables** o **incógnitas**. Las expresiones algebraicas nos permiten **traducir al lenguaje matemático** expresiones del lenguaje habitual.

Tomado demaralboran.org/wikipedia/index.php/**Expresiones_algebraicas**

- **Clasificación de las expresiones algebraicas.**

NOMBRE	DEFINICIÓN	SUBCLASIFICACIÓN	EJEMPLOS
MONOMIOS	Es una expresión algebraica que consta de un solo término		$3x^4$ $-10ax^2y^3z$
POLINOMIOS	Son expresiones algebraicas compuestas de dos o más términos.	**Se clasifican a su vez en** **Binomios:** es un polinomio que consta de dos términos: **Trinomio**: es un polinomio que consta de tres términos. **Nota:** los demás polinomios se clasifican de acuerdo al número de términos que tengan, si son 4 se llama polinomio de 4 términos y así sucesivamente.	$2x-y$ $a+b$ $\frac{2x}{3}-y^2z$, son binomios. x^2-3y^4+5 $x+y+z$ Son trinomios $5x^2-\frac{4y}{5}-\frac{2a}{3}$

- **Términos semejantes**:

Dos o más términos son **semejantes** cuando:

> - Tienen la **misma parte literal**, es decir tienen las mismas letras, y
> - Las letras tienen los **mismos exponentes**.

Ejemplos:

2a y -a	Son semejantes, tienen la **misma letra (a)** y el **mismo exponente (1)**
-2bz y 56 bz	Son semejantes, tienen **las mismas letras (b y z)** y el **mismo exponente (1).**
$-5a^3b^2$ y $-8a^2b^3$	**No son semejantes**, tienen las **mismas letras (a y b)** pero **diferente exponente**: **a** tiene **3** y **2**; **b** tiene **2** y **3**.

ACTIVIDAD: consulta como se reducen **términos semejantes** y realiza 4 ejercicios.

- **Operaciones con polinomios**.

- **Suma de polinomios:**

> Para sumar dos o más polinomios se procede de la siguiente manera:
>
> - Para los **términos semejantes se suman los coeficientes**. La base pasa al resultado igual; quiere decir que pasa al resultado con el mismo exponente.
> - Términos **no semejantes** pasan al resultado **igual.**
> - Algunos veces se recomienda **colocar los polinomios uno debajo del otro** de manera que los **términos semejantes queden en columna** permitiendo una mejor visión de los mismos.

Suma de Polinomios - ejemplo 01 [Enlace]

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Sume: $7a-5b+5c-d, \quad -2b+2c-4d \quad y \quad -3a+15b-3c$

SOLUCIÓN: en el siguiente esquema encontrarás organizados los términos semejantes y las operaciones indicadas.

POLINOMIOS	SIGNO	TÉRMINO SEMEJANTE	SIGNO	TÉRMINO SEMEJANTE	SIGNO	TÉRMINO SEMEJANTE	SIGNO	TÉRMINO SEMEJANTE
SUMANDO		7a	-	5b	+	5c	-	d
SUMANDO			-	2b	+	2c	-	4d
SUMANDO	-	3a	+	15b	-	3c		
RESULTADO		4a	+	8b	+	4c	-	5d

2. Sume: $\frac{1}{4}x^3 + 3y^3 - \frac{2}{15}x^2y - 4, \quad -\frac{3}{10}x^2y + \frac{13}{4}xy^2 - \frac{1}{7}y^3, \quad -\frac{1}{12}y^3 + \frac{1}{18}xy^2 - 5$

POLINOMIOS	SIGNO	TÉRMINO SEMEJANTE	SIGNO	TÉRMINO SEMEJANTE	SIGNO	TÉRMINO SEMEJANTE	SIGNO	TÉRMINO SEMEJANTE	TÉRMINO SEMEJANTE
SUMANDO		$\frac{1}{4}x^3$	-	$\frac{2}{15}x^2y$			+	$3y^3$	- 4
SUMANDO			-	$\frac{3}{10}x^2y$	+	$\frac{13}{4}xy^2$	-	$\frac{1}{7}y^3$	
SUMANDO					+	$\frac{1}{18}xy^2$	-	$\frac{1}{12}y^3$	- 5
RESULTADO		$\frac{1}{4}x^3$	-	$\frac{13}{30}x^2y$	+	$\frac{119}{36}xy^2$	+	$\frac{233}{12}y^3$	- 9

○ **Diferencia de polinomios:**

Para restar polinomios se debe **cambiar el signo** a todos los términos del polinomio a restar (el **polinomio sustraendo**) y luego se procede como en la suma.

Suma de Polinomios - ejemplo 01 [Enlace]

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. De: $4x - 22y + z$ **reste:** $7x + 5z - 6$

En esta operación se tiene:

4x – 22y + z: **Minuendo**

7x + 5z – 6: **Sustraendo**

Recuerda: Minuendo – sustraendo =Diferencia

La resta quedaría indicada de la siguiente manera:

4x – 22y + z – (7x + 5z – 6)

Recuerde: El signo menos cambia todos los signos bajo el paréntesis.

Por lo tanto: 4x – 22y +z – (7x + 5z – 6) = 4x– 22y + z– **7x**- 5z+ 6, simplificando términos semejantes el resultado sería:

-3x – 22y – 4z + 6

2. realizar el ejercicio siguiente de la misma forma que se realizó el anterior ejemplo:

Restar: $-a^2x+6-5ax^2-x^3$ de: $14a^3+8a^2x+7ax^2-4$

Solución: Realizar el procedimiento, justificando cada paso, **RECUERDE QUE DEBE IDENTIFICAR** el Minuendo y el Sustraendo en el ejercicio.

____

- **Multiplicación de polinomios:**

En la multiplicación de polinomios se presentan tres casos:

1. **MONOMIO MULTIPLICADO POR MONOMIO**

Al multiplicar **monomio** por **monomio** se deben tener en cuenta:

1. **Ley de signos**. Recuerde producto de signos iguales el resultado es positivo y producto de signos diferentes el resultado es negativo.
2. Se multiplican **coeficientes** entre sí.
3. **Letras comunes**, se pone **la misma letra** y se **suman** los **exponentes.**
4. **Letras no comunes**, pasan **al resultado igual**.
5. En la **respuesta final las letras** deben ir en **orden alfabético**. $2ba=2ab$.

Ejemplo 1:

Factor	**signo**	**factor**	**Signos y coeficientes**	**potencias**	**Resultado final**
$-3x^2y^3$	*	$5x^4\,y\,z^3$	-3*5	$x^{2+4}y^{3+1}z^3$	$-15x^6y^4z^3$
$\frac{5}{4}abc$	*	$\frac{2}{3}b^5c^7$	$\frac{5}{4}*\frac{2}{3}$	$ab^{1+5}c^{1+7}$	$\frac{5}{6}ab^6c^8$

					Recuerde simplificar los fraccionarios

Actividad: realizar los siguientes productos, teniendo como modelo los anteriores,

Recuerda simplificar y expresar la respuesta con exponentes positivos.

$-\frac{3}{5}x^{-1}y^{-3}z^{-4}$	*	$\frac{25}{9}x^{3}y^{-5}z^{-7}$			
$-3\,m^{3}n^{5}p^{-2}$	*	$-6m^{-1}n^{-3}p^{6}$			
$\frac{5}{6}a^{2}b^{2}c^{-2}$	*	$\frac{12}{25}a^{-2}b^{-2}c^{2}$			
$\frac{15}{11}s^{-1}p^{-1}q^{-1}$	*	$\frac{22}{45}s^{-1}p^{-2}q^{-3}$			

2. **MONOMIO MULTIPLICADO POR POLINOMIO O POLINOMIO MULTIPLICADO POR MONOMIO**

El **monomio** debe **multiplicar todos los términos del polinomio** siguiendo las leyes anteriores.

Recuerde: propiedad distributiva del producto respecto a la suma:

a* (b + c + d) = a*b + a*c + a*d

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

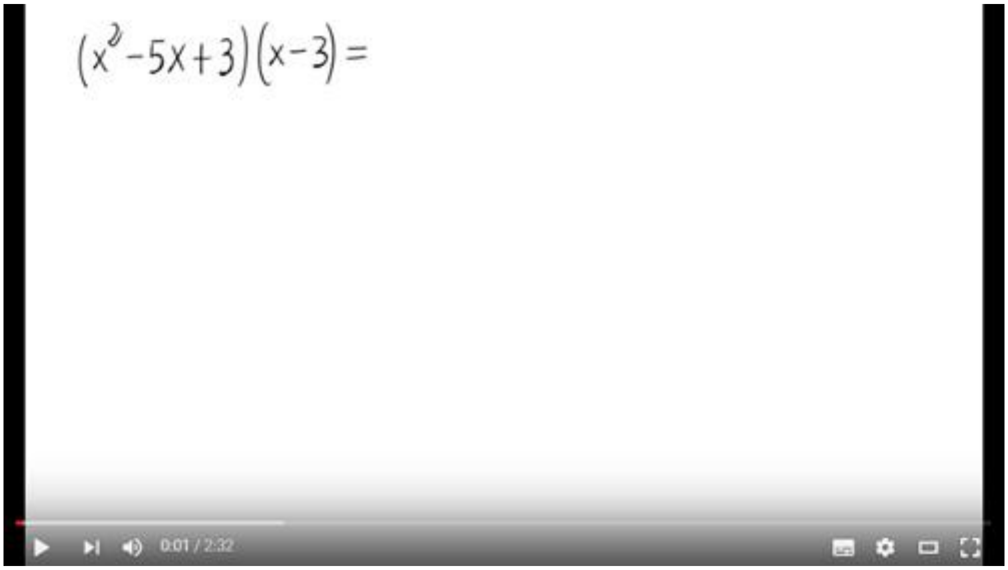
1. $7xy^{2}(5x-6y+7)=7xy^{2}*5x-7xy^{2}*6y+7xy^{2}*7=35x^{2}y^{2}-42xy^{3}+49xy^{2}$

2. $(5z-7y+2xyz)*\left(-2x^{3}yz^{3}\right)=5z*\left(-2x^{3}yz^{3}\right)-7y*\left(-2x^{3}yz^{3}\right)+2xyz*\left(-2x^{3}yz^{3}\right)$
$=-10x^{3}yz^{4}+14x^{3}y^{2}z^{3}-4x^{4}y^{2}z^{4}$

3. **POLINOMIO MULTIPLICADO POR POLINOMIO**

Todos los términos de un polinomio deben multiplicar a todos los términos del otro polinomio, siguiendo las leyes del caso monomio multiplicado por monomio teniendo en cuenta la ley de signos y la reducción de términos semejantes, esto es:

(a + b) * (c * d) = a*c + b*d + b*c + b*d



Producto de polinomios [Enlace]

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $(6x - 3)(2x + 4) = 12x^2 + 24x - 6x - 12 = 12x^2 + 18x - 12$

2. $(3x + 7)(5 - x) = 15x - 3x^2 + 35 - 7x = -3x^2 + 8x + 35$

NOTA: En la multiplicación de **polinomio por polinomio** se presentan algunos **casos particulares**, denominados **productos notables**.

- **PRODUCTOS NOTABLES**

Los productos notables, son fórmulas que permiten efectuar la multiplicación de polinomio por polinomio, por simple inspección. Algunos de los productos notables son:

PRODUCTO	PRODUCTO NOTABLE	DESARROLLO	DESCRIPCIÓN
$(x+y)$ * $(x+y)$	$(x+y)^2$ **Suma elevada al cuadrado.**	x^2 + 2xy + y^2	El cuadrado del primer término, **más (+)** el doble producto del primer término por el segundo, **más (+)** el cuadrado del segundo término.
$(x-y)$ * $(x-y)$	$(x-y)^2$ **Diferencia elevada al cuadrado.**	x^2 - 2xy + y^2	El cuadrado del primer término, **menos (-)** el doble producto del primer término por el segundo, **más (+)** el cuadrado del segundo término.
$(x+y)$ * $(x-y)$	**Diferencia de cuadrados.**	x^2-y^2	Cuadrado del primer término, **menos (-)** el cuadrado del segundo.
$(x+y)$ * $(x+y)$ * $(x+y)$	$(x+y)^3$ **Suma elevada al cubo.**	x^3 + $3x^2$ y + $3xy^2$ +	El cubo del primer término, **más (+)** tres veces el cuadrado del primer término por el segundo, **más (+)**tres veces el primer término por el cuadrado del segundo, **más(+)** el cubo del segundo término **Nota:** (Todos los términos son positivos).
$(x-y)$ * $(x-y)$ * $(x-y)$	$(x-y)^3$ **Diferencia elevada al cubo.**	x^3 -$3x^2$ y + $3xy^2$ - y^3	El cubo del primer término, **menos** **(-)** tres veces el cuadrado del primer término por el segundo, **más (+)**tres veces el primer término por el cuadrado del

			segundo, **menos(-)** el cubo del segundo término **Nota:** (Los signos de los términos van alternos, empezando por **más (+).**

Véase los siguientes videos sobre el tema en la dirección:

Productos notables [Enlace]

Video3 Productos Notables [Enlace]

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

De acuerdo al cuadro de productos notables realizado, efectuar:

1. $(5x-2)^2 = (5x)^2 - 2(5x)(2) + (2)^2 = 25x^2 - 20x + 4$
2. $(3-2x)^3 = (3)^3 - 3(3)^2(2x) + 3(3)(2x)^2 - (2x)^3 = 27 - 54x + 36x^2 - 8x^3$
3. $(3x+4)(3x-4) = (3x)^2 - (4)^2 = 9x^2 - 16$

- **Triángulo de pascal**

Se utiliza para expandir un binomio elevado a la n: $(a+b)^n \vee (a-b)^n$ donde **n** es un **entero positivo.**

GENERALIDADES

El triángulo en su parte superior empieza con 1 y 1, en los extremos siempre se escribe el número 1, los números centrales se forman sumando dos números seguidos.

La **primera fila** del triángulo corresponde a la expansión del binomio:................ $(a \pm b)^1$

La **segunda fila** corresponde a los coeficientes de la expansión del binomio $(a \pm b)^2$

La **tercera** **fila** a:.. $(a \pm b)^3$

La **cuarta** **fila** a:..

$$(a \pm b)^4$$

La **quinta** **fila** a:..

$$(a \pm b)^5$$

Y así sucesivamente.

El término **a** empieza con el exponente **n** y va disminuyendo hasta **cero**

El termino **b** empieza con el **exponente cero** y va aumentando hasta que el exponente es **n**.

Si el signo entre ambos términos **es positivo**, todos los signos del polinomio resultante son **positivos**.

Si el signo entre ambos términos es **negativo**, los signos se van **intercambiando** empezando por **+**

							1								n=0
						1		1							n=1
					1		2		1						n=2
				1		3		3		1					n=3
			1		4		6		4		1				n=4
		1		5		10		10		5		1			n=5
	1		6		15		20		15		6		1		n=6
1		7		21		35		35		21		7		1	n=7

Triángulo de Pascal y binomio de Newton (PARTE 1) [Enlace]

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Expanda los siguientes binomios:

Q

1. $(X-2)^4$ = X^4 - 4* X^3 *2 + 6* X^2 * 2^2 - 4* X * 2^3 + 2^4

Nota: en el ejemplo n = 4 (Se resaltan los coeficientes en rojo, el primero y el último término tienen como coeficiente el 1).

2. $(x-2)^4 = x^4 - 4*x^3*2 + 6*x^2*2^2 - 4*x*2^3 + 2^4$
3. $(5x-3)^5 = (5x)^5 - 5*(5x)^4*3 + 10*(5x)^3*3^2 - 10*(5x)^2*3^3 + 5*(5x)^1*3^4 - 3^5$.

$3125x^5 - 9375x^4 + 11250x^3 - 6750x^2 + 2025x - 243$

- **División entre polinomios:**

En la división de polinomios se presentan tres casos:

- **MONOMIO DIVIDIDO MONOMIO:**

Para dividir monomio entre monomio, se debe tener en cuenta:

1. **Ley de signos**.
2. Se dividen coeficientes entre sí.
3. **Letras comunes.** División de letras iguales, se deja la misma letra y se restan los exponentes.
4. **Letras no comunes,** pasan al resultado igual.
NOTA: se acostumbra dar los resultados siempre con exponentes positivos.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1.

Monomio	÷	**Monomio**	=	**Cociente**	=	**operaciones**	**Simplificando**	**Exponentes positivos**
(($3x^2$ y)	÷	(- $6xy^4$)	=	$\frac{3x^2y}{-6xy^4}$	=	$-\frac{3}{6}x^{2-1}y^{1-4}$	$-\frac{1}{2}x^1y^{-3}$	$-\frac{x}{2y^3}$

2. realiza el siguiente ejercicio de la forma indicada anteriormente:

$$(7ax^3y)\div(5axz)=\frac{7ax^3y}{5axz}=\frac{7a^{1-1}x^{3-1}y}{5z}=\frac{7a^0x^2y}{5z}=\frac{7x^2y}{5z}$$

Monomio	÷	**Monomio**	=	**Cociente**	=	**operaciones**	**Simplificando**	**Exponentes positivos**
	÷		=		=			

- **POLINOMIO DIVIDIDO MONOMIO:**

El monomio debe dividir a todos los términos del polinomio siguiendo las leyes del caso anterior, en otras palabras, se dividen todos y cada uno de los términos del polinomio por el monomio determinado.

Ejercicio de Aprendizaje

$$\left(30xy-60ax^2+35axy\right)\div(-10xz)=\frac{30xy-60ax^2+35axy}{-10xz}=\frac{30xy}{-10xz}-\frac{60ax^2}{-10xz}+\frac{35axy}{-10xz}=$$

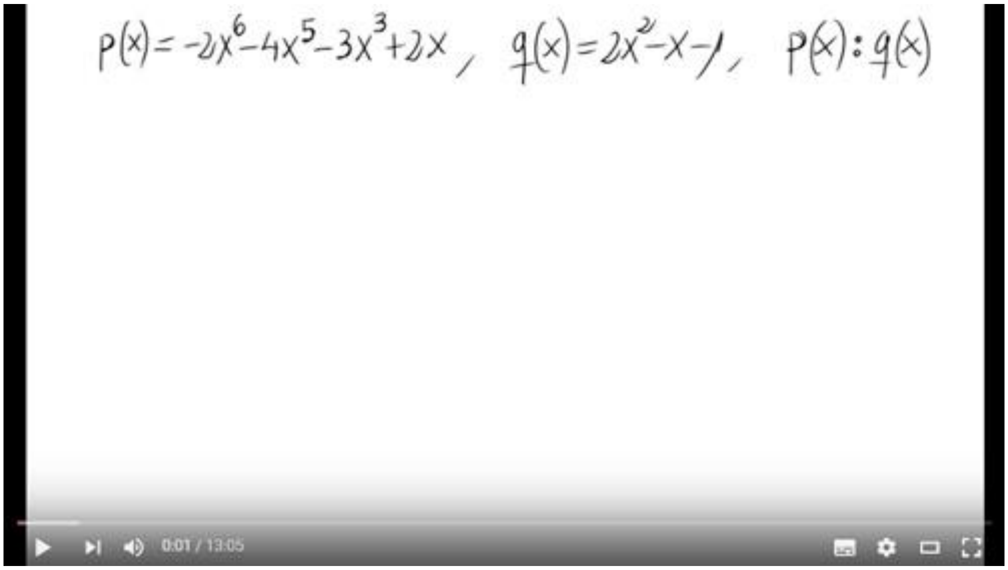
$$-\frac{3y}{z}+\frac{6ax}{z}-\frac{7ay}{2z}$$

- **POLINOMIO DIVIDIDO POLINOMIO (MONOMIO DIVIDIDO POLINOMIO):**

Se pretende dividir un polinomio P(x) entre un polinomio Q(x). Esta división es posible, siempre que el grado de P(x) sea mayor que el grado de Q(x). El grado de un polinomio se refiere al máximo exponente que tiene la variable.

Para efectuar esta división se presentan varias formas; sólo vamos a estudiar dos de ellas: La división larga (o división tradicional) y la división sintética.

POLINOMIO DIVIDIDO POLINOMIO: MÉTODO DIVISIÓN LARGA (O TRADICIONAL).



División de polinomios [Enlace]

Suma de Polinomios - ejemplo 01 [Enlace]

Se explica el método con el siguiente ejemplo:

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Efectúe la siguiente división: $\dfrac{2x^3+3x^2+1}{2x+1}$

SOLUCIÓN

PASOS PARA EFECTUAR LA DIVISIÓN $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

1. Se ordena y se completa con ceros el polinomio P(x). $P(x)=2x^3+3x^2+0x+1$
2. Si es necesario también se ordena el polinomio Q(x)
3. Se divide el primer término de P(x) entre el primer término de Q(x), El resultado es el primer término de C(x). $\dfrac{2x^3}{2x}=x^2$
4. Se multiplica el valor anterior por Q(x) y el resultado se resta de P(x) (restar quiere decir, cambie de signo y efectúe la operación indicada). $x^2*(2x+1)=2x^3+x^2$; como hay que cambiarle de signo, queda: $-2x^3-x^2$ Esto es lo que pusimos en la segunda fila. Debemos efectuar la operación indicada.

5. Al hacer la resta, resulta un nuevo P(x) igual a $\left(2x^2+0x+1\right)$, esto es lo que aparece en la tercera fila; dividimos, el primer término del nuevo P(x) entre el primer término de Q(x), el resultado es el segundo término de C(x). $\dfrac{2x^2}{2x}=x$
6. Se procede como en el paso 4 hasta que el residuo sea cero o hasta que el grado del nuevo P(x) sea menor que le grado de Q(x).
7. La respuesta de la división se debe dar como: $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3+3x^2+0x+1 & 2x+1 \\ \cline{2-2}
-2x^3-x^2 & x^2+x-\frac{1}{2} \\ \hline
+2x^2+0x+1 & \\
-2x^2-\ \ x & \\ \cline{1-1}
-\ \ x+1 & \\
x+\frac{1}{2} & \\ \cline{1-1}
+\frac{3}{2} &
\end{array}
$$

$$C(x)=x^2+x-\frac{1}{2}, \qquad R(x)=\frac{3}{2}, \qquad Q(x)=2x+1$$

$$\frac{2x^3+3x^2+1}{2x+1}=x^2+x-\frac{1}{2}+\frac{3/2}{2x+1}$$

2. Efectúe la división: $\left(x^2-6x+5\right)\div\left(x+7\right)$

SOLUCIÓN

$$
\begin{array}{ccc|c}
x^2 & -6x & +5 & x+7 \\ \cline{4-4}
-x^2 & -7x & & x-13 = C(x) \\ \cline{1-3}
0 & -13x & +5 & \\
 & 13x & +91 & \\ \cline{1-3}
 & 0 & 96 & = R(x)
\end{array}
$$

La respuesta es: $x - 13 + \frac{96}{x+7}$

3. Efectúe la división: $\dfrac{x^3}{5x-2}$

SOLUCIÓN

$$
\begin{array}{cccc|c}
x^3 & +0x^2 & +0x & +0 & 5x-2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +\frac{2}{5}x^2 & & & \frac{x^2}{5} + \frac{2}{25}x + \frac{4}{125} = c(x) \\ \cline{1-4}
0 & \frac{2}{5}x^2 & +0x & & \\
 & -\frac{2}{5}x^2 & +\frac{4}{25}x & & \\ \cline{1-4}
 & 0 & \frac{4}{25}x & +0 &
\end{array}
$$

$$-\frac{4}{25}x \quad +\frac{8}{125}$$

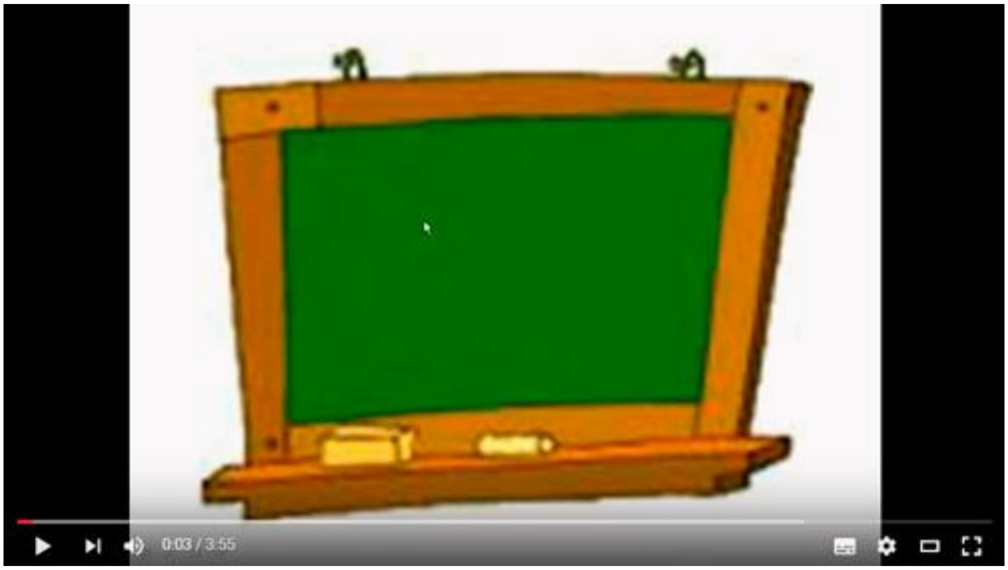
$$0 \qquad \frac{8}{125} \qquad\qquad = R(x)$$

$$\frac{x^3}{5x-2} = \frac{x^2}{5} + \frac{2x}{25} + \frac{4}{125} + \frac{8/125}{5x-2}$$

POLINOMIO DIVIDIDO POLINOMIO METODO: DIVISIÓN SINTÉTICA.

División Sintética - ejemplo 01 [Enlace]

División Sintética - ejemplo 02 [Enlace]



DIVISIÓN SINTETICA [Enlace]

Es un método abreviado que permite dividir un polinomio P(x) entre un polinomio Q(x); siempre que el polinomio Q(x) sea un binomio lineal. Lineal quiere decir que el exponente de la variable sea 1.

Es decir Q(x) debe presentar la siguiente forma: $Q(x) = bx + a$

El procedimiento es el siguiente.

PASOS PARA EFECTUAR LA DIVISIÓN:

a. Si es necesario completamos y ordenamos el polinomio P(x).
b. Colocamos los coeficientes de P(x) en fila, es decir, uno a continuación del otro en forma horizontal.
c. En la parte izquierda de la fila colocamos el número -**a/b**. Que resulta de resolver la ecuación Q(x)=0, es decir de solucionar $bx+a=0$. Al solucionar, resulta **x = - a / b**
d. Dejamos una fila en blanco y debajo de esta fila trazamos una línea horizontal.
e. Se baja el primer coeficiente a una tercera fila.
f. Se multiplica por – **a / b**, el resultado se coloca en la segunda fila debajo del segundo coeficiente y efectuamos la operación que quede indicada.
g. El resultado anterior lo multiplicamos por – **a / b**, el resultado se coloca en la segunda fila debajo del tercer coeficiente; se efectúa la operación indicada. Se repite el proceso hasta el último coeficiente.
h. El último número de la tercera fila corresponde al residuo.
i. Los demás números de la tercera fila son los coeficientes de C(x) que tendrá un grado menor que P(x) y estará ordenado en forma descendente. Todos los términos de C(x) se deben dividir entre **b** (este es el número que acompaña a la x).
j. Debemos dar la respuesta como: $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Efectúe por división sintética: $\dfrac{-2x^3-1+3x^5+4x^2}{x+2}$

$$P(x)=3x^5+0x^4-2x^3+4x^2+0x-1$$

Ordenando y completando queda:

El número – **a / b** resulta de solucionar la ecuación:

x + 2 = 0, **x =-2**, es decir, - **a / b = -2**

Los números de la primera fila (Fila #1) corresponden a los coeficientes de P(x). El primer número es el 3, que es el coeficiente de x^5. El segundo número es el cero, que es el coeficiente de x^4. El tercer número es −2, que es el coeficiente de x^3. El cuarto número es el 4, que es el coeficiente de x^2. El quinto número es el cero, que es el coeficiente de x y el quinto número es −1, que es el término independiente.

Los números de la segunda fila (Fila #2) se obtienen de la siguiente manera:

El número −6 resulta de multiplicar −2 * 3 (3 primer número de la tercera fila).

Al sumar 0 con −6 el resultado es −6 (segundos números de la tercera fila).

El número 12 resulta de multiplicar −2*(-6) (Segundo número de la tercera fila).

Al sumar −2 con 12 el resultado es 10 (tercer número de la tercera fila).

El número −20 resulta de multiplicar −2 *10 (tercer número de la tercera fila).

Al sumar 4 con −20, el resultado es −16 (Cuarto número de la tercera fila).

Y así sucesivamente.

-2	3	0	-2	4	0	-1	$\leftarrow Fila\,\#1$
		-6	12	-20	32	-64	$\leftarrow Fila\ \#2$
	3	-6	10	-16	32	-65=R(x)	$\leftarrow Fila\ \#3$

El primer número de la tercera fila (el número 3) corresponde al primer coeficiente de C(x), que debe empezar en grado cuatro (debe empezar en x^4). El segundo número de la tercera fila corresponde al segundo coeficiente de C(x) y debe tener grado tres, etc. **Todos los coeficientes de c(x) al dividirlos entre uno quedan iguales.**

$$C(x) = 3x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 16x + 32$$

El último número de la tercera fila (-65) corresponde al residuo. $R(x) = -65$

Entonces la respuesta se debe dar como:

$$\frac{-2x^3 - 1 + 3x^5 + 4x^2}{x+2} = 3x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 16x + 32 + \frac{-65}{x+2}$$

2. Efectúe por división sintética: $\left(4x^3 - 2x^2 + 3x + 2\right) \div \left(2x + 1\right)$

Ambos polinomios están ordenados y completos.

- a / b =-1/2 Recuerde que resulta de solucionar la ecuación: 2 x + 1= 0

2x = -1, x = -1/2

-1/2	4	-2	3	2
		-2	2	-5/2
	4	-4	5	-1/2=R(x)
	4/2=2	-4/2=-2	5/2= 5/2	

Los números 4, -4 y -1 son los coeficientes de C(x) y cada uno lo dividimos entre **b**, para este caso los dividimos entre 2, ya que **b = 2**.

Entonces: $C(x) = 2x^2 - 2x + \frac{5}{2}$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 2x^2 - 2x + \frac{5}{2} + \frac{-1/2}{2x+1}$$

3. Efectúe por división sintética: $\left(3x - 5 + 2x^2\right) \div \left(-5 + x\right)$

Ordenando queda: $\begin{array}{l} P(x) = 2x^2 + 3x - 5 \\ Q(x) = x - 5 \end{array}$

El número - **a / b** resulta de solucionar la ecuación: x - 5 = 0, x = 5; es decir - **a / b = 5**

5	2	3	-5
		10	65
	2	13	60=R(x)

C(x)=2x+13

$$\frac{2x^2+3x-5}{x-5}=2x+13+\frac{60}{x-5}$$

4. Efectúe por división sintética: $\left(3x^2+2x^4-3x+\frac{22}{81}\right)\div(3x-2)$

Ordenando y completando queda: $P(x)=2x^4+0x^3+3x^2-3x+\frac{22}{81}$

3x-2 = 0, 3x = 2, x =2/3.

2/3	2	0	3	-3	22/81
		4/3	8/9	70/27	-22/81
	2	4/3	35/9	-11/27	0=R(x)
$\div 3$	2/3	(4/3)/3=4/9	(35/9)/3=35/27	(-11/27)/3=-11/81	

$$C(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{9}x^2+\frac{35}{27}x-\frac{11}{81}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{9}x^2+\frac{35}{27}x-\frac{11}{81}+\frac{0}{3x-2}=\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{9}x^2+\frac{35}{27}x-\frac{11}{81}$$

TEOREMA DEL RESIDUO

El teorema del residuo permite determinar el residuo sin necesidad de hacer la división.

El residuo de la división de un polinomio P(x) entre un binomio $Q(x)=bx+a$ siempre corresponde al valor numérico que toma el polinomio P(x) para $x=-\frac{a}{b}$, es decir, R(x) = P (- a / b). Siempre que **b** no sea igual a cero. El número – a / b se obtiene de la misma manera que para la división sintética.

Procedimiento:

1. Solucione la ecuación que resulta al hacer Q(x) = 0, Es decir $bx+a=0$. La solución es $x=-a/b$.
2. Reemplace el valor anterior en el polinomio P(x). Es decir calcule: $P(x=a/b)$

3. El resultado de dicho reemplazo es el residuo, es decir: $R(x) = P(x = -a/b)$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Sin hacer la división halle el residuo que resulta en la siguiente división:

$$(-3x + x^4 - 1) \div (2x + 1)$$

$$P(x) = -3x + x^4 - 1$$
$$Q(x) = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \rightarrow 2x = -1 \rightarrow x = -1/2$$
$$R(x) = P\left(-\frac{1}{2}\right) = -3(-1/2) + (-1/2)^4 - 1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{16} - 1 = \frac{24 + 1 - 16}{16} = \frac{9}{16}$$
$$R(x) = \frac{9}{16}$$

2. Sin hacer la división halle el residuo que resulta en la siguiente división:

$$(2x^3 + 7x - 5x^2 + 4) \div (x - 3)$$

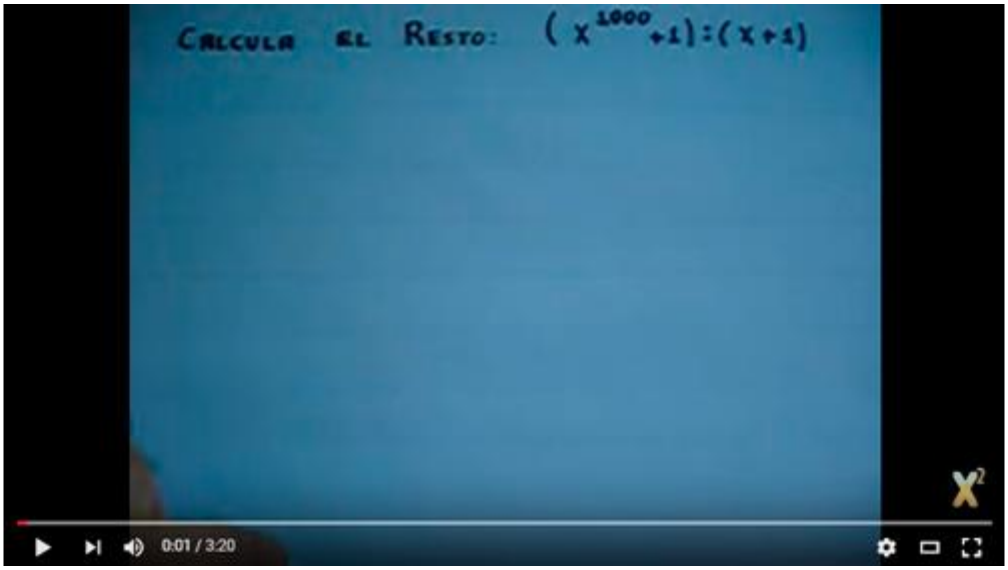
$$P(x) = 2x^3 + 7x - 5x^2 + 4$$
$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$
$$R(x) = P(3) = 2(3)^3 + 7(3) - 5(3)^2 + 4 = 54 + 21 - 45 + 4 = 34$$
$$R(x) = 34$$

3. Queda como ejercicio comprobar el residuo de los ejemplos hechos de división sintética.

Para profundizar a cerca del teorema del residuo puede consultar las siguientes páginas:

TEOREMA DEL RESIDUO - parte1 [Enlace]

Teorema del resto - ejemplo 01 [Enlace]



EJERCICIOS Polinomios. Teorema del Resto [Enlace]

TEOREMA DEL FACTOR

El teorema del factor permite determinar cuándo un polinomio $P(x)$ **es divisible** entre un polinomio $Q(x)$, es decir cuando esta división es exacta.

Esto se presenta cuando **el residuo de esta división es igual a cero**: $R(x) = 0$

El polinomio $Q(x) = ax + b$ es un factor de un polinomio $P(x)$ si el residuo que resulta de la división $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es igual a cero

Si $R(x) = 0$, Tenemos que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{0}{Q(x)} \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x)$$

Por lo tanto, podemos decir que:

$P(x) = C(x) * Q(x)$

Ejercicio de Aprendizaje

Determine si $Q(x) = x+1$ es un factor de $P(x) = x^4 - 5x^2 + 6x - 1$

Para poder determinar esto, debemos hallar el residuo de la división $\frac{P(x)}{Q(x)}$, si este es igual a cero, es porque $Q(x) = x+1$ es un factor de $P(x)$

$$Q(x) = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$R(x) = P(x=-1) = (-1)^4 - 5(-1)^2 + 6(-1) - 1 = -11$$

Como $R(x) \neq 0$, $Q(x) = x+1$ no es factor de $P(x) = x^4 - 5x^2 + 6x - 1$.

NOTA: **El teorema del residuo** permite determinar rápidamente cuando un polinomio P(x) **es divisible exactamente entre un binomio** Q(x)=b x -a. Esto se cumple cuando el **residuo es nulo**, es decir, si $R(x) = P(a/b) = 0$. En consecuencia Q(x) es un factor de P(x). En este caso el otro factor se obtiene efectuando la división y será C(x).

Ejercicios de Aprendizaje

1. Determine si el polinomio $x^2 - x - 6$ tiene como factor a x + 3, si es así determine el otro factor.

$$R(x) = P(-3) = (-3)^2 - (-3) - 6 = 9 + 3 - 6 = 6$$

Como el residuo es diferente de cero x + 3 no es factor de dicho polinomio.

2. Determine si el polinomio $P(x) = 2x^2 + x - 1$ es factorizable por x + 1. Encuentre la factorización.

$$x+1 = 0 \rightarrow x = -1, \quad R(x) = P(-1) = 2(-1)^2 + (-1) - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$$

Como el residuo es cero podemos afirmar que x + 1 es un factor del polinomio P(x), para encontrar el otro factor debemos efectuar la división.

-1	2	1	-1
		-2	1
	2	-1	0 = R(x)

$C(x) = 2x - 1$. Este es el otro factor. Entonces, P(x) factorizado queda:

$2x^2 + x - 1 = (x+1)*(2x-1)$

Ejercicios de Entrenamiento

1. **Utilizando sus propias palabras escriba la regla o ley que se debe utilizar para expandir un binomio elevado a la potencia 7.**
2. **Utilizando sus propias palabras explique el método utilizado para dividir, utilizando la división sintética, dos polinomios.**
3. **Expanda los siguientes binomios:**
   - **a.** $(2x-3)^6$
   - **b.** $(3x-5)^4 + (3x+5)^4$
4. **Efectúe las siguientes divisiones utilizando división larga y división sintética:**
   - **a.** $\dfrac{10x^2 - 3x + 7}{x-3}$
   - **b.** $\dfrac{4x^3 - 8x^2 - 10x + 4}{2x+1}$
   - **c.** $\dfrac{8x^3 - 27}{2x-3}$
5. **Utilizando el teorema del residuo, determine el residuo de las divisiones anteriores y compárelos con los obtenidos en cada una de las divisiones.**
6. **Explique con sus propias palabras cuando un polinomio** $Q(x)$ **es factor de otro polinomio** $P(x)$

NOTA: El teorema del residuo permite determinar rápidamente cuando un polinomio P(x) es divisible exactamente entre un binomio Q(x)=b x -a. Esto se cumple cuando el residuo es nulo, es decir, si $R(x) = P(a/b) = 0$. En consecuencia Q(x) es un factor de P(x). En este caso el otro factor se obtiene efectuando la división y será C(x).

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Recuerde que:

- **El teorema del residuo**

Permite determinar rápidamente cuando un polinomio P(x) **es divisible exactamente entre un binomio** Q(x)=b x -a. Esto se cumple cuando el **residuo es nulo**, es decir, si $R(x) = P(a/b) = 0$. En consecuencia Q(x) es un factor de P(x). En este caso el otro factor se obtiene efectuando la división y será C(x).

3.5 TEMA 4 FACTORIZACIÓN

- **Definición de factorización**

Es una transformación de sumas y/o restas en productos equivalentes. La factorización es un proceso inverso a la multiplicación de polinomios. Lo que se busca es que dado un polinomio convertirlo en una expresión equivalente, pero escrita como un producto o multiplicación indicada de sus factores primos. (http://www.youtube.com/watch?v=Mv6kHJE1cHc)

Factorización Enlace

A continuación se describe la forma de factorizar algunas expresiones.

- **Algunos casos de factorización**

FACTOR COMÚN:

Siempre que se factorice se debe evaluar primero este caso.

El factor común es una cantidad que se encuentra presente en todos los términos de la expresión a factorizar. El factor común resulta de tomar **letras** y **números** comunes con su **menor exponente.**

Sé factoriza por factor común cuando se coloca el factor común fuera de un paréntesis y dentro del paréntesis se colocan todos los términos del polinomio divididos previamente entre el factor común.

Caso Uno - Factor Común [Enlace]

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Factorice las siguientes expresiones:

1. $a^2 + 5a$

SOLUCIÓN

Se puede ver que **a** se encuentra en ambos términos, se debe tomar con el menor exponente; por lo tanto **el factor común es a**. Debemos colocar a la letra **a** fuera de un paréntesis y dentro del paréntesis lo que resulta cuando se divide $a^2/a = a$ y lo que resulta cuando se divide a / a = 1. La factorización queda.

$a(a+5)$

Esquemáticamente:

Polinomio	Factor común	Dividimos a^2 por a	Dividimos 5a por a	Queda factorizado	En general
$a^2 + 5a$	a	$\frac{a^2}{a}$ = a	$\frac{5a}{a} = 5$	a (a + 5)	a^2 + 5a = a (a + 5)

2. $12m^2n + 24m^3n^2 - 36m^4n^3$

SOLUCIÓN

Para determinar el (o los) números comunes, estos se deben escribir en factores primos:

NÚMERO	DESCOMPOSICIÓN	FACTORES PRIMOS
12	2 * 2 * 3	2^2 * 3
24	2 * 2 * 2 * 3	2^3 * 3
36	2 * 2 * 3 * 3	2^2 * 3^2

- El factor común numérico sería: $2^2 * 3 = 12$
- El factor común literal sería: m^2n
- Factor común, entonces: $12m^2n$

Realizando la factorización:

En el polinomio: $12m^2n + 24m^3n^2 - 36m^4n^3$, se divide cada término por el factor común $12m^2n$:

$12m^2n + 24m^3n^2 - 36m^4n^3$

$\frac{12m^2n}{12m^2n} + \frac{24m^3n^2}{12m^2n} - \frac{36m^4n^3}{12m^2n}$, simplificando los coeficientes y restando exponentes, tenemos:

$12m^2n(1 + 2mn - 3m^2n^2)$, por lo tanto:

$$12m^2n + 24m^3n^2 - 36m^4n^3 = \mathbf{12m^2n(1 + 2mn - 3m^2n^2)}$$

3. Factorice el siguiente polinomio, indicando paso a paso el proceso realizado (tome como guía los ejemplos anteriores.

$6ax^2 - 9a^3bx + 10a^5b^2z \quad R: a(6x^2 - 9a^2bx + 10a^4b^2z)$

- **FACTOR COMÚN POR AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS:**

En este método los términos del polinomio a factorizar se deben agrupar de tal manera que permitan sacar un factor común diferente a cada grupo y posteriormente volver a sacar otro factor común a la expresión resultante (si es posible).

Caso dos - Factor común por agrupación ejem 01 [Enlace]

Caso dos - Factor común por agrupación ejem 03 [Enlace]

Ejercicios de Aprendizaje

1. Factorice.

$$2x^2 - 3xy - 4x + 6y$$

SOLUCIÓN

Como no hay factor común en todos los términos, se pueden agrupar de la siguiente manera:

$(2x^2 - 4x) - (3xy - 6y)$

Recuerde: cuando se precede un paréntesis del signo menos los términos involucrados en él cambian de signo.

Ahora factorizando cada grupo por separado:

Factor común del primer paréntesis: 2x

En el primer paréntesis, dividiendo por 2x:

$\frac{2x^2}{2x} - \frac{4x}{2x} = (x - 2)$

Factor común del segundo paréntesis: 3y

En el segundo paréntesis, dividiendo por 3y:

$\frac{3xy}{3y} - \frac{6y}{3y} = (x - 2)$

Queda entonces de la siguiente manera:

2x (x - 2) – 3y (x – 2), analizando el resultado obtenido, observamos que hay un factor común polinomio:**(x – 2)**, se divide cada término entre el factor común, de la siguiente manera:

$\frac{2x(x-2)}{(x-2)} - \frac{3y(x-2)}{(x-2)} = (x - 2)(2x - 3y)$

Por lo tanto:

$$\boxed{2x^2 - 3xy - 4x + 6y = (x-2)(2x-3y)}$$

2. A continuación encontrará un polinomio para factorizar, realice el procedimiento teniendo el ejemplo anterior como base y complete los espacios en blanco:

$\mathbf{3}ax - \mathbf{3}x + \mathbf{4}y - \mathbf{4}ay$

SOLUCIÓN:

Agrupando queda:

Factor común en cada Paréntesis

- **Primer paréntesis: __________**
- **Segundo paréntesis:_________**

En el primer paréntesis el factor común es _____, se divide cada término del paréntesis entre: ________, quedaría:

—¿Signo?—=______ ¿signo? ________

En el segundo paréntesis el factor común es________, se divide cada término del paréntesis entre _________, quedaría:

—¿Signo?—= ______ ¿signo? ________

La expresión que da: $\mathbf{3}x(a - \mathbf{1}) - \mathbf{4}y(a - \mathbf{1})$

El factor común en esta última expresión es: ------------------

Se divide cada término entre: ______________________, quedaría entonces:

— ¿Signo? — = --------- ¿Signo? ------------

3ax – 3x + 4y – 4ay = (   ) * (   )
Nota: completar los paréntesis con la respuesta correcta

- **FACTORIZACIÓN DE BINOMIOS:**

En la factorización de binomios se presentan varias posibilidades

- **DIFERENCIA DE CUADRADOS:**

Una diferencia de cuadrados se identifica de la siguiente manera:

- Hay dos términos.
- Los términos están separados por signo menos.
- Los coeficientes tienen raíz cuadrada (raíz cuadrada exacta, si vamos a factorizar en el campo de los números enteros).
- Los exponentes son pares.

  En forma esquemática: x^n - y^n

  con n número par (2, 4, 6, ...)

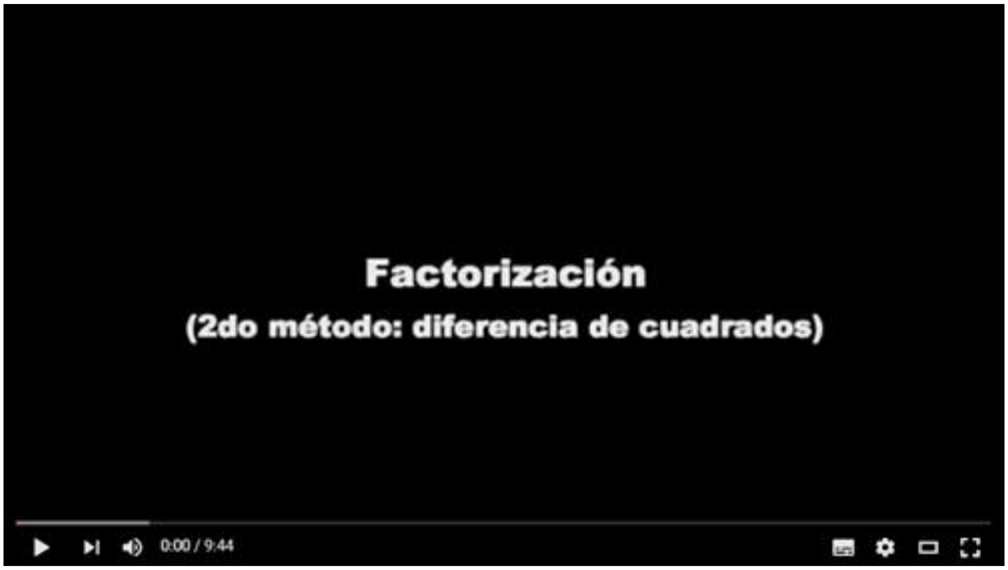
Regla para factorizar una diferencia de cuadrados:

Nota: evalúe primero si existe un factor común, si no existe proceda de la siguiente manera:

1. La diferencia de cuadrados se factoriza como el producto de dos paréntesis (dos factores).
2. En cada paréntesis se coloca la raíz cuadrada del primer término y la raíz cuadrada del segundo término, en un paréntesis separados por el signo + (más) y en el otro paréntesis separados por el signo - (menos). Esto es:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = (x - y)(x + y)$$

En general: una diferencia de cuadrados es igual al producto de la suma de sus raíces cuadradas, multiplicado por la diferencia de las mismas.



Factorización: Diferencia de cuadrados [Enlace]

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. **Factorice:**

$\mathbf{16x^2 - 25y^4}$

SOLUCIÓN:

No hay factor común, pero podemos ver que el binomio corresponde a una diferencia de cuadrados: **16** y **25** tienen raíz cuadrada, el exponente de **x** y el exponente de **y** son **pares.**

Analicemos:

$\sqrt{16x^2} = 4x$

$\sqrt{25y^4} = 5y^2$, entonces:

$$16x^2 - 25y^4 = (4x + 5y^2)*(4x - 5y^2)$$

2. Teniendo como base el ejemplo 1, realiza los siguientes ejercicios, describiendo el proceso realizado:

a. $100 - x^2y^6$

b. $8x^6 - 50y^{12}$

Nota: observe que 8 y 50 no son cuadrados perfectos, esto, es, no tienen raíz cuadrada exacta en los números enteros. ¿Qué debes hacer primero? Recuerda la regla para factorizar una Diferencia de Cuadrados, si no te acuerdas, revísala.

c. $x^4 - 16$

d. $\frac{16}{49}x^4 - \frac{64}{9}y^4z^2$

NOTA: SUMA DE CUADRADOS: una suma de cuadrados no es factorizable en los números enteros por este método.

- Una suma de cuadrados se identifica de la siguiente manera:
- Hay dos términos.
- Los términos están separados por signo más.
- Los coeficientes tienen raíz cuadrada.
- Los exponentes son pares.

Ejemplo 2:

$x^4 + y^4$

SOLUCIÓN:

No hay factor común y no se puede factorizar en los números enteros por ser una suma de cuadrados, pero si es posible factorizarlo en el campo de los números Reales.

- **SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS:**

Una diferencia o una suma de cubos se identifican de la siguiente manera:

- Hay dos términos.
- Los términos están separados por signo más (cuando es suma de cubos) o por signo menos (cuando es diferencia de cubos).
- Los coeficientes tienen raíz cúbica.

- Los exponentes son divisibles entre tres.

Regla para factorizar una diferencia o una suma de cubos:

1. Evalué primero factor común.
2. Se factoriza como el producto de dos paréntesis (dos factores).
3. **En el primer paréntesis**: se coloca la raíz cúbica del primer término y la raíz cúbica del segundo término separadas por el mismo signo. Si es suma de cubos el signo que los separa es **más**, si es diferencia de cubos el signo que los separa es **menos**.
4. **En el segundo paréntesis:**
   - Si es $(a+b)^3$: se coloca el cuadrado de la primera raíz cúbica **menos** el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz cúbica. El segundo paréntesis no es factorizable, así:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\mathbf{3}} = (a + b)^*(\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}} - ab + \boldsymbol{b}^{\mathbf{2}})$$

$$(a+b)^3 = (a + b)^*(a^2 - ab + b^2)$$

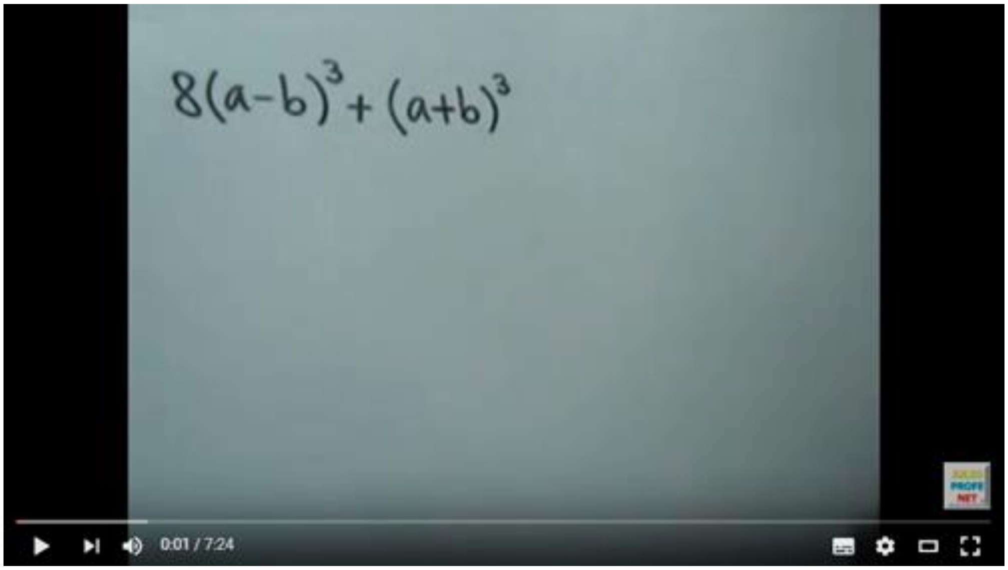
   - Si es $(a-b)^3$: se coloca el cuadrado de la primera raíz cúbica **más** el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz cúbica así:

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^{\mathbf{3}} = (a + b)^*(\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}} + ab + \boldsymbol{b}^{\mathbf{2}})$$

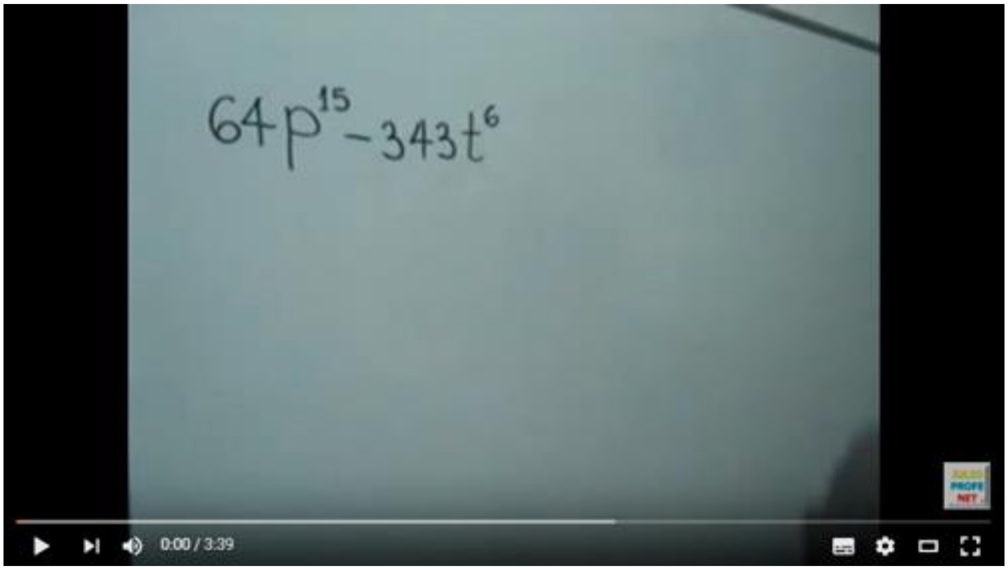
En general:

$$(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^{\mathbf{3}} = (a \pm b)^*(\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}} \mp ab + \boldsymbol{b}^{\mathbf{2}})$$

Nota: el segundo paréntesis no es factorizable.



Factorización de una Suma de Cubos Perfectos - Ejercicio 2 [Enlace]



Factorización de una Diferencia de Cubos Perfectos - Ejercicio 1 [Enlace]

EJERCICIO DE APRENDIZAJE

Factorice el siguiente polinomio:

$$8x^6 - y^6$$

No hay factor común. Este binomio corresponde a una diferencia de cubos: 8 tiene raíz cúbica, el exponente de **x** es divisible entre tres y el exponente de **y** es divisible entre tres, entonces:

- $\sqrt[3]{8x^6}$ = $\sqrt[3]{2^3x^6}$ = $\sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{x^6}$ = $2^{\frac{3}{3}}x^{\frac{6}{2}}$ = $2x^2$

- $\sqrt[3]{y^{12}} = y^{\frac{12}{3}} = y^4$, entonces,

$8x^6 - y^{12} = (2x^2 - y^4) * [(2x^2)^2 + (2x^2)(y^4) + (y^4)^2] =$

$$(2x^2 - y^4)(4x^4 + 2x^2y^4 + y^8)$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO:

Factoriza los siguientes polinomios, teniendo como base el ejemplo anterior y la respectiva teoría:

- $343x^3 + 512y^6$

Solución:

____

$5x^3 + 135$

Solución:

Caso Nueve - Suma o diferencia de cubos ejemplo 01 [Enlace]

- **FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS:**

- **TRINOMIO DE LA FORMA:** $x^2 + bx + c$ **:**

Se puede ver que en este trinomio el coeficiente de x^2 es uno, También que la variable del término del medio es la $\sqrt{\;}$ del primer término, si no es así, este método no se puede utilizar.

Un trinomio de este tipo se factoriza como: $x^2 + bx + c = (x+d)(x+e)$

Factorización: Trinomios de la forma x2 + bx + c [Enlace]

Los pasos para efectuar la factorización son los siguientes:

1. Evalúe primero factor común.
2. Se ordena el trinomio en forma descendente.
3. Si el primer término es negativo, se debe factorizar el signo menos.
4. El trinomio se factoriza como el producto de dos paréntesis.
5. En cada paréntesis se escribe la raíz cuadrada del primer término del trinomio y se buscan dos números que cumplan las siguientes condiciones: que al multiplicarlos den el tercer término del trinomio (m*n = c) y que al sumarlos den el coeficiente del término del medio (m+n = b).

En general

$$x^2 + bx + c = (x + m) * (x + n)$$

Dónde:

m +n = b

m * n = c

El signo del segundo término va en el primer paréntesis, en este caso es +.

En el segundo paréntesis (entre x y n) va el producto del signo del segundo término por el signo del tercer término, en este caso es + * + = +

Factorice.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE:

Factorice el siguiente polinomio:

1. x^2 + 5x + 6

SOLUCIÓN: obtenemos la raíz cuadrada del primer término:

$\sqrt{x^2}$ = x, se coloca en ambos paréntesis

Se debe buscar dos números **(m y n)** que al multiplicarlos **(m*n)** de cómo resultado el número **6** y que al **sumarlos (m + n)** dé como resultado el número 5. Después de descomponer el 6 en sus factores primos, tenemos: 6 = 1*2*3, por lo tanto dichos números son +2 y +3, ya que **2*3=6** y **2+3=5**, cumplen ambas condiciones. Entonces la factorización queda:

x^2 + 5x + 6 = (x + 3)*(x + 2)

Factoriza el siguiente trinomio, mostrando paso a paso su desarrollo:

2. x^2 – 7x + 12,

Solución

Se deben buscar dos números (m y n) que sumados o restados **(m + n o m – n)** dé como resultado el número **-7** y multiplicados **(m * n)** dé como resultado **12.**

Descomponemos el número 12 en sus factores primos: **12 = 1*2*2*3 = 1*2^2*3 = 4*3**

Los números buscados son 3 y 4:

-3 – 4 =-7
(-3) * (-4) = 12

Obtenemos la raíz cuadrada del término cuadrático:

$\sqrt{x^2}$ = x, se coloca en ambos paréntesis; en el primer paréntesis va el signo del segundo término, o sea menos **(-),** en el segundo paréntesis va el producto del signo del segundo término por el signo del tercer término, **(-)* (+) = -**

(x – 4) * (x – 3)

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

En los siguientes ejercicios encontrarás la solución de cada uno de ellos, pero debes realizar el proceso indicado anteriormente y verificar si las respuestas son correctas, en caso contrario deben corregirse:

1. **x^2 + 2x -15 = (x – 5)*(x + 3)**

Solución:

2. **x^2 – 5x – 14= (x -7)*(x -2)**

Solución:

x^4 - $5x^2$-50 = (x^2– 10)*(x^2 + 5)

Solución:

x^2 + 6x + 9 = (x + 3)*(x + 3) = $(x+3)^2$

Solución:

x^2 – 14x + 49 = (x – 7)*(x + 7)

Solución:

- **TRINOMIO DE LA FORMA:**

ax^2 + bx + c

Se puede ver que en este trinomio el coeficiente de x^2 es diferente de uno($\mathbf{a} \neq \mathbf{1}$), es un número $\mathbf{a} \in \boldsymbol{Z}^{+}$.

Para factorizar un trinomio de esta forma se debe completar el cuadrado del primer término, esto se logra multiplicando y dividiendo todo el trinomio por **a.**

Pasos para efectuar la factorización:

1. Se debe indicar la multiplicación y la división por **el número a.** No simplifique en este paso.
2. Se efectúa la multiplicación en el primero y en el tercer término, para el segundo término la multiplicación se debe dejar indicada como **b (ax).** No simplifique en este paso.
3. Se factoriza como en el caso anterior. Todavía no se simplifica.
4. Después de esto se debe factorizar por factor común en uno o en ambos paréntesis. Ahora si se simplifica.

http://www.youtube.com/watch?v=Ltae-ImPBPY&feature=related

Factorización: Trinomios de la forma (ax2 + bx + c) 01 Enlace

Factorice:

Ejercicio de aprendizaje:

Factorice el siguiente polinomio

$6x^2 - 7x$ - 3

SOLUCIÓN

Nota: se debe multiplicar y dividir todo el trinomio por el coeficiente de x^2 en este caso por el número 6.

$6x^2 - 7x$ - 3 = $\frac{6}{6}(6x^2 - 7x$ - 3) = $\frac{36x^2 \quad -7(6x) \quad -18}{6}$

Recuerde: la multiplicación se efectúa sólo para el **primer y el tercer término**, en el segundo se debe dejar indicada como **b (ax)** por esto quedó indicado **−7(6x).**Recuerde también que en este paso no se simplifica.

Después de esto se factoriza como en el caso anterior:

$\sqrt{36x^2}$ = 6x, se coloca en cada paréntesis.

Se necesitan dos números que al sumarlos o restarlos dé como resultado el número -7 y al multiplicarlos dé como resultado el número -18.

Se descompone el número 18 en sus factores primos: 18 = 1*2*3*3 = 1*2*3^2.

Los números son 9 y 2, pero quedarían -9 y +2:

-9 + 2 = -7, y

(-9)*(+2) = -18

$\frac{36x^2 \quad -7(6x) \quad -18}{6} = \frac{(6x-9)*(6x+2)}{6}$

Debe factorizar por factor común, bien sea en uno o en ambos paréntesis, en este caso, en el primer paréntesis es **3** y en el segundo es **2**, queda entonces:

$\frac{(6x-9)*(6x+2)}{6} = \frac{3(2x-3)*2(3x+1)}{6}$, simplificando quedaría

$(2x - 3) * \quad (3x + 1)$, entonces

$6x^2 - 7x$ - 3 = $\mathbf{(2x - 3) * \quad (3x + 1)}$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO:

Teniendo como modelo el ejemplo realizado, efectúe los siguientes ejercicios justificando cada uno de los procesos realizados.

1. $20z^2 + z - 1$

Solución:

____

2. $-3x+20-9x^2$

Solución:

____

3. $4x^2-12x+9 \quad R:(2x-3)^2$

Solución:

____

4. $10x^8+29x^4+10 \quad R:(2x^4+5)(5x^4+2)$

Solución:

____

- **Factorización por evaluación.**

Este método utiliza el teorema del residuo y la división entre polinomios.

El teorema del residuo permite determinar el factor Q(x), y la división entre polinomios permite determinar el factor C(x).

El teorema del residuo permite determinar rápidamente cuando un polinomio P(x) es divisible exactamente entre un binomio **Q(x) = x - a.** Esto se cumple cuando el residuo es nulo, es decir, si **R(X) = P(X = a)= 0**. En consecuencia **Q(x)** es un factor de **P(x).** En este caso el otro factor se obtiene efectuando la división y será **C(x).**

En otras palabras, al reemplazar por uno de los factores primos del término independiente, se obtiene cero como residuo, decimos que en ese valor hay un factor de dicho polinomio.

Este método es práctico utilizarlo cuando es necesario factorizar polinomios de grado tres o superior y ninguno de los otros métodos conocidos funciona.

Pasos para desarrollar el método:

1. Determinar los posibles valores de **x** que hagan **cero el residuo**. Estos números se buscan en P(x). Son los factores primos del término independiente de P(x) (el término o número que no tiene **x**).
2. Evaluamos el residuo con estos números tomando uno a la vez.

3. Sí para x = a, R(x = a) = 0, es porque Q(x) = x - a es un factor de P(x).
4. El otro factor se obtiene efectuando la división y es C(x). De tal manera que P(x) = C(x)*Q(x).

Caso Once - Factorización por evaluación ejemplo 01 Enlace

Factorización por evaluación ejemplo 02 videosdematematicas.com Enlace

EJERCICIO DE APRENDIZAJE

Factorice: $x^3 + 2x^2 - x - 2$ Tomado de (Baldor, 1996).

SOLUCIÓN

Los factores primos de **2** son:

$\pm 1, \ \pm 2.$

Entonces los posibles factores de P(x) son:

Factores primos	para	Posibles factores
x = 2	→	x - 2
x =-2	→	x + 2
x = 1	→	x - 1
x = -1	→	x + 1

Nota: tomamos los factores primos y empezamos a reemplazar cada uno de ellos en P(x), hasta encontrar el cero como residuo, para ir determinando los factores de dicho polinomio

Para **x - 2** es decir con **x = 2,** utilizamos el teorema del residuo:

R(x) = P (2) = $(\mathbf{2^3})$ + $\mathbf{2(2^2) - (2) - 2}$ = 8 + 8 − 2 − 2 = 12 $\neq \mathbf{0}$, por lo tanto x = 2 o Q(X) = x -2 no es un factor del polinomio P(x).

Reemplacemos con otro factor primo:

Para **x - 1,** es decir con **x = 1.**

R(x) = P (1) = $(1)^3 + 2(1)^2 - (1) - 2$ = 1+ 2 − 1 − 2 = 0, como el residuo es cero quiere decir que Q(x) = x − 1, es un factor del polinomio P(X).

Ya se obtuvo un factor del polinomio P(x), se efectúa la división sintética para hallar el otro factor.

Nota: recuerda los pasos a seguir en este tipo de división, en caso contrario, repasa el tema nuevamente, consultando el tema en el capítulo 1.3, operaciones con polinomios, de este mismo módulo

1	1	2	-1	-2
		1	3	2
	1	3	2	0=R(x)

Luego de efectuar la división se obtuvo como cociente:

C (x) = $1x^2 + 3x + 2 = x^2 + 3x + 2$

Sabemos que P (x) = Q (x) * C (x), entonces:

P (x) = (x − 1) * (x^2 + 3x +2)

Factorizando: (x^2 + 3x +2), *trinomio de la forma* $x^2 + bx + c$, resulta:

(x^2 + 3x +2) = (x + 2) * (x + 1)

Concluimos entonces que:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1) * (x + 2) * (x + 1)$$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Factorice: P(x) = $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

SOLUCIÓN: en el desarrollo del ejercicio encontrarás algunos interrogantes y espacios en colores que debes diligenciar justificando tu respuesta.

Los factores de **12** son: $\pm(1,2,3,4,6,12)$

Factores primos	para	Posibles factores
x = 1	→	x - 1
	→	x + 1
x = 2	→	x - 2
x = - 2	→	
X = 3		X - 3
	→	X + 3
X = 4	→	X - 4
X = -4	→	
X = 6	→	X - 6
X = -6	→	
	→	X - 12
X = -12	→	X + 12

- Prueba para **x - 1**, es decir para **x = 1**

$$p(1) = (1)^3 - 3(1)^2 - 4(1) + 12 = 1 - 3 - 4 + 12 = 6$$

El residuo es **6**$\neq$ **0**, por lo tanto, **x – 1**no es factor del polinomio P(x)

➢ Prueba para **x+1**, es decir para __________

$$p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 4(-1) + 12 = -1 - 3 + 4 + 12 = 12$$

El residuo es **12** $\neq$ **0**, (x + 1) no es factor del polinomio P(x).

➢ Prueba para__________, es decir para **x = 2**

$$p(2) = (2)^3 - 3(2)^2 - 4(2) + 12 = 8 - 12 - 8 + 12 = 0$$

Como **el residuo es cero**, quiere decir que **x-2** es un factor del polinomio P(x).

Haciendo la división se encuentra el otro factor.

2	1	__?__	-4	12
		2	-2	-12
	1	-1	__?__	0=R(x)

El otro factor es: $1x^2 - 1x - 6 = x^2 - x - 6$

$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 =$ **(x –2) * (**$x^2 - x - 6$), pero

$x^2 - x - 6 = (x - ?) * (x + ?)$, entonces:

$$\boxed{x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = \mathbf{(x-2)} * (x - ?) * (x + ?)}$$

Nota:

Conx = - 2, o sea, **x +2** = 0

X = 3, o sea**, x – 3** = 0

También se podría haber reemplazado y obtendríamos como residuo cero, como lo muestra la solución, también son factores de P(x).

PBX: 322 10 00 / Línea Gratuita Nacional: 018000 410 203 Calle51No. 51 27 / Medellín - Colombia Síguenos: URemington Remington_Edu
www.uniremington.edu.co

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Con sus propias palabras explique en qué consiste la factorización.

2. Con sus propias palabras explique la forma de factorizar utilizando factorización por evaluación.

3. Factorice los siguientes polinomios justificando paso a paso el proceso efectuado, toma como modelo los ejemplos desarrollados, los numerales f y g factorizarlos utilizando la descomposición por evaluación:

a. $5x^6 - 15x^4$

b. $15x^2 + 2xy - 8y^2$

c. $12wz + 18xz - 8wy - 12yz$

d. $216x^{12} + 64y^6$

e. $125 - x^3y^{18}$

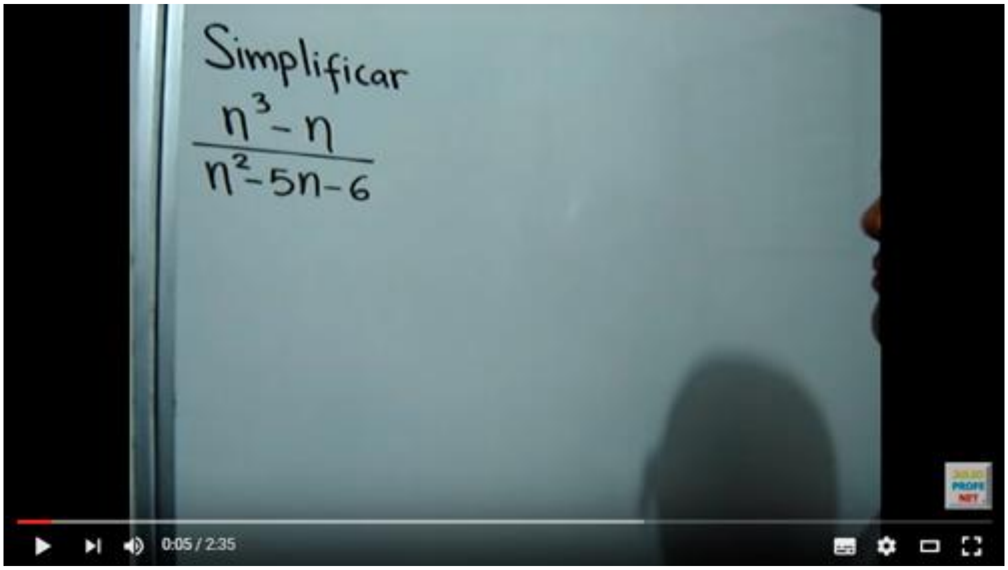
f. $4x^4 + 4x^3 - 81x^2 - x + 20$

g. $9x^4 - 3x^3 - 386x^2 + 508x - 168$

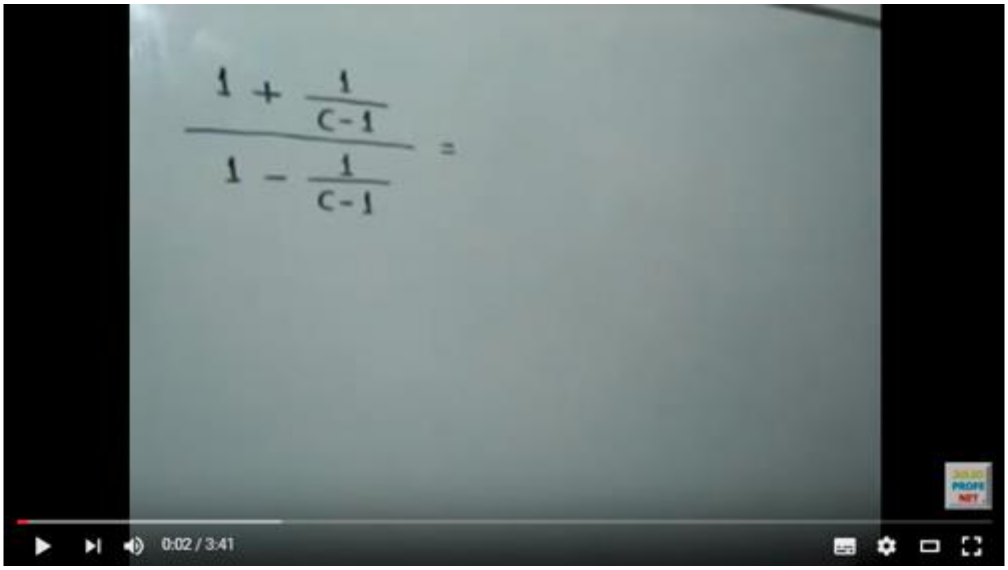
3.6 TEMA 5 FRACCIONES ALGEBRAICAS

- **Simplificación de Fracciones Algebraicas**

Cuando se efectúan operaciones con expresiones racionales, la factorización juega un papel muy importante, ya que le ayuda a simplificar la operación y a economizar pasos para que Las operaciones entre ellos se hagan más fáciles. Observe inicialmente algunas simplificaciones de expresiones algebraicas racionales.



Simplificación de fracciones algebraicas - Ejercicio 1 Enlace



Fracciones complejas - Ejercicio 1 Enlace

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Simplifique

$$\frac{x^2 - 9}{2x - 6}$$

Solución:

Nota: se debe factorizar todo aquello que se pueda factorizar, tanto en el numerador como en el denominador.

Factorizando:

En el numerador: tenemos una diferencia de cuadrados (recuerda las formas de factorización):

$x^2 - 9$ = (x + 3)*(x – 3)

En el denominador: tenemos un factor común numérico:

$2x - 6 =$ 2 (x -3),

La fracción quedaría:

$\frac{x^2-9}{2x-6} = \frac{(x+3)*(x-3)}{2\ (x-3)}$, simplificando (dividiendo numerador y denominador por la misma expresión **x – 3,** tenemos:

$$\frac{x^2-9}{2x-6} = \frac{(x+3)}{2}$$

2. Simplifique la siguiente fracción algebraica, complete el ejercicio diligenciando los espacios en blanco o con un interrogante:

$\frac{n^2+3n+2}{n^2+6n+8}$

Solución: tanto en el numerador como en el denominador tenemos trinomios de la forma:

$x^2 + ? + ?$, por lo tanto:

$$\frac{n^2+3n+2}{n^2+6n+8} = \frac{(n+?)*(n+?)}{(n+?)*(n+?)} = ¿\frac{(n+3)}{(n+2)}?$$

¿Sí será válida esta respuesta? Si no lo es ¿cuál sería la respuesta correcta?

3. Simplifique la siguiente fracción algebraica, justificando cada uno de los procedimientos realizados:

$(h^2-2h+1) * \frac{(h+1)}{(h^3-1)}$

Solución:

Recuerda: se factoriza el numerador y el denominador y se simplifica.

Enlaces para fracciones algebraicas.

http://www.youtube.com/watch?v=hKklEPscYPY

http://www.youtube.com/watch?v=AzNDxSL2uYs&feature=fvst

http://www.youtube.com/watch?v=a27qaZRyJL0&feature=related

http://www.youtube.com/watch?v=evNxP_OKGos&feature=related

Operaciones con fracciones algebraicas

- **Suma y resta**

Para realizar una suma o diferencia de fracciones algebraicas, se debe buscar el **mínimo común múltiplo** de los denominadores, como son expresiones algebraicas éstas se deben factorizar, tomando luego expresiones comunes y no comunes con el mayor exponente

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Combine y simplifique:

$\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+4x+4}$(Zill & M, 1992)

SOLUCIÓN

Tomamos los denominadores y los Factorizamos para hallar el **Mínimo Común Múltiplo:**

x^2-4 = **(x + 2)*(x – 2): Diferencia de cuadrados.**

x^2+4x+4 = **(x + 2)*(x +2) = $(x+2)^2$trinomio de la forma x^2+bx+c**

Mínimo Común Múltiplo: m.c.m:

Factores comunes con mayor exponente:$(x+2)^2$

Factores no comunes: (x – 2)

Mínimo Común Múltiplo: $(x+2)^2$ * (x – 2)

$\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+4x+4}=\frac{x}{(x+2)*(x-2):}+\frac{1}{(x+2)^2}=$

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Traer a la memoria: el m.c.m se divide por cada denominador y el resultado se multiplica por el respectivo numerador.

$$\frac{x\,(x+2)+1(x-2)}{(x+2)^2*(x-2)} = \frac{x^2+2x+x-2}{(x+2)^2*(x-2)} = \frac{x^2+3x-2}{(x+2)^2*(x-2)}$$

$2x + x$ **Términos semejantes.**

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

2. Resuelva la siguiente operación de fracciones algebraicas teniendo como referencia el ejercicio realizado y completando los espacios en blanco o con interrogantes:

$$\frac{2}{3x-3} - \frac{5x}{x+1} + \frac{x-3}{x-1}$$

Solución: tomamos los denominadores los Factorizamos y hallamos el m.c.m:

$3x - 3 = 3(? - 1)$

$x + 1 = x + 1$

$x - 1 = x - 1$

m.c.m:

$3(? - 1)(x + 1)$, entonces:

$$\frac{2}{3x-3} - \frac{5x}{x+1} + \frac{x-3}{x-1} = \frac{2}{3(?-1)} - \frac{5x}{x+1} + \frac{x-3}{x-1} =$$

$$\frac{\mathbf{2}(¿?) - \mathbf{5x}\,(¿?)(\mathbf{x}-\mathbf{1}) + ¿?\,(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})}{\mathbf{3}(?-\mathbf{1})(¿?)}$$

Efectuando los productos indicados, tenemos:

$$\frac{2x + 2 - ¿?x^2 + 15x + 3x^2 - 6x - 9}{\mathbf{3}(?-\mathbf{1})(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})} = \frac{-12x^2 + ¿?x - 7}{\mathbf{3}(?-\mathbf{1})(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})}$$

- **Multiplicación de fracciones algebraicas**

Para multiplicar fracciones algebraicas se sigue el mismo procedimiento que para multiplicar fraccionarios, es decir se multiplican numeradores entre sí y denominadores entre sí, pero como son polinomios, para abreviar el proceso, se **factoriza** y luego se simplifica.

EJERCICIO DE APRENDIZAJE:

$\frac{3x-1}{x+2} * \frac{x^2+4x+4}{3x^2-7x+2} =$

Factorizamos el numerador y el denominador de cada una de las fracciones:

- $3x - 1 = 3x - 1$
- $x + 2 = x + 2$
- $x^2 + 4x + 4 = (x + 2) * (x + 2) = (x + 2)^2$

$3x^2 - 7x + 2 = \frac{9x^2 - 7(3x) + 6}{3}$, **recuerde que es un trinomio de la forma** $ax^2 + bx + c$, **por lo tanto se multiplica y se divide por a, en este caso 3.**

$\frac{(3x-6)*(3x-1)}{3} = \frac{3(x-2)*(3x-1)}{3}$, **dividiendo el numerador y el denominador por 3, tenemos que:**

- $3x^2 - 7x + 2 = (x - 2) * (3x - 1)$

$\frac{3x-1}{x+2} * \frac{x^2+4x+4}{3x^2-7x+2} = \frac{3x-1}{x+2} * \frac{(x+2)^2}{(x-2)*(3x-1)}$ **simplificando:**

$\frac{3x-1}{x+2} * \frac{x^2+4x+4}{3x^2-7x+2} = \frac{x+2}{(x-2)}$

- **DIVISIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS**

Para dividir fracciones algebraicas se sigue el mismo procedimiento que para multiplicar fraccionarios, es decir se invierte la fracción divisora y se procede de la misma forma que en la multiplicación, pero como son polinomios, para abreviar el proceso, se **factoriza** y luego se simplifica.

En general: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c}$, se invirtió el divisor $\frac{c}{d}$

Nota: en caso de que sean varias fracciones divisoras, todas se invierten:

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \div \frac{m}{n} \div \frac{p}{q} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c} * \frac{n}{m} * \frac{q}{p}$, nótese que se invirtieron todos los divisores y se expresaron en forma de multiplicación.

EJERCICIO DE APRENDIZAJE:

$\frac{x^2-16}{x-3} \div \frac{x+4}{x^2-9}$, se invierte el divisor y expresamos la división en forma de multiplicación

$\frac{x^2-16}{x-3} * \frac{x^2-9}{x+4} = \frac{(x+4)*(x-4)}{x-3} * \frac{(x+3)*(x-3)}{x+4}$, simplificamos,

Entonces: $\frac{x^2-16}{x-3} \div \frac{x+4}{x^2-9} = (x-4)^*(x+3)$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Escriba con sus propias palabras el significado de fracción algebraica.
2. Verifica, a través del proceso adecuado, si los siguientes ejercicios tienen como resultado el indicado, en caso contrario, encuentra el verdadero resultado.

- $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \frac{x-1}{x+1}$
- $\frac{9x^2-30x+25}{9x^2-25} = \frac{3x+5}{3x-5}$

3. En la solución del siguiente ejercicio el autor obtuvo dos respuestas ¿serán válidas las dos? O ¿una de ellas? ¿Cuál? ¿Por qué?, si no es ninguna de ellas ¿podrías indicar cuál es, realizando el proceso y justificando cada uno de los procesos?

$\frac{x-5}{x^2-2x-8} + \frac{7}{x-4} - \frac{x+1}{x+2}$

- **Respuesta 1:**

$$\frac{-(x^2-11x+15)}{(x-4)*(x+2)}$$

- **Respuesta 2:**

$$\frac{x^2-11x+15}{(4-x)*(x+2)}$$

- **Respuesta 3: En caso de no ser ninguna de las anteriores, cuál sería la correcta, justifica tu respuesta a través del proceso adecuado.**

8.1 ¿Es posible factorizar en los números enteros el siguiente polinomio?

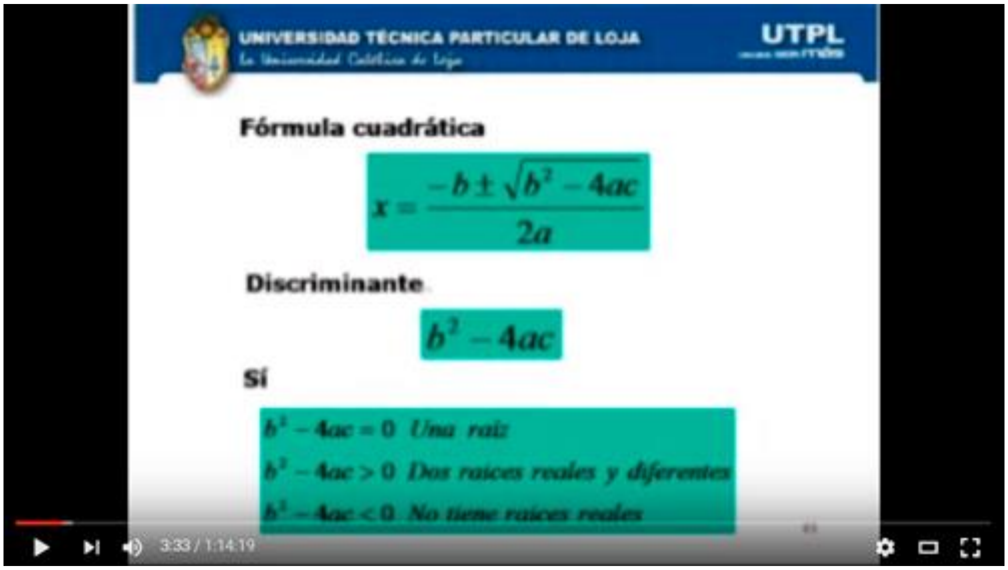
$\boldsymbol{x^2 - 11x + 15,}$ de ser posible ¿Cómo quedaría?

8.2 En el siguiente ejercicio el autor da tres opciones de respuesta, ¿cuál sería la correcta? justifica tu respuesta realizando el proceso adecuado.

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x - 3} \div \frac{x + 4}{x^2 2x - 15}$$

- **Respuesta 1:** $\boldsymbol{\frac{x+5}{x+1}}$
- **Respuesta 2:** $\boldsymbol{\frac{x+1}{x+5}}$
- **Respuesta 3:** $\boldsymbol{(x + 1)} * \quad \boldsymbol{(x + 5)}$

4 UNIDAD 3 SOLUCIÓN DE ECUACIONES E INECUACIONES



ECUACIONES Y DESIGUALDADES[(ALGEBRA) (CAPÍTULO II) (I BIMESTRE)] Enlace

Mapa de Conceptos

OBJETIVO GENERAL

Manejar correctamente las relaciones matemáticas que involucren una o dos variables, permitiendo el análisis y solución de una situación específica dada.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desarrollar técnicas, a partir del concepto de ecuación, para resolver ecuaciones lineales, cuadráticas, racionales e irracionales, moldeando situaciones con las mismas.

- Solucionar, correctamente, inecuaciones lineales, cuadráticas, racionales e inecuaciones con valor absoluto, conociendo la notación de intervalo.

4.1 TEMA 1 ECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

- **ECUACIÓN:** es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas **incógnitas o variables**. La ecuación sólo es válida o es verdadera para ciertos valores de la incógnita.

Ejemplo:

5x+2=17, es una ecuación, porque es una igualdad en la que hay una incógnita o variable, que es la **x**, esta igualdad sólo es verdadera para **x = 3**. Si reemplazamos la x por tres en la ecuación resulta una igualdad verdadera.

$$5\,(3) + 2 = 17$$

$$17 = 17$$

Que es **verdadero**. Sí reemplazamos a x por **un valor diferente** de tres resulta una **igualdad falsa**.

Ejemplo:

La igualdad $y^2 - 5y = -6$ es una ecuación, porque es una igualdad con una incógnita sólo se cumple **para y = 2 e y = 3**

La incógnita o variable se representa por las últimas letras del alfabeto: x, y, z, u, v, w.

- **Grado de una ecuación polinómica**

El grado de una ecuación polinómica lo determina el mayor exponente que tiene la incógnita o variable dentro de la ecuación.

ECUACIÓN	MAYOR EXPONENTE	GRADO
$3x - 7 = 8$	**Uno**	**Grado uno o lineal**
$7x^5 + 6x^2 + 8 = 3x$	**Cinco**	**Cinco**
$x^2 + 1 = 0$	**Dos**	**Grado dos o cuadrática**

- **Raíces o soluciones de una ecuación**

Son los valores de las incógnitas (o variables) que satisfacen la ecuación, es decir, al reemplazar las raíces en la ecuación, el resultado es una igualdad verdadera. Por ejemplo: en la ecuación 5x - 6 = 3x + 8, la raíz o solución de la ecuación es x = 7 porque si reemplazamos a x por 7 en la ecuación resulta una igualdad verdadera: 5(7) - 6= 3(7) + 8, resulta 29 = 29 que es verdadero.

RESOLVER UNA ECUACIÓN: consiste en encontrar las raíces o soluciones de la ecuación. Una ecuación tiene como máximo tantas raíces como el grado de la ecuación.

Nota: si en el proceso de solución de una ecuación o de un sistema de ecuaciones **se anula la variable** y se llega a **una igualdad falsa**, esto quiere decir que la ecuación **no tiene solución**.

Ejemplo:

$$-3 + 5x - 5x = 2 + 7 \rightarrow -3 = 9 \; es \; Falso$$

Sería una proposición falsa, por lo tanto la ecuación no tiene solución.

Nota: si en el proceso de solución de una ecuación o de un sistema de ecuaciones **se anula la variable** y se llega a **una igualdad verdadera**, en este caso se tiene **una identidad**, quiere decir que la ecuación cumple para cualquier valor de la variable, esto quiere decir que la ecuación tiene **infinitas soluciones**.

Ejemplo:

$$6x^2 - 7 - 6x^2 = 3 - 10 \rightarrow -7 = -7 \text{ es verdadero}$$

Sería una proposición verdadera, quiere decir, entonces, que la ecuación tiene infinitas soluciones.

Propiedades de las ecuaciones

1. Sí se suma o se resta una misma cantidad en ambos lados de la ecuación, la igualdad subsiste.

2. La ecuación **3x + 5 = 2 x + 9** sólo es válida para **x = 4.** Sí sumamos o restamos una misma cantidad, obtendremos una igualdad verdadera.
3. Sí se multiplica o se divide en ambos lados de una ecuación por una misma cantidad, diferente de cero, la igualdad subsiste.
4. Sí los dos lados de una ecuación se elevan a una misma potencia o si a los dos lados se extrae una misma raíz, la igualdad subsiste.

NOTA:

Estas propiedades son las que permiten solucionar o encontrar las raíces de una ecuación, para ello se deben aplicar correctamente dichas propiedades.

Ejercicio de Aprendizaje

Para la ecuación **3x - 5= x + 3**, efectúe las siguientes operaciones (en ambos lados)

Sume 5. **3x – 5 + 5= x + 3 + 5**

Queda, entonces: **3x = x + 8**

Al resultado réstele x. **3x - x = x + 8 - x**

El resultado sería: **2x = 8**

Divídalo entre 2: $\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$

Obtenemos: **x = 4**

Se puede ver que resulta **x = 4** que es la raíz o solución de la ecuación.

- **Solución de ecuaciones con una incógnita**

- **Solución de ecuaciones lineales con una incógnita**

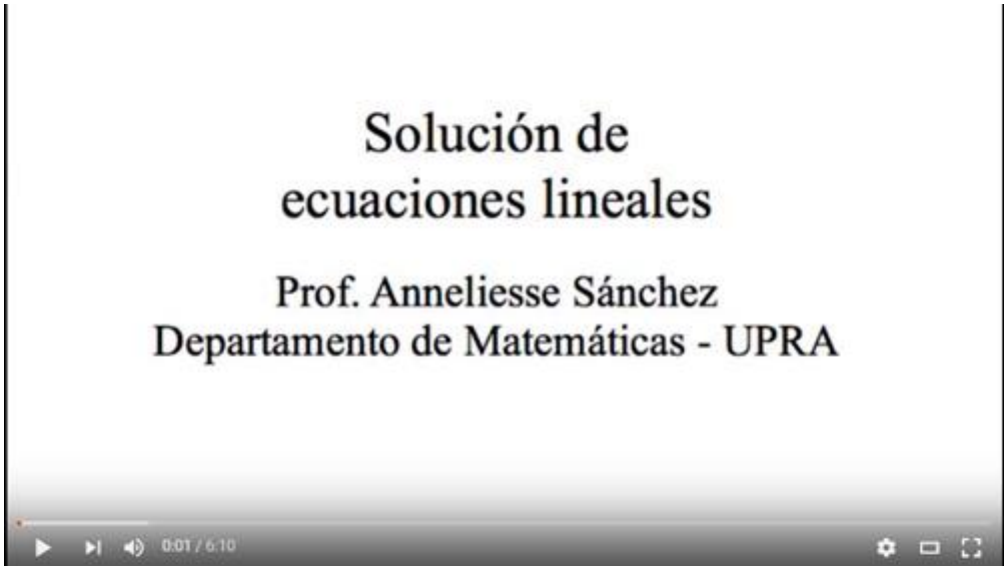
Una ecuación es lineal cuando el máximo exponente de la variable es uno.

Una ecuación lineal con una incógnita puede tener una solución o ninguna.

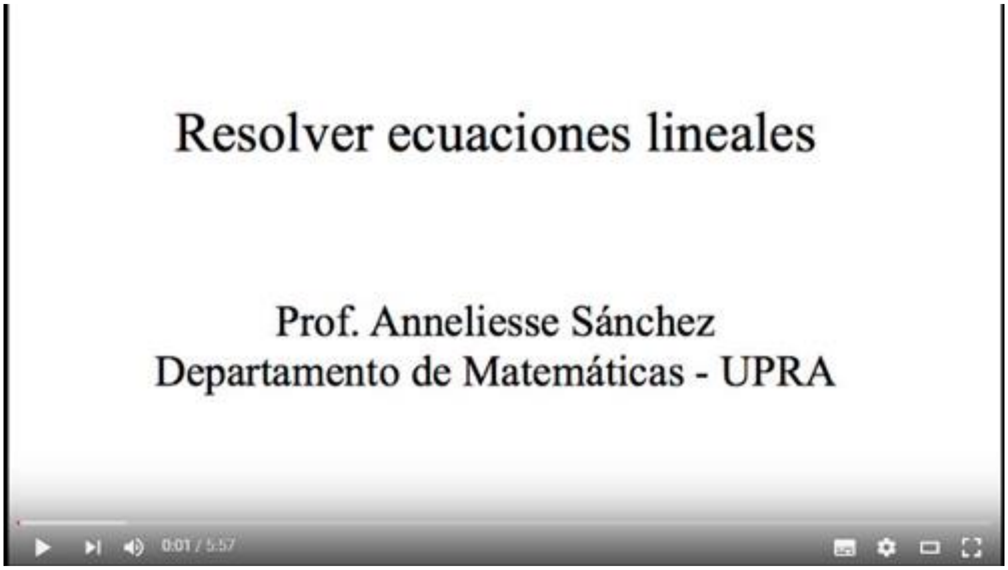
Para solucionar **ecuaciones lineales** se sugieren los siguientes pasos:

1. Sí es necesario efectúe previamente operaciones indicadas. Si hay fraccionarios multiplique toda la ecuación por el **m.c.m.** de los denominadores.
2. **Agrupe términos semejantes**: consiste en ubicar en un lado de la ecuación las cantidades que contengan a la variable y en el lado contrario las cantidades que no la contengan. Para ello aplicamos la primera propiedad de las ecuaciones (sume o reste una misma cantidad).
3. Efectúe operaciones.
4. Elimine los coeficientes que acompañen a la variable. Para ello aplicamos la segunda propiedad de las ecuaciones (multiplique o divida por una misma cantidad). El término o lado donde está la variable tiene que quedar positivo.

(http://www.youtube.com/watch?v=YRleGCexIcs), (http://www.youtube.com/watch?v=zdeqL0d_Hgs&feature=related)



Solución ecuaciones lineales Enlace



Resolver ecuaciones lineales [Enlace]

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Solucione las siguientes ecuaciones lineales.

1. $3x - 2x + 1 = 7x - 3 + 5x - x + 24.$

Efectuamos operaciones en ambos lados, reduciendo términos semejantes:

$$x + 1 = 11x + 21$$

Agrupando términos semejantes:

$$x - 11x = 21 - 1 \leftrightarrow -10x = 20$$

Dividiendo entre **– 10** en ambos lados de la ecuación:

$$\boxed{\frac{-10x}{-10} = \frac{20}{-10}}$$

Queda entonces: $\boxed{\mathbf{X = -2}}$

Nota: verificando este resultado en la ecuación original, obtenemos una identidad, reemplacemos x = -2:

3x - 2x+ 1 = 7x - 3+ 5x - x + 24.

3 (-2)–2 (-2)+ 1 = 7(-2) - 3+ 5(-2)–(-2)+ 24.

-6 +4 +1 = -14 -3 -10 +2 +24

$\boxed{\mathbf{-1 = -1}}$

Que corresponde a una identidad**.**

2. $\frac{4x}{3} - \frac{5}{2} = \frac{8}{3}x + 2$

Nota: para eliminar los denominadores (y así evitar los fraccionarios) multiplique toda la ecuación por el m.c.m. de los denominadores:

El m.c-m de los denominadores es el **6:**

$6*\frac{4x}{3}-6*\frac{5}{2}=6*\frac{8}{3}x+6*2$

- Simplificando:

2 *4x – 3 * 5 = 2 * 8x + 6 * 2

- Multiplicando:

8x – 15 = 16x + 12

- Agrupando términos semejantes:

8x −16x = 12 + 15

- Reduciendo términos semejantes:
- Eliminando el – 8 de la x**:**

- 8x = 27, dividiendo a ambos lados por -8**:**

$\frac{-8x}{-8}=\frac{27}{-8} \leftrightarrow x=\frac{27}{-8} \rightarrow x=-\frac{27}{8}$

Actividad del ejercicio: reemplacemos este valor de **x** en la ecuación original y comprobemos que es una identidad.

3. 3x - 7 = 3x + 5.

- Agrupando términos semejantes: $3x-3x=5+7$
- Reduciendo términos semejantes: $0=12$

- Se anula la variable y resulta una igualdad falsa, quiere decir que la **ecuación no tiene solución**.

4. 5(2x-3) - 8(x- 2) = 3(x - 5) + 6.

$$10x-15-8x+16=3x-15+6 \Leftrightarrow 2x+1=3x-9 \Leftrightarrow 2x-3x=-9-1 \Leftrightarrow -x=-10$$

Multiplicando por -1, queda: $x=10$

Actividad del ejercicio: reemplacemos este valor de **x** en la ecuación original y comprobemos que es una identidad.

5. 4x-2 = 8x-4.

$$4x-8x=-4+2 \Leftrightarrow -4x=-2 \Leftrightarrow x=-2/-4 \Leftrightarrow x=1/2$$

Actividad del ejercicio: reemplacemos este valor de **x** en la ecuación original y comprobemos que es una identidad.

6. $\frac{5x+4}{3}-\frac{7-2x}{2}=\frac{3-x}{4}-\frac{1+x}{3}$**.** Multiplique por el m.c.m. de los denominadores.

$$12*\left(\frac{5x+4}{3}\right)-12*\left(\frac{7-2x}{2}\right)=12*\left(\frac{3-x}{4}\right)-12*\left(\frac{1+x}{3}\right) \Rightarrow 4(5x+4)-6(7-2x)=3(3-x)-4(1+x)$$

$$20x+16-42+12x=9-3x-4-4x \Leftrightarrow 32x-26=-7x+5 \Leftrightarrow 32x+7x=5+26 \Leftrightarrow 39x=31$$

$$x=31/39$$

Actividad del ejercicio: reemplacemos este valor de **x** en la ecuación original y comprobemos que es una identidad.

- **Solución de ecuaciones de segundo grado**

Una ecuación de segundo grado es toda ecuación en la cual, una vez simplificada, el mayor exponente de la incógnita es dos. Es toda ecuación de la forma: $ax^2+bx+c=0$ Donde a, b y c son constantes con $a \neq 0$.

Para solucionar una ecuación de este tipo existen varios métodos:

Método por factorización para solucionar una ecuación de segundo grado.

Este método también se utiliza para solucionar ecuaciones de grado tres o superior.

(http://www.youtube.com/watch?v=FTAyKcvWFnY&feature=fvsr)

PASOS PARA DESARROLLAR EL MÉTODO:

1. Se debe igualar la ecuación a cero.
2. Después de efectuar operaciones se debe factorizar la expresión resultante.
3. Cada factor que contenga a la variable se debe igualar a cero. Por cada factor resulta una ecuación lineal.
4. Solucionamos cada ecuación.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Solucione las siguientes ecuaciones por factorización:

1. $x^2 - 10x = 75$

- Igualando a cero: $x^2 - 10x - 75 = 0$

- Factorizando: $(x-15)*(x+5)$= 0
- Igualando cada factor a cero:$(x-15)\ y\ (x+5)$

$(x-15)$ = 0

$(x+5)$= 0

- Solucionando cada ecuación por separado:

$x-15$ = 0 $\leftrightarrow x=15$

$x+5$ = 0 $\leftrightarrow x=-5$

- Las raíces de la ecuación son:$x=15\ \ y\ \ x=-5$

$$\boxed{x=15\ \ y\ \ x=-5}$$

- Reemplacemos estos valores en la ecuación original para verificar su validez:

$$Con\ x=15$$

$$15^2-10*15=75$$

225 – 150 = 75

75= 75 (es una identidad, por lo tanto **x =15** es una solución real para la ecuación).

$$Con\ x=-5$$

$\mathbf{(-5)^2-10*(-5)=75}$

25 + 50 = 75

75 = 75(es una identidad, por lo tanto **x =-5** es una solución real para la ecuación).

---

2. $2x^2+5x-3$

- Igualando a cero:

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

- Factorizando:

$$\frac{2}{2}(2x^2 + 5x - 3) = 0$$

$\frac{4x^2+5(2x)-6}{2} = 0 \rightarrow \frac{(2x+6)*(2x-1)}{2} \rightarrow \frac{2(x+3)*(2x-1)}{2}$, simplificando: $(x + 3) * (2x - 1) = 0$

- Igualando cada factor a cero cada factor:

$(x + 3) = 0$ y $(2x - 1) = 0$

- Solucionando cada ecuación por separado:

$$(x + 3) = 0 \rightarrow x = -3$$

$(2x - 1) = 0 \rightarrow (x = \frac{1}{2})$

- Las raíces de la ecuación son:$x = -3$ y $x = \frac{1}{2}$

$$\boxed{x = -3 \text{ y } x = \frac{1}{2}}$$

Actividad: reemplacemos estos valores en la ecuación original para verificar su validez y obtengamos la identidad correspondiente.

3. $12x^2 + 15x = 18$

Realiza el ejercicio siguiendo uno a uno los pasos indicados y teniendo como referente los ejercicios anteriores.

- Igualando a cero:

- Factorizando:

- Igualando cada factor a cero cada factor:

- <u>Solucionando cada ecuación por separado</u>:

- <u>Las raíces de la ecuación son</u>:

- **Actividad:** Reemplacemos estos valores en la ecuación original para verificar su validez y obtengamos la identidad correspondiente.

4. $x^2 - 18 = 7$, soluciona el ejercicio teniendo como base los ejemplos anteriores, indicando el proceso a seguir.

1. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$, es una ecuación de grado 4, por lo tanto, la ecuación tiene 4 raíces.

Solución: como ya está igualada a cero, procedemos a factorizar.

- **Factorizando:**

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ = $(X^2 - 9) * (x^2 - 4)$= 0 →

$\boldsymbol{(x+3) * (x-3) * (x+2) * (x-2)}$**= 0**

Continúa el proceso y justifica cada paso hasta obtener las raíces y verifica que éstas si sean solución para la ecuación.

2. $15x^2$=5x soluciona el ejercicio teniendo como base los ejemplos anteriores, indicando el proceso a seguir.

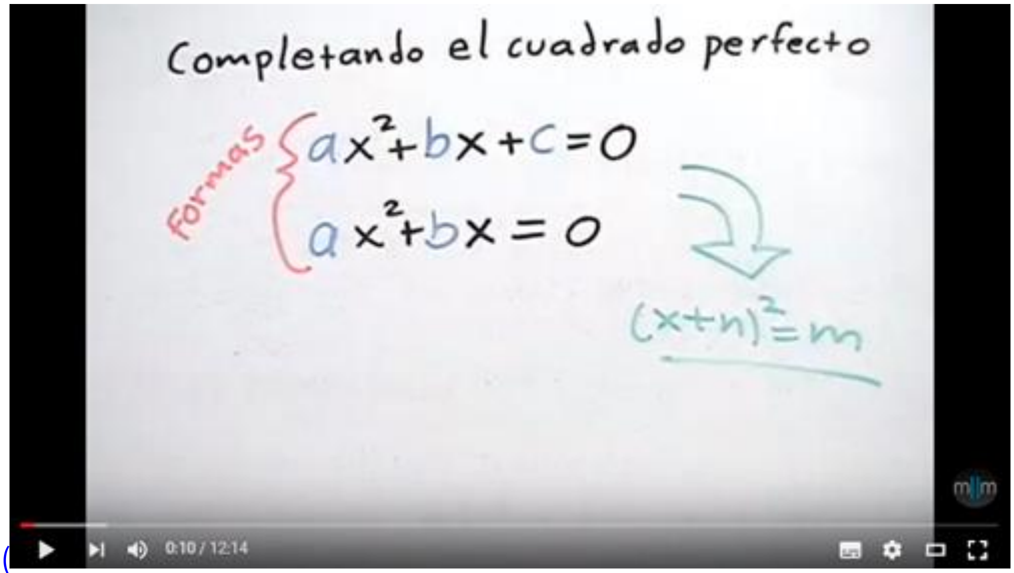
- **Método de completar un trinomio cuadrado perfecto a partir del trinomio de la forma**

$$x^2 \pm bx \pm c = 0$$

Para desarrollar este método se procede de la siguiente manera:

1. Se debe aislar el término independiente c, esto es, el término que no tenga la incógnita se debe dejar a un lado de la ecuación y los términos que la contengan se deben dejar en el lado contrario, así: $x^2 \pm bx = \pm c$
2. En caso de que la ecuación sea de la forma $ax^2 \pm bx \pm c = 0, con\ a \neq 1$ se debe normalizar, dividiendo toda la ecuación entre **a**, el coeficiente de x^2.
3. Se debe sumar a toda la ecuación el número que acompaña a la variable lineal divido entre dos y el resultado elevado al cuadrado. Sólo efectuamos la operación en el lado izquierdo, en el lado derecho de la ecuación no.
4. El lado derecho de la ecuación siempre lo factorizamos como un paréntesis elevado a la dos.
5. Dentro del paréntesis colocamos la raíz cuadrada del primer término y la raíz cuadrada del tercer término separadas por el signo del término del medio.

6. Para eliminar el exponente dos del paréntesis extraemos raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación. Recuerde que cuando extraemos raíz cuadrada esta tiene dos signos uno positivo y otro negativo.
7. Resulta una ecuación lineal y la solucionamos. En la solución debemos utilizar ambos signos, uno a la vez, dando como solución dos valores.



Ecuaciones cuadráticas completando el TCP | ej 1 *Enlace*

EJERCICIO DE APRENDIZAJE:

1. Solucione la siguiente ecuación por completación: $4x^2 + 3x - 22 = 0$

- Aislando el término independiente (el 22):

$4x^2 + 3x = 22$

- Dividiendo todos los términos de la ecuación entre 4:

$$\frac{4x^2}{4} + \frac{3x}{4} = \frac{22}{4}$$

- Simplificando:

$$x^2 + \frac{3x}{4} = \frac{11}{2}$$

- El coeficiente de x se divide entre dos y se eleva al cuadrado:

$(\frac{3}{4} \div 2)^2 = (\frac{3}{4*2})^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2$

- Este valor se suma en ambos lados de la ecuación y se realizan las operaciones indicadas:

$x^2 + \frac{3x}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{11}{2} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \left(\frac{3}{8}\right)^2$

$x^2 + \frac{3x}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{11}{2} + \frac{9}{64}$

$x^2 + \frac{3x}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{352+9}{64}$

$x^2 + \frac{3x}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{361}{64}$

- Factorizando el lado izquierdo de la ecuación (que ya es un trinomio cuadrado perfecto), tenemos:

$\left(\boldsymbol{x} + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{361}{64}$

- Raíz cuadrada en ambos lados:

$\sqrt{\left(\boldsymbol{x} + \frac{3}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{361}{64}}$

$\boldsymbol{x} + \frac{3}{8} = \pm \frac{19}{8}$

- Despejando la x:

X = $\pm \frac{19}{8} - \frac{3}{8}$tenemos entonces:

  - **Con el signo + (más)**

X = $\frac{19}{8} - \frac{3}{8} = \frac{16}{8} \rightarrow$ X = 2

  - **Con el signo – (menos)**

X = $-\frac{19}{8} - \frac{3}{8} = -\frac{22}{8} \rightarrow X = -\frac{11}{4}$

- Las raíces de la ecuación son:

X = 2 y X $= -\frac{11}{4}$

$$2.\ \ 2x^2 + 7x - 4 = 0$$

Completa el siguiente procedimiento, teniendo como referencia el ejercicio anterior:

- Aislando el término independiente (el 4):

- Dividiendo todos los términos de la ecuación entre 2:

- Simplificando:

- El coeficiente de x se divide entre dos y se eleva al cuadrado:

- Este valor se suma en ambos lados de la ecuación y se realizan las operaciones indicadas:

- Factorizando el lado izquierdo de la ecuación (que ya es un trinomio cuadrado perfecto), tenemos:

- Raíz cuadrada en ambos lados:

- Despejando la x:
    - **Con el signo + (más)**

- **Con el signo – (menos)**

- Las raíces de la ecuación son:

Después de realizar tu proceso debes obtener las siguientes raíces:

$x = -4$ $\quad y \quad$ $x = \frac{1}{2}$

3. $ax^2 + bx + c = 0$

SOLUCIÓN:

- Aislando el término independiente (la **c**): $ax^2 + bx = -c$
- Dividiendo todos los términos de la ecuación entre 2:

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

Simplificando:

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

- El coeficiente de x se divide entre dos y se eleva al cuadrado:

$\frac{bx}{a} \div 2 = \frac{bx}{2a}$ se eleva al cuadrado $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

- Este valor se suma en ambos lados de la ecuación y se realizan las operaciones indicadas:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

- Factorizando el lado izquierdo de la ecuación (que ya es un trinomio cuadrado perfecto), tenemos:

$$x + \frac{b}{2a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

- Raíz cuadrada en ambos lados: $\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}$$

$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$ Se busca el m.c.m que es $4a^2$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, como tienen el mismo denominador

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

- Despejando la x:
    - **Con el signo + (más)**

      $\boldsymbol{x_1} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

    - **Con el signo – (menos)**

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Las raíces de la ecuación son:

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

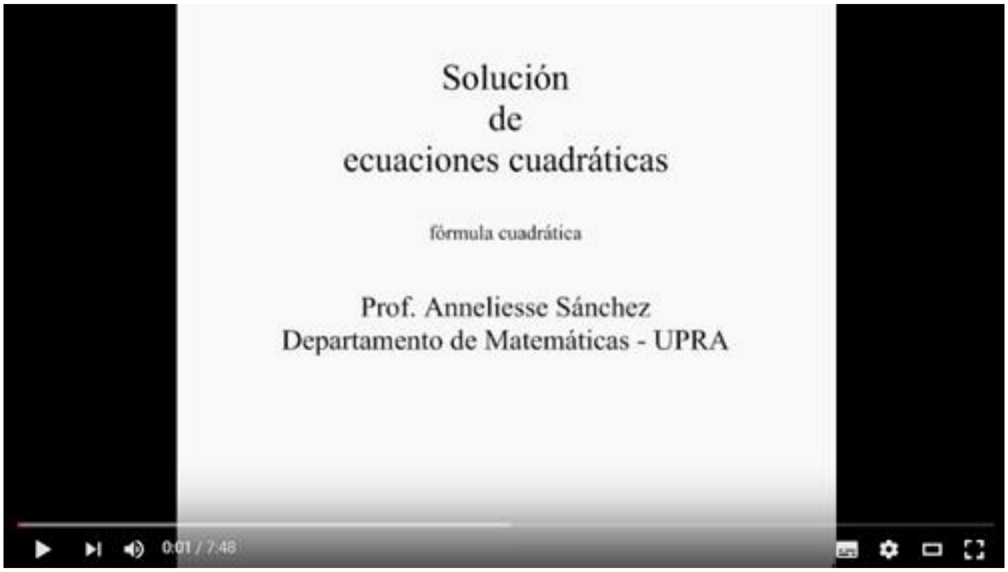
- **Método por fórmula general.**

Una ecuación de la forma: $ax^2+bx+c=0$ Tiene la siguiente solución, obtenida por el proceso de demostración del ejercicio inmediatamente anterior:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Para utilizar este método, se sugiere el siguiente procedimiento:

1. Iguale la ecuación a cero.
2. Identifique los coeficientes ***a*** es el coeficiente o número que acompaña a x^2, *b* es el coeficiente o número que acompaña a la ***x*** y *c* es el término independiente.
3. Reemplace los valores de ***a, b***, y ***c*** en la fórmula general y resuelva.



Solución ecuaciones cuadraticas - metodo formula cuadratica *Enlace*

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando la fórmula general:

1. $3x^2 - 2x = 4$

Solución:

- **Igualando la ecuación a cero:**

$$\mathbf{3x^2 - 2x - 4 = 0}$$

- **Obtenemos los coeficientes:**

a	=	3
b	=	-2
c	=	-4

- **Reemplazamos estos valores en la fórmula general:**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3) * (-4)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+48}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{2 \pm 7.21\ldots}{6}$$

$$x_1 = \frac{2 + 7.21\ldots}{6} \rightarrow x_1 = 1.535\ldots$$

$$x_2 = \frac{2 - 7.21\ldots}{6} = \rightarrow x_2 = -0.868\ldots$$

- Las raíces son:

$x_1 = 1.535\ldots$ y $x_2 = -0.868\ldots$

- **Actividad:** reemplazar estas raíces en la ecuación original para que verifique su validez.

2. $9x^2 + 16 = 24x$

- **Igualando la ecuación a cero:**

- $9x^2 - 24x + 16 = 0$

- **Obtenemos los coeficientes:**

a	=	9
b	=	-24
c	=	16

- **Reemplazamos estos valores en la fórmula general:**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(9) * (16)}}{2(9)}$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{576-576}}{18} = \frac{24 \pm \sqrt{0}}{18} = \frac{24 \pm 0}{18}$$

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{\mathbf{24+0}}{\mathbf{18}} \rightarrow \boldsymbol{x_1} = \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{18}} \rightarrow \boldsymbol{x_1} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

- La raíz es:

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

Nota: es una ecuación cuadrática y debe tener dos raíces, pero como sumamos y restamos la misma raíz (cero), obtenemos el mismo resultado.

Actividad: reemplaza esta raíz en la ecuación original y verifica su validez.

2. Realiza el siguiente ejercicio teniendo como base los ejercicios anteriores y desarrollando el mismo proceso, reemplaza los interrogantes por el valor correspondiente:

$$-10x^2 + 20x + 1 = 0$$

Solución:

- **Igualando la ecuación a cero:**

- **Obtenemos los coeficientes:**

a	**=**	**¿?**
b	**=**	**¿?**
c	**=**	**¿?**

- **Reemplazamos estos valores en la fórmula general:**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(¿?) \pm \sqrt{(¿?)^2 - 4(¿?) * (¿?)}}{2(¿?)}$$

$$x = \frac{¿? \pm \sqrt{¿? + ¿?}}{¿?} = \frac{¿? \pm \sqrt{¿?}}{¿?} = \frac{¿? \pm ¿?}{¿?}$$

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{¿? + ¿?}{¿?} \rightarrow \boldsymbol{x_1 = ¿?}$$

$$\boldsymbol{x_2} = \frac{¿? - ¿?}{¿?} = \rightarrow x_2 = - ¿?$$

- Las raíces son:

$\boldsymbol{x_1}$**= ¿? y** $\boldsymbol{x_2}$= ¿?

- **Solución de ecuaciones racionales**

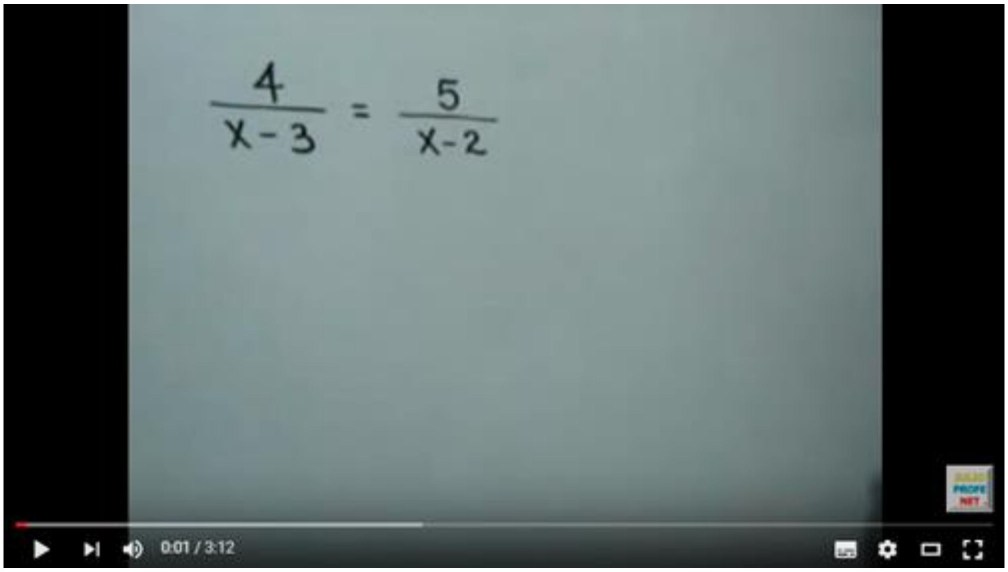
Una ecuación racional es una ecuación que presenta variable en el denominador. Por ejemplo:

$$\frac{5x}{2x-3} + 8 = \frac{3}{x}$$

El tipo de ecuaciones racionales, que vamos a solucionar, nos va a conducir a ecuaciones o lineales o polinómicas.

Para solucionar estas ecuaciones se sugieren los siguientes pasos:

1. Para eliminar los denominadores, se debe multiplicar toda la ecuación por el m.c.m. de los denominadores. Tenga en cuenta que para determinar el m.c.m. de los denominadores, hay que factorizar (si es posible) dichos denominadores previamente.
2. Simplifique. En este paso deben desaparecer los denominadores.
3. Efectúe las operaciones indicadas.
4. Resulta una ecuación lineal o resulta una ecuación cuadrática; la solucionamos por cualquiera de los métodos conocidos.
5. Se debe comprobar que el valor obtenido no de división entre cero. Para ello reemplazamos el (los) valor (es) obtenido en la ecuación original (sólo en los denominadores); si nos da una división entre cero, este valor no es solución de la ecuación.



Ecuaciones Lineales - Ejercicio 7 [Enlace]

Ecuaciones con denominador polinomio 01 [Enlace]

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Solucione las siguientes ecuaciones:

1. $\frac{5}{x-4} = \frac{6}{x-3}$(Haeussler, 1997)

SOLUCIÓN:

- El m.c.m. de los denominadores es: $(x-4)*(x-3)$
- Indicando multiplicación por: $(x-4)*(x-3)$

$(x-4)*(x-3)*\frac{5}{x-4} = (x-4)*(x-3)*\frac{6}{x-3}$

- Simplificando, se simplifican factores iguales (mismo color):

$(x-3)*5 = (x-4)*6$

Realizando las operaciones indicadas**: 5x – 15 = 6x – 24**. Resulta una ecuación lineal.

- Solucionando la ecuación lineal:

5x – 6x = 24 + 15 ↔ **-x = -9**, multiplicando por − 1 ambos lados de la ecuación: **x = 9**

Prueba: $\frac{5}{9-4} = \frac{6}{9-3} \leftrightarrow \frac{5}{5} = \frac{6}{6}$ ↔**1=1,** una identidad que demuestra la validez de la raíz obtenida. X = 9.

2. $\frac{3x+4}{x+2} - \frac{3x-5}{x-4} = \frac{12}{x^2-2x-8}$ (Haeussler, 1997)

- Factorizando denominadores: $\frac{3x+4}{x+2} - \frac{3x-5}{x-4} = \frac{12}{(x-4)*(x+2)}$
- El m.c.m. de los denominadores es: $(x-4)*(x+2)$
- Indicando multiplicación por el m.c.m.:

$$(x-4)*(x+2)*\frac{3x+4}{x+2} - (x-4)*(x+2)*\frac{3x-5}{x-4} = (x-4)*(x+2)*\frac{12}{(x-4)*(x+2)}$$

- Se simplifican factores iguales (mismo color):

$$(x-4)*(3x+4) - (x+2)*(3x+5) = 12$$

- Efectuando los productos indicados:

$3x^2 + 4x - 12x - 16$ --$(3x^2 - 5x + 6x - 10)$ =12

- Reduciendo términos semejantes:

$3x^2 - 8x - 16$- $-3x^2 + 5x - 6x + 10 = 12 \leftrightarrow -9x - 6 = 12$

- Resultó una ecuación lineal: $-9x - 6 = 12$
- Solucionando la ecuación: $-9x - 6 = 12 \leftrightarrow -9x = 12 + 6$

-9x = 18→ $x = \frac{18}{-9}$ →x = - 2

- Realizando la prueba:

$$\frac{3*(-2)+4}{(-2)+2} - \frac{3*(-2)-5}{-2-4} = \frac{12}{(-2)^2-(-2)-8} \rightarrow \frac{-6+4}{0} - \frac{-6-5}{-6} = \frac{12}{4+4-8}$$

$$\frac{-6+4}{0} - \frac{-6-5}{-6} = \frac{12}{0}$$

- Como resultó **cero en el denominador, la ecuación no tiene solución.**

3. $\frac{2}{x-1} - \frac{6}{x-6} = 5$ **,** resolver el ejercicio siguiendo el paso a paso indicado a continuación, al final encontrarás la ecuación a la que debes llegar y las raíces que se deben obtener. Verifica, además, que las raíces sean una solución verdadera para la ecuación racional.

SOLUCIÓN

- El m.c.m. de los denominadores es:

- Indicando multiplicación por el m.c.m:

- Simplificando:

- Multiplicando y reduciendo términos semejantes:

- Solucionando la ecuación de segundo grado que resulta, por alguno de los métodos vistos anteriormente que quieras utilizar:

La ecuación que debes obtener, es la siguiente:

$10x^2 - 3x - 13 = 0$, si no obtienes esta ecuación, revisa el proceso que realizaste y verifica que esté correctamente elaborado.

- Solución ecuación cuadrática:

- Raíces: $x = -1$ y $x = \frac{13}{10}$
- Realiza la prueba, reemplazando las raíces en la ecuación original
  - **PRUEBA CON** $x = -1$

- **PRUEBA CON** $x = 13/10$

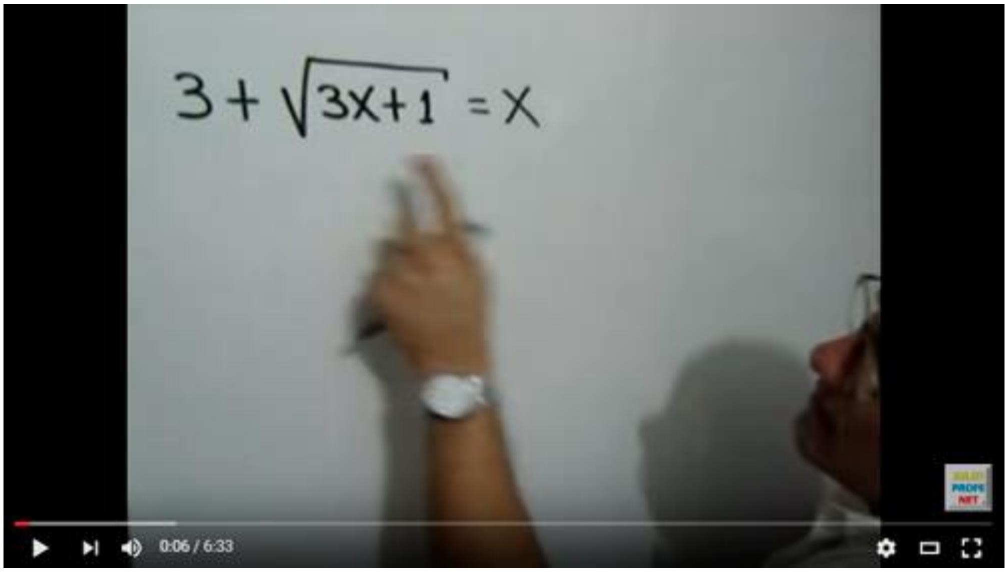
____

- **Solución de ecuaciones irracionales**

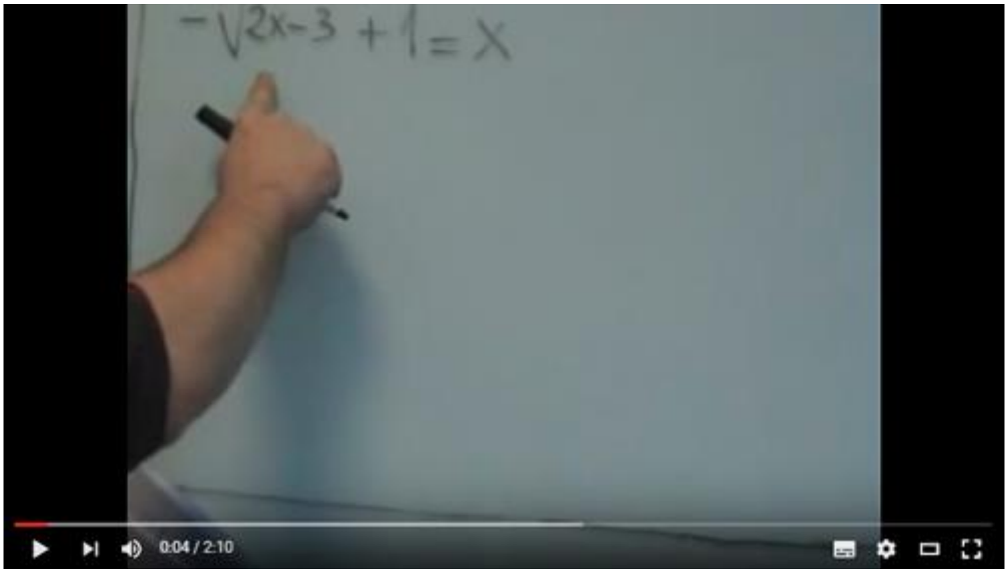
Una ecuación irracional es una ecuación que presenta variable dentro de una raíz. Por ejemplo: $\mathbf{5x - \sqrt{x} = 10}$ El tipo de ecuaciones irracionales que vamos a estudiar nos lleva a ecuaciones lineales o a ecuaciones cuadráticas.

Para solucionar este tipo de ecuaciones se sugieren los siguientes paso:

1. Se debe despejar la raíz o una de las raíces.
2. Efectúe operaciones.
3. Para eliminar la raíz, eleve a ambos lados de la ecuación a un exponente igual a la raíz.
4. Efectúe operaciones.
5. Resulta o una ecuación lineal, o una ecuación cuadrática, si solucionamos por cualquiera de los métodos conocidos.
6. Se debe comprobar la solución reemplazando en la ecuación original. Sí al reemplazar resulta una igualdad falsa, dicho valor, por el cual se reemplazó, no es solución de la ecuación.



Ecuaciones con radicales - Ejercicio 2 Enlace



AINTE Mat 1º Bach Ecuaciones con raices Enlace

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE:

Solucione las siguientes ecuaciones Irracionales.

1. $\sqrt{x+1} + \quad 3 - \quad x = x - 5$

SOLUCIÓN

- Despejando la raíz:

$$\sqrt{\boldsymbol{x-1}} = \boldsymbol{x-5-3+x} \rightarrow \sqrt{\boldsymbol{x-1}} = \boldsymbol{2x-8}$$

- Elevando en ambos lados de la ecuación a potencia dos:

$$(\sqrt{\boldsymbol{x-1}})^{\boldsymbol{2}} = (\boldsymbol{2x-8})^{\boldsymbol{2}}$$

- Simplificando y resolviendo el producto notable:

$$x - 1 = (2x)^2 - 2(2x)(8) + 8^2 \leftrightarrow x - 1 = 4x^2 - 32x + 64$$

- Solucionando la ecuación cuadrática que resulta:

$$0 = 4x^2 - 32x + 64 - x + 1 \leftrightarrow 0 = 4x^2 - 33x + 65$$

$$4x^2 - 33x + 65 = 0$$

Factorizando:

$$\frac{4}{4}(4x^2 - 33x + 65) = 0 \leftrightarrow \frac{16x^2 - 33(4x) + 260}{4} = 0$$

$$\frac{(4x-20)(4x-13)}{4} = 0,$$

Sacando 4 como factor común en el primer paréntesis, tenemos:

$$\frac{4(x-5)(4x-13)}{4} = 0,$$

- Simplificando:

$$(x-5)(4x-13) = 0$$

- Se iguala cada factor a cero:

$$(x-5) = 0 \text{ De donde } x = 5$$

$$(4x-13) = 0 \text{ De donde } x = \frac{13}{4}$$

- Raíces: $x = 5$ y $x = \frac{13}{4}$

- **PRUEBA**
  - $x = \frac{13}{4}$
  - $\sqrt{\frac{13}{4} - 1} + 3 - \frac{13}{4} = \frac{13}{4} - 5 \leftrightarrow \sqrt{\frac{13\quad 4}{4}} + \frac{12\quad 13}{4} = \frac{13\quad 20}{4}$

$\sqrt{\frac{9}{4}} - \frac{1}{4} = -\frac{7}{4} \leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{7}{4} \leftrightarrow \frac{6-1}{4} = -\frac{7}{4} \leftrightarrow \frac{5}{4} = -\frac{7}{4}$, **pero**

$$\frac{5}{4} \neq -\frac{7}{4}$$

No es una identidad, es una proposición falsa, por lo tanto: $\frac{13}{4}$ no es solución para la ecuación.

- X = 5

$\sqrt{5-1} + 3 - 5 = 5 - 5$

$\sqrt{4} - 2 = 0 \leftrightarrow 2 - 2 = 0$

$0 = 0$, **es una identidad, por lo tanto es una proposición verdadera y -5 es una raíz solución para la ecuación dada y es la única que tiene la misma.**

———————————————————————

2. $\sqrt{y-3} - \sqrt{y} = -3$ (Haeussler, 1997)

SOLUCIÓN:

a. Despejando la raíz más compleja:

$$\boxed{\sqrt{y-3} = \sqrt{y} - 3}$$

b. Elevando al cuadrado:

$$\boxed{\sqrt{(y-3)^2} = (\sqrt{y} - 3)^2}$$

c. Eliminando la raíz y desarrollando el producto notable$(a-b)^2$ resulta:

$$y-3=(\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{y}(3)+(3^2)\text{, efectuando operaciones}$$

$$y-3=y-6\sqrt{y}+9$$

$$(6\sqrt{y})^2=12$$

d. Despejando el radical:

$$6\sqrt{y}=y+9-y+3\text{, reduciendo términos semejantes:}$$

$$6\sqrt{y}=12$$

$\boldsymbol{Nota}$: $nos\ queda\ otra\ \ raíz, por\ lo\ tanto, debemos\ elevar\ al\ cuadrado\ nuevamente,$ (Esta operación se realiza tantas veces como raíces se encuentren en el proceso).

$$6^2\sqrt{y^2}=12^2\text{, nos queda entonces:}$$

$$36y= \quad 144\text{, es una ecuación lineal}$$

e. Solucionando la ecuación lineal:

$$y=\frac{144}{36}$$

$$y= \quad 4$$

PRUEBA: reemplazamos la ecuación original por:

$$y= \quad 4$$

$$\boldsymbol{\sqrt{4-3}- \quad \sqrt{4}= \quad -3}$$

$$\sqrt{\mathbf{1}} - \quad \mathbf{2} = \quad \mathbf{-3}$$

$$\mathbf{1} - \quad \mathbf{2} = \quad \mathbf{-3}$$

$$\mathbf{-1} = \quad \mathbf{-3,}$$

Pero $\mathbf{-1} \neq \quad \mathbf{-3}$

Por lo tanto obtuvimos una proposición falsa, y = 4, no es solución para la ecuación $\sqrt{y-3}$ - $\sqrt{y}$ = -3

La ecuación no tiene solución.

---

3. Resuelve la siguiente ecuación, teniendo como modelo los ejercicios anteriores y justificando cada uno de los procesos realizados:

$$3\sqrt{x+4} = \quad x - 6$$

SOLUCIÓN:

a. Elevando al cuadrado en ambos lados de la ecuación:

b. Resolviendo cada cuadrado:

- ✓ Resolviendo la ecuación cuadrática que resulta (en tu procedimiento debes obtener la siguiente ecuación, en caso de no lograrlo revisa nuevamente el procedimiento realizado):

$x^2 - 21x = 0$(Utiliza cualquiera de los métodos vistos anteriormente).

- ✓ Las raíces obtenidas son: $x = 0$ y $x = 21$
- ✓ Dando la prueba:

Con $x = 0$

Con $x = 21$

- ✓ La solución de la ecuación:

$3\sqrt{x+4} = \quad x - 6$, es:

- ✓ **Valor Absoluto de un número real**

Recuerde que **valor absoluto** significa la distancia que hay desde un número hasta el cero, por ejemplo, si me muevo a la izquierda 5 metros, llego a la posición -5, sin embargo recorro 5 metros, si me muevo a la derecha 5 metros llego a la posición +5, también recorrí 5 metros; por lo tanto:

La distancia entre **0 y -5 es 5** y la distancia entre **0 y +5 es 5** es por esto que el valor absoluto de un número es siempre positivo.

$$-5 \leftarrow 0 \rightarrow +5$$

El valor absoluto de un número x se simboliza por: $|x|$ y está definido como:

$$|x| = \begin{Bmatrix} x, & si\ x \geq 0 \\ -x, & si\ x \leq 0 \end{Bmatrix}$$

Aplicando la definición tenemos que:

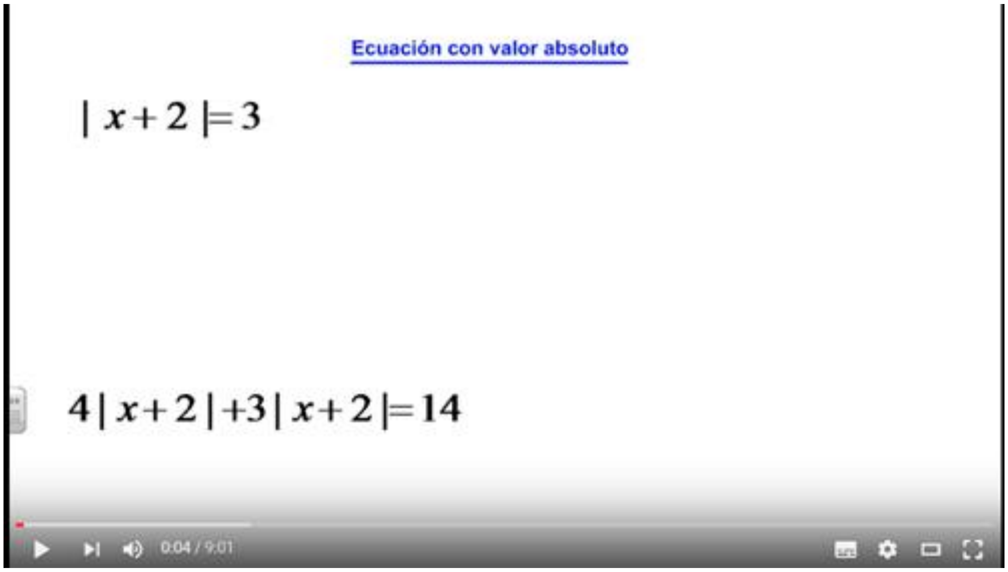
$$|3| = 3$$

$$|-8| = -(-8) = 8$$

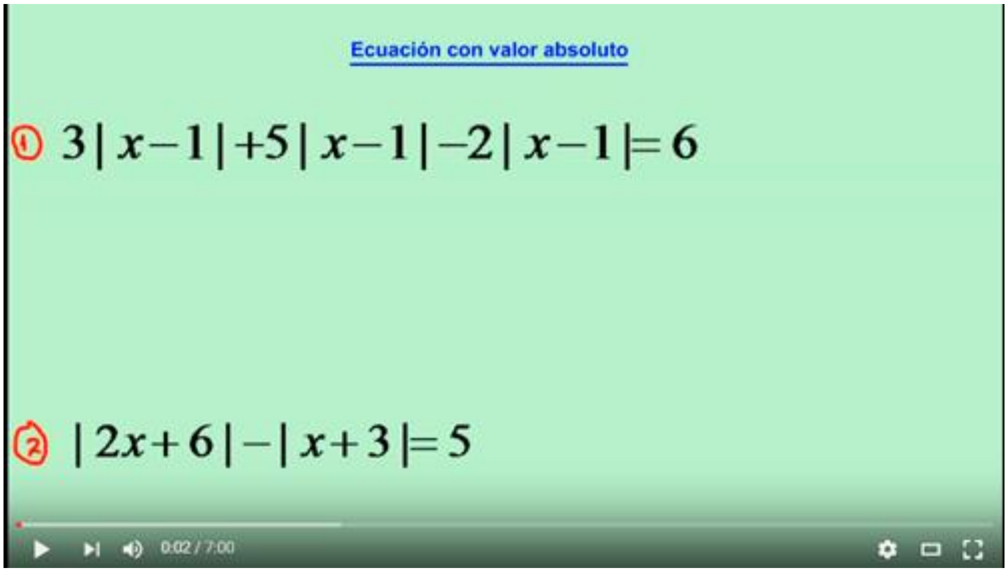
Ecuaciones con Valor Absoluto:

Al solucionar ecuaciones con valor absoluto, se debe tener en cuenta su definición.

SI$|\boldsymbol{f(x)}|$=C Y C $\in \boldsymbol{Re}$, ENTONCES F(X)= $+\boldsymbol{c}$ Y F(X)= -C



Ecuacion con Valor Asoluto [Enlace]



Ecuacion con Valor Absoluto 2 *Enlace*

EJERCICIO DE APRENDIZAJE

Solucione la siguiente ecuación con valor absoluto:

1. $|x-3| = 2$

- ✓ **Nota:** esta ecuación establece que $x - 3$, es un número que se encuentra a **2 unidades** del cero. Por lo tanto se deben plantear y solucionar las dos ecuaciones siguientes:

$$x - 3 = 2\sigma\ x - 3 = -2$$

- ✓ Se resuelve cada ecuación por separado:

$$a)\ x - 3 = 2$$

$$x = 2 + 3$$

$$x = 5$$

$$b)\ x - 3 = -2$$

$$x = -2 + 3$$

$$x = 1$$

- ✓ **Realicemos la prueba:**

$$x = 5$$

$$|x - 3| = 2$$

$$|5 - 3| = 2$$

$$|2| = 2$$

2 = 2

Es una **identidad**, por lo tanto, es una **proposición verdadera** y **5** es una solución para la ecuación dada.

$$x = 1$$

$$|x - 3| = 2$$

$$|1 - 3| = 2$$

$$|-2| = 2$$

2 = 2

Es una **identidad**, por lo tanto, es una **proposición verdadera** y **1** es una solución para la ecuación dada.

- ✓ Como ambas raíces cumplen la solución de la ecuación es:

$$x = 5 \quad y \quad x = 1$$

2. $|7 - 3x| = 5$

Nota: esta ecuación establece que $7 - 3x$, es un número que se encuentra a **5 unidades** del cero. Por lo tanto se deben plantear y solucionar las dos ecuaciones siguientes:

$$\boxed{7 - 3x = 5 o \ 7 - 3x = -5}$$

$$a)\ \ 7 - \ \ 3x = 5$$

$$- \ \ 3x = 5 - 7$$

$- \ \ 3x = -2$, multiplicamos por -1 ambos lados de la ecuación:

$3x = 2,$ despejando x, tenemos

$$x = \frac{2}{3}$$

$$b)\ \ 7 - \ \ 3x = -5$$

$$- \ \ 3x = -5 - 7$$

$- \ \ 3x = -12$ Multiplicamos por -1 ambos lados de la ecuación:

$3x = 12$ Despejando x, tenemos:

$$x = 4$$

- ✓ **Actividad:**

Realicemos la prueba: reemplaza y verifica la validez de las raíces.

$$\boxed{\text{Con } x = \frac{2}{3}}$$

$$\boxed{Con\ x = 4}$$

3. $|x - 4| = -13$

¿Es posible realizarla? Si_____, No______,

Explica tu respuesta.

- **Aplicación de las ecuaciones en la solución de problemas.**

Para solucionar problemas se sugiere la siguiente metodología:

Sugerencias para solucionar problemas de palabras.

1. Lea el problema cuidadosamente.
2. Relea el problema el identifique una cantidad desconocida que se necesita encontrar.
3. Si es posible, haga un diagrama.
4. Asigne una variable, digamos *x*, que represente la cantidad desconocida. (¡Escriba la definición de esta variable en su hoja¡).
5. Si es posible, represente cualquier otra cantidad que haya en el problema en términos de *x*. (¡Escriba cada una de estas cantidades en su hoja¡).
6. Escriba una ecuación (o inecuación) que exprese con precisión la relación descrita en el problema.
7. Solucione la ecuación (o inecuación).
8. Verifique que su respuesta concuerde con todas las condiciones planteadas en el problema. (Zill & Dewar, 1992)

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

- **PROBLEMA NÚMERO 1**

Una malla de alambre será colocada alrededor de un terreno rectangular de modo que el área cercada sea de 800 pies^2. Se sabe que el largo del terreno es el doble de su ancho. ¿Cuántos pies de malla serán utilizados? (Haeussler, 1997).

Solución.

- ✓ De acuerdo a las indicaciones dadas en las sugerencias, escribiremos con variables los datos del problema, esto es:

ELEMENTOS	VARIABLE	RELACIÓN DE LAS VARIABLES
ANCHO DEL TERRENO (desconocido)	**X**	**X**
LARGO DEL TERRENO (Dos veces el ancho)	**Y**	**2X**
ÁREA DEL TERRENO (Largo *ancho)	**X * Y**	**800 $piés^2$**

- Elaboremos una gráfica que ilustre las condiciones del problema (véase la figura 1).

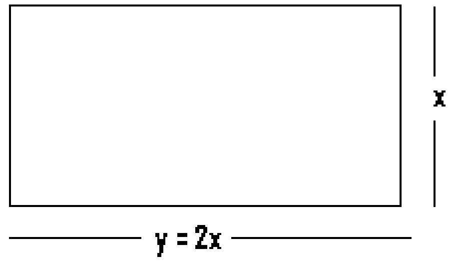


Figura 1. Figura para el problema 1.

(Autor Elkin Ceballos Gómez)

- Sabemos que el Área de un rectángulo es:

A= Base * Altura σ A = Largo * Ancho

Entonces:

$A_{Rectángulo}$ = $x * y$ **: Ecuación 1**

Pero:

- $y = 2x$
- $A_{Rectángulo} = 800 piés^2$

- Reemplazando estos valores en la ecuación 1, tenemos:

$$800piés^2 = x * 2x$$

- Obteniendo la ecuación:

$$2x^2 = 800piés^2$$

- Solucionando la ecuación cuadrática (utilizando cualquiera de los métodos vistos), se tiene que:

$2x^2$ = 800

$2x^2$- $\mathbf{800 = 0} \rightarrow 2(x^2$- 400) = 0, dividiendo por 2 a ambos lados de la igualdad, tenemos:

$x^2 - 400 = 0$, factorizando,$(x + 20) * (x - 20) = 0$

Se iguala cada factor a cero:

$$(x + 20) = 0 \rightarrow x = -20$$

$(x - 20) = 0 \rightarrow x = 20$

Nota: el valor negativo se descarta porque no se puede hablar de una magnitud de medida negativa, por lo tanto, la solución sería:

X = 20

Ancho = 20 pies

Largo = y = 2x = 2*20 = 40 pies

El total de malla a utilizar será de: **Ancho + largo + ancho + largo = x + 2x + x + 2x = 6x**

Por lo tanto la malla utilizada es**: 6x = 6 * 20 pies = 120 pies**

- **PROBLEMA NÚMERO 2:**

Se compra un artículo en cierta cantidad de dinero y se vende ganando el 25% del precio de compra. Si el artículo fue vendido en $40.775. Determine el precio de compra y el valor de la ganancia.

✓ De acuerdo a las indicaciones dadas en las sugerencias, escribiremos con variables los datos del problema, esto es:

ELEMENTOS	VARIABLES	RELACIÓN DE LAS VARIABLES
PRECIO DE COMPRA	X	X
GANANCIA	25% de X	$\frac{25}{100}$ * X = 0,25X
PRECIO DE VENTA	X +25% de X	X + 0,25X = 40.775

SOLUCIÓN

- **Cálculo del precio de compra**:

El precio de venta será igual al precio de compra**(x)** más la ganancia **(25% de X= 0,25X).** Se sabe que el precio de compra es igual a **$40.775**. Resulta la siguiente ecuación:

✓ Planteamiento de la ecuación:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0,25x} = \boldsymbol{40.775}$$

✓ Reducción de términos semejantes:

$$\mathbf{1,25}\boldsymbol{x} = \mathbf{40.775}$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{40775}}{\mathbf{1.25}}$$

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{32.620}$$

El precio de compra es $32.620

Actividad: realiza la prueba y verifica que el valor obtenido si cumpla con las condiciones de la ecuación planteada.

- **Cálculo de la ganancia**:

Ganancia = 0,25 **x**, pero **x= 32.620**, entonces la ganancia es **0,25*32.620 = 8.156**

La.0

0 ganancia es de $ 8.156

- **PROBLEMA NÚMERO 3**

Hace dos años John tenía cinco veces la edad de Bill. Ahora es 8 años mayor que Bill. Encuentre la edad actual de John.

✓ De acuerdo a las indicaciones dadas en las sugerencias, escribiremos con variables los datos del problema, esto es:

ELEMENTOS (NOMBRES)	VARIABLES (Edad actual)	RELACIÓN DE LAS VARIABLES (hace dos años)
JHON	X	x -2
BILL	X - 8	(x-8)-2 = x - 10
RELACIÓN DE EDADES	x y x - 8	X – 2 = 5 (x – 10)

Solución: la cantidad desconocida que va a ser determinada es la edad actual de John, entonces asignamos:

$x =$ Edad actual de John

- ✓ Luego podemos representar las otras cantidades del problema en términos de x:

$x - 8 =$ Edad actual de Bill.

$x - 2 =$ Edad de John hace dos años

$(x-8)-2 = x-10 =$ Edad de Bill hace dos años

- ✓ Una ecuación que expresa la relación de sus edades hace dos años es:

X – 2 = 5 (x – 10)

Se resuelve la ecuación:

$\boldsymbol{x-2 = \quad 5(x-10)}$

$\boldsymbol{x-2 = \quad 5x-50}$

Términos semejantes:

$\boldsymbol{x-5x = \quad 2-50}$

$\boldsymbol{-4x = \quad -48}$**,** se multiplica por -1

$4x = \quad 48$, se despeja la variable

$$x = \frac{48}{4}$$

$$x = \quad 12$$

Entonces:

la edad actual de John es 12 años

Prueba:

Si **John** tiene ahora **12 años**, **Bill** debe tener **4**. Hace dos años **John** tenía **10** y Bill **2**.

Puesto que $10 = 5(2)$, la respuesta es correcta.

(Zill & Dewar, 1992)

- **PROBLEMA NÚMERO 4:**

Una compañía de dulces fabrica una chocolatina de forma rectangular de 12 cm de largo, por 6 cm de ancho y 3 cm de grosor. Debido a un incremento en los costos, la compañía ha decidido reducir el volumen de la chocolatina en un 25%. El grosor será el mismo, pero el largo y el ancho se reducirán en una misma cantidad. Determine el nuevo largo y el nuevo ancho de la chocolatina.

✓ De acuerdo a las indicaciones dadas en las sugerencias, escribiremos con variables los datos del problema, esto es:

ELEMENTOS	NUEVAS CONDICIONES	RELACIÓN DE LAS VARIABLES
El volumen de la chocolatina era de 216 cm^3.	A este volumen se le reducirá un 25%: $\frac{25}{100} * 216cm^3 = 54cm^3$	Producto de las dimensiones: 12 cm* 6cm * 3cm =216 cm^3
	El nuevo volumen será: **$216cm^3$ – $54cm^3$ = 162 cm^3**	

Las dimensiones eran: **Largo: 12 cm.** **Ancho: 6 cm.** **Grosor: 3 cm.**	Sea **x** la cantidad a quitar al largo y al ancho; l**as nuevas dimensiones son:** Nuevo largo: 12 – x. Nuevo ancho: 6 – x. Nuevo grosor :3	El nuevo producto de dimensiones será (modelo matemático): **(12-x)*(6-x)*3 = 162**

- ✓ Tomando la ecuación obtenida:

$$\mathbf{3(12-x)*(6-x)=162}$$

- Dividiendo por 3 ambos lados de la igualdad:

$$\mathbf{\frac{3(12-x)*(6-x)}{3}=\frac{162}{3}}$$

- Se obtiene:

$$\mathbf{(12-x)*(6-x)=54}$$

- Realizando el producto indicado:

$$\mathbf{72-18x+x^2=54}$$

- Igualando a 0:

$$\mathbf{x^2-18x+72-54=0 \rightarrow \ x^2-18x+18=0}$$

- Solucionando la ecuación:

Actividad: utiliza cualquiera de los métodos vistos y verifica los resultados.

$x_1 = 16{,}94\ cms.$

$x_2 = 1{,}063\ cms.$

Nota: el valor de $\mathbf{x_1 = 16,94\ cms.}$ No se puede utilizar en la solución del problema porque es mayor que cualquiera de las magnitudes dadas y nos darían magnitudes negativas, sin sentido alguno para una medición.

Entonces la cantidad a quitar es de **1,063 cm**.

Las nuevas dimensiones serían:

DIMENSIONES	DIMENSIÓN MENOS CANTIDAD A QUITAR	NUEVAS DIMENSIONES
LARGO	12 cms – 1,063cms	10,937 cms.
ANCHO	6 cms – 1,063 cms	4,937 cms
GROSOR	3 cms.	3 cms.
VOLUMEN		10,937 cms* 4,937 cms *3cms = 162 cms.

El resultado no es exacto debido a que no es posible utilizar todos los decimales:

161, 987907 = 162 (se realiza la aproximación).

- **PROBLEMA NÚMERO 5**

Se desea construir una caja sin tapa. Para ello se tomará una lámina cuadrada de cartón y se cortarán en las cuatro esquinas cuadrados idénticos de 5 cm de lado y se doblarán hacia arriba. Si la caja será hecha para contener un volumen de 2000 cm^3. Determine las dimensiones de la lámina de cartón a utilizar.

✓ De acuerdo a las indicaciones dadas en las sugerencias, escribiremos con variables los datos del problema, esto es:

ELEMENTOS	VARIABLES	RELACIÓN DE VARIABLES
Lado del cuadrado	X	X
Lado del nuevo cuadrado	X – 5 - 5	X - 10
Volumen de la caja:	Largo: x – 10 Ancho: x – 10 Grosor: 5	Largo*ancho*grosor $(x-10)*(x-10)*5=2000$

SOLUCIÓN:

Nota: un cuadrado es un rectángulo que tiene los cuatro lados iguales.

- ✓ Sea **x** el lado del cuadrado; se va a quitar en las cuatro esquinas 5 cm a cada lado de la esquina. Véase la figura 2:

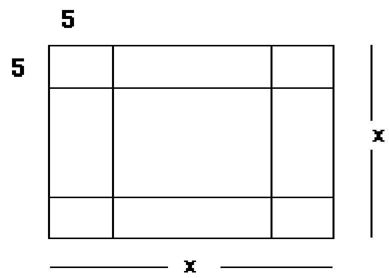


Figura 2. Figura para el problema número 5

(Autor Elkin Ceballos Gómez)

- ✓ Quitando 5 cm en cada esquina el lado de la caja será x − 5 − 5 =x − 10. La figura 4 ilustra esta situación:

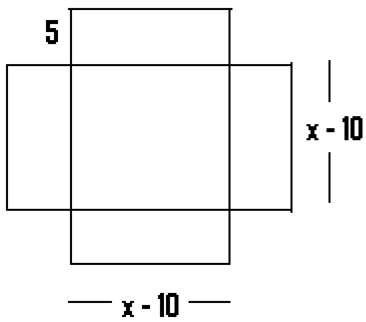


Figura 3. Figura para el problema número 5

(Autor Elkin Ceballos Gómez)

- ✓ Doblando los lados hacia arriba la caja queda como la mostrada en la figura 4.

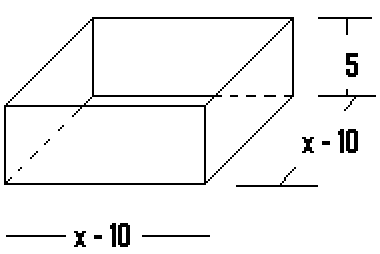


Figura 4. Figura para el ejemplo 5

(Autor Elkin Ceballos Gómez)

- Se debe encontrar un modelo para el volumen:

Volumen es igual a alto - grosor (5), por ancho (x-10), por largo(x-10). El volumen tiene un valor de 2000 cm^3; entonces queda:

$(x-10)*(x-10)*5$= 2000$x^2-20x-300=0$

Efectuando los productos indicados, queda:

$$5(x^2-20x+100)=2000$$

- Dividiendo por **5** ambos lados de la igualdad:

$$5\left(\frac{(x^2-20x+100)}{5}\right)=\frac{2000}{5}$$

- Obtenemos

$$(x^2-20x+100)=400$$

- Igualamos a cero:

$$(x^2-20x+100)-400=0$$

- Reducción de términos semejantes:

$$x^2-20x-300=0$$

- Factorizando:

$$(x - 30)(x + 10) = 0$$

- Igualamos cada factor a cero:

$$(x - 30) = 0 \rightarrow x_1 = 30$$

$(x + 10) = 0 \rightarrow x_2 = -10$ **Nota**: el valor de $x_2 = -10\ cms.$ No se puede utilizar en la solución del problema porque nos darían magnitudes negativas, sin sentido alguno para una medición.

Por lo tanto:

$x_1 = 30$ Es la solución para el problema.

El lado de la lámina debe ser de 30 cm.

Enlaces para problemas resueltos.

- http://www.youtube.com/watch?v=ZhAy51ouZlU&feature=relmfu
- http://www.youtube.com/watch?v=wg44YjtS_1M
- http://www.youtube.com/watch?v=YDbM9hBPvBg&feature=fvwrel
- http://www.youtube.com/watch?v=9veNjGofq7I
- http://www.youtube.com/watch?v=C-MIecfEJ8Q&feature=related

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. **Solucione la ecuación** $\frac{3x-1}{8} - \frac{2x+7}{6} = \frac{5x}{9}$ **No olvide comprobar el resultado.**
2. **Solucione la siguiente ecuación cuadrática utilizando los tres métodos vistos (factorización, Fórmula general y Completación del cuadrado); no olvide comprobar el resultado.**

$15x^2 = x + 2$

NOTA: para resolver los siguientes problemas, revisa cuidadosamente los ejercicios de aprendizaje realizados y trata de llevar a cabo el mismo proceso.

3. **Tres cestos contienen 575 manzanas. El primer cesto tiene 10 manzanas más que el segundo y 15 más que el tercero. ¿Cuántas manzanas hay en cada cesto? (Baldor, 1996)**
4. **Vereda de un jardín. Un terreno rectangular, de 4 X 8 m, es usado como jardín. Se decide poner una vereda en toda la orilla interior de modo que 12 m^2 del terreno se dejen para flores. ¿Cuál debe ser el ancho de la vereda? (Haeussler, 1997)**
5. **Un fabricante de pequeños aparatos domésticos determina que la utilidad P en dólares generada por la producción de x hornos de microondas por semana está dada por la fórmula** $P = \frac{1}{10}x(300 - x)$ **siempre y cuando** $0 \le x \le 200$. **¿Cuántos hornos deben ser fabricados en una semana para obtener una utilidad de \$ 1250? (Stewar, Lothar, & Watson, 2001).**
6. Se desea construir una caja de forma rectangular sin tapa a partir de una lámina de cartón de 20 cm por 15 cm. Para ello se cortarán cuadrados idénticos en las cuatro esquinas y se doblarán los lados hacia arriba. Determine las dimensiones de la caja de tal manera que su volumen sea de 378 cm^3. Dé su respuesta con una precisión de tres decimales. Determine también la cantidad de material utilizado.
7. Un piloto realiza un vuelo de 600 millas. Si aumenta su velocidad en 40 milla, por hora él podría recorrer esa distancia en 1/2 hora menos. ¿Cuál es su velocidad?

- **Desigualdades e inecuaciones**

- **Definiciones y conceptos.**

- **Desigualdad:** es una expresión que indica que una cantidad es mayor o menor que otra cantidad. Los signos de desigualdad son:

SÍMBOLO	LECTURA	INCLUSIÓN	REPRESENTACIÓN
$>$	**Mayor que…**	**No incluye el extremo de…**	**Se representa con PARÉNTESIS ( ), en notación de intervalos.**

$\geq$	**Mayor-igual que...**	**Incluye el extremo de...**	**Se representa con CORCHETE [ ] en notación de intervalos.**
$<$	**Menor que...**	**No incluye el extremo de...**	**Se representa con PARÉNTESIS ( ) en notación de intervalos.**
$\leq$	**Menor-igual que...**	**Incluye el extremo de...**	**Se representa con CORCHETE [ ] en notación de intervalos.**
$+\infty$	**Más infinito**		En intervalo siempre se representa por un paréntesis.
$-\infty$	**Menos infinito**		En intervalo siempre se representa por un paréntesis.

EJEMPLOS: Interprete los siguientes intervalos y diligencie los espacios que están en blanco marcados con interrogantes (¿?).

Nota: para leer un intervalo hay que hacerlo: primero, del centro hacia la derecha y luego del centro hacia la izquierda.

INTERVALO	LECTURA
1. A= [5 , 9)= $5 \leq X < 9$	**X es menor que 9 y mayor-igual que 5(no incluye el 9, pero si incluye el 5, es un intervalo cerrado en 5 y abierto en 9).**
2. B= (- 3 , 4]$= -3 < X \leq 4$	**¿?**
3. C= [0 , 10]$= 0 \leq X \leq 10$	**X es menor-igual que 10 y mayor-igual que 0** **(Incluye el cero y el diez, los dos extremos y es cerrado en ambos)**
4. D=(5,1)$= -5 < X < -1$	**X es menor-igual que -1 y mayor-igual que -5** **(No incluye el -1 y el 5, los dos extremos, es abierto en ambos).**

5. E=$(-\infty ,1] = -\infty < \boldsymbol{X} \leq \mathbf{1}$	¿?
6. F=$(2,+\infty) = -\mathbf{2} < \boldsymbol{X} < +\infty$	¿?
$\boldsymbol{R}_{e=}(-\infty,+\infty)$ 7. G=$(-\infty,+\infty) = -\infty < \boldsymbol{X} < +\infty$	**X es menor-igual que $+\infty$ y mayor-igual que $-\infty$** **(No incluye el $+\infty$ $\boldsymbol{y\ el}$ $-\infty$, los dos extremos, es abierto en ambos). Este intervalo, representa, además, el campo numérico de los números Reales.**

Nota: si observa, detenidamente, se dará cuenta que el signo que está a la izquierda de x se lee al revés, o sea de derecha a izquierda, por ejemplo, en el numeral 1 tenemos

$$(5 \leq X < 9)$$

Aparentemente tenemos entre el 5 y la x el símbolo **menor-igual que**..., lo estamos leyendo **mayor-igual que...** porque lo leemos de **derecha a izquierda (al revés).**

- **Inecuaciones:** una inecuación es una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas) que sólo se verifica para determinados valores de las incógnitas.

Ejemplos:

$$x - 5 \leq 3$$

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

$$\frac{3}{4}x - 7 < \frac{2}{5}x + \frac{1}{3}$$

- **Propiedades de las inecuaciones:** en las inecuaciones se cumplen las **mismas propiedades** que **en las ecuaciones**, pero se deben tener en cuenta las siguientes restricciones.

1. Cuando todos los términos de una inecuación se multiplican por una **cantidad negativa**, se debe cambiar el sentido de la desigualdad.
2. En una inecuación **no se puede multiplicar o dividir** por **una cantidad que contenga a la variable.**

Inecuaciones - propiedades [Enlace]

- **Solución de inecuaciones**: solucionar una inecuación consiste en encontrar uno o varios intervalos que contengan todos los valores de la incógnita que cumplen con el sentido de la desigualdad.

En la inecuación: **$3x - 5 < x + 3$, $x = 0$** es solución de la inecuación**.** **$X = 20$,** no es solución de la inecuación.

Nota: cuando en el proceso de solución de una inecuación se llega a una desigualada falsa, quiere decir que la inecuación no tiene solución.

Cuando en el proceso de solución de una inecuación se llega a una desigualada verdadera, quiere decir que la solución de la inecuación son todos los reales.

Enlaces para solución de inecuaciones.

- http://www.youtube.com/watch?v=CSPk_iUkc-Q
- http://www.youtube.com/watch?v=jSZWvCh2PqI&feature=related
- http://www.youtube.com/watch?v=CiCp1-3n3sU&feature=related
- http://www.youtube.com/watch?v=VphT7BaFAOw&feature=related
- http://www.youtube.com/watch?v=CqcneRwCZi4&feature=related

- **Solución de inecuaciones lineales e inecuaciones cuadráticas**

A través de los ejercicios de aprendizaje se detallará el procedimiento a seguir en la solución de una inecuación cuadrática y de la misma manera se ilustrará la solución de una inecuación lineal.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Solucione la inecuación: $\boldsymbol{x^2}$**+ 2x**> 15

PROCEDIMIENTO

1. **Deje un lado de la inecuación en cero**:

   $\boldsymbol{x^2}$**+ 2x**$\boldsymbol{-15} >$ 0Esta expresión se llama **inecuación objetivo**.

2. **Encuentre las raíces de la inecuación objetivo**. Esto es **igual a cero** y resuelva la ecuación resultante, los valores obtenidos son las raíces de la inecuación objetivo. En estas raíces la inecuación objetivo se hace cero, es decir, donde posiblemente hay cambio de signo en la expresión.

$$\boldsymbol{x^2+2x-15=0 \to (x+5)(x-3)=0}$$

$$\boldsymbol{x+5=0 \to\ x=-5}$$

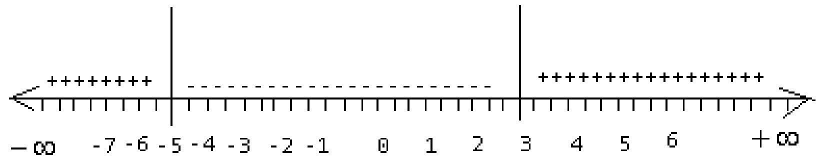
$$\boldsymbol{x-3=0 \to\ x=3}$$

Las raíces de la inecuación objetivo son: $\boldsymbol{x=-5\sigma\ x=3}$

3 .**Cada raíz ubíquela en la recta numérica.**

4. Evalúe el signo que tiene la inecuación objetivo en cada raíz. Para ello se toma un número que se encuentre a la izquierda y otro número que encuentre a la derecha de cada raíz. Estos números se reemplazan en la inecuación objetivo y el signo del resultado se coloca encima de la recta numérica.

5. La respuesta o solución de la inecuación, resulta tomando los intervalos que cumplan con el sentido de la desigualdad. Para ello nos fijamos en el sentido de la desigualdad de la inecuación objetivo y en la recta numérica de la siguiente manera:



$x = -6$
$(-6)^2 + 2(-6) - 15 =$
$36 - 12 - 15 = +9$
Resultado positivo
Colocamos $+++++$

$x = 0$
$(0)^2 + 2(0) - 15 = -15$
Resultado Negativo
Colocamos $-----$

$x = 4$
$(4)^2 + 2(4) - 15$
$16 + 8 - 15 = +6$
Resultado Positivo
Colocamos $+++++$

Figura 5. Recta numérica para solucionar $x^2 + 2x > 15$

(Autor Elkin Ceballos Gómez)

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Si en la inecuación objetivo se tiene: >0 Se toman los ++++, sin incluir las raíces.
Si en la inecuación objetivo se tiene: ≥0 Se toman los ++++, incluyendo las raíces.
Si en la inecuación objetivo se tiene: <0 Se toman los-------, sin incluir las raíces.
Si en la inecuación objetivo se tiene: ≤0 Se toman los------, incluyendo las raíces.

- ✓ Tenga en cuenta**: e**ste método también se utiliza para solucionar inecuaciones de grado tres o superior.

La solución del ejemplo es:

$$\boldsymbol{x \in (-\infty, -5) \cup (3, +\infty)}$$

- **MÉTODO DE LOS INTERVALOS**

Es otro método utilizado para solucionar inecuaciones cuadráticas (también inecuaciones racionales e irracionales y de orden superior a 2, 3, 4…) es el método denominado Método de los intervalos, siendo el método más universal para la solución de este tipo de intervalos.

- ✓ **PROCEDIMIENTO**

A través de un ejemplo se ilustrará el proceso a seguir.

Ejercicio de Aprendizaje

Encuentre el (los) intervalo (s) solución para la siguiente inecuación:

$$a)\ x^2 - x \geq 6$$

Procedimiento:

1. **Se desiguala la inecuación a cero:**

$$x^2 - x - 6 \geq 0$$

2. **Se factoriza la inecuación:**

$$(x-3)*(x+2) \geq 0$$

3. **Se iguala cada factor a cero:**

$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

4. **Se representan estas dos raíces sobre la recta numérica**:(ver diagrama al final)

5. **Se toman los intervalos que quedan marcados sobre la recta numérica**:

A = $(-\infty, -2)$

B = $(-2, +\infty)$

C = $(3, +\infty)$

6. **Tomamos cualquier valor del intervalo y lo reemplazamos en la inecuación original:**

- ✓ En el intervalo **A tomaremos el -3 (puede también tomar -4 o -5 o -6...).**

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tenga en cuenta que: si se toma el -2 se hace cero la inecuación, no tome los extremos del intervalo.

- ✓ Reemplacemos -3 en la inecuación objetivo:

$$\boldsymbol{x^2 - x - 6 \geq 0}$$

$$(\boldsymbol{-3})^2 - (\boldsymbol{-3}) - \boldsymbol{6} > 0$$

$$\boldsymbol{9 + 3 - 6} > 0$$

$$+\boldsymbol{6} > 0 \in \boldsymbol{Re}^{+}.$$

- ✓ En el intervalo **B tomaremos el 0** y lo reemplazamos:

$$\boldsymbol{x^2 - x - 6 > 0}$$

$$(\boldsymbol{0})^2 - \boldsymbol{0} - \boldsymbol{6} < 0$$

$$-\boldsymbol{6} < 0 \in \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{e\ Negativos}}.$$

- ✓ En el intervalo **C tomaremos el 4** y lo reemplazamos:

$$\boldsymbol{x^2 - x - 6 \geq 0}$$

$$(\boldsymbol{4})^2 - \boldsymbol{4} - \boldsymbol{6} > 0$$

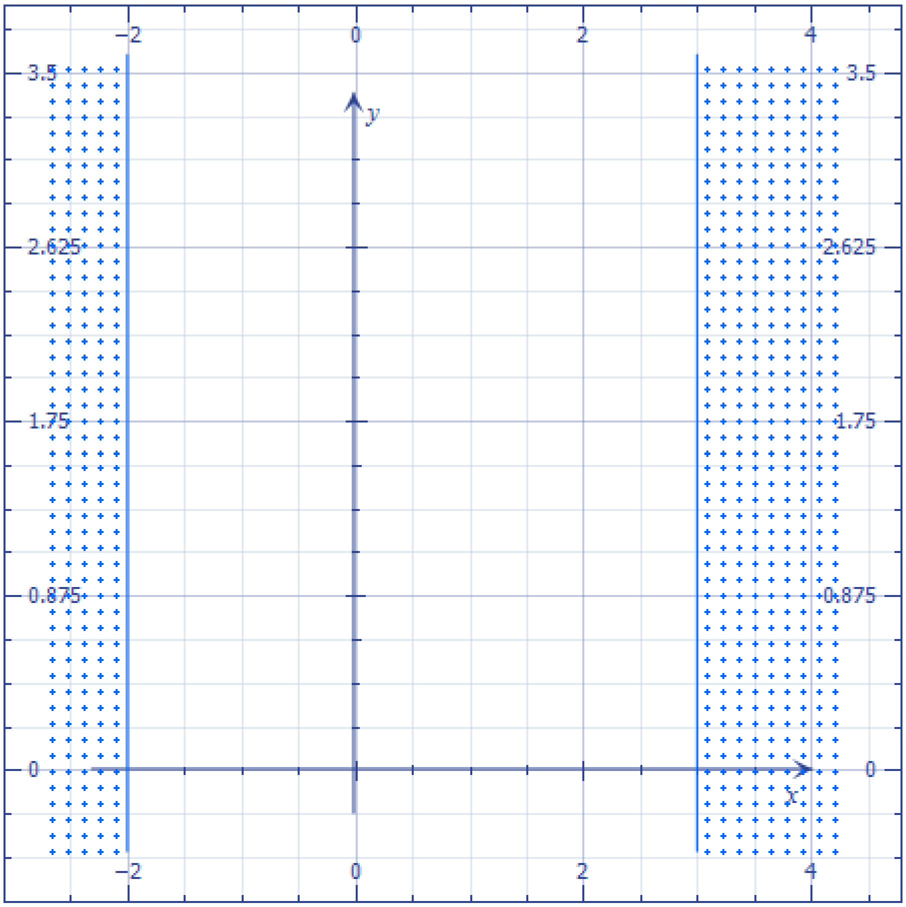
$$\boldsymbol{16 - 4 - 6} > 0 - (\boldsymbol{-3}) - \boldsymbol{6} > 0$$

$$+\ \boldsymbol{6} > 0\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{ePositivos}}.$$

7. **Respuesta:** para determinarla debemos mirar las condiciones iniciales de la inecuación , ésta nos indica que la solución son **todos los números mayores e iguales a cero;** de acuerdo a esta condición los únicos intervalos que la cumplen son el **intervalo A** y el **intervalo C,** la solución es la **unión** de los mismos, cerrando el intervalo en los extremos -2 y 3 ya que, en este caso hacen parte de la solución por contener el signo igual, al reemplazarlos en la ecuación original obtendríamos la identidad 0 = 0, contemplada en la inecuación original.

$$\boldsymbol{Solución}: \; x\epsilon(-\infty \, , -2] \cup [3 \, , +\infty)$$

Gráficamente sería:(lo punteado representa los intervalos solución).



PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tenga en cuenta: cuando la inecuación es ≥ en la solución se toma la unión de los intervalos que cumplen con las condiciones iniciales.

b) $7 - \frac{x}{2} > \frac{5x}{3} - 6$

Procedimiento: es una inecuación lineal (el grado de x es 1).

1. Se debe multiplicar toda la inecuación por el m.c.m. de los denominadores, en este caso:

m.c.m es **1*2*3= 6**

$\mathbf{6}*(\mathbf{7}-\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}) > 6*(\frac{\mathbf{5}\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}}-\mathbf{6})$**,** efectuando la multiplicación indicada:

$\mathbf{42}-\mathbf{3}\boldsymbol{x} > 10\boldsymbol{x}-\mathbf{36}$

$$-\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{10}\boldsymbol{x} > -42-36 \rightarrow -\mathbf{13}\boldsymbol{x} > -78$$

$>$

2. Dividimos ambos lados de la desigualdad por **– 13, para hallar el valor de x:**

$$\frac{(-\mathbf{13}\boldsymbol{x})}{(-\mathbf{13})} > \frac{(-\mathbf{78})}{(-\mathbf{13})}$$

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tenga presente que: al multiplicar o dividir ambos miembros de una desigualdad por un número real negativo (Re^{-}), la desigualdad cambia de sentido.

$$\boldsymbol{a} > b$$
$$(\boldsymbol{a}) * (-\mathbf{1}) > (\boldsymbol{b}) * (-\mathbf{1})$$
$$-\boldsymbol{a} < -b$$

Ejemplo:

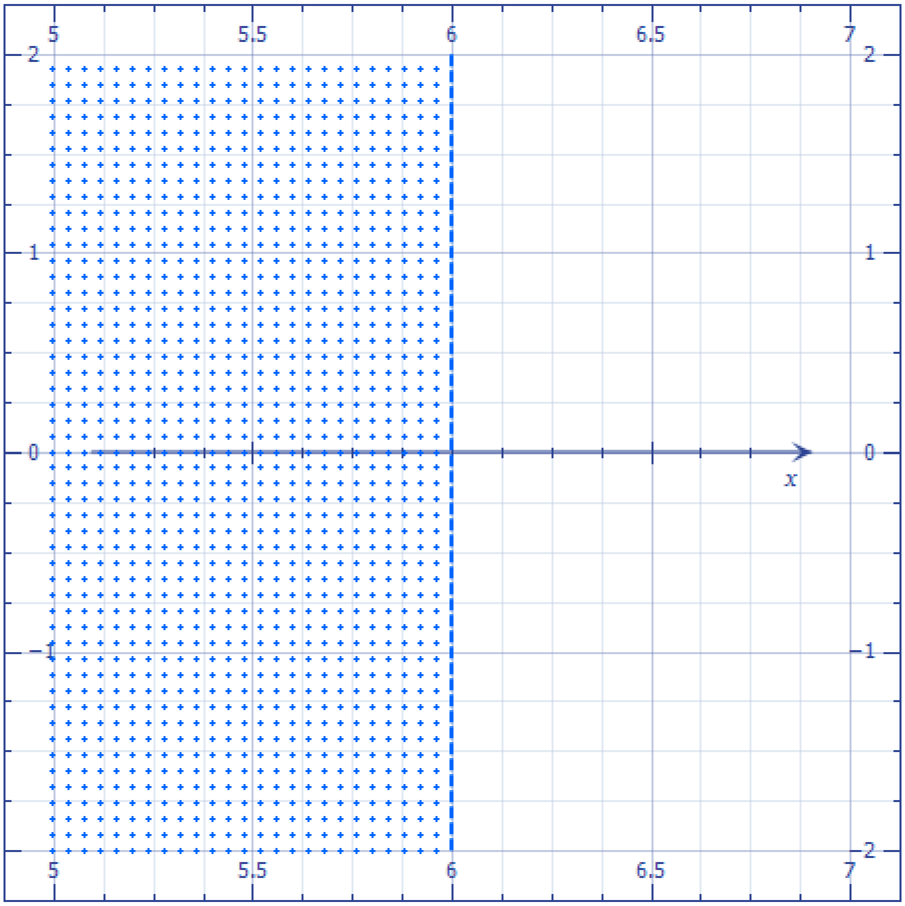
$$\mathbf{5} > 3$$
$$(\mathbf{5}) * (-\mathbf{1}) > (\mathbf{3}) * (-\mathbf{1})$$
$$-\mathbf{5} < -3$$

Continuando con el ejercicio y realizando la división indicada, tenemos:

$\boldsymbol{x <\quad 6,}$ por lo tanto la solución analítica de la inecuación es el intervalo:

Solución: $\boldsymbol{x\epsilon}(-\infty < 6)\boldsymbol{,}$ no incluye el 6 por ser abierto en dicho punto (no está el signo igual).

La solución gráfica sería: (todo lo punteado)



C. $\boldsymbol{2x-10} > 0$

Procedimiento: es una inecuación lineal (el grado de x es 1)

1. **Sumamos a ambos miembros de la desigualdad el inverso aditivo de -10 que es +10**

$$\boldsymbol{2x-10+10} > 0+10$$

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Traer a la memoria que: si a una desigualdad le sumamos o restamos el mismo número real a ambos lados, el sentido de la desigualdad no cambia.

$Sean\ b\ a, b, c \in R_e$

$$a < b$$
$$a \pm c < b \pm c$$
$$no\ cambia$$

Ejemplo:

$$3 < 5$$
$$3 + 7 < 5 + 7$$
$$10 < 12$$

Continuando con el ejercicio;

$\mathbf{2x - 10 + 10} > 0 + 10$

$\mathbf{2x} > 10$**,**

2. **Dividiendo por 2 ambos miembros de la inecuación:**

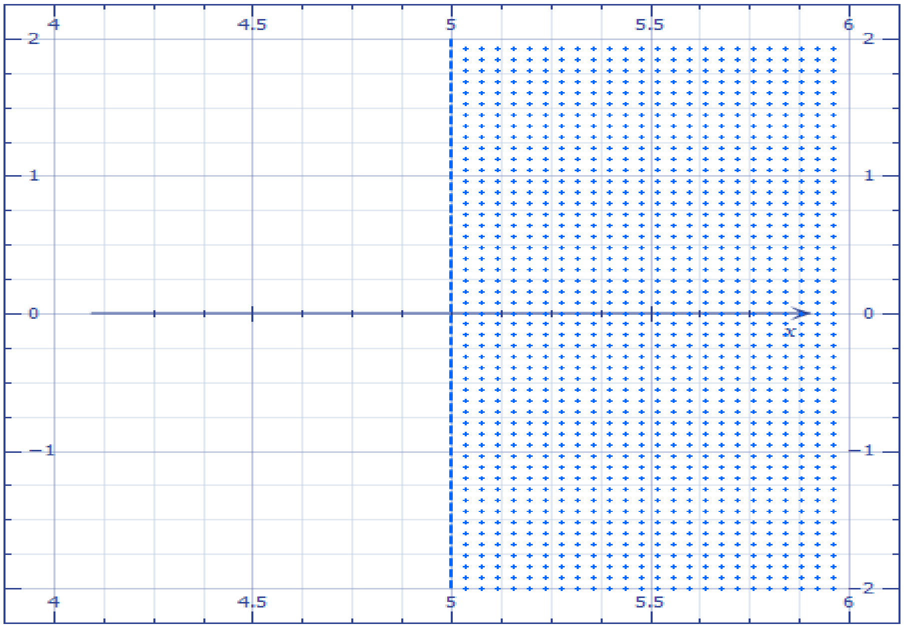
$\frac{\mathbf{2x}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{2}}$**,** simplificando

$\boldsymbol{x} > 5$**,** La solución analítica sería el intervalo**:**

Solución:$\boldsymbol{x} \ \boldsymbol{\epsilon}\ (\mathbf{5}\ , +\infty)$

La solución gráfica para la inecuación $\mathbf{2x - 10} > 0$

: ;



d. $x^2 + 6x + 5 \leq 0$

Procedimiento: es una inecuación cuadrática y obtendremos dos raíces como solución.

1. Como la inecuación ya está desigualada a cero, procedemos a factorizarla:

$$x^2 + 6x + 5 \leq 0$$

$$(x + 1)(x + 5) \leq 0$$

2. Igualamos cada factor a cero:

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$$

$$x + 5 = 0 \rightarrow x = -5$$

3. Se representan estos puntos en la recta numérica (ver solución gráfica al final del proceso.

4. Obtenemos los intervalos (como son dos raíces obtenemos tres intervalos):

$A = (-\infty, -5)$

$B = (-5, -1)$

$\boldsymbol{C} = (-\mathbf{1}, +\infty)$

5. Tomamos un valor cualquiera en cada uno de los intervalos y lo reemplazamos en la inecuación objetivo:

$\boldsymbol{A} = (-\infty, -\mathbf{5})$**:** Tomamos el **-6**

$$(-6)^2 + 6(-6) + 5 = 36 - 36 + 5 = +5 > 0, +5 \; \epsilon \; Re^+$$

$\boldsymbol{B} = (-\mathbf{5}, -\mathbf{1})$:**Tomamos el -3**

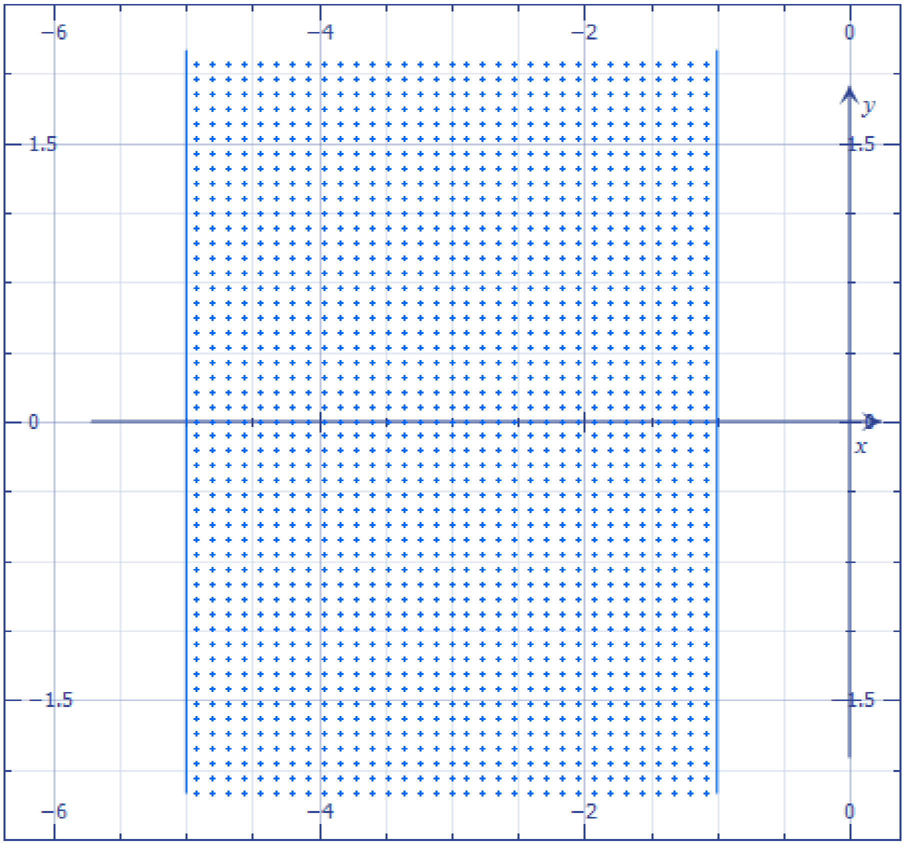
$$(-3)^2 + 6(-3) + 5 = 9 - 18 + 5 = -4 < 0, -4 \; \epsilon \; Re^-$$

$\boldsymbol{C} = (-\mathbf{1}, +\infty)$: Tomamos el **0**

$$(0)^2 + 6(0) + 5 = 0 + 0 + 5 = +5 > 0, +5 \; \epsilon Re^+$$

6. De acuerdo a lo anterior el único intervalo que cumple con las condiciones iniciales del problema es el intervalo **C.**

- ✓ La solución analítica es el intervalo $\boldsymbol{C} = [-\mathbf{5}, -\mathbf{1}]$**,**cerrado en los extremos porque estos hacen parte de la solución($\leq$).
- ✓ La solución gráfica de la inecuación: $\boldsymbol{x^2 + 6x + 5 \leq 0}$



e. $6x^2 - 7x - 3 \geq 0$

Procedimiento:

1. Igualando a cero y factorizando:

$$\frac{6}{6}(6x^2 - 7x - 3) = 0$$

$$\frac{36x^2 - 7(6x) - 18}{6} = 0$$

$\frac{(6x-9)*(6x+2)}{6} = 0 \rightarrow \frac{3(2x-3)*2(3x+1)}{6} = 0,$ simplificando

$(2x - 3) * (3x + 1) = 0$

2. Igualamos cada factor a cero para obtener las raíces:

$$2x-3=0\to x=\frac{3}{2}$$

$3x+1=0\to x=-\frac{1}{3}$

3. Las raíces de la ecuación son:

$x=\frac{3}{2}$, $x=-\frac{1}{3}$

4. Se ubican estos dos números en la recta numérica (ver solución gráfica al final del proceso).

5. Obtenemos los intervalos (como son dos raíces obtenemos tres intervalos):

$A=\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$

$B=\left(-\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right)$

$C=\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

6. Tomamos un valor cualquiera en cada uno de los intervalos y lo reemplazamos en la inecuación objetivo:

$A=\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$**:** Tomamos el **– 1**

$6(-1)^2-7(-1)-3=6+7-3=+10>o\ \epsilon\ Re^{+}$

$B=\left(-\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right)$:Tomamos el**0**

$6(0)^2-7(0)-3=0-0-3=-3<o\ \epsilon\ Re^{-}$

$C=\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$: Tomamos el **2**

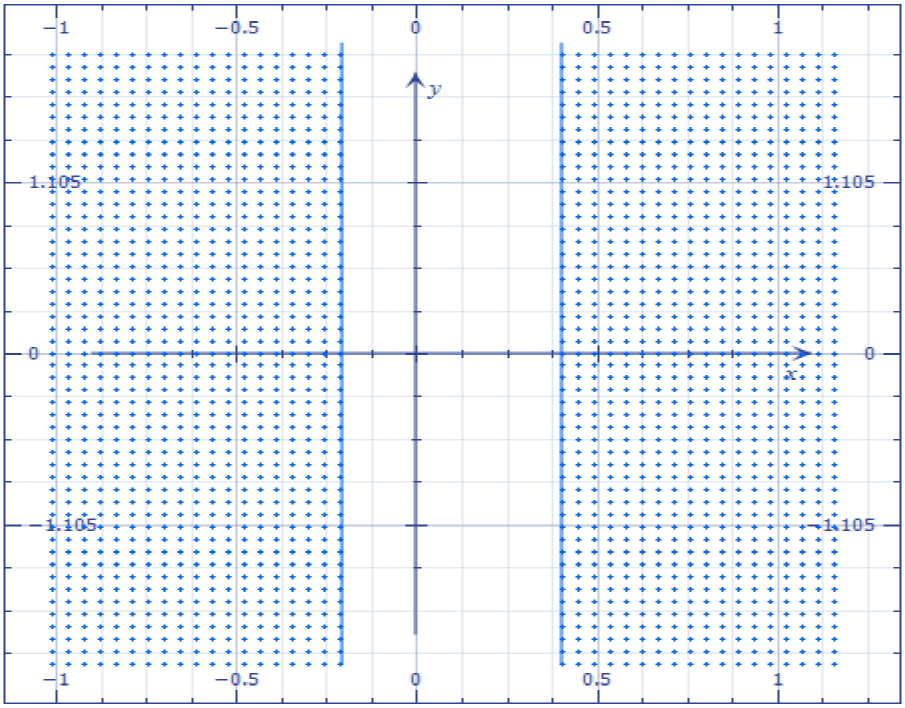
$6(2)^2-7(2)-3=24-14-3=+7>0\ \epsilon\ Re^{+}$

7. De acuerdo a lo anterior los intervalos que cumplen con las condiciones iniciales del problema son el intervalo **A y el intervalo B.**

✓ Analíticamente:

S = $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

- ✓ Gráficamente: La solución gráfica de la ecuación $\boldsymbol{6x^2 - 7x - 3 \geq 0}$



Nota**:** también se puede representar de la siguiente manera:

$x = -\frac{1}{3}$		$x = \frac{3}{2}$
++++++++++++	- - - - - - - - - - -	++++++++++++
$x = -1$	$x = 0$	$x = 2$
$6(-1)^2 - 7(-1) - 3$	$6(0)^2 - 7(0) - 3$	$6(2)^2 - 7(2) - 3$
$6 + 7 - 3$	-3	$24 - 14 - 3$
Positivo	*Negativo*	*Positivo*

Figura 9. Recta numérica para solucionar desigualdad

(Autor Elkin Ceballos Gómez)

La solución es:

$$x \in= \left(-\infty,-\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2},\infty\right)$$

- **SOLUCIÓN DE INECUACIONES RACIONALES.**

Son racionales porque hay variables en el denominador.

PROCEDIMIENTO:

1. Deje un lado de la inecuación en cero.
2. Deje la inecuación con una sola fracción (Reduzca términos semejantes).
3. La inecuación anterior se llama inecuación objetivo. Encuentre todas las raíces de la inecuación objetivo. Para ello iguale a cero tanto el numerador como el denominador.
4. Coloque las raíces en la recta numérica y determine el signo de la inecuación objetivo a la izquierda y a la derecha de cada raíz.

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tenga en cuenta que: los intervalos donde se incluyan las raíces del denominador siempre son abiertos (con paréntesis).

Enlaces para solución de inecuaciones racionales.

- http://www.youtube.com/watch?v=V5Y92aeEQos
- http://www.youtube.com/watch?v=O75Nsbws_CQ
- http://www.youtube.com/watch?v=_9LMFSWecY0

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Resuelva las siguientes inecuaciones racionales:

a. $\frac{5}{x+2}+\frac{3x}{x-2} \leq 3$

Procedimiento:

1. Se desiguala a cero y se determina el m.c.m. de los denominadores y se realiza la operación indicada (suma de fracciones algebraicas, en este caso).

$$\frac{5}{x+2}+\frac{3x}{x-2}-3\leq 0$$

El m.c.m. es: $(x+2)*(x-2)$**,** queda entonces:

$$\left(\frac{5}{x+2}\right)+\left(\frac{3x}{x-2}\right)-3\leq 0\rightarrow\frac{5(x-2)+3x(x+2)-3(x+2)(x-2)}{(x+2)*(x-2)}\leq 0$$

2. Efectuando los productos indicados:

$\frac{5x-10+3x^2+6x-3(x^2-4)}{(x+2)*(x-2)}\leq 0$, realizando el producto que queda indicado:

$\frac{5x-10+3x^2+6x-3x^2+12}{(x+2)*(x-2)}\leq 0$, Reduciendo términos semejantes:

$\frac{11x+2}{(x+2)*(x-2)}\leq 0$, esta es la **inecuación objetivo**

3. Cada factor, tanto en el numerador como en el denominador se debe igualar a cero:

$$11x+2=0\ \rightarrow\ x=-\frac{2}{11}$$

$$x+2=0\rightarrow x=-2$$

$$x-2=0\rightarrow x=2$$

Estas tres raíces se ubican en la recta numérica (ver solución gráfica al final del proceso)

4. Obtenemos los intervalos (como son tres raíces obtenemos cuatro intervalos):

$$A=(-\infty,-2)$$

$$B=\left(-2,-\frac{2}{11}\right)$$

$$C=\left(-\frac{2}{11},2\right)$$

$\boldsymbol{D} = (\mathbf{2}, +\infty)$

5. Tomamos un valor cualquiera en cada uno de los intervalos y lo reemplazamos en la inecuación objetivo:

$\boldsymbol{A} = (-\infty, -\mathbf{2})$**,** tomamos el **- 3**

$$\frac{11(-3)+2}{(\mathbf{-3+2})*(\mathbf{-3-2})} = \frac{-33+2}{(-1)*(-5)} = \frac{-31}{5} = -\frac{31}{5} < 0, -\frac{31}{5}\ \epsilon\ Re^{-}$$

$\boldsymbol{B} = \left(-\mathbf{2}, -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{11}}\right)$**,** tomamos el **-1**

$$\frac{11(-1)+2}{(\mathbf{-1+2})*(\mathbf{-1-2})} = \frac{-11+2}{(1)*(-3)} = \frac{-9}{-3} = 3 > 0, 3\ \epsilon\ Re^{+}$$

$\boldsymbol{C} = \left(-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{11}}, \mathbf{2}\right)$**,** tomamos el **0**

$$\frac{11(0)+2}{(\mathbf{0+2})*(\mathbf{0-2})} = \frac{0+2}{(2)*(-2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} < 0, -\frac{1}{2}\epsilon\ Re^{-}$$

$\boldsymbol{D} = (\mathbf{2}, +\infty)$**,** tomamos el **3**

$$\frac{11(3)+2}{(\mathbf{3+2})*(\mathbf{3-2})} = \frac{33+2}{(5)*(1)} = \frac{35}{5} = 7 > 0, \qquad 7\ \epsilon\ Re^{+}$$

6. Solución:

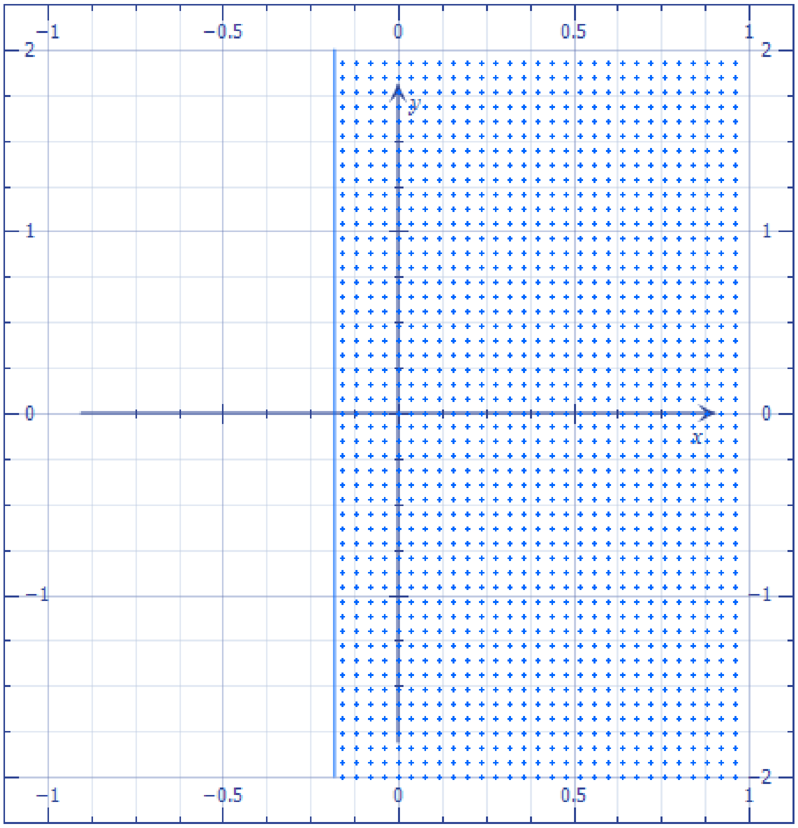
   ✓ **Analítica.**: está dada por los intervalos que cumplen la condición del problema

   $(\leq)$, esto es,

$$\boxed{\boldsymbol{S} = \boldsymbol{x}\epsilon(-\infty, -\mathbf{2}] \cup [-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{11}}, \mathbf{2})}$$

   ✓ **Gráfica inecuación objetivo:**

$$\frac{11x+2}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})*(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})} \leq 0$$



Nota: la siguiente gráfica presenta otra forma de solución para la inecuación:

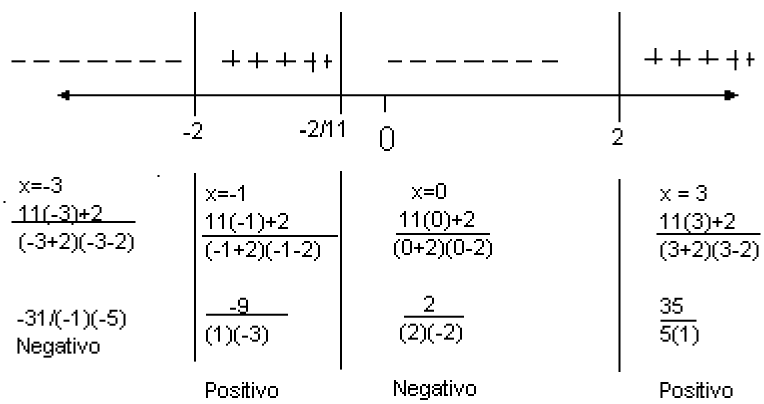


Figura 10. Recta numérica para solucionar desigualdad

(Autor Elkin Ceballos Gómez)

b. Resuelva la siguiente inecuación Racional:

$$\frac{3x}{x+5} \geq 7$$

Procedimiento:

1. **Se desiguala a cero:**

   $\frac{3x}{x+5} - 7 \geq 0,$

2. Se halla el m.c-m : $x + 5$

3. Se realiza la operación de fracciones algebraicas indicada:

$$\frac{3x - 7(x+5)}{x+5} \geq 0$$

4. Realizando el producto indicado y reduciendo términos semejantes:

$\frac{3x-7(x+5)}{x+5} \geq 0 \rightarrow \frac{3x-7x-35}{x+5} \geq 0,$

$$\frac{-4x-35}{x+5} \geq 0, \text{esta es la } \textbf{inecuación objetivo}.$$

5. Cada factor, tanto en el numerador como en el denominador se debe igualar a cero:

   $-4x - 35 = 0 \rightarrow -4x = 35 \rightarrow x = -\frac{35}{4} = -8,75$

$$x + 5 = 0 \rightarrow x = -5$$

6. Las raíces son:

$$x = -\frac{35}{4} = -8,75, \qquad x = -5$$

7. Se ubican estas raíces en la recta numérica (ver al final del procedimiento en la solución gráfica).

8. Se obtienen los intervalos a partir de estos puntos (son dos puntos se obtienen 3 intervalos):

   $A = (-\infty, -8,75)$

   $B = (-8,75, -5)$

   $C = (-5, +\infty)$

9. Tomamos un valor cualquiera en cada uno de los intervalos y lo reemplazamos en la inecuación objetivo:

$\boldsymbol{A} = (-\infty, \mathbf{-8, 75})$**,** tomamos **-9**

$$\frac{\mathbf{-4(-9)-35}}{\mathbf{-9+5}} = \frac{\mathbf{36-35}}{\mathbf{-4}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{-4}} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} < 0\,; -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\,\boldsymbol{\epsilon}\,\boldsymbol{Re^-}$$

$\boldsymbol{B} = (\mathbf{-8, 75, -5})$**,** tomamos **-6**

$$\frac{\mathbf{-4(-6)-35}}{\mathbf{-6+5}} = \frac{\mathbf{24-35}}{\mathbf{-1}} = \frac{\mathbf{-11}}{\mathbf{-1}} = \mathbf{11} > 0;\ \mathbf{11}\,\boldsymbol{\epsilon}\,\boldsymbol{Re^+}$$

$\boldsymbol{C} = (\mathbf{-5}, +\infty)$**,** tomamos **-4**

$$\frac{\mathbf{-4(-4)-35}}{\mathbf{-4+5}} = \frac{\mathbf{16-35}}{\mathbf{1}} = \mathbf{-19} < 0;\ -19\,\epsilon\,\boldsymbol{Re^-}$$

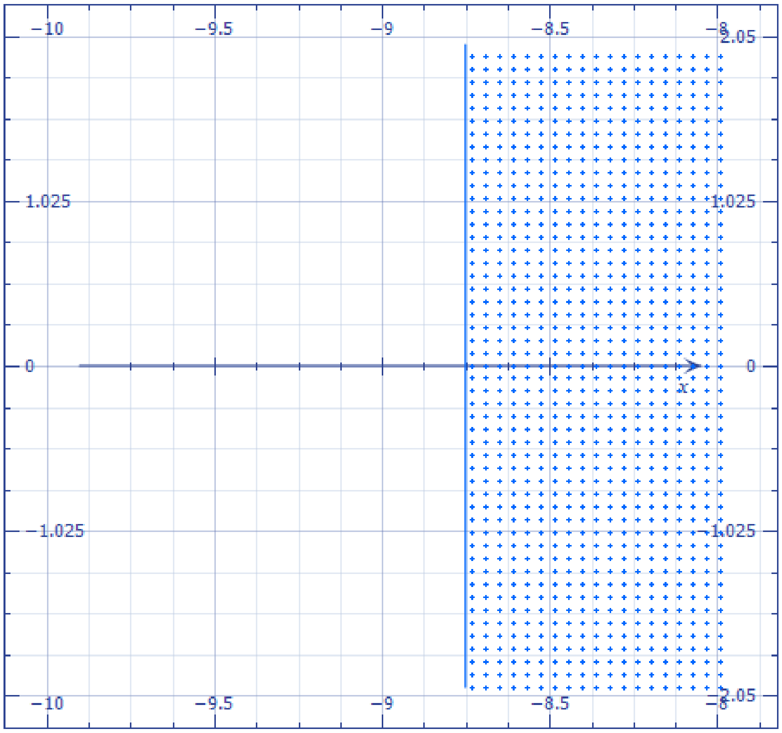
10. Solución:

- ✓ **Analítica**: está dada por los intervalos que cumplen la condición del problema; esto es, el intervalo **B**, entonces la solución será:

S = x ϵ [- 8,25 , - 5)

Nota: en menos cinco **(- 5)** el intervalo es **abierto** porque en él se **hace cero el denominador**.

- ✓ **Gráfica: la solución para la inecuación** $\frac{\boldsymbol{-4x-35}}{\boldsymbol{x+5}} \geq \mathbf{0}$



Nota: otra forma de representarla sería:

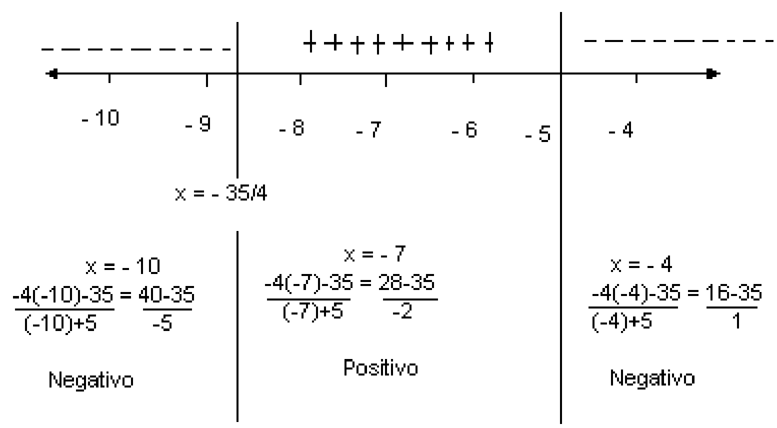


Figura 11. Recta numérica para solucionar desigualdad

(Autor Elkin Ceballos Gómez)

La solución se da tomando los signos positivos, ya que en la inecuación objetivo dice ≥ 0

La solución es: $x \in [-35/4, -5)$

En menos cinco el intervalo es abierto porque en él se hace cero el denominador.

C. Solucione la siguiente inecuación de acuerdo al procedimiento seguido en los ejercicios anteriores, justificando cada uno de los pasos seguidos:

$$\frac{2x-3}{x^2-25} \geq 0$$

Procedimiento

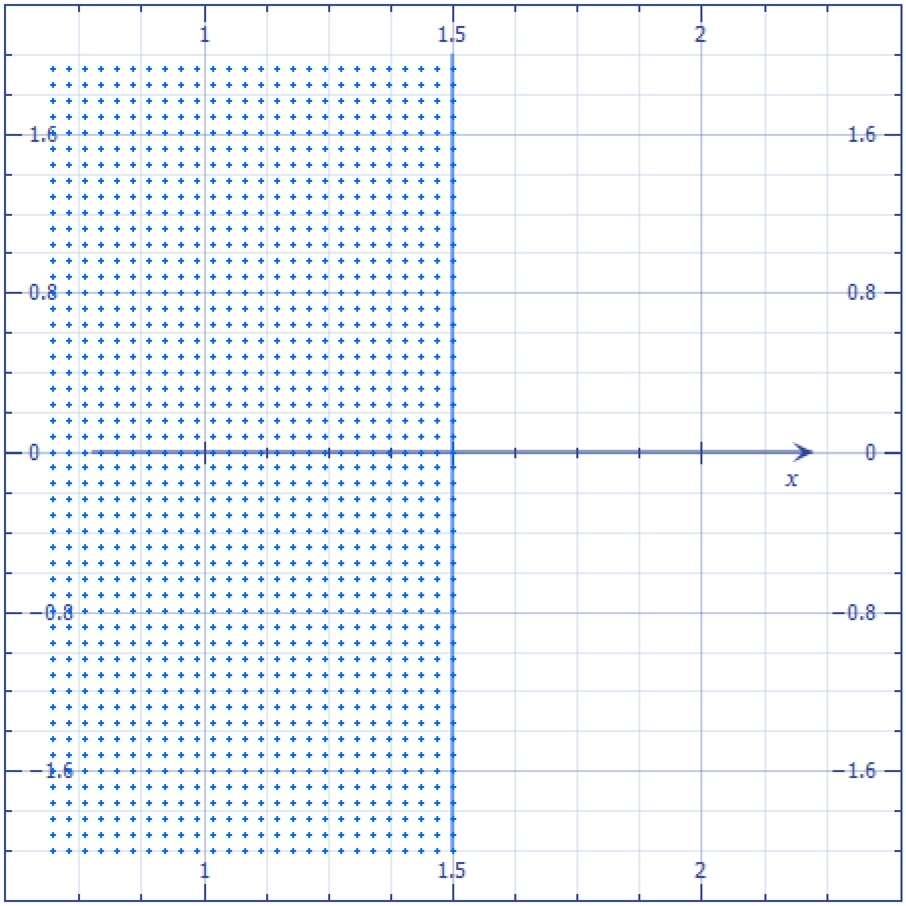
NOTA: en la parte inferior del cuadro encontrará la solución analítica del ejercicio, construya la solución gráfica utilizando cualquiera de los dos métodos vistos en los ejercicios anteriores.

- ✓ **La solución analítica es:**

$$S = x \in (-5, \tfrac{3}{2}] \cup (5, +\infty)$$

- ✓ La solución gráfica de la inecuación :

$$\frac{2x-3}{x^2-25} \geq 0$$



✓ **SOLUCIÓN DE INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO.**

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tenga presente que: el valor absoluto se refiere a una cantidad que siempre es positiva. El símbolo de valor absoluto es: $|\ |$

$|3| = 3 \qquad |-2| = 2 \qquad |-5| = 5 \qquad |0| = 0 \qquad |-3/5| = 3/5$

Cuando consideramos una inecuación, procedemos de la misma manera que con los números Reales, pero teniendo en cuenta que estamos trabajando con una variable y el resultado de tiene que ser un conjunto de valores, es decir uno o varios intervalos, decimos entonces que:

1. $|\boldsymbol{f(x)}| \leq \boldsymbol{a, con\ a \in Re^{+},}$ sería:

$$\boldsymbol{-a \leq f(x) \leq a}$$

$$\sigma$$

[- a, +a]

También se cumple con: $|f(x)| < a \leftrightarrow -a < x < a$

Ejemplo: $|\boldsymbol{x}| \leq \boldsymbol{5} \rightarrow \boldsymbol{-5 \leq x \leq 5}$

2. $|\boldsymbol{f(x)}| \geq \boldsymbol{a, con\ a \in Re^{+},}$ sería:

$$\boldsymbol{x \geq b}$$

$$\boldsymbol{\sigma}$$

$$\boldsymbol{x \leq -b}$$

También se cumple con: $|x| > b \Leftrightarrow x > b \vee x < -b$

Por ejemplo $|x| > 10$ quiere decir que.

$$x > 10\ \sigma\ x < -10$$

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Traer a la memoria que: cuando se tiene una inecuación de este tipo, se deben plantear estas desigualdades.

Enlaces para solución de desigualdades con valor absoluto.

http://www.youtube.com/watch?v=Ogxr5wwVMAw

http://www.youtube.com/watch?v=HA3Vgrb3U-c

http://www.youtube.com/watch?v=8OjhQ7z48qM

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Resuelva la desigualdad:

$$|2x-3| \leq 2$$

Procedimiento:

1. Se debe cumplir que:

$-a \leq x \leq a,$ entonces aplicando esta propiedad tenemos:

$$-2 \leq 2x-3 \leq 2$$

2. Se deben solucionar estas dos desigualdades simultáneamente, es decir la operación que se realiza en un miembro de la desigualdad se debe realizar en todos los demás

- ✓ Sumando 3 en todos los términos de la expresión queda:

$$3-2 \leq 2x-3+3 \leq 2+3$$

- ✓ Simplificando:

$$1 \leq 2x \leq 5$$

- ✓ Dividiendo todos los términos por 2:

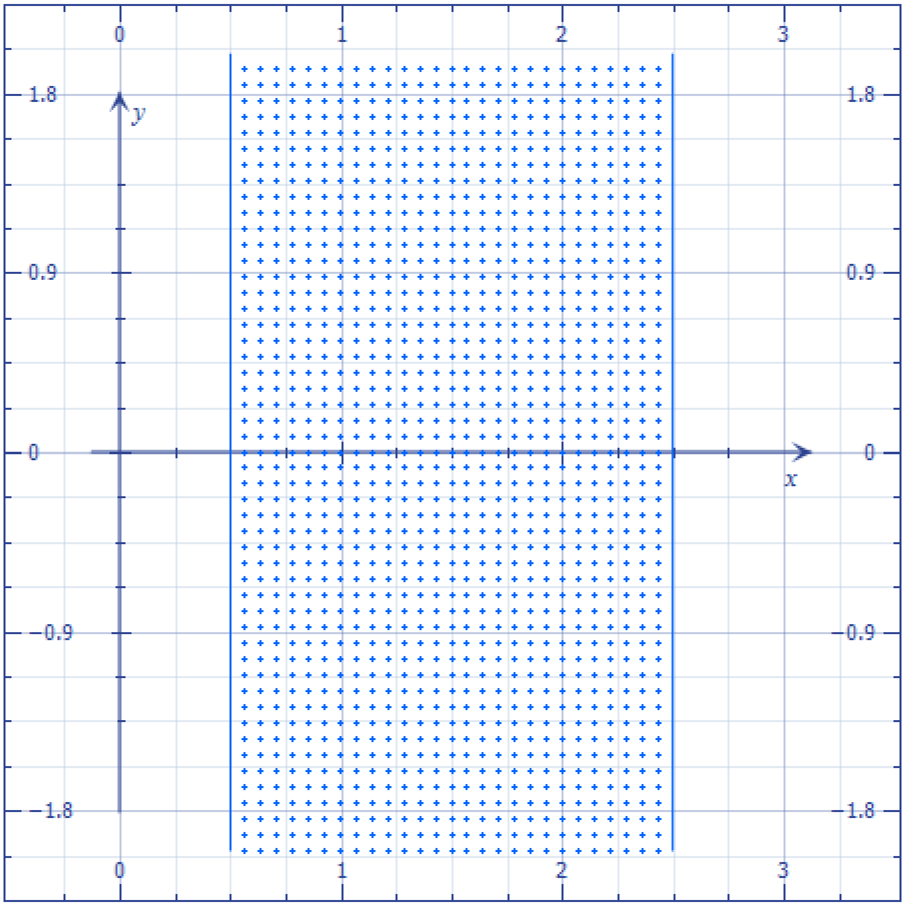
$$\frac{1}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{5}{2}$$

- ✓ Simplificando:

$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

3. a) La solución analítica sería: $x \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$

   c) La solución gráfica sería: $|2x-3| \leq 2$



2. Resuelva la siguiente inecuación:

$|\boldsymbol{7-3x}| \geq \boldsymbol{8}$

Procedimiento:

1. Se debe cumplir que:

$$\boldsymbol{x \geq b}$$

$$\boldsymbol{\sigma}$$

$$\boldsymbol{x \leq -b}$$

2. Según la propiedad respectiva, significa que:

$$\boldsymbol{7-3x \geq 8}$$

$$\geq$$

$$\boldsymbol{\sigma}$$

$$\mathbf{7 - 3x \leq -8}$$

3. Se resuelve cada inecuación por separado y la solución es la **unión** (∪) de ambas soluciones:

$\boldsymbol{a. 7 - 3x \geq 8}$

$\boldsymbol{7 - 7 - 3x \geq 8 - 7}$,restamos ambos lados **-7**

$\boldsymbol{-3x \geq 1,}$ desigualamos a **cero**

$\boldsymbol{-3x - 1 \geq 0}$ **Inecuación objetivo**

$\boldsymbol{-3x - 1 + 1 \geq 0 + 1}$ **,**sumamos a ambos lados **+1**

$\boldsymbol{-3x \geq 1}$

$\boldsymbol{\frac{-3x}{-3} \geq \frac{1}{-3}}$**,** se dividen ambos miembros por **-3**

$$\boldsymbol{x \leq -\frac{1}{3}}$$

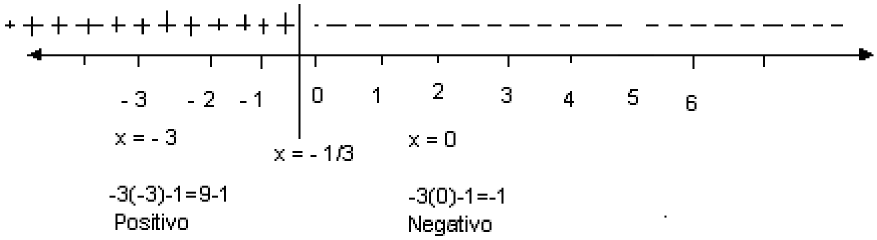
$$\boldsymbol{Solución}: \boldsymbol{x \in (-\infty, -\frac{1}{3}]}$$

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tener en cuenta que: cuando se multiplica o se divide una inecuación por un Re^-, la desigualdad cambia de sentido.

Gráficamente: ubicando en la recta numérica:



Recta numérica para solucionar desigualdad con valor absoluto.

(Autor Elkin Ceballos Gómez)

Como en la inecuación objetivo uno dice ≥ 0, se deben tomar los signos de suma. La solución de esta inecuación es:

$$\boldsymbol{x \in (-\infty, -\frac{1}{3}]}$$

$\boldsymbol{\sigma}$

$\boldsymbol{b. 7 - 3x \leq -8}$

$\boldsymbol{7 - 7 - 3x \leq -8 - 7}$, restamos ambos lados **-7**

$\boldsymbol{-3x \leq -15,}$ desigualamos a **cero**

$\boldsymbol{-3x + 15 \leq 0,}$ **Inecuación objetivo**

$\boldsymbol{-3x + 15 - 15 \leq -15}$,restamos a ambos lados **-15**

$\boldsymbol{-3x \leq -15}$

$\boldsymbol{\frac{-3x}{-3} \leq \frac{-15}{-3}}$, se dividen ambos miembros por **-3**

$$\boldsymbol{x \geq \frac{15}{3} \rightarrow x \geq 5}$$

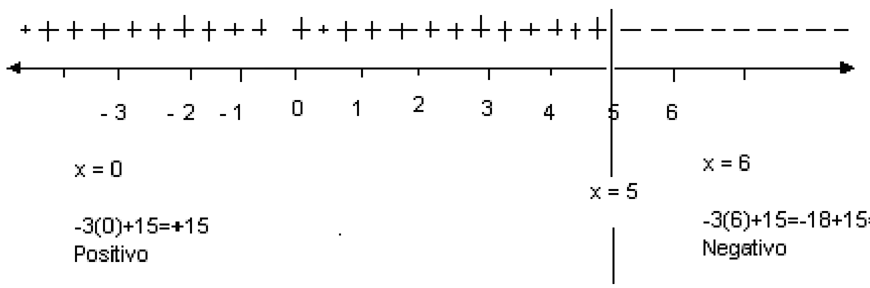
$$\boldsymbol{Solución: x \in [5, +\infty)}$$

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tener en cuenta que: cuando se multiplica o se divide una inecuación por un Re^{-}, la desigualdad cambia de sentido.

Gráficamente: ubicando en la recta numérica:



Recta numérica para solucionar desigualdad

(Autor Elkin Ceballos Gómez)

Como el sentido de la inecuación que estamos resolviendo es ≤ 0, se deben tomar los signos menos:

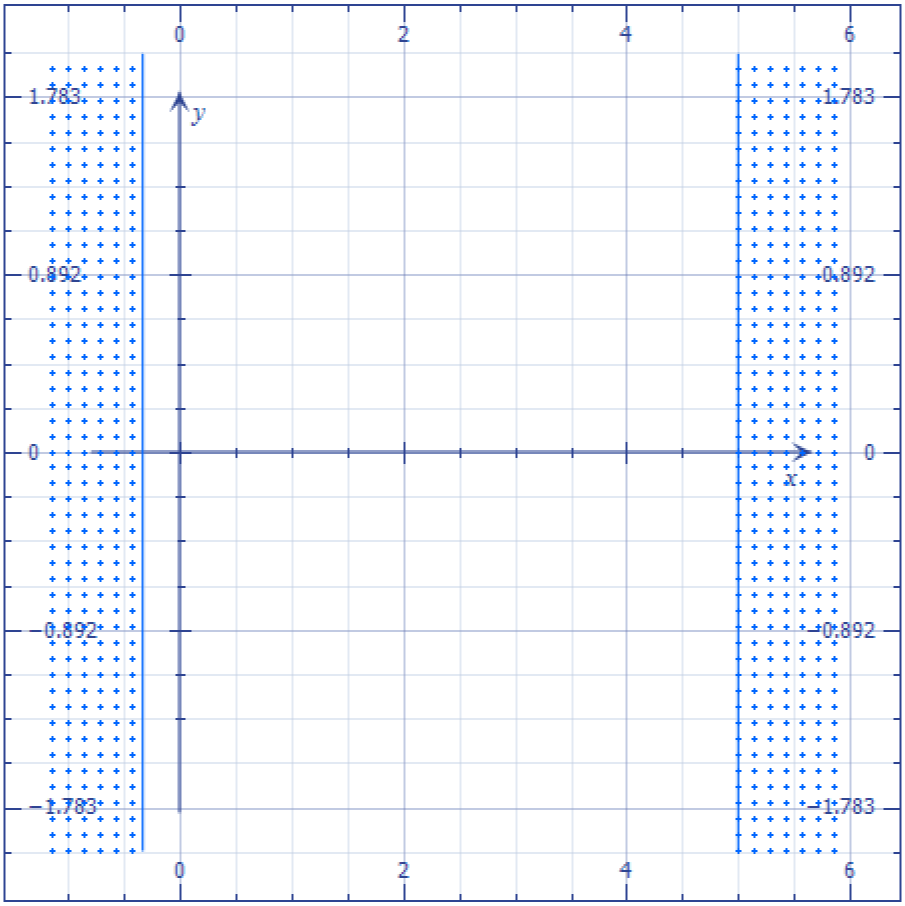
Para esta inecuación la solución es:

$$\boldsymbol{x \in ([5, +\infty)}$$

4. Por lo tanto la **solución final** es la **unión** de las dos soluciones:

$$\boldsymbol{x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]} \cup \boldsymbol{x \in [5, +\infty)}$$

$$|\mathbf{7} - \mathbf{3}\boldsymbol{x}| \geq \mathbf{8}$$



3. Resuelva la siguiente inecuación con valor absoluto, analítica y gráficamente:

$$\left|4-\frac{1}{2}x\right| \leq 7$$

Procedimiento:

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Recuerde·que:·$|f(x)| \leq a, con\ a \in Re^{+},$·entonces:

$$-a \leq f(x) \leq a$$¶

σ¶

[-·a,·+a]¤

1. Utilizamos la propiedad indicada,

$$-7 \leq 4 - \frac{1}{2}x \leq 7$$

2. Solucionamos simultáneamente las dos inecuaciones.

3. Sumamos **4** a cada uno de los miembros de la desigualdad:

$$-7 - 4 \leq 4 - 4 - \frac{1}{2}x \leq 7 - 4\ ,$$ simplificamos

$$-11 \leq -\frac{1}{2}x \leq 3$$

4. Multiplicamos por **-2,** $\left(que\ es\ el\ inverso\ multiplicativode\ -\frac{1}{2}\right),$ cada uno de los miembros de la desigualdad:

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Traer a la memoria que: el inverso multiplicativo de un número Real es la fracción inversa del número (conservando el signo), de tal manera que al multiplicar el número y su inverso multiplicativo se obtiene como resultado la unidad positiva (+1), esto es:

E l inverso multiplicativo de **a** $\boldsymbol{\epsilon}$ $\boldsymbol{R_e}$ **es** $\frac{1}{a}$**, con a** $\neq$ $\boldsymbol{o}$ **,** de tal manera que $\mathbf{a} \cdot \frac{1}{a} = +1$

$(-\mathbf{11}) * (-\mathbf{2}) \leq \left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}\right) * (-\mathbf{2}) \leq (\mathbf{3}) * (-\mathbf{2})$**,** efectuando los productos indicados, tenemos:

$\mathbf{22} \geq \boldsymbol{x} \geq -\mathbf{6}$ **, que se expresa** $-\mathbf{6} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{22}$

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

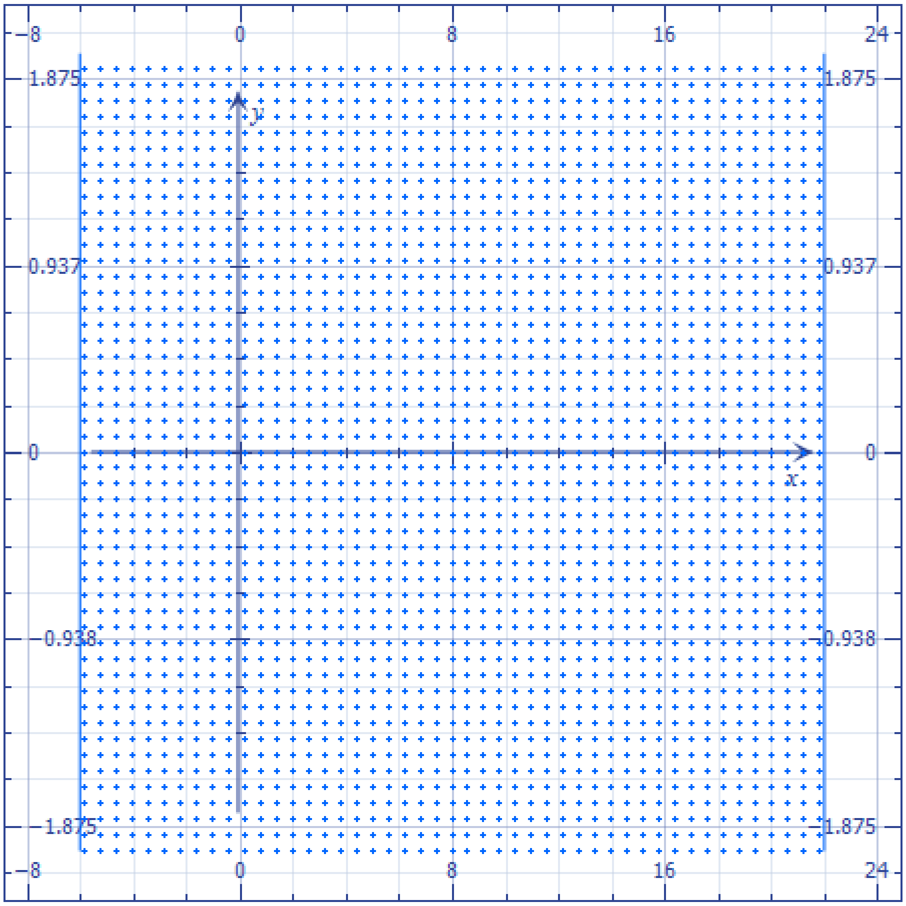
Tener en cuenta que: cambia el sentido de la desigualdad por que se multiplicó cada uno de los miembros de la inecuación por un Re^{-}.

5. Solución

   c. Analítica: $\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{\epsilon}\ [-\mathbf{6},\ \mathbf{22}]$

   d. Gráfica: para la inecuación

$$\left|\mathbf{4} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}\right| \leq \mathbf{7}, \boldsymbol{ser\acute{\imath}a}:$$



d. Resuelva, analítica y gráficamente, la siguiente inecuación con valor absoluto:

$$|5x-9| \geq -10$$

Procedimiento

1. Analizando la inecuación y revisando la definición de valor absoluto:

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tenga presente que: $|f(x)| \leq a, con\ a \in Re^{+}$

Esta inecuación **no tiene solución**, ya que el valor absoluto nunca da negativo (-10).

- ✓ **Inecuaciones de la forma:** $x^2 + b$ **(RAÍCES COMPLEJAS)**

Cuando las **raíces** de una inecuación son **complejas**, o lo que es lo mismo al tratar de solucionar la ecuación resultante, esta no tiene solución, quiere decir, que la inecuación se cumple para todos los números reales o para ninguno. Por lo tanto, es suficiente con evaluar para un solo valor de “x”.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

a. $x^2 + 4 > 0$ **Inecuación objetivo**

Procedimiento:

1. Utilizamos la fórmula general para encontrar las raíces:

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Traer a la memoria: la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. Determinamos los coeficientes:

a	=	1
b	=	0
c	=	4

Reemplazando estos valores:

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1) * (4)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{\mathbf{-16}}}{\mathbf{2}}$$

No existe, por lo tanto la ecuación no tiene solución.

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tener en cuenta que: la raíz par de un número negativo no está definida para los números Reales.

Si: $\sqrt[n]{-\boldsymbol{a}}$, con n par y **a**$\epsilon \boldsymbol{R_e}$ **, no tiene solución en los Reales**

3. Debemos determinar el signo de $\boldsymbol{x^2+4}$ para cualquier valor de x:

- $\boldsymbol{x = -2, tenemos, (-2)^2 + 4 = 8 > 0\ (positivo)}$
- $\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}, tenemos, \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 4 = \frac{1}{4} + 4 = \frac{1+16}{4} = \frac{17}{4} > 0\ (positivo).}$
- $\boldsymbol{x = 5, tenemos, (5)^2 + 4 = 25 + 4 = 29 > 0\ (positivo).}$
- ***Cualquier valor, en los números reales, que le asignemosa la variable x,***

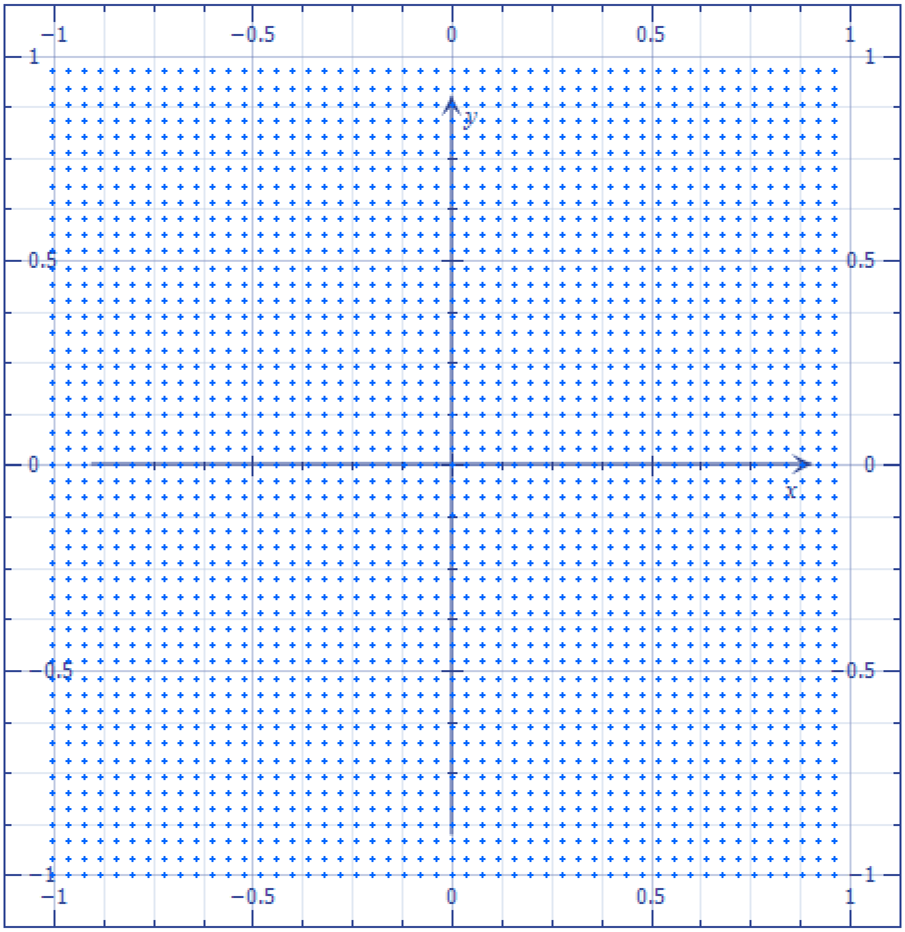
siempre obtendremos un número mayor que cero (positivo).

4. De lo anterior, concluimos que la solución de la inecuación son los números Reales, esto es:

a. Analíticamente:

$$\boxed{\boldsymbol{x \in R_e} = (-\infty, +\infty)}$$

b. Gráficamente la inecuación $\boldsymbol{x^2+4>0}$



b. $-x^2 + 6x \geq 10$

Procedimiento

1. Desigualamos la inecuación a cero, para el efecto restamos 10 a ambos lados de la inecuación:

$-x^2 + 6x - 10 \geq 10 - 10$, simplificamos:

$-x^2 + 6x - 10 \geq 0$ **Inecuación objetivo**

2. Utilizamos la fórmula general para encontrar las raíces:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3. Determinamos los coeficientes:

a	=	-1
b	=	6
c	=	-10

Reemplazando estos valores:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(-1) * (10)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 40}}{-2}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{-2}$$ **No existe.**

4. De lo anterior concluimos que la inecuación **no tiene solución**.

5. Se debe determinar el signo de: $-x^2 + 6x - 10 \geq 0$

- $x = 3, tenemos, -(3)^2 + 6(-3) = -9 - 18 - 10 = -37$ $(1) *$
- $x = -2, tenemos, -(-2)^2 + 6(-2) = -4 - 12 - 10 = -26$ $(2) *$
- $x = -10, tenemos, -(-10)^2 + 6(-10) = -100 - 60 - 10 = -170$ $(3) *$

6. Analizando las respuestas 1, 2, 3: obtenemos

$$-37 < 0 \ (Negativo) \quad (1) *$$

$$-26 < 0 \ (Negativo) \quad (2) *$$

$$-170 < 0 \ (Negativo) \quad (3) *$$

Quiere decir que $-x^2 + 6x - 10$ siempre es **negativo**, nunca es cero y la inecuación dice ≥ 0, por lo tanto, **la inecuación no tienen solución en los números reales.**

Actividad:

¿Qué pasa si la inecuación objetivo se multiplica por – 1?

¿Cómo quedaría la inecuación?

¿Cuál sería su procedimiento solución?

¿Sí tendría solución en los números Reales? ¿Cuál sería?

Procedimiento

Ejercicios de entrenamiento

Solucione las siguientes inecuaciones justificando cada uno de los procedimientos realizados y graficando la solución (la solución a cada uno de los ejercicios planteados debe llevar una solución analítica y una solución gráfica. En la gráfica puede utilizar cualquiera de los 2 métodos vistos)

1. $\frac{5x-3}{4} - \frac{7x-1}{12} \geq \frac{11x-1}{8}$

Al solucionar el ejercicio anterior el autor obtuvo el siguiente intervalo como solución:

$$\boldsymbol{Soluci\acute{o}n\ x \in [-\frac{31}{13}, +\infty)}$$

$$\boldsymbol{¿Ser\acute{a}\ verdadera\ dicha\ soluci\acute{o}n?\ Si\_\_\_\_\_\_No\_\_\_\_,}$$

Justifica tu respuesta realizando el procedimiento correcto.

2. $5x^2 - 18x + 9 \leq 0$

Al solucionar el ejercicio anterior el autor obtuvo el siguiente intervalo como solución:

$$\boldsymbol{Soluci\acute{o}n\ x \in [\frac{3}{5}, 3]}$$

$¿\boldsymbol{Ser}\acute{a}\ \boldsymbol{verdadera\ dicha\ soluci}\acute{o}\boldsymbol{n}?\ \boldsymbol{Si}\_\_\_\_\_\_\_\ \boldsymbol{No}\_\_\_\_\_,$

Justifica tu respuesta realizando el procedimiento correcto.

3. **Resuelve la siguiente inecuación, justificando cada uno de los procedimientos realizados y graficando la solución:** $\frac{3}{x+2} - \frac{5}{x+9} \geq -1$

Resuelve las siguientes inecuaciones con valor absoluto justificando cada uno de los procedimientos realizados y graficando la solución (la solución a cada uno de los ejercicios planteados debe llevar una solución analítica y una solución gráfica. En la gráfica puede utilizar cualquiera de los 2 métodos vistos)

4. $|3 - 3x| \leq 3$

5. $\left|5 - \frac{8}{9}x\right| \geq \frac{3}{7}$

6. $|1 - x| \leq 1$

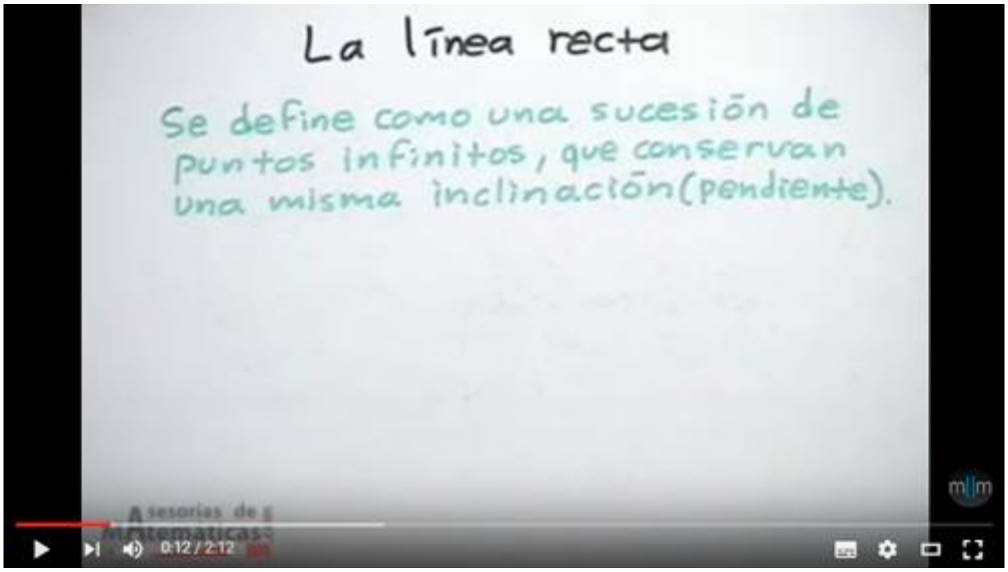
7. $|4x - 3| > -5$

8. $\left|\frac{1}{2} - \frac{3}{4}x\right| < \frac{1}{7}$

9. $|5 - x| > 5$

10. $\left|\frac{3x-2}{4} - 5\right| < 1$

5 UNIDAD 4 CONCEPTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA



Concepto de línea recta [Enlace]

OBJETIVO GENERAL

Analizar el modelo lineal, a través de la representación de situaciones problémicas mediante el lenguaje matemático, facilitando de esta manera la manipulación matemática, soluciones generales, no particulares y realizando su representación gráfica.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desarrollar el concepto de pendiente.
- Identificar las distintas formas de la ecuación de una recta.
- Determinar las diferentes formas de la ecuación de una recta.

ECUACIÓN LINEAL	PENDIENTE (m)	INTERCEPTO EJE X	INTERCEPTO EJE Y
$1. y = 3x - 2$	**m =** $\frac{9}{5}$ **( )**	$(\frac{9}{2}, 0)$	$(0, \frac{9}{4})$ **( )**
$2. 5x - 3y = 4$	**m = 6** **( )**	$(-\frac{4}{9}, 0)$	$(0, \frac{4}{5})$ **( )**

$3. y - 6x + 5 = 4$	**m = 3** ( )	$(\frac{2}{3}, 0)$	(0 , 2) ( )
$4. 4y + 2x - 9 = 0$	**m =** $\frac{5}{3}$ ( )	$(\frac{1}{6}, 0)$	(0 , -1) ( )
$11x - 6y + 7 = 2x - y + 3$	**m =** $-\frac{1}{2}$ ( )	$(-\frac{4}{5}, 0)$	$(0, -\frac{4}{3})$ ( )

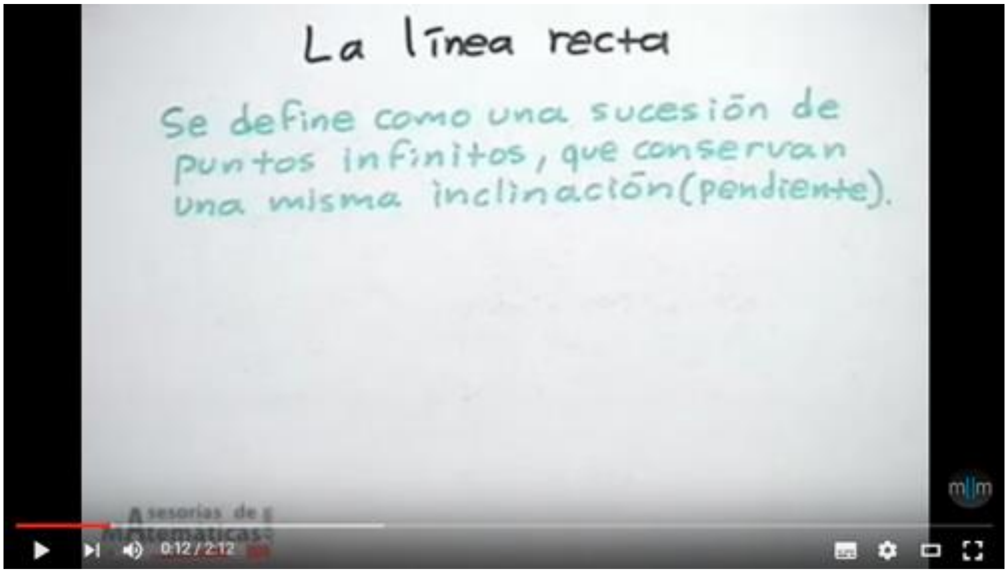
- **Definición de línea recta o modelo lineal o ecuación de la línea recta**

Es una ecuación que relaciona dos variables, una de las variables se asume como **variable independiente**, se le asigna la letra **x** o la letra **t** o la letra **q**; la otra variable se asume como **variable dependiente**, se le asigna la letra **y**.

Una ecuación lineal cumple con las siguientes características:

- El máximo exponente de la variable **x (variable independiente),** es **uno**, otras letras que se utilizan para la variable independiente son: **q, t, z.**
- El máximo exponente de la variable **y (variable dependiente)** es **uno**.
- Su gráfica es una línea recta.
- No hay variable en el denominador.
- No hay producto entre las variables.
- Para hacer la gráfica es suficiente con conocer dos puntos sobre la línea recta.

Enlaces para línea recta.



Concepto de línea recta [Enlace]

- **Ecuaciones de la línea recta.**

La línea recta tiene diferentes presentaciones, todas equivalentes. Veamos algunas de ellas.

- **Ecuación punto pendiente de la línea recta**. Presenta la siguiente forma:

$$\boldsymbol{y - y_0 = m\,(x - x_0)}$$

Donde:

El punto $(x_{0,}\ \ y_0)$ Son las coordenadas de un punto conocido sobre la línea recta.

m: Es la pendiente de la línea recta (más adelante se definirá claramente el concepto, aunque puedes revisar la prueba inicial y mirar el concepto).

- **Ecuación intersección pendiente de la línea recta**. Esta ecuación resulta de despejar y de la ecuación anterior. Presenta la siguiente forma:

$$\boldsymbol{y = mx + b}$$

Dónde:

m: Es la pendiente de la línea recta.

b: Es el intercepto de la línea recta con el eje y. Es el punto donde la recta corta el eje y.

Ejemplo:

$$\boldsymbol{y = 2x + 5}$$

Dónde:

$$\boldsymbol{m = 2 \;\; y\, b = 5}$$

La pendiente es 2 y el intercepto con el eje y es el punto de coordenadas **(0, 5),** para hallarlo se hace $\boldsymbol{x = 0}$ en la ecuación dada.

- **Ecuación general de la línea recta**. Es una ecuación igualada a cero. Presenta la siguiente forma:

$$\boldsymbol{Ax + \quad By + \quad C = 0}$$

Donde: **A, B, C** $\in \boldsymbol{R_e}$**.**

NOTA: para calcular la pendiente en este tipo de ecuación lineal:

$$\boldsymbol{m = -\frac{A}{B}}$$

Ejemplos:

1. $8x + 6y = 0$

2. $5x - 6y + 7 = 0$

3. $-3x + 7 = 0$

Actividad: de acuerdo a la ecuación: $\boldsymbol{m = -\frac{A}{B}}$**:**

¿Cuál sería la pendiente de cada una de las rectas anteriores (1, 2, 3)?

¿Cómo se interpretaría la pendiente de la ecuación 3?

- **Pendiente de una línea recta:**

La pendiente es un valor constante para cualquier línea recta.

La pendiente da información acerca del ángulo de inclinación de la línea recta con respecto al eje. **x**.

PENDIENTE	INCLINACIÓN	CARACTERÍSTICA
$m > 0$	La inclinación es **menor** de 90 grados.	La recta es **creciente**.
$m < 0$	La inclinación es **mayor** de 90 grados.	La recta es **decreciente**.
$m = 0$	El ángulo de inclinación es de **180 grados.**	Es una **recta horizontal** cuya ecuación es: **y = b.**
m **No existe**	El ángulo de inclinación es de **90 grados.**	En este caso se tiene una **recta vertical** cuya ecuación es: **x = c.**

- ✓ **Rectas paralelas y Rectas perpendiculares**

RECTAS	CARACTERÍSTICA	PENDIENTES
PARALELAS	Son rectas que por más que se prolonguen, nunca se tocan ni se cortan.	Dos rectas L1 y L2 son paralelas si se cumple que sus pendientes $m_1 \wedge m_2$, son iguales, es decir si: $m_1 = m_2$ Las rectas **son paralelas**, o viceversa.
PERPENDICULARES O NORMALES	Se dice que dos rectas son perpendiculares o normales cuando se cortan formando entre si un ángulo de 90^0.	Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a menos uno. $m_1 * m_2 = -1$ Las rectas **son perpendiculares**

- ✓ **GRÁFICA:** para graficar un modelo lineal es suficiente con dos puntos, los pasos a seguir son:

1. Lleve el modelo a la forma intercepto pendiente, $y = mx + b$
2. Se seleccionan dos valores de **x** arbitrariamente (ya sabemos que el dominio de la función lineal son los números Reales).
3. Cada valor de **x** seleccionado se reemplaza en el modelo para obtener la respectiva **y**.
4. Las parejas obtenidas se ubican en el plano cartesiano.

5. Una los dos puntos obtenidos mediante una línea recta para obtener la línea recta pedida.

Enlaces para gráfica de la línea recta:

- http://www.youtube.com/watch?v=itezG3RQd0w&feature=related
- http://www.youtube.com/watch?v=dLNxF4SlxIw&feature=related
- http://www.youtube.com/watch?v=1V8drS0gt_Q&feature=related

Grafique cada una de las siguientes ecuaciones lineales.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Grafique cada una de las siguientes ecuaciones lineales.

$\boldsymbol{a.\ 2y - 6x + 10 = 0}$

Procedimiento

1. **Obtenemos la ecuación de la forma :** $\boldsymbol{y = mx + b}$

2. Despejamos **y** en función de **x**:

$\boldsymbol{2y = 6x - 10}$

$\boldsymbol{y = \frac{6x-10}{2}}$**,** separando denominadores:

$\boldsymbol{y = \frac{6x}{2} - \frac{10}{2}}$**,** simplificando:

$\boldsymbol{y = 3x - 5}$

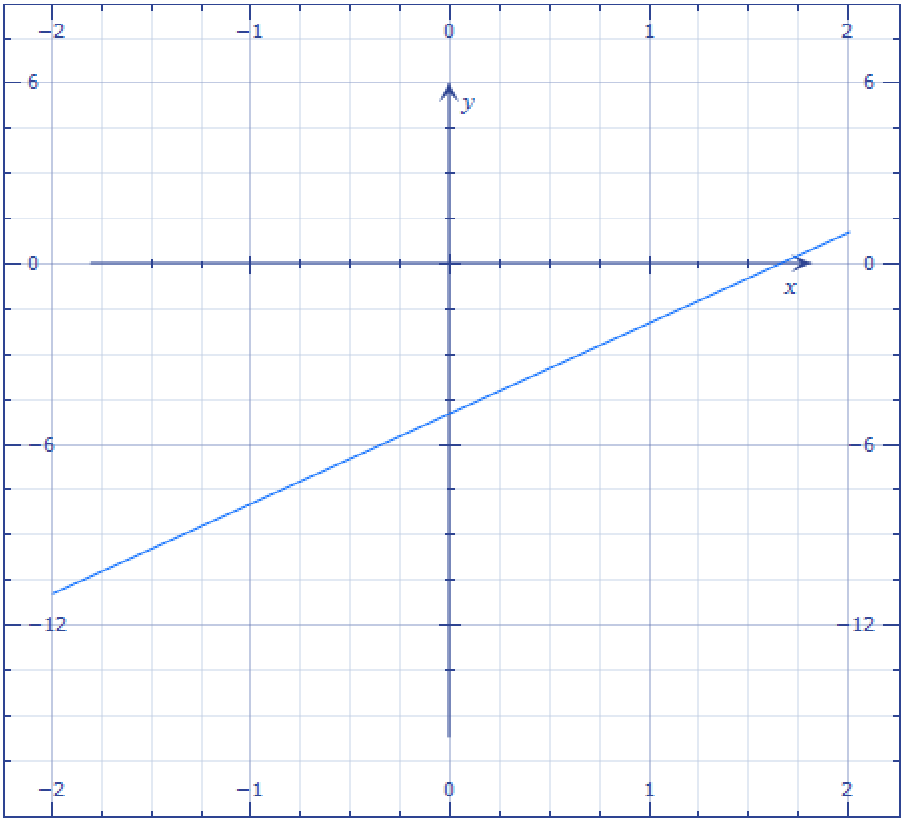
3. De la ecuación anterior deducimos que la pendiente **m = 3** y corta al eje y en el punto **(0, -5),** como la pendiente es positiva **la función es creciente**.

4. Seleccionando dos valores de x (los que cada quien deseé) por ejemplo x = 0 y x = 4, con estos valores se obtiene la respectiva y reemplazando en la ecuación.

Valores dados a X	$y = 3x - 5$	Valores obtenidos para Y	coordenada
0	$y = 3(0) - 5$	$y = -5$	$(0, -5)$
4	$y = 3(4) - 5$	$y = 7$	$(4, 7)$

Ubicando estos dos puntos en el plano cartesiano y uniéndolos mediante una línea recta. La gráfica se muestra en la figura 15.

$\boldsymbol{y = f(x) = 3x - 5}$



b. $\boldsymbol{y = -4x + 10}$

Procedimiento

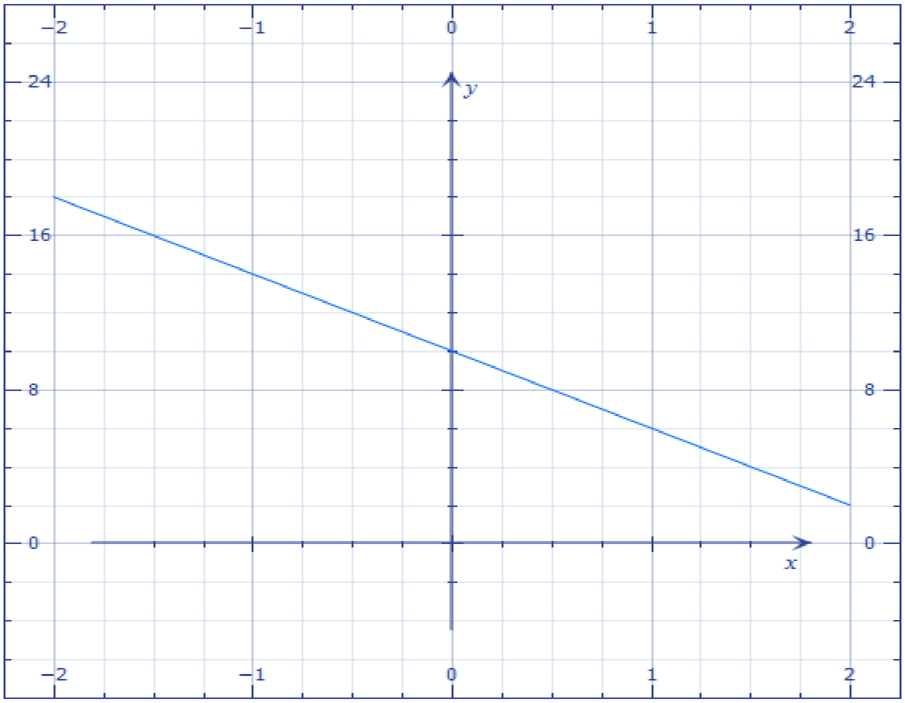
1. De la ecuación anterior deducimos que la pendiente **m = - 4** y corta al eje y en el punto **(0, 10),** como la pendiente es negativa **la función es decreciente**.

2. Seleccionando dos valores de **x** (los que cada quien deseé) por ejemplo **x = 2** y **x = 5**, con estos valores se obtiene la respectiva **y** reemplazando en la ecuación.

Valores dados a X	$y = -4x + 10$	Valores obtenidos para Y	coordenada
2	$y = -4(2) + 10$	$y = 2$	$(2, 2)$
5	$y = -4(5) + 10$	$y = -10$	$(5, -10)$

3. Ubicando estos dos puntos en el plano cartesiano y uniéndolos mediante una línea recta., obtenemos la gráfica para la función lineal:

$$\boldsymbol{y = -4x + 10}$$



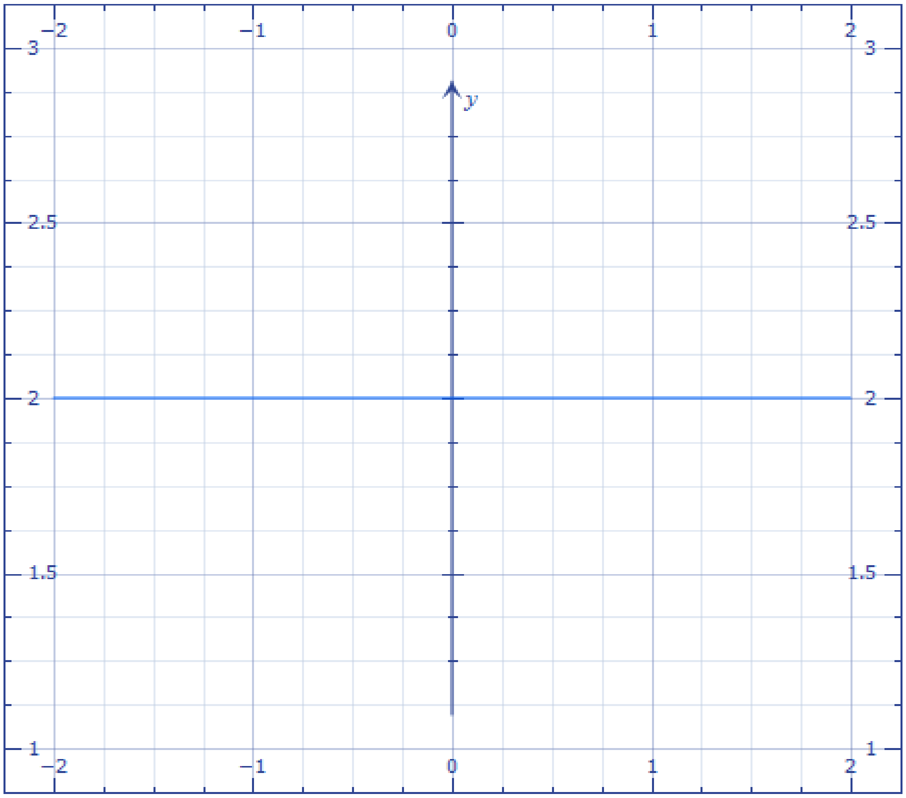
C. $\boldsymbol{y = g(x) = 2}$

PROCEDIMIENTO

1. Se puede ver que para cualquier valor de **x** la **y** siempre tendrá el mismo valor.

X	**-8**	**8**
y	**2**	**2**

2. La gráfica de la función: $\boldsymbol{y = 2}$



EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. **Para cada una de las siguientes rectas, complete el siguiente cuadro**

ECUACIÓN LINEAL	**ECUACIÓN DE LA FORMA** $\boldsymbol{y = mx + b}$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{b}$ **Coordenada del intercepto**	**CRECIENTE O DECRECIENTE**

$5x-3y=12$				
$2x=-4y$				
$2y=6$				
$5x-9=x-1$				
$2y-4x=12$				
$-x-2y-4=0$				
$-4x+4y=-3$				

2. **Represente gráficamente las siguientes rectas, determine su pendiente, los interceptos con los ejes X e Y y si es creciente o decreciente.**

a. $y=x$

b. $y=4x+3$

c. $y=2x-5$

d. $5x-2y=8$

e. $4y-6x+1=13$

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tener en cuenta que: para hallar los interceptos con los ejes cartesianos, se procede de la siguiente forma:

- Intercepto con el eje X: se hace Y = 0, en la ecuación de la forma y = mx + b.
- Intercepto con el eje Y: se hace X = 0, en la ecuación de la forma y = mx + b.
- Se puede hacer cero para X e Y en cualquiera de las formas de la función lineal, pero se hace más fácil hacerlo en Y = mx + b, ya que se visualizan mejor los elementos de la línea recta.

➢ **Determinación de la ecuación de la línea recta o modelo lineal**

Algunas veces el modelo lineal no es conocido, por lo tanto se debe hallar, naturalmente se debe dar la información suficiente para ello. Una de las formas de construirlo es utilizando la ecuación punto pendiente de la línea recta, dicha ecuación es la siguiente:

$$\boldsymbol{y - y_0 = m\,(x - x_0)}$$

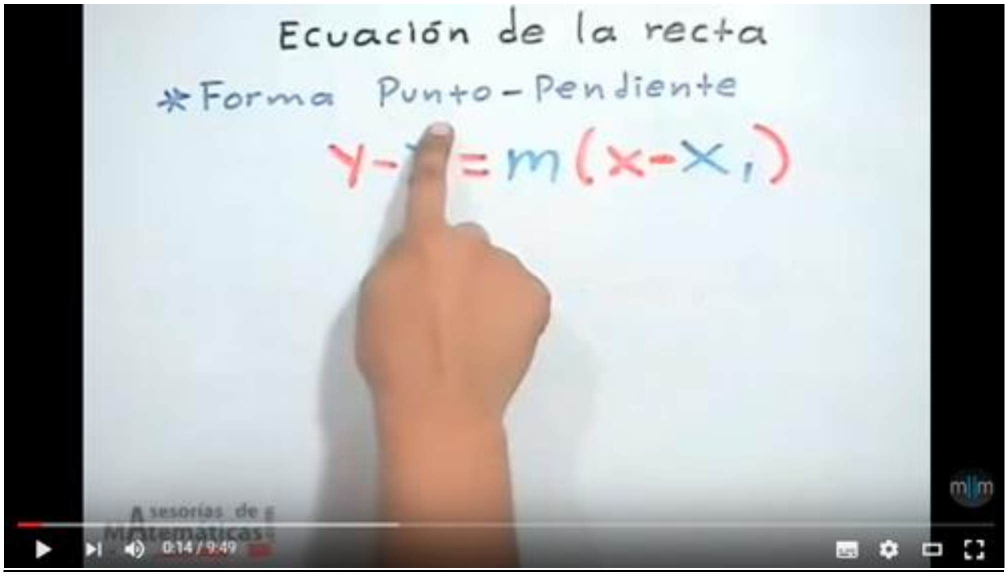
Dónde:

$\boldsymbol{m}$: es la pendiente de la línea recta.

$(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$**:** Son las coordenadas de un punto sobre la línea recta; Dichos valores son conocidos.

- **Determinación de la ecuación de la línea recta**

- Cconocidos un punto de coordenadas $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ sobre la línea recta y la pendiente $\boldsymbol{m}$ de la línea recta.



Ecuación punto - pendiente de la recta [Enlace]

- Reemplace el punto y la pendiente en la ecuación punto pendiente.
- Efectúe operaciones.
- Despeje la variable dependiente (que por lo general le asignamos la letra y).

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Encuentre el modelo matemático lineal que cumple con las siguientes características, (lo que es lo mismo encuentre la ecuación de la línea recta):

Procedimiento

a. Pasa por el punto de coordenadas **(1,3)** y tiene pendiente igual a -2.

1. Los datos conocidos son:

x_0	**1**
y_0	**3**
m	- **2**

Nota: el primer valor del punto siempre corresponde a la **variable independiente** (en este caso a la **x**), y **el segundo valor** corresponde a la **variable dependiente** (en este caso a la **y**).

2. Reemplazamos estos datos en la ecuación punto pendiente:

$$\boldsymbol{y - y_0 = m\,(x - x_0)}$$

$$\boldsymbol{y - 3 = -2(x - 1)}$$

3. Se realizan las operaciones indicadas:

$$\boldsymbol{y - 3 = -2x + 2}$$

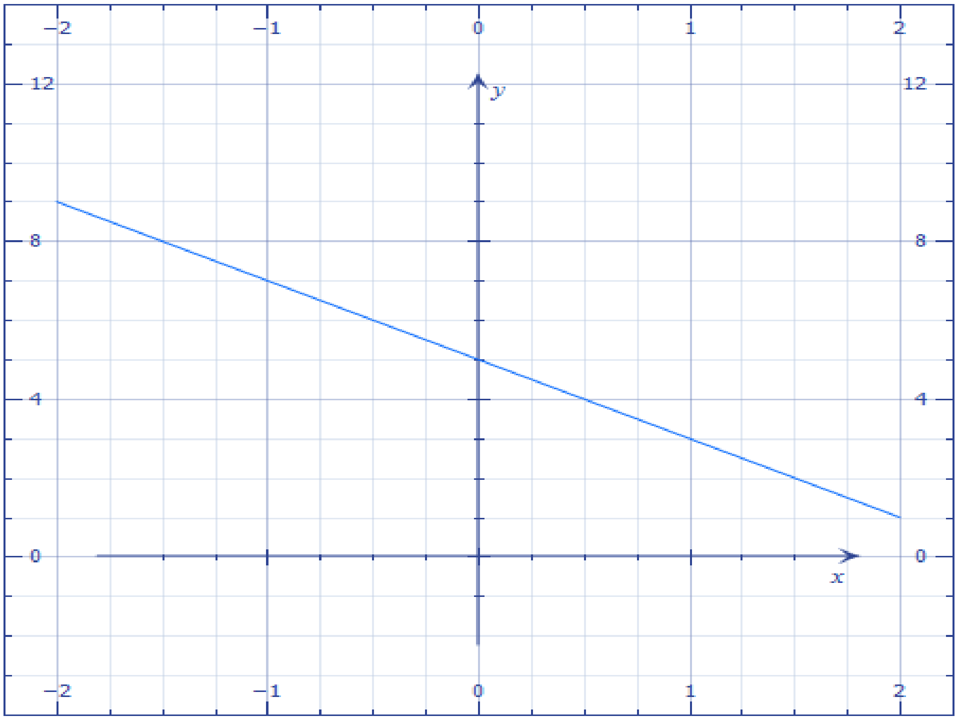
4. Se obtiene la forma $\boldsymbol{y = mx + b}$, o lo que es lo mismo, se determina **el modelo lineal pedido**

$\boldsymbol{y - 3 = -2x + 2 \rightarrow\ y = -2x + 2 + 3 \rightarrow}$

$$\boldsymbol{y = -2x + 5}$$

Modelo lineal pedido.

5. Representación gráfica de: $\boldsymbol{y = -2x + 5}$



Ejemplo 2:

b. Pasa por el punto de coordenadas **(-2,5)** y tiene pendiente igual a **3/2.**

Procedimiento

1. Los datos conocidos son:

x_0	- 2
y_0	5
m	$\frac{3}{2}$

2. Reemplazamos estos datos en la ecuación punto pendiente:

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

$$y - 5 = \frac{3}{2}(x - (-2))$$

3. Se realizan las operaciones indicadas:

$$2 * (y - 5) = 3 * (x + 2)$$

$$2y - 10 = 3x + 6$$

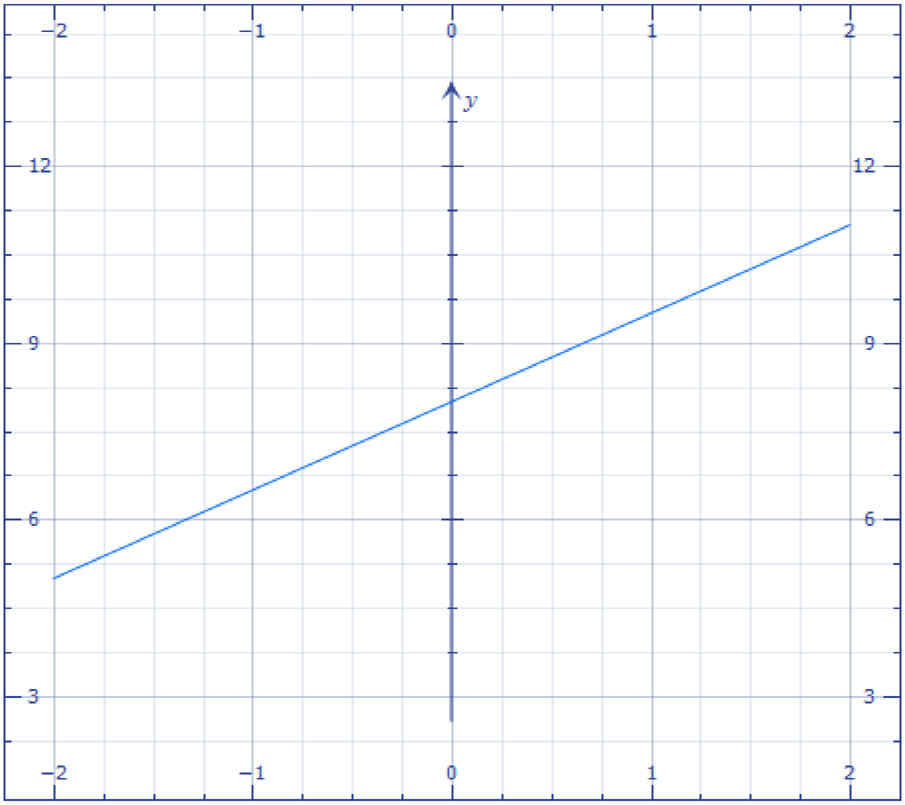
4. Se obtiene la forma $y = mx + b$, o lo que es lo mismo, se determina **el modelo lineal pedido:**

$$2y = 3x + 6 + 10$$

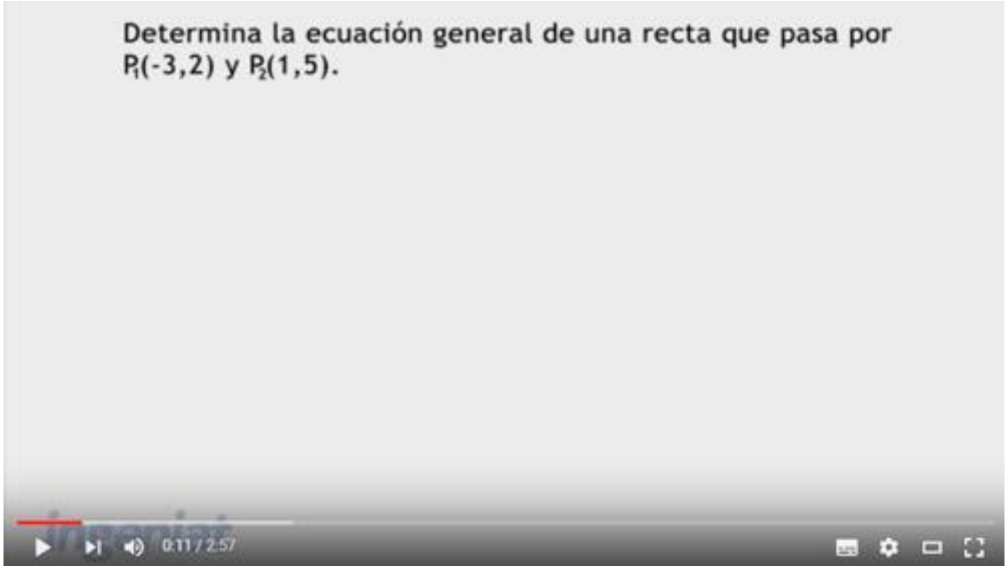
$y = \frac{3x+16}{2}$, separando denominadores:

$y = \frac{3x}{2} + \frac{16}{2}$, simplificando $\rightarrow y = \frac{3}{2}x + 8$

4. Gráfica de la función: $y = \frac{3}{2}x + 8$



- **Determinación de la ecuación de la línea recta**
- Conocidos dos puntos de coordenadas: $(x_0,\ y_0)\ y\ (x_1,\ y_1)$ sobre la línea recta.



UDEM LEC 22.1 E01 Ecuaciones de la línea recta Enlace

Ecuaciones de punto pendiente [Enlace]

1. Se Halla la pendiente de la recta, utilizando la ecuación de la pendiente:

$$m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \quad \textbf{o} \quad m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

2. Con la pendiente y cualquiera de los dos puntos anteriores se determina el modelo lineal, utilizando la ecuación punto pendiente de la línea recta.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Encuentre la ecuación y la gráfica de la recta que pasa por los puntos de coordenadas

a. (3,2) y (5,1).

Procedimiento

1. Los datos conocidos para determinar la pendiente son:

Tabla A

x_0	y_0	x_1	y_1
3	**2**	**5**	**1**

O, también:

Tabla B

x_0	y_0	x_1	y_1
5	**1**	**3**	**2**

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Tenga presente que: para efectos de hallar la pendiente se puede tomar cualquier punto como el inicio, bien sea:

$$(x_0,\ y_0)\ o\ (x_1\ ,\ y_1)$$

2. Para determinar la pendiente tomaremos los datos de la tabla A:

$$m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

$$m = \frac{2 - 1}{3 - 5} = \frac{1}{-2} \rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

3. Los datos para determinar el modelo lineal son:

m	$-\frac{1}{2}$
x_0	**3**
y_0	**2**

4. Reemplazamos en la ecuación de la recta Punto- Pendiente:

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

$$y - 2 = -\frac{1}{2}\,(x - 3)$$

5. Realizamos las operaciones indicadas:

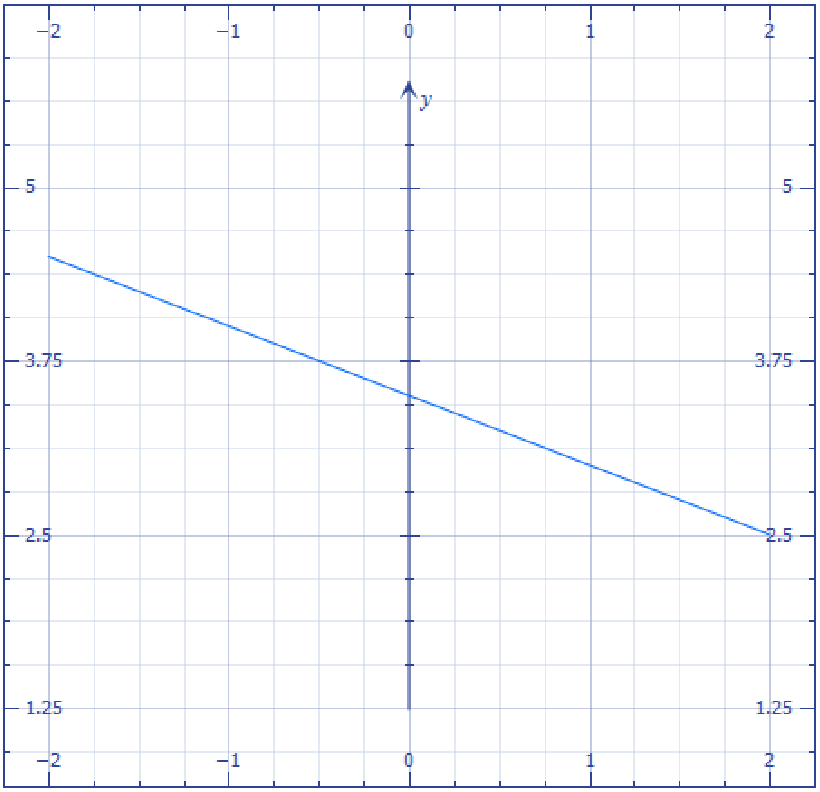
$2 * (y - 2) = -1\,(x - 3) \rightarrow 2y - 4 = -x + 3 \rightarrow$

$2y = -x + 3 + 4 \rightarrow y = \frac{-x+7}{2}$, separando denominadores:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

6. Obtuvimos el modelo matemático o ecuación lineal pedida y su gráfica sería:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$



Actividad: realice el procedimiento anterior con los datos de la tabla B y determine que obtiene el mismo resultado.

- **Determinación de la ecuación de la línea recta**

Conocido un punto de coordenadas $(x_0, \ y_0)$ sobre la línea recta y la condición que la recta cuyo modelo se desea buscar o **es paralela** o **es perpendicular** a una recta cuyo modelo es conocido:

Se encuentra la pendiente de la recta cuyo modelo es conocido. Para ello se lleva el modelo a la forma intercepto - pendiente $\boldsymbol{y = mx + b,}$ el número que acompañe a la **x** es la pendiente.

Nota: rectas paralelas y rectas Perpendiculares

RECTAS	CARACTERÍSTICAS	REPRESENTACIÓN
PARALELAS	Dos o más rectas son paralelas si se cumple que **tienen la misma pendiente.**	$\boldsymbol{Sean\ L_1\ _y\ L_2 dos\ rectas\ paralelas, entonces}$: $\boldsymbol{m_1 = m_2}$
PERPENDICULARES	Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a menos uno.	$\boldsymbol{Sean\ L_1\ _y\ L_2\ dos\ rectas\ perpendiculares,}$ $\boldsymbol{entonces}$: $\boldsymbol{m_1 * m_2 = -1}$ ✓ $\boldsymbol{m_1 = -\frac{1}{m_2}}$ ✓ $\boldsymbol{m_2 = -\frac{1}{m_1}}$

- http://www.youtube.com/watch?v=8gEyd4oekz0&feature=related
- http://www.youtube.com/watch?v=bfZ57ESvFok&feature=relmfu
- http://www.youtube.com/watch?v=ee90DBguSR8&feature=related

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

a. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto de coordenadas $(-1, 5)$ y que **es perpendicular** a la recta de ecuación es $2y - 4x = 6$

Procedimiento

1. **Datos conocidos: solo se conocen las coordenadas del punto** $(-1, 5)$**,** se debe encontrar la pendiente:

x_0	-1
y_0	5
m	¿?

2. La información que se tiene es que la recta pedida es perpendicular a la recta cuya ecuación o modelo es conocido.

- Para encontrar la pendiente de la recta perpendicular se debe despejar la **y** en la ecuación conocida y el número que acompañe a la **x** es la pendiente:

$2y - 4x = 6 \rightarrow 2y = 4x + 6 \rightarrow \; y = \frac{4x+6}{2}$**,** separando denominadores, tenemos:

$$y = \frac{4x}{2} + \frac{6}{2} \rightarrow y = 2x + 3$$

- Por lo tanto la pendiente de la recta es $m_1 = 2$ **(coeficiente de x).**

3. Para hallar la pendiente de la recta cuya ecuación se desea buscar se aprovecha la condición que si dos rectas son perpendiculares el producto de sus pendientes es igual a menos uno $m_1 * m_2 = -1$ y se despeja la pendiente buscada.

Sea m_2 la pendiente de la recta buscada, se sabe qué $m_1 = 2$, entonces reemplazando en:

$m_1 * m_2 = -1$**,** tenemos:

$$2 * m_2 = -1$$

$$m_2 = -\frac{1}{2}$$

3. Se halla la ecuación de la recta pedida, utilizando el punto conocido y la nueva pendiente encontrada reemplazando estos valores en: $y - y_0 = m\,(x - x_0)$

x_0	- 1
y_0	5
m	$-\frac{1}{2}$

$$y - 5 = -\frac{1}{2}\,[x - (-1)]$$

3. se realizan las operaciones indicadas:

$$2 * (y - 5) = -1 * \,[x + 1] \rightarrow \; 2y - 10 = -x - 1 \rightarrow$$

$$2y = -x - 1 + 10 \rightarrow y = \frac{-x + 9}{2} \rightarrow$$

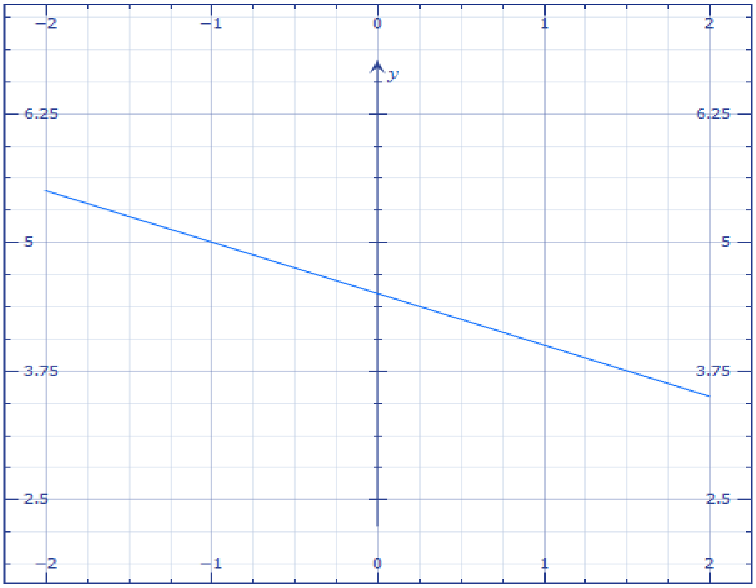
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

Ecuación o modelo lineal pedido.

4. concluimos entonces que:

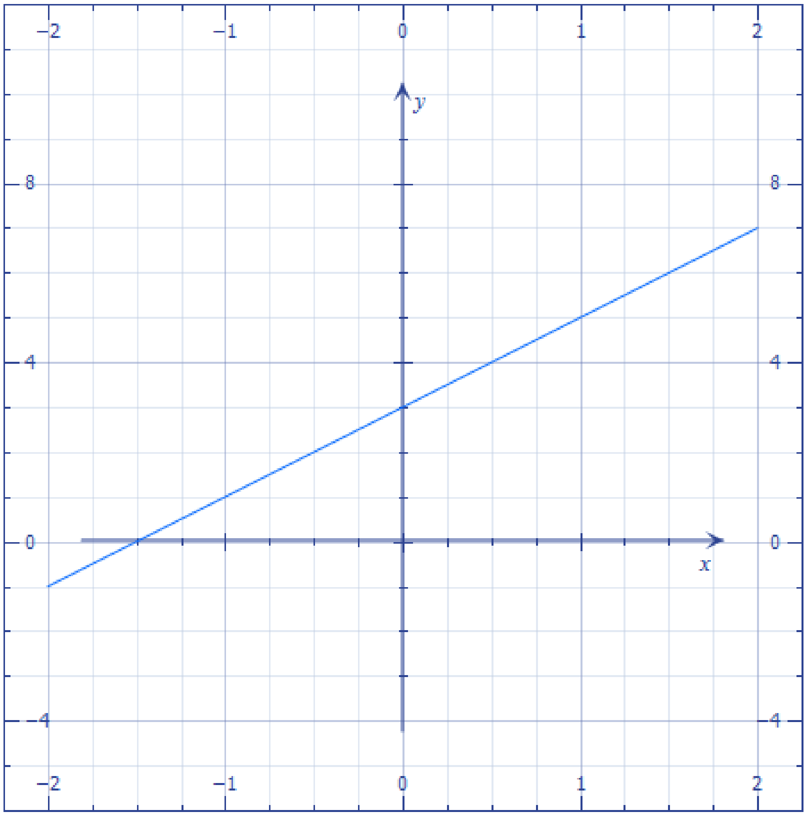
$y = 2x + 3$ **Es perpendicular a** $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

5. La gráfica correspondiente a $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$



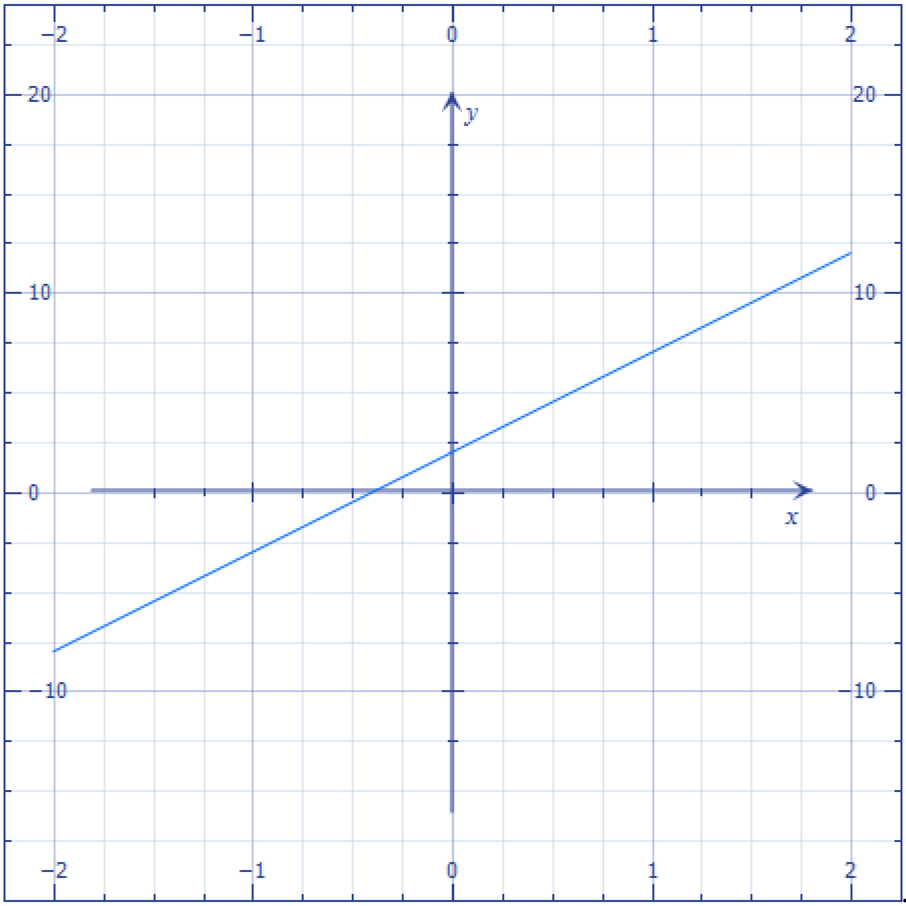
6. La gráfica correspondiente a:

$$y = 2x + 3$$



b. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto de coordenadas (3,3) y es paralela a la recta cuya ecuación es:

$\boldsymbol{y = 5x + 2}$, la gráfica de esta función es**:**



GRÁFICA A

Procedimiento

1. Como son rectas paralelas tienen la misma pendiente. La pendiente de la recta dada es el número que acompaña a la **x** después de haber despejado la **y**; como ya la **y** está despejada podemos ver que la pendiente es 5.

2. Los datos conocidos para hallar la ecuación son:

x_0	3
y_0	3
m	5

3. Se halla la ecuación de la recta pedida, utilizando el punto conocido y pendiente conocida reemplazando estos valores en: $y - y_0 = m\,(x - x_0)$

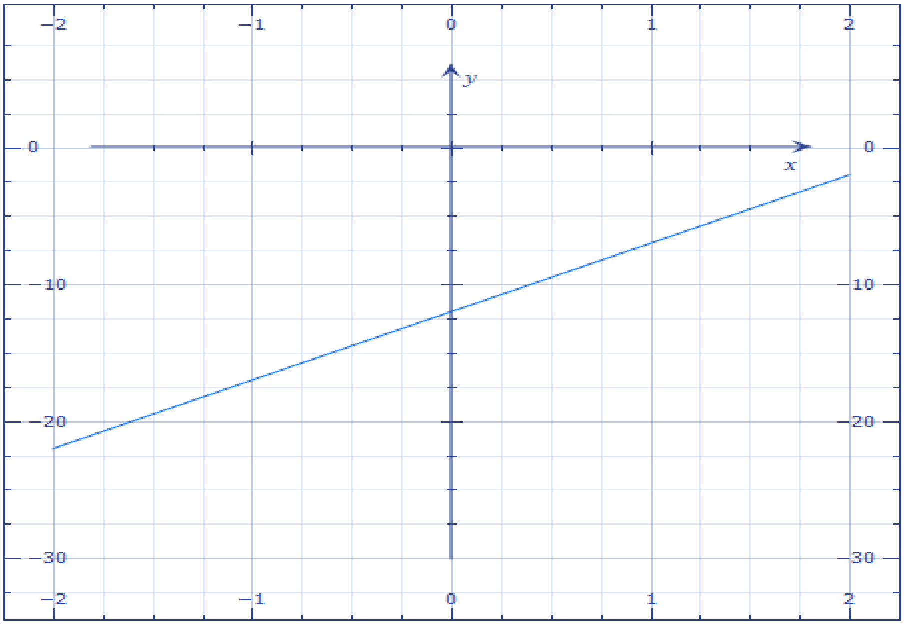
$y - 3 = 5\,(x - 3)$

4. Se realizan las operaciones indicadas:

$y - 3 = 5\,x - 15 \rightarrow\ y = 5\,x - 15 + 3 \rightarrow$

$y = 5\,x - 12,$ ecuación pedida.

7. Gráficamente: $y = 5\,x - 12\ (Paralela\ a\ \ y = 5x + 2, GRÁFICA\ \ A)$



GRÁFICA B

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

Tomando como referente los ejercicios realizados y el procedimiento utilizado, halle la pendiente y la ecuación de cada una de las siguientes rectas grafícalas en un plano cartesiano.

Visita la página que se te indica a continuación para que aprendas el manejo adecuado del plano cartesiano (http://youtu.be/jlKv4Vugy8c).

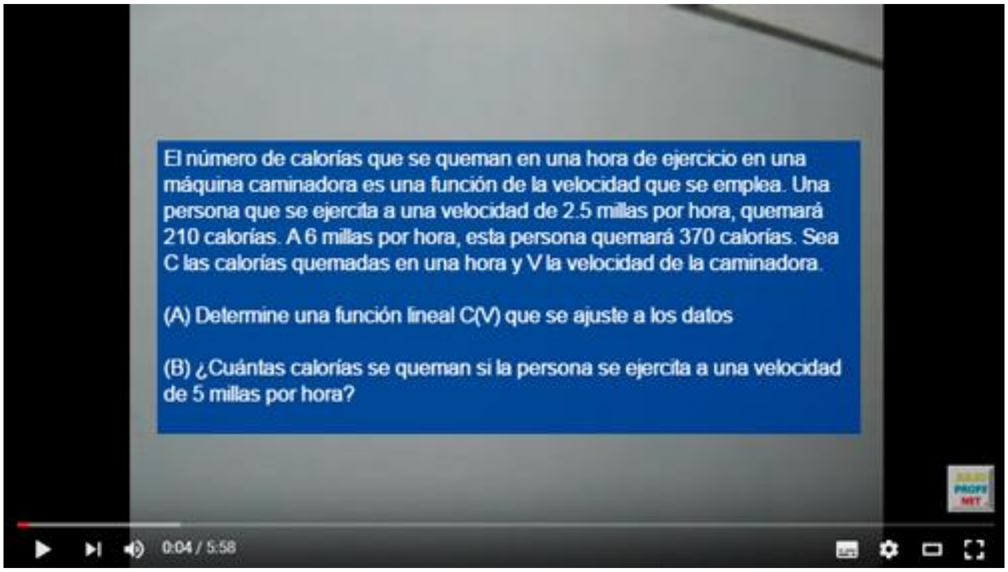
1. Pasa por los puntos (- 2, 5) y (6, 7)
2. Pasa por el punto (9, -6) y su pendiente es -4.
3. Pasa por el origen y por el punto de coordenadas (2/3, 1/2).
4. Pasa por el punto de coordenadas (-4, 7) y su pendiente es -2.
5. Pasa por el punto (-4 ,1) es paralela a la recta $2x-4y=16$
6. Pasa por el punto (2, 1) es perpendicular a la recta $3y-2x=5$
7. Es perpendicular a la recta $y=\frac{1}{5}x-9$ pasa por el punto (-1, 7).
8. Es paralela a la recta $y=-3x+1$ pasa por el punto (-3, 8)

5.1 APLICACIONES DEL MODELO LINEAL

Al enfrentarse a un problema se sugiere el siguiente procedimiento:

- Identifique las variables que interviene en el problema
- Identifique variable independiente y asígnele una letra.
- Identifique la variable dependiente y asígnele una letra.
- Identifique los datos del problema.
- Cuando sea necesario utilice las condiciones del problema para buscar más datos.
- De acuerdo a los datos encuentre el modelo lineal pedido.
- Con el modelo responda a las preguntas planteadas.

Enlaces para aplicaciones de la línea recta.



2Problema de aplicación de la función lineal Enlace

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

a. Suponga que la demanda por semana de un producto es de 100 unidades cuando el precio es de $ 58 por unidad, y de 200 unidades si son a $ 51 cada una. Determinar La ecuación de demanda, suponiendo que es lineal.

Procedimiento

1. **Estrategia:** ya que la ecuación de demanda es lineal, la curva de la demanda debe ser una línea recta. Tenemos que la cantidad q y el precio p están relacionados linealmente de tal modo que ***p*** **= 58** cuando ***q*** **= 100**, y ***p*** **=51** cuando

   q **= 200**. Con estos puntos podemos encontrar una **ecuación de la recta**, esto es**, la ecuación de demanda.**

2. Datos conocidos del problema: $\boldsymbol{p_{1(100,58)}}$ y $\boldsymbol{p_{2\,(200,51)}}$

$x_0(q_1)$	$y_0(p_1)$	$x_1(q_2)$	$y_1(p_2)$
100	**58**	**200**	**51**

3. Reemplazando estos valores en:

$\boldsymbol{m} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$ Obtenemos el valor de la pendiente.

- La pendiente de la recta que pasa por $\boldsymbol{p_1}$ **(100, 58)** y $\boldsymbol{p_2}$**(200, 51)** es:

$$\boldsymbol{m = \frac{51-58}{200-100} \rightarrow m = -\frac{7}{100}}$$

4. Una ecuación de la recta (forma punto – pendiente $\boldsymbol{y = mx + b}$ es:

$$\boldsymbol{p - 58 = -\frac{7}{100}(q - 100)}$$

5. Realizando las operaciones indicadas:

$$\boldsymbol{100 * (p - 58) = -7 * (q - 100)}$$

$$\boldsymbol{100p - 5800 = -7q + 700)}$$

$$\boldsymbol{100p = -7q + 700 + 5800}$$

$$\boldsymbol{100p = -7q + 700 + 5800}$$

$$\boldsymbol{p = \frac{-7q + 700 + 5800}{100} \rightarrow p = \frac{-7q + 6500}{100}}$$

Dividiendo por 100 y separando denominadores y simplificando, tenemos:

$\boldsymbol{p = -\frac{7q}{100} + \frac{6500}{100} \rightarrow}$ $\boldsymbol{p = -\frac{7q}{100} + 65}$**,** que corresponde a:

La ecuación de la demanda (Haeussler, 1997)

b. Suponga que el valor de una maquinaria en cierta empresa disminuye cada año un 10% de su valor original. Si el valor original es de $ 200 millones.

Encuentre un modelo matemático que exprese el valor de la maquinaria en cualquier año.

Procedimiento

1. Datos conocidos:

t	Número de años desde que se compró la maquinaria.
$y = c\ (t)$	el costo de la maquinaria para cualquier año t.
Costo inicial de la maquinaria: $t_0 = 0, y_0 = 200$ Dónde: $t_{0:}$ Tiempo inicial. y_0: Costo inicial	$ 200 millones
Precio de la maquinaria disminuye cada año	10% de su valor inicial, esto es: 200*10%=20 millones de pesos

Esta disminución anual es **la pendiente** de la recta, la **disminución es constante**, por lo tanto el signo de esta pendiente es **negativo**.

$$m = -20$$

2. Para hallar el modelo lineal se dispone de la siguiente información:

t_0	**0**
y_0	**200**
m	- **20**

3. Reemplazando en la ecuación punto pendiente:

$\boldsymbol{y - 200 = -20(x - 0)}$

$\boldsymbol{y - 200 = -20\ (x)}$**,** Despejando Y:

$y =$**c(t)=-20 (x) + 200** Representa el modelo matemático que expresa el valor de la maquinaria en cualquier año.

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Traer a la memoria que: cuando se tiene un valor constante que aumenta o disminuye, este valor corresponde a la pendiente.

Cuando **aumenta,** quiere decir que **la pendiente es positiva.**

Cuando **disminuye,** quiere decir que **la pendiente es negativa.**

C. Una compañía fabrica y vende cierto tipo de artículo bajo las siguientes condiciones: costo de fabricación de una unidad es de 25 dólares, cada unidad se vende a 40 dólares y la compañía tiene costos fijos mensuales de 350 dólares. Determine un modelo para los costos totales mensuales de la compañía.

Procedimiento

1. **Datos conocidos: MODELO DE COSTOS**

q	El número de unidades producidas y vendidas mensualmente.
$\boldsymbol{y = c\ (q)}$	Costo total mensual cuando se producen **q** unidades.

Si no hay producción: $q_0 = 0, y_0 = 350$	q_0: *Cantidad inicial de producción* y_0: *Costos iniciales de producción*
m (pendiente para el costo)	Costo de fabricación de una unidad: **25 US/unidad**
Como la pendiente (m) **es positiva**	Por cada unidad que se aumente la producción, los costos aumentarán US$ 25, por lo tanto, **la pendiente** significa en este caso el costo de producir una sola unidad.

2. Para hallar el modelo lineal se dispone de la siguiente información:

q_0	0
y_0	350
m	25

3. Reemplazando en la ecuación punto pendiente:

$$y - 350 = 25(q - 0)$$

$y - 350 = 25\ (q)$, Despejando Y:

$$\boxed{y = 25\,q + 350}$$

Modelo de costo pedido.

D. Sea **r** el ingreso **y** q el número de unidades producidas y vendidas. Se tiene la siguiente información:

Si no se vende nada, no habrá ingreso, esto nos da el siguiente punto: $q_0=0$, $r_0=0$.

La pendiente para el ingreso es 40 ($m = 40 \frac{US\$}{unidad}$).

PROCEDIMIENTO

1. **Datos conocidos: MODELO PARA EL INGRESO**

q	El número de unidades producidas y vendidas mensualmente.
r	el ingreso
Si no se vende nada: $\boldsymbol{q_0 = 0\,, r_0 = 0}$	$\boldsymbol{q_0}$:$Cantidad\ inicial\ vendida$ $\boldsymbol{r_0}$:$Ingreso\ inicial$
m (pendiente para el ingreso)	**40 US/unidad**
Como la pendiente (m) **es positiva**	Por cada unidad que se aumenten las ventas, los ingresos aumentarán US$ 40, por lo tanto, **la pendiente** significa en este caso el precio de venta de cada unidad.

2. Para hallar el modelo lineal se dispone de la siguiente información:

$\boldsymbol{q_0}$	**0**
$\boldsymbol{r_0}$	**0**
$\boldsymbol{m}$	**40**

3. Reemplazando en la ecuación punto pendiente:

$$r - 0 = 40(q - 0)$$

$$r = 40\ q,$$

$r = 40\ q$
Modelo lineal para el ingreso.

d. Tomando los datos de los problemas anteriores podemos obtener un modelo para:

- **La utilidad o ganancia.**

1. Sea U la utilidad, tenemos**:**

UTILIDAD (U)	=	INGRESOS (r)	-	COSTOS: c(q)
$U = r - c(q)$				

2. Sabemos que:

$$r = 40\ q$$

$y = c(q) = 25\ q + 350$, Reemplazando estos valores en la ecuación de utilidad tenemos:

$u = 40q - (25q + 350) \rightarrow u = 40q - 25q - 350$, la utilidad, en $ o en US, está dada por:

$$u = 15q - 350$$

- **El punto de equilibrio**. Punto de equilibrio quiere decir **utilidad igual a cero** $(u = 0)$

$$u = 0 \rightarrow 15q - 350 = 0 \rightarrow 15q = 350 \rightarrow q = \frac{350}{15}$$

$$q = 24\ unidades\ (aprox.).$$

Interpretando el resultado obtenido:

Para no obtener utilidades se deben producir 24 unidades.

f. "El costo total para un fabricante está conformado por costos indirectos fijos de US$ 200 anuales más costos de producción de US$ 50 por unidad". (Hoffman & Bradley, 1995, p.29).

Encuentre un modelo para los costos totales anuales del fabricante en términos del número de unidades producidas.

PROCEDIMIENTO

1. **Datos conocidos: MODELO COSTOS TOTALES**

q	El número de unidades producidas anualmente.
$y = c\,(q)$	Costo cuando se producen **q** unidades.
Si no se vende nada: $q_0 = 0\,, r_0 = 0$	q_0: *Cantidad inicial vendida* r_0: *Ingreso inicial*
Si no hay producción se tienen costos de US $ 200	$q_0 = 0, \quad y_{o=200}$
La pendiente (m) **es positiva** y $m = 50$	El costo por unidad representa la pendiente.

2. Reemplazando los valores conocidos: $p(0, 200)$ y $m = 50$ en la ecuación punto pendiente: $y - y_0 = m\,(q - q_0)$, tenemos:

$y - 200 = 50\,(q - 0) \rightarrow$

$$y = 50q + 200$$

Este es el modelo lineal pedido para costos totales.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. "El costo total para un fabricante consta de costos indirectos fijos de US$5,000 más costos de producción de US$60 por unidad. Exprese el costo total como una función de la cantidad de unidades producidas y elabore la gráfica." (Hoffmann & Bradley, 1995, p.40).
2. "ECUACIÓN DE DEMANDA Suponga que los clientes demandarán 40 unidades de un producto cuando el precio es de $ 12 por unidad, y 25 unidades cuándo el precio es de $ 18 cada unidad. Encontrar la ecuación de la demanda, suponiendo que es lineal, y el precio por unidad cuando 30 unidades son requeridas." (Haeussler, 1997, p.138).
3. "Un fabricante compra maquinaria por valor de US$20,000. Ésta se deprecia linealmente, de manera que después de 10 años su valor comercial será US$1,000.
   a. Exprese el valor de la maquinaria como una función de su antigüedad y dibuje la gráfica.
   b. Calcule el valor de la maquinaria después de 4 años." (Hoffmann & Bradley, 1995, p.41).
4. "Desde el principio del mes, una represa local ha perdido agua a una tasa constante. El día 12, la represa tenía 200 millones de galones de agua; el 21, 164 millones.
   a. Exprese la cantidad de agua en la represa como una función del tiempo y elabore la gráfica.
   b. El día 8, ¿cuánta agua había en la represa?" (Hoffmann & Bradley, 1995, p.41).
5. "Dieta para cerdos". En pruebas de una dieta para cerdos, se determinó que el peso (promedio) w (en kilogramos) de un cerdo estadísticamente era una función lineal del número de días d después de iniciada la dieta, donde $0 \leq d \leq 100$. Si el peso de un cerdo al inicio de la dieta fue de 20 kg y después gano 6.6 kg cada 10 días, determine w como una función de d ; y calcule el peso de un cerdo para 50 días después de iniciada la dieta." (Haeussler, 1997, p.139).

6 PISTAS DE APRENDIZAJE

Tener en cuanta: que para sumar fraccionarios heterogéneos se debe llevar cada fraccionario a un denominador común, que es el m.c.m. de los denominadores.

Tenga presente: para sumar expresiones algebraicas, se debe sumar el coeficiente de los términos semejantes, el exponente de las letras no cambia, debe ser el mismo.

Traer a la memoria: la división entre cero no está definida en ningún campo numérico. Cuando en el numerador hay un número diferente de cero y en el denominador está el cero se dice que el resultado no existe; si en el numerador y en el denominador está el cero, se dice que el resultado es indefinido.

Tener en cuenta: el signo de un número fraccionario puede ir en el numerador, en el denominador o en el vínculo. Se acostumbra escribirlo en el numerador o en el vínculo.

Tenga presente: para expandir un polinomio elevado a una potencia n, no se distribuye la potencia para cada término del binomio, esto es, $(5x-9)^4$ no es igual a $(5x)^4-(9)^4$. Para expandir $(5x-9)^4$, una forma es utilizando el triángulo de Pascal.

Traer a la memoria: la raíz par de los números negativos no pertenece a los números reales.

Tener en cuenta: cuando se suma dos números, si los signos son iguales, se suma los números y se conserva el signo que tienen; si los signos son contrarios, se restan y se conserva el signo del número mayor.

Tenga presente: si m_1 es la pendiente de una recta y m_2 es la pendiente de una recta perpendicular a la primera, se cumple que $m_1.m_2 = -1$.

Traer a la memoria: una suma de cuadrados no es factorizable en losenteros.

Tener en cuenta: el orden en que se efectúan operaciones es: Primero potencias o raíces, luego multiplicaciones o divisiones y por último sumas y restas.

7 GLOSARIO

Mínimo común múltiplo. Símbolo m.c.m. Es el menor de todos los números posibles que contiene exactamente a dos o más números.

Factorizar. "**FACTORIZACION**. El proceso de escribir un polinomio como el producto de polinomios (o factores) irreducibles se llama **Factorización o descomposición en factores irreducibles**." Díez, 2002, p.8).

Igualdad. Una igualdad es una expresión que indica que dos o más cantidades tienen el mismo valor.

Ecuación. "Una **ecuación**es una proposición que indica que dos expresiones son iguales." (Haeussler & Richard, 1977, p.33).

Identidad. "Una ecuación se llama **identidad** si todos los números del dominio de la variable la satisfacen." (Zill & Dewar, 1995, p.62).

Desigualdad. Una desigualdad es un enunciado que indica que un número es mayor que otro; o que un número es mayor o igual que otro; o que un número es menor que otro; o que un número es menor o igual que otro.

Inecuación. Es una desigualdad con incógnitas.

Racionalizar. Consiste en: Utilizando un proceso matemático cambiar una raíz que está en el numerador para el denominador o viceversa.

Expresión algebraica. "Si números representados por símbolos, se combinan mediante operaciones de suma, resta, multiplicación, división o extracción de raíces, entonces la expresión resultante es llamada expresión algebraica." (Haeussler & Richard, 1977, p.17).

Productos notables. Son fórmulas que permiten multiplicar polinomios por simple inspección.

Raíz de una ecuación. "Una solució*n* o **raíz,** de una ecuación es cualquier número que, sustituido en la ecuación, la convierte en una proposición verdadera." (Zill & Dewar, 1995, p.62).

8 BIBLIOGRAFÍA

- Baldor, A. (1996). Álgebra. Madrid: Ediciones y Publicaciones Preludio.
- Dávila, A., Navarro, P., & Carvajal, J. (1996). INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO. Caracas: McGraw-Hill.
- Diez, l. H. (2002). Matemáticas operativas. Primer año de universidad, Preuniversitarios y semilleros. Medellín: Zona Dinámica.
- Haeussler, E. &. (1997). Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. México: Prentice hall.
- Hoffmann, L. D., & Bradley, G. L. (1995). CÁLCULO Aplicado a Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales. Santafé de Bogotá: McGRAW-HILL.
- Purcell, E., & Varverg, D. (1993). Cálculo con geometría analítica. México: Prentice Hall.
- S.T.Tan. (1998). Matemáticas para administración y economía. México: International Thompson editores, S.A.
- Stewar, J., Lothar, R., & Watson, S. (2001). Precálculo. Madrid: International Thomson Editores, S.A.
- Swokowski, E. (1986). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Uribe, J. (1999). Teoría de conjuntos y temas afines. Medellín.: Serie Schaum.
- Zill, D. G., & Dewar, J. (1992). Algebra y trigonometría. Santafé de Bogotá: Mcgraw-Hill/Interamericana S.A.