FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Asignatura trasversal

MATEMÁTICAS II – CÁLCULO DIFERENCIAL

Vicerrectoría de Educación a Distancia y Virtual

2014

Uniremington Corporación Universitaria - Calle 51 No. 51-27
PBX: 322 10 00 Ext. 2701 - Fax: 513 78 92 - Edificio Uniremington
www.uniremington.edu.co - Medellín - Colombia

CRÉDITOS

AUTOR

Elkin Ceballos Gómez
Ingeniero Electricista de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín. Diplomado en Diseño Curricular. Corporación Universitaria Rémington Especialista en Matemáticas Aplicadas y Pensamiento Complejo. Corporación Universitaria Rémington Docente de la organización Rémington Docente de La Corporación Universitaria de Ciencia y Desarrollo (UNICIENCIA)
Docente de matemáticas en educación básica y media en la Institución Educativa Kennedy
eceballos2@yahoo.com elkin.ceballos@uniremington.educ.co

Nota: el autor certificó (de manera verbal o escrita) No haber incurrido en fraude científico, plagio o vicios de autoría; en caso contrario eximió de toda responsabilidad a la Corporación Universitaria Remington, y se declaró como el único responsable.

Actualizaciones: fueron creadas a través de talleres didácticos de entrenamiento, ejercicios de aprendizaje, pistas de aprendizaje, mapa conceptual y pruebas iniciales

RESPONSABLES

Jorge Mauricio Sepúlveda Castaño
Decano facultad de ciencias básicas e ingeniería
jsepulveda@uniremington.edu.co

Eduardo Alfredo Castillo Builes
Vicerrector modalidad distancia y virtual
ecastillo@uniremington.edu.co

Carlos Alberto Ocampo Quintero
Coordinador CUR-Virtual
cocampo@uniremington.edu.co

GRUPO DE APOYO

Personal de la Unidad CUR-Virtual
EDICIÓN Y MONTAJE
Primera versión. Febrero de 2011.Segunda versión Marzo 2012

TABLA DE CONTENIDO

1. MAPA DE LA ASIGNATURA 6

2. MAPA CONCEPTUAL DE LA ASIGNATURA 8

3. UNIDAD 1 FUNCIONES 9

3.1. Prueba inicial 10

3.2. Conceptos y definiciones 12

3.3. Clasificación de las funciones 54

3.4. Aplicaciones 158

4. UNIDAD 2 LÍMITES 186

4.1. Prueba inicial 187

4.2. Definición Intuitiva de Límite 190

4.3. Leyes para estimar límites 199

4.4. Límite y continuidad 219

5. UNIDAD 3 DERIVADA 227

5.1. Prueba inicial 228

5.2. Conceptos y definiciones asociados con la derivada 229

5.3. Leyes para derivar 236

5.4. Aplicación e interpretación de la derivada 263

6. PISTAS DE APRENDIZAJE 306

7. GLOSARIO 308

8. BIBLIOGRAFÍA 309

1. MAPA DE LA ASIGNATURA

MATEMÁTICAS II

PROPÓSITO GENERAL DEL MÓDULO

El cálculo es una herramienta de uso cotidiano en la elaboración de diseños y la implementación y desarrollo de proyectos. El manejo de la conceptualización y aplicación de este modelo permitirá un ejercicio versátil de la acción en las diferentes áreas del conocimiento.

El propósito que se busca con el MATEMÁTICAS II (CÁLCULO DIFERENCIAL) es el estudio de la derivada, su interpretación y su aplicación en las diferentes áreas del conocimiento, entendiéndose la derivada como una razón de cambio.

El estudiante conocerá las diferentes técnicas para derivar funciones y su aplicación en la solución y planteamiento de situaciones problémicas. Desarrollará, así mismo, competencias que tienen que ver con análisis de situaciones donde la herramienta fundamental será el cálculo.

Con este módulo se pretende entregar al estudiante las herramienta necesarias que le permitan desenvolverse de la mejor manera en todas las áreas del conocimiento.

OBJETIVO GENERAL

Estudiar comprensivamente los elementos geométricos, algebraicos y analíticos asociados al modelo de representación de situaciones problémicas propuesto por el cálculo en su aproximación diferencial, identificando las características de este modelo con una claridad suficiente que le permitan al estudiante el desarrollo de la habilidad y la destreza de discretización de situaciones problémicas de su cotidianidad que se pueden simular con este esquema de pensamiento.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analizar el concepto de función y sus diversas representaciones, como una aproximación a la modelación de situaciones problémicas mediante el lenguaje matemático.
- Entender el concepto de límite y su aplicación como una aproximación al estudio de la derivada.
- Analizar los conceptos básicos de la derivada, así como las diversas reglas para el cálculo y algunas aplicaciones de la misma.

UNIDADES

UNIDAD 1

Funciones

Explica los conceptos de: función, notación de función, dominio, rango, imagen de una función, continuidad, crecimiento y decrecimiento, tipos de funciones.

Explica las diferentes operaciones que pueden ser realizadas con funciones; el concepto de intercepto y la forma de determinar los interceptos de una función.

Explica la clasificación de las funciones, la forma de identificar cada familia de funciones, cómo se determina su dominio, cómo se realiza su representación gráfica.

Aplicaciones

Muestra la forma de modelar, con funciones, diferentes situaciones que permiten solucionar problemas utilizando las propiedades de dichas funciones.

UNIDAD 2

Límites

Realiza una descripción breve del concepto de límite, desde el concepto mismo del límite sin profundizar en su definición rigurosa.

Explica la forma de evaluar un límite utilizando las diferentes leyes, la forma de estimar límites al infinito y la forma de eliminar indeterminaciones de la forma cero sobre cero e infinito menos infinito utilizando la factorización y la racionalización.

UNIDAD 3

Derivada

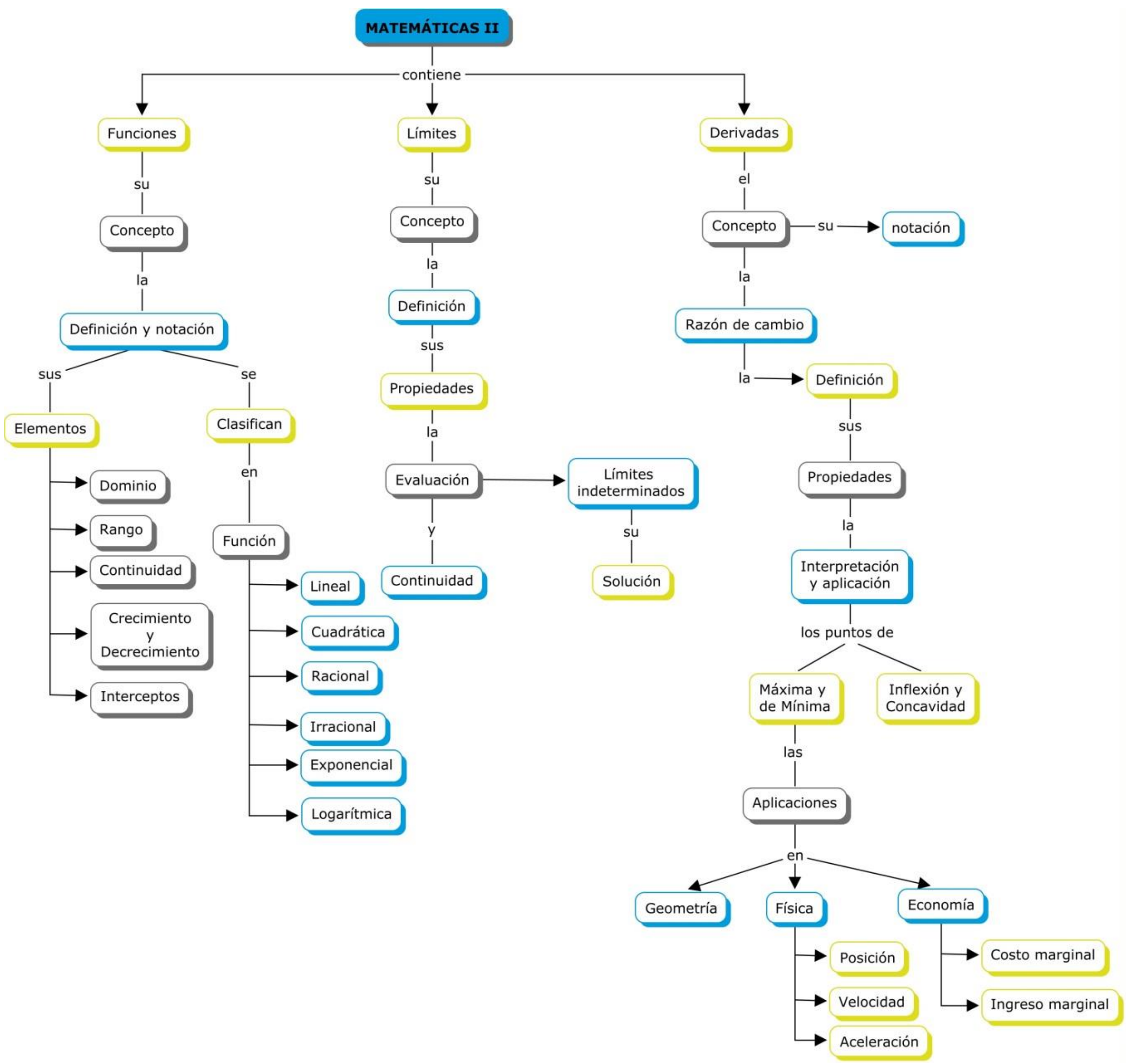
Explica el concepto de razón de cambio promedio y razón de cambio instantáneo como una aproximación al concepto de derivada.

Explica la forma de calcular la derivada de funciones utilizando la fórmula del límite de un cociente incremental. Explica las diferentes notaciones utilizadas para la primera derivada, así como la notación utilizada para las derivadas de orden superior.

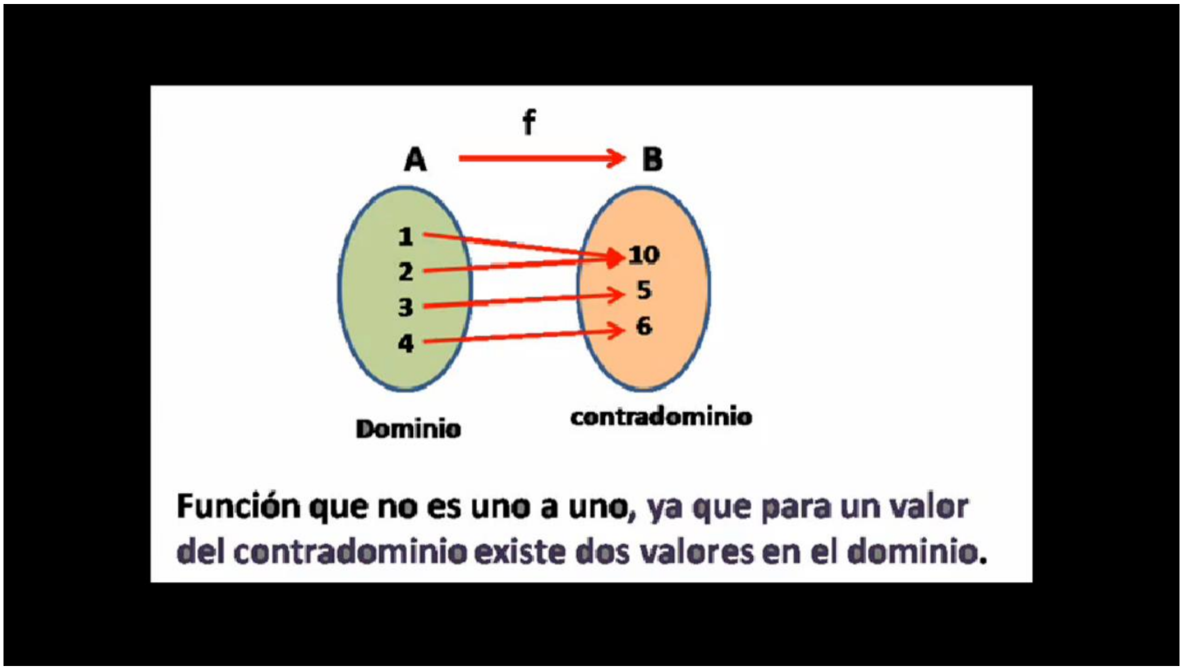
Explica las diferentes fórmulas utilizadas para derivar, no se realiza ninguna demostración de estas.

Se explica el concepto de derivada como la razón de cambio instantánea de una función y se aplica este concepto para solucionar situaciones problémicas de razón de cambio en geometría, economía (ingreso marginal, costo marginal) máximos y mínimos relativos de una función, puntos de inflexión, trazado de curvas y máximos y mínimos aplicados.

2. MAPA CONCEPTUAL DE LA ASIGNATURA



3. UNIDAD 1 FUNCIONES



http://www.youtube.com/watch?v=qZMApylUgws&feature=related

OBJETIVO GENERAL

Analizar el concepto de función y sus diversas representaciones, como una aproximación a la modelación de situaciones problémicas mediante el lenguaje matemático.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Comprender el significado de función y de los conceptos de dominio y rango, crecimiento, decrecimiento y continuidad, evaluando la función para diferentes valores de la variable independiente.

- Identificar los diferentes tipos de funciones, determinando el dominio, el rango, elaborando gráficas de algunas funciones y partiendo de ellas.

- Modelar diferentes tipos de situaciones problémicas y solucionarlas utilizando funciones.

3.1. Prueba inicial

Para cada una de las siguientes preguntas conteste falso o verdadero, justifique la respuesta.

PREGUNTAS (1 a 7)	**RESPUESTA** Verdadero **(v)**, Falso **(f)**	**JUSTIFICACIÓN**	En caso de ser falso, indique la respuesta correcta y justifíquela.
1. La solución de la ecuación: $\boldsymbol{x^2 = 9\ es\ x = 3}$			
2. Los racionales son aquellos números que se pueden escribir como el cociente entre dos números enteros, siempre que el denominador sea diferente de cero.			
3. Los números imaginarios están formados por la raíz negativa de un número par.			
4. La raíz de los números negativos no existe.			
5. El logaritmo de los números negativos no existe.			
6. El resultado 2^0 no existe.			

7. Al dividir un número diferente de cero, entre cero, el resultado es igual a cero.			

PREGUNTAS (8 a 10)	Justifique su respuesta, realizando la operación correspondiente o la propiedad aplicada.
8. El resultado de $\mathbf{3^{-2}}$ es: a. -6 b. -9 c. 9 d. $\frac{1}{9}$	
9. La ecuación $\boldsymbol{x^2 = 25}$ tiene como solución: a. x = 5 b. x = - 5 c. x = - 5 ó x = 5 d. x = 25	
9. La expresión: $\mathbf{0\left(\frac{8}{0}\right)}$ es igual a: a. 8 b. 0 c. 1 d. Indeterminado	
10. Dada la expresión: $\mathbf{\frac{25}{0}}$ se puede afirmar que: a. Es indeterminada. b. No existe (indefinido). c. Es igual a 25. d. Es igual a cero.	

3.2. Conceptos y definiciones

CONCEPTO DE FUNCIÓN

http://www.youtube.com/watch?v=xvn_yy3vcs8&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=f2qmNdC4NUU&feature=related

"Una función es una regla que describe la forma en que una cantidad depende de otra; por ejemplo, al estudiar el movimiento, la distancia recorrida es una función del tiempo." (Stewar, Lothar, & Watson, 2001, p.130).

Se puede decir, sin entrar en detalles, que una función es una expresión algebraica que indica la relación que existe entre **dos o más variables**.

En el cálculo diferencial se estudian las funciones que relacionan dos variables.

TIPO DE VARIABLE	ASIGNACIÓN	Otras asignaciones
Variable independiente	Generalmente se le asigna la letra **x.**	Otras letras que se utilizan para la variable independiente son: **q** cuando se trata de producción, **t** para el tiempo.
Variable dependiente	Por lo general se le asigna la letra **y.**	No quiere decir esto que no se le puedan asignar otras letras, esta asignación se realiza de acuerdo a los elementos que se estén trabajando.

Notación de función

Para indicar que la **variable dependiente y** está escrita en términos de la **variable independiente x** (o lo que es lo mismo, depende de la variable independiente **x**), se utiliza la siguiente notación:

$$\boldsymbol{y = f(x)}$$

Que se lee: **Y** es una función de **x.**

Nota: también se pueden utilizar otras letras:

$$\boldsymbol{y = g(x)}, \quad \boldsymbol{y = f(z)}, \quad \boldsymbol{y = c(t)}, \quad \boldsymbol{y = c(q)}$$

Nota: la variable independiente es la que está dentro del paréntesis.

DOMINIO Y RANGO

- **DOMINIO:** el dominio para cualquier función está constituido por todos los valores que puede tomar la variable independiente (**x**) de los números reales.
- **RANGO:** el rango para cualquier función está constituido por todos los números que puede tomar la variable dependiente (**y**) de los números reales.

Nota: al rango también se le conoce como **la imagen de la función**.

A raíz de las definiciones anteriores surge una pregunta:

¿Qué números o qué cantidades o qué expresiones no pertenecen a los números reales?

La respuesta es que a los números reales **no pertenecen** (ver campo numérico):

- ✓ **Ni la división entre cero,**
- ✓ **Ni los números imaginarios (raíz par de un número negativo),**
- ✓ **Ni el logaritmo de números negativos o de cero.**

Para ampliar más sobre estos temas puede consultar las siguientes páginas en internet:
Los siguientes enlaces corresponden a videos donde se puede ver el concepto de función desde otra óptica.

http://www.youtube.com/watch?v=iBFu6kLa9uY
http://www.youtube.com/watch?v=P4VQgjLI03U&feature=related
http://www.google.com/support/youtube/bin/answer.py?hl=en&answer=143421
http://www.youtube.com/watch?v=fclwNoVpx6Q&feature=related

REPRESENTACIÓN DE LAS FUNCIONES

Se tienen cuatro maneras posibles para representar una función:

- **Verbalmente:** con una descripción de palabras.
- **Numéricamente:** con una tabla de valores.
- **Visualmente:** con una gráfica.
- **Algebraicamente**: con una fórmula explícita.

"Si una sola función se puede representar de las cuatro maneras, a menudo resulta útil pasar de una representación a otra, para adquirir un conocimiento adicional de esa función." (Stewart, 1999, p.15).

Para entender mejor el concepto de función y las diferentes formas de representarlas, analizaremos, a continuación, las siguientes situaciones conceptuales cotidianas.

Situación 1:

Para la relación de nota definitiva en matemáticas generales y los **40** estudiantes de Contaduría Pública que finalizaron el primer semestre en la CORPORACIÓN UNIVESITARIA RÉMINGTON, determine:

PREGUNTA	SOLUCIÓN
1. ¿Qué valores puede asumir la variable nota definitiva en matemáticas generales?	Cualquier número entre **0 y 5**.
2. ¿Qué valores puede asumir la variable estudiante?	Cualquier número entero entre **1 y 40**.
3. ¿La nota depende del estudiante o el estudiante depende de la nota?	a. La nota depende del estudiante, ya que si conozco el nombre del estudiante puedo saber cuál es su nota mirando en la planilla. b. Pero si lo tomamos al revés, conociendo una nota, no puedo saber a qué estudiante pertenece, por ejemplo, la nota 3.5 ¿a qué estudiante pertenece? La respuesta es que la pueden tener varios estudiantes.
4. Si se llama **Dominio** a todos los valores que puede tomar la **variable independiente (X)**, ¿cuál es el **dominio** en esta situación?	Si se asume que en un salón hay 40 estudiantes entonces el dominio corresponde a todos los números enteros entre 1 y 40, es decir: $\boldsymbol{Dom\ x} \in$ **[1, 40]**

5. Si se llama **Rango** a todos los valores que puede asumir la **variable dependiente (Y)**, ¿cuál es el **rango** en este caso?	El rango corresponde al valor de todas las notas que puede obtener un estudiante, es decir, cualquier número entre 0 y 5: $\boldsymbol{Rango\ y} \in\ [\mathbf{0}, \mathbf{5}]$
6. ¿Es posible que un estudiante tenga dos o más notas diferentes en matemáticas generales?	No es posible, ya que la nota en Matemáticas y en cualquier materia es única.
7. ¿Es posible que una misma nota corresponda a dos o más estudiantes diferentes?	Sí, es posible, ya que, puede suceder que dos o más estudiantes tengan la misma nota de 5.0 o 3.0, o 2.5, o cualquier otra nota igual.

Situación 2:

En una fábrica se tiene que hay en total 835 empleados, los sueldos que se pagan mensualmente oscilan entre 1 y 12 salarios mínimos legales.

PREGUNTA	SOLUCIÓN
1. ¿Cuáles variables se relacionan en esta situación problémica?	**Variable independiente:** empleado. **Variable dependiente**: salario del empleado.
2. ¿Es posible que un empleado tenga dos o más sueldos diferentes? ¿Por qué?	No es posible, porque a ninguna persona le pagan dos o más veces por realizar el mismo trabajo.
3. ¿Es posible que un mismo sueldo corresponda a dos o más empleados diferentes? ¿Por qué?	Sí, es posible que un mismo sueldo corresponda a dos o más empleados, porque pueden desempeñar la misma labor.
4. ¿Cuál es la variable dependiente?	Salario o sueldo de cada empleado.

5. ¿Cuál es la variable independiente?	Empleado o trabajador.
6. ¿Cuál es el dominio?	Cualquier número entero entre cero y 835, son 835 trabajadores.
7. ¿Cuál es el rango?	Cualquier número entre 1 y 12 salarios mínimos, el número puede ser decimal o entero.

Situación 3:

La siguiente es una adaptación de una situación planteada por los autores (Uribe & Ortíz, No especificado, p.169)

En cierto país el costo del correo se rige por la siguiente tabla

Peso en gramos		**Costo**
Hasta 20 g		U.S. $ 0.20
Entre 20 g y 50 g		U.S. $ 0.26
Entre 50 g y 110 g		U.S. $ 0.39
Entre 100 g y 250 g		U.S. $ 0.85
Entre 250 g y 500 g		U.S. $ 1.70
Entre 500 g y 1000 g		U.S. $ 2.35
Entre 1000 g y 2000 g		U.S. $ 3.20

Carlos y Manuela le escriben a sus amigos José, Natalia, Lina y Sebastián. La carta de José pesa 15 g, la de Natalia pesa 85 g, la de Lina 90 g y la de Sebastián pesa 525 g. Contesta:

1. ¿Cuánto cuesta poner cada carta?	La carta de **José** cuesta **U.S. $ 0.20** La carta de **Natalia** cuesta **U.S. $ 0.39.** La carta de **Lina** cuesta **U.S. $ 0.39**. La carta de **Sebastián** cuesta **U.S. $ 2.35.**
2. ¿Es posible que a dos cartas les corresponda el mismo valor?	Sí, es posible. Lo podemos ver con las cartas de Natalia y Lina, ya que ambas cuestan U.S $ 0.39 aunque tienen diferentes pesos.
3. ¿A una misma carta le puede corresponder costos distintos?	No es posible, ya que no sería lógico pagar dos veces por una misma carta.
4. ¿Cuál de las dos siguientes afirmaciones es correcta? Justifica: a. El peso de la carta depende del costo de la misma. El costo de la carta depende del peso de la misma.	El costo de una carta depende de su peso, ya que como lo podemos ver en la tabla, la tarifa para el costo de cada carta está dada en términos de su peso.
b. 5. ¿Qué valores puede asumir la variable costo de envío?	Cualquier valor entre U.S. $ 0.20 y U.S. $ 3.20.
6. ¿Qué valores puede asumir la variable peso de la carta?	Cualquier valor entre 0 g y 2000 g, obviamente cero gramos no sería un valor que se incluya, ya que, corresponde a no enviar una carta, y usted no pagaría por no enviar una carta. Entonces, la respuesta correcta es: de cero gramos en adelante (sin incluir el cero) hasta 2000 gramos.

Situación 4:

La siguiente situación es una adaptación de una de las experiencias de los autores (Uribe & Ortíz, No especificado, p.170)

Carlos tiene una lámina rectangular de cartón de 30 cm de largo por 20 cm de ancho. Recorta cuadrados de lado $x\ cm$ en las cuatro esquinas para construir una caja sin tapa, como lo muestra la secuencia en la figura 1 siguiente:

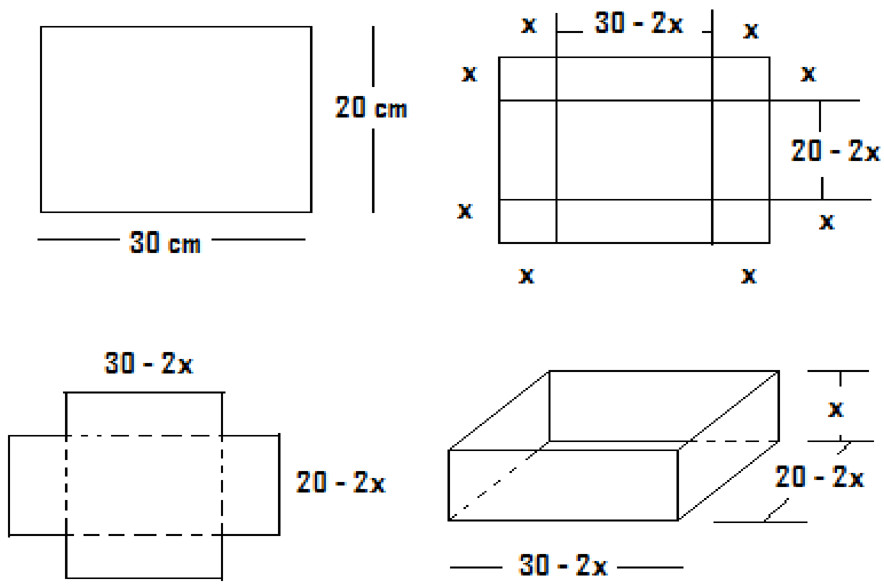


Figura 1: Diseño de una caja
(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 11 de 2011)

De la gráfica se puede ver que:

DIMENSIONES DE LA CAJA	
ALTO	$x\quad cm$
ANCHO	$30-2x\ cm$
LARGO	$20-2x\ cm$

Contesta las siguientes preguntas:

1. **¿Cuál es la expresión para el volumen de la caja?**

Solución:
El volumen de la caja se obtiene multiplicando entre si las 3 dimensiones, esto es:

$$\boldsymbol{Volumen = alto * ancho * largo}$$

Sea: $\mathrm{v(x)}$ el volumen.
Tenemos que:

$$\boldsymbol{v(x) = x * (30 - 2x) * (20 - 2x)}$$

Efectuando las multiplicaciones correspondientes y reduciendo términos semejantes:

$$\boldsymbol{v(x) = (30x - 2x^2) * (20 - 2x)}$$

$$\boldsymbol{v(x) = 600x - 60x^2 - 40x^2 - 4x^3}$$

El volumen sería (en este caso depende del valor de x):

$$\boxed{\boldsymbol{v(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x\ cm^2}}$$

2. **¿Qué variables intervienen en esta situación problémica?**

Solución:

Intervienen diferentes variables que son:

- **Altura, ancho, largo y volumen de la caja.**
- El largo, el ancho y el volumen de la caja dependen de la altura de la caja.
- También podemos ver que el volumen depende del ancho, el largo y la altura de la caja.

Observando la función anterior, podemos afirmar que el volumen depende de la altura de la caja.

Las variables de la situación problémica son:

Variable independiente: altura de la caja (o lado del cuadrado a quitar).
Variable dependiente: volumen de la caja.

a. ¿Cuál es la variable independiente?

   Altura de la caja.

b. ¿Cuál es la variable dependiente?

   Volumen de la caja.

c. ¿Cuál es el dominio?

Procedimiento para determinar el dominio:

Realicemos la siguiente tabla en Excel.

Plantilla para determinar el dominio y el rango de la función:

$$\boldsymbol{v(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x\ cm^3}$$

En la columna valor de **x** ingresamos **números positivos**, en este caso, **números del cero al veinte.**

En la columna correspondiente a v(x) se escribe la fórmula para el volumen.

=4*A2^3-100*A2^2+600*A2.

Desplegando se obtiene la información de la tabla.

A	B
Valor de x	**Valor de v(x)**
0	0
1	504
2	832
3	1008
4	1056
5	1000
6	864
7	672
8	448
9	216
10	0
11	-176
12	-288
13	-312
14	-224
15	0
16	384
17	952
18	1728
19	2736
20	4000

Solución:

PISTA DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta: el dominio consiste en todos los valores que puede asumir la variable independiente, es decir la **x**.

Para este caso particular, se debe dar valores a x que permitan que se pueda fabricar una caja con la lámina de cartón de 30 cm por 20 cm.

No sobra indicar que:

- Con una de las dimensiones igual a cero, no puede haber caja, y
- No es posible construir una caja con dimensiones negativas, es decir, la altura, el largo y el ancho de la caja solo pueden asumir valores positivos.

Para contestar esta pregunta observemos los resultados de la plantilla en Excel, dando valores a **x** y observando que valores toma **v(x).**

Se puede ver que para **x = 0**, se obtiene **v(x) = 0**, por lo tanto, **x = 0** no pertenece al dominio de **v(x).**

También se observa que el **v(x)** es **positivo**:
Desde **x = 1** hasta **x = 9**,
Nota: en **x = 0** y en **x = 10** → $v(x) = 0$.

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga presente: no puede suceder que una de las dimensiones de la caja sea negativa.

Tomemos algunos valores entre 15 y 20 y reemplacemos en cada una de las dimensiones de la caja:

Se puede ver que si x = 16:

El alto de la caja seria: $x = 16\ cm$

El ancho de la caja seria: $30 - 2x = 30 - 2 * 16 = 30 - 32 = -2cm$

El largo de la caja sería: $20 - 2x = 20 - 2 * 16 = 20 - 32 = -12\ cm$

Esto sucede si se toman valores de 16 en adelante.

Actividad: Reemplaza y verifica lo que ocurre con 17, 18, 19 y 20. Completa cada uno de los esquemas:

- Se puede ver que si **x = 17:**

El alto de la caja seria: $x = 17cm$=

El ancho de la caja seria: $30 - 2x =$

El largo de la caja sería: $20 - 2x =$

- Se puede ver que si **x = 18:**

El alto de la caja seria: $x = 18cm$=

El ancho de la caja seria: $30 - 2x =$

El largo de la caja sería: $20 - 2x =$

- Se puede ver que si **x = 19:**

El alto de la caja seria: $x = 19cm$=

El ancho de la caja seria: $30 - 2x =$

El largo de la caja sería: $20 - 2x =$

- Se puede ver que si **x = 20:**

El alto de la caja seria: $x = 20cm$=

El ancho de la caja seria: $30 - 2x =$

El largo de la caja sería: $20 - 2x =$

Nota: las dimensiones negativas no son permitidas.

Por lo tanto el dominio de v(x) es: $\boldsymbol{x} \in (\mathbf{0}, \mathbf{10})$

El paréntesis quiere decir que no se incluyen los extremos (es un intervalo abierto en ambos extremos), en este caso ni el valor x = 0 ni el valor x = 10, pero sí los valores de x, de cero en adelante, hasta el 10 sin incluir el 10.

d. ¿Cuál es el rango?

Solución:

PISTA DE APRENDIZAJE
Traer a la memoria: el rango consiste en todos los valores que puede asumir la variable dependiente.

En este caso **la variable dependiente** es **el volumen de la caja V(X)**
Recuerde que: el volumen de la caja no puede ser ni cero ni negativo.

Para determinar el dominio y el rango utilizando el Excel:
Para el rango observe la columna correspondiente a **v(x)** para los valores de **x** entre **0** y **10**, podemos ver que **v(x)** toma valores desde **0** hasta **1056** y luego vuelve a llegar a **0**, por lo tanto el Rango: $\boldsymbol{y} \in (\mathbf{0}, \mathbf{1056}]$

Nota: el corchete en un intervalo quiere decir que se incluye el extremo (intervalo cerrado en dicho extremo), es decir, el volumen puede alcanzar los 1056 cm^3.

e. ¿El volumen depende del tamaño del cuadrado a quitar o el tamaño del cuadrado a quitar depende del volumen? Justifique.

Solución:

Se puede ver que el volumen depende del tamaño del cuadrado a quitar, ya que dependiendo de este la altura, el largo aumenta o disminuye, lo mismo sucede con el volumen.

Situación 5:

Un mayorista tiene la siguiente promoción del día:
Vende piñas a 2000 pesos la unidad y ofrece un descuento de 10 pesos por piña comprada.

Contesta las siguientes preguntas.

PREGUNTAS	SOLUCIÓN
1. Si vende una piña ¿Cuál es su ingreso?	Precio = 2000 – 10(1) = 1990. Ingreso = 1990(1) =1990.
2. Si vende dos piñas ¿Cuál es su ingreso?	Precio = 2000 – 10(2) = 1980. Pesos. Ingreso = 1980(2) = 3960 pesos.
3. Si vende 10 piñas ¿Cuál es su ingreso? ¿Cuál es el precio de venta de cada piña?	Precio = 2000 – 10(10) = 1900. Ingreso = 1900(10) = 19000 pesos.
4. ¿Qué variables intervienen en la situación problémica?	Sea **q**: Número de piñas vendidas. Sea **y = r (q):** Ingreso obtenido por la venta de las **q** piñas.
5. ¿Cuál es la variable dependiente?	Ingreso obtenido por la venta de **q** piñas.
6. ¿Cuál es la variable independiente?	Cantidad **q** de piñas vendidas.
7. ¿Es posible representar esta situación problémica utilizando un modelo?	Sí.
8. Encuentre un modelo o expresión matemática que represente el ingreso del mayorista.	Para construir la función de ingreso en la venta de la **q** piñas, tenga en cuenta que:

	Ingreso (I) = **precio de venta (PV)** multiplicado (*) por **la cantidad vendida (CV).** $I = PV * CV$

En la siguiente tabla se observa mejor la construcción de la función de ingreso para la venta de **q** piñas.

Cantidad de piñas vendidas	Precio de venta	Ingreso
1	2000 – 10(1)	[2000 – 10(1)]*1
2	2000 – 10(2)	[2000 – 10(2)]*2
3	2000 – 10(3)	[2000 – 10(3)]*3
4	2000 – 10(4)	[2000 – 10(4)]*4
⋮	⋮	⋮
Q	2000 – 10q	(2000 – 10q)*q

Como **y = r (q)** es el ingreso obtenido al vender **q** piñas:

$$r(q) = (2000 - 10q)q = 2000q - 10q^2$$

$$r(q) = 2000q - 10q^2$$

Para contestar las preguntas 9, 10, 11 y 12 se hace la siguiente plantilla en Excel.

Cantidad vendida	Ingreso obtenido
0	0
10	19000
20	36000
30	51000
40	64000
50	75000

60	84000
70	91000
80	96000
90	99000
100	100000
110	99000
120	96000
130	91000
140	84000
150	75000
160	64000
170	51000
180	36000
190	19000
200	0
210	-21000
220	-44000
230	-69000
240	-96000
250	-125000

NÚMERO	PREGUNTA	SOLUCIÓN
9	¿Bajo qué condiciones es esta promoción rentable para el mayorista?	Cuando vende 100 piñas, ya que de esta manera su ingreso es de 100.000 pesos y es el máximo ingreso que puede obtener.
10	¿Bajo qué condiciones el mayorista obtendrá el máximo ingreso?	Cuando vende 100 piñas a un precio de 1000 pesos cada una, con un ingreso máximo de 100.000 pesos.

11	¿Cuál es el domino de la expresión anterior?	$Dom.\ q \in [0, 200]$
12	¿Cuál es el rango de la expresión anterior?	$y \in [0, 100000]$

Nota: después de analizar las situaciones problémicas anteriores aparecen algunos conceptos en los que se debe formalizar y profundizar; tales conceptos son:

- Imagen de una función.
- Tipos de funciones y su clasificación.
- Determinación del dominio.
- Grafica de las funciones.

Imagen de una función. Consiste en reemplazar en la función a **x** por el valor indicado y obtener la respectiva **y**.

Ejemplo 1:

Si $y = f(x) = 4x - 3x^2 - 6$

Halle: $f(1)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(\frac{2}{3})$

Solución

- Cálculo de $f(1)$:

Cundo se pide hallar $f(1)$, se pide determinar el valor de y, cuando $x = 1$; esto es:

Cuando $x = 1$, $y = f(1) = 4(1) - 3(1)^2 - 6 = 4 - 3 - 6 = -5$

Interpretando el resultado, tenemos:

$f(1) = -5$, implica que si:

$$\boxed{x = 1\text{ , entonces } y = -5}$$

- Cálculo de $f(-2)$:

Cuando $x = -2$, $y = f(-2) = 4(-2) - 3(-2)^2 - 6 =$

$-8 - 12 - 6 = -26$
$f(-2) = -26$ quiere decir que si:

$$\boxed{x = -2 \ \ entonces \ \ y = -26}$$

- Cálculo **de** $f(0)$:

Cuando $x = 0$, $y = f(0) = 4(0) - 3(0)^2 - 6 = 0 - 0 - 6 = -6$
Entonces $f(0) = -6$, ***quiere decir que* si:**

$$\boxed{x = 0 \ entonces \ y = -6}$$

- Cálculo de $f\left(\frac{2}{3}\right)$:

( )( )
( )( )

Cuando $x = \frac{2}{3}$, $y = f\left(\frac{2}{3}\right) = 4\left(\frac{2}{3}\right) - 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 6 = \frac{8}{3} - 3\left(\frac{4}{9}\right) - 6 =$

$$\frac{8}{3} - \frac{12}{9} - 6 = \frac{8*3 - 12*1 - 6*9}{9} = \frac{24 - 12 - 54}{9} = -\frac{42}{9} = -\frac{14}{3}$$

Entonces, si:

$$\boldsymbol{x=\frac{2}{3}, \qquad y=-\frac{14}{3}}$$

Ejemplo 2:

Si, $\boldsymbol{y=f(x)=\frac{x-4}{x+1}}$

Hallar: $\boldsymbol{f(1)}$, $\boldsymbol{f(-1)}$, $\boldsymbol{f(4)}$, $\boldsymbol{f(-3)}$

Solución:

- $\boldsymbol{f(1)=\frac{1-4}{1+1}=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}}$

- $\boldsymbol{f(-1)=\frac{-1-4}{-1+1}=\frac{-5}{0}=-\frac{5}{0}}$

PISTA DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta: la división entre cero no pertenece a ningún campo numérico, por lo tanto, menos uno **(-1)** no pertenece al dominio de la función (**x = - 1** no pertenece al dominio de f(x)).

- $\boldsymbol{f(4)=\frac{4-4}{4+1}=\frac{0}{5}=0}$

- $\boldsymbol{f(-3)=\frac{-3-4}{-3+1}=\frac{-7}{-2}=\frac{7}{2}}$

Ejemplo3:

Si, $\boldsymbol{y = g(x) = \sqrt{x-6}}$

Hallar: $\boldsymbol{g(10)}$, $\boldsymbol{g(0)}$, $\boldsymbol{g(5)}$, $\boldsymbol{g(8)}$

Solución

- $\boldsymbol{g(10) = \sqrt{10-6} = \sqrt{4} = 2}$

- $\boldsymbol{g(0) = \sqrt{0-6} = \sqrt{-6}}$

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga presente: la raíz par de un número negativo no pertenece a los números reales, por lo tanto, $\boldsymbol{x = 0}$ no pertenece al dominio del modelo matemático.

- $\boldsymbol{g(5) = \sqrt{5-6} = \sqrt{-1}\ (Raíz\ par\ de\ un\ número\ negativo), por\ lo\ tanto,}$

  $\boldsymbol{x = 5\ no\ pertenece\ al\ dominio\ de\ la\ función.}$

- $\boldsymbol{g(8) = \sqrt{8-6} = \sqrt{2} = 1,414213562\ldots}$

Enlaces evaluación de funciones:

http://www.youtube.com/watch?v=tqGxgRySDXA

http://www.youtube.com/watch?v=fBuRPI0VcGE&feature=related

http://www.youtube.com/watch?v=FmcyySs_doQ&feature=related

http://www.youtube.com/watch?v=FDB1j9Ze-G8&feature=related

http://www.youtube.com/watch?v=hDerTNynXi4&feature=related

INTERCEPTOS: (http://www.youtube.com/watch?v=1WzS4FuxKbA)

Un intercepto es un punto donde la gráfica de la función corta cada uno de los ejes.

Para obtenerlos se procede de la siguiente forma:

1. Las intersecciones con el eje **x** (si los hay) se obtienen haciendo **y = 0** y despejando la **x**.

Nota: a partir de una gráfica las intersecciones con el eje **x** corresponden a los puntos donde la gráfica corta el eje **x**.

2. Las intersecciones con el eje **y** (si los hay) se obtienen haciendo **x = 0** y despejando la **y.**

Nota: a partir de una gráfica, las intersecciones con el eje **y** son los puntos donde la gráfica corta el eje **y**.

NOTA:

Si al buscar las intersecciones con los ejes se presenta una de las siguientes situaciones, quiere decir, que en ese caso no hay intersecciones con el respectivo eje.

- La ecuación no tiene solución.
- Una igualdad falsa.
- Raíz par de un número negativo.
- División entre cero.
- Cualquier expresión falsa.
- Logaritmo de un número negativo.
- Un exponencial igualado a cero.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Determine las intersecciones con los ejes de cada una de las siguientes funciones.

1. Determine los interceptos de la función:

$$\boldsymbol{y = f(x) = x^2 - 7x + 6}$$

Procedimiento:

a. Para encontrar el intercepto con el eje **x,** se hace $\boldsymbol{y = 0}$

Si $y = 0$, entonces:

$\boldsymbol{0 = x^2 - 7x + 6,}$ que se puede escribir también $\boldsymbol{x^2 - 7x + 6 = 0}$

b. Se despeja x:

Nota: como es una ecuación cuadrática se procede a solucionar, bien sea, factorizando o utilizando la fórmula general.

Factorizando:
$\boldsymbol{x^2 - 7x + 6 = 0 \to (x - 6) * (x - 1) = 0}$

c. Se iguala cada factor a **0** y se despeja x:

- $\boldsymbol{x - 6 = 0 \to x = 6}$ $que\ representa\ el\ punto\ (\boldsymbol{6, 0})\ enel\ plano\ cartesiano.$

- $\boldsymbol{x - 1 = 0 \to x = 1}$ $que\ representa\ el\ punto\ (\boldsymbol{1, 0})\ en\ el\ plano\ cartesiano.$

Solución:
Las coordenadas de estos interceptos son: $(\mathbf{1},\mathbf{0})\ \boldsymbol{y}\ (\mathbf{6},\mathbf{0})$

a. Para encontrar el intercepto con el eje **y,** se hace $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$

Si: $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\mathbf{0})=(\mathbf{0})^{\mathbf{2}}-\mathbf{7}(\mathbf{0})+\mathbf{6}=\mathbf{6}$$

Por lo tanto, este punto tiene coordenadas: $(\mathbf{0},\mathbf{6})$

Actividad: realiza la gráfica utilizando los interceptos encontrados, recuerda que es una función cuadrática: ¿qué tipo de curva obtienes?

2. Halle los interceptos de la función:

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\mathbf{5}\boldsymbol{x}+\mathbf{3}$$

Procedimiento

a. Intercepto con el eje **x**: se hace $\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$

Si, $\quad \boldsymbol{y},=\mathbf{0},\ \ \mathbf{0}=\mathbf{5}\boldsymbol{x}+\mathbf{3}\ \rightarrow \mathbf{5}\boldsymbol{x}+\mathbf{3}=\mathbf{0}$

$=$

b. Despejando **x**:

$$\boldsymbol{x}=-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$$

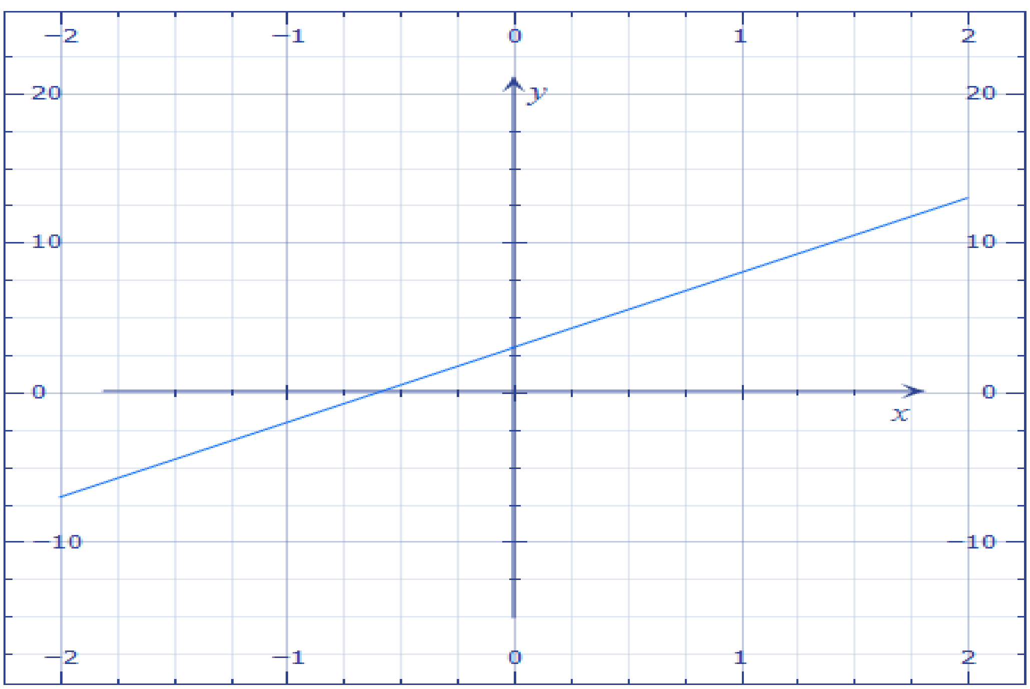
c. Las coordenadas del intercepto: $\left(-\frac{3}{5}, 0\right)$

d. Intercepto con el eje **y**: se hace $x = 0$

Si, $x = 0, \;\; y = 5(0) + 3 = 3$

e. Las coordenadas del intercepto: $(0, 3)$

f. Su gráfica sería**:**



3. Halle los interceptos de la función:

$$\boldsymbol{y = h(t) = \sqrt{5t - 10}}$$

Procedimiento

a. Con el eje **t,** en este caso la coordenada (eje **x**): **se hace** $\boldsymbol{y = 0}$

Sí, $\boldsymbol{y = 0 \rightarrow 0 = \sqrt{5t - 10} \rightarrow \sqrt{5t - 10} = 0}$

b. Se elimina la raíz:

PISTA DE APRENDIZAJE
Traer a la memoria: para destruir la raíz cuadrada se eleva, en ambos lados de la ecuación, al cuadrado:

$$\boldsymbol{(\sqrt{5t - 10})^2 = 0^2}$$

Eliminando la raíz, tenemos:

$$\boldsymbol{5t - 10 = 0}$$

c. Despejando **t:**

$$\boldsymbol{5t = 10 \rightarrow t = \frac{10}{5} \rightarrow t = 2}$$

d. El intercepto sería el punto: $\boldsymbol{(2, 0)}$

e. El intercepto con el eje **y**: **se hace** $\boldsymbol{x = 0}$

Si, $\boldsymbol{x = 0 \rightarrow y = \sqrt{5(0) - 10}}$

$\boldsymbol{y = \sqrt{-10}}$ **:** ***Esta raíz no existe en los números Reales*, por lo tanto, no hay intercepto con el eje y.**

4. Halle los interceptos de la función:

$$\boldsymbol{y = f(x) = \frac{6x + 2}{x^2 + 6x + 5}}$$

Procedimiento

a. Se halla el intercepto con el eje **y**: se hace $\boldsymbol{x = 0}$

Si, $\boldsymbol{x = 0,}$ entonces:

$$\boldsymbol{y = \frac{6(0) + 2}{0^2 + 6(0) + 5} \rightarrow y = \frac{2}{5}}$$

La coordenada del intercepto con el eje **y** sería: $\boldsymbol{\left(0, \frac{2}{5}\right)}$

b. Se halla el intercepto con el eje **x**: se hace $\boldsymbol{y = 0}$

Si $\boldsymbol{y = 0}$, entonces:

$\boldsymbol{0 = \frac{6x+2}{x^2+6x+5} \rightarrow \frac{6x+2}{x^2+6x+5} = 0}$

c. Multiplicando la ecuación resultante por: $\boldsymbol{x^2+6x+5}$ queda:

PISTA DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta: si se multiplican los miembros de una igualdad por una misma cantidad, la igualdad se conserva:

$$\left(\frac{6x+2}{x^2+6x+5}\right)*(x^2+6x+5)=(0)*x^2+6x+5$$

d. Simplificando en el primer miembro y multiplicando por cero en el segundo, tenemos:

$6x+2=0$

e. Despejando **x:**

$$6x+2=0 \rightarrow 6x=-2 \rightarrow x=-\frac{2}{6} \rightarrow x=-\frac{1}{3}$$

La coordenada del intercepto con el eje **x** sería: $\left(-\frac{1}{3},0\right)$

5. Halle los interceptos de la función:

$$y=f(x)=2^{2x-1}$$

Procedimiento:

a. Se halla el intercepto con el eje **y**: se hace $x=0$

$$y=2^{2*0-1}=2^{-1}=\frac{1}{2}$$

El intercepto con el eje **y** es el punto de coordenadas: $\left(\mathbf{0},\frac{1}{2}\right)$

b. Se halla el intercepto con el eje **x**: se hace $y = 0$

$$2^{2x-1} = 0$$

Esta ecuación no tiene solución, ya que un exponente nunca es igual a cero.

6. Halle los interceptos de la función:

$$y = g(x) = log\ 3^{x^2-8}$$

Procedimiento

a. Se halla el intercepto con el eje **y**: se hace $x = 0$

$$y = \log 3^{0-8} = \log 3^{-8} = log\ \frac{1}{3^8}$$

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga presente: el logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador **menos** el logaritmo del denominador: $\log(\frac{A}{B}) = \log A - \log B$

De acuerdo a la anterior propiedad, tenemos que:

$$log\ \frac{1}{3^8} = log\ 1 - log\ 3^8$$

PISTA DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

1. El logaritmo de **1** en cualquier base es igual a **cero:**

$$\boldsymbol{log_a 1 = 0, \qquad con\ a \in R_e \neq de\ 0\ y\ de\ número\ negativo.}$$

2. El logaritmo de una potencia es igual al exponente de la potencia por el logaritmo de la base de la potencia:

$$\boldsymbol{log\ a^n = n * log\ a, con\ a \in R_e \neq 0\ y\ de\ número\ negativo.}$$

Con las propiedades anteriores tenemos entonces:

$$\boldsymbol{log\ \frac{1}{3^8} = log\ 1 - log\ 3^8 = 0 - 8\ log\ 3 = -8\ log\ 3}$$

Calculando: **log 3 = 0.4771212...**

$\boldsymbol{-8\ log\ 3}$ **= - 8 * 0.4771212 = - 3.816969696...**

El intercepto con el eje **y** es el punto de coordenadas**:** $(\boldsymbol{0, -3.8169696})$

b. Se halla el intercepto con el eje **x**: se hace $\boldsymbol{y = 0}$

$$\boldsymbol{0 = \log 3^{x^2-8} \to \log 3^{x^2-8} = 0}$$

PISTA DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta: la logaritmación es el proceso inverso de la potenciación, por lo tanto, una potencia se puede expresar en función de un logaritmo o viceversa:

Si $x^n = M \leftrightarrow log_x M = n, con \;\; n \in R_e \; y \; x, M \in R_{e^+}$

Ejemplo: $2^3 = 8 \leftrightarrow log_2 8 = 3$

Utilizando esta definición o aplicando exponencial en ambos lados de la ecuación, tenemos:

$$\log 3^{x^2-8} = 0 \rightarrow 3^0 = 3^{log3^{x^2-8}}$$

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga presente:

$$3^0 = 1$$

$$3^{log3^{x^2-8}} = x^2 - 8$$

Ya que: $3^{log3^{x^2-8}} = (x^2 - 8) * 3^{log3} \; y$

$$3^{log3} = 1$$

Entonces, la ecuación queda:

$$x^2 - 8 = 1$$

Igualando a **0**, tenemos:

$$x^2 - 8 - 1 = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0$$

Factorizando:

$$(x + 3) * (x - 3) = 0$$

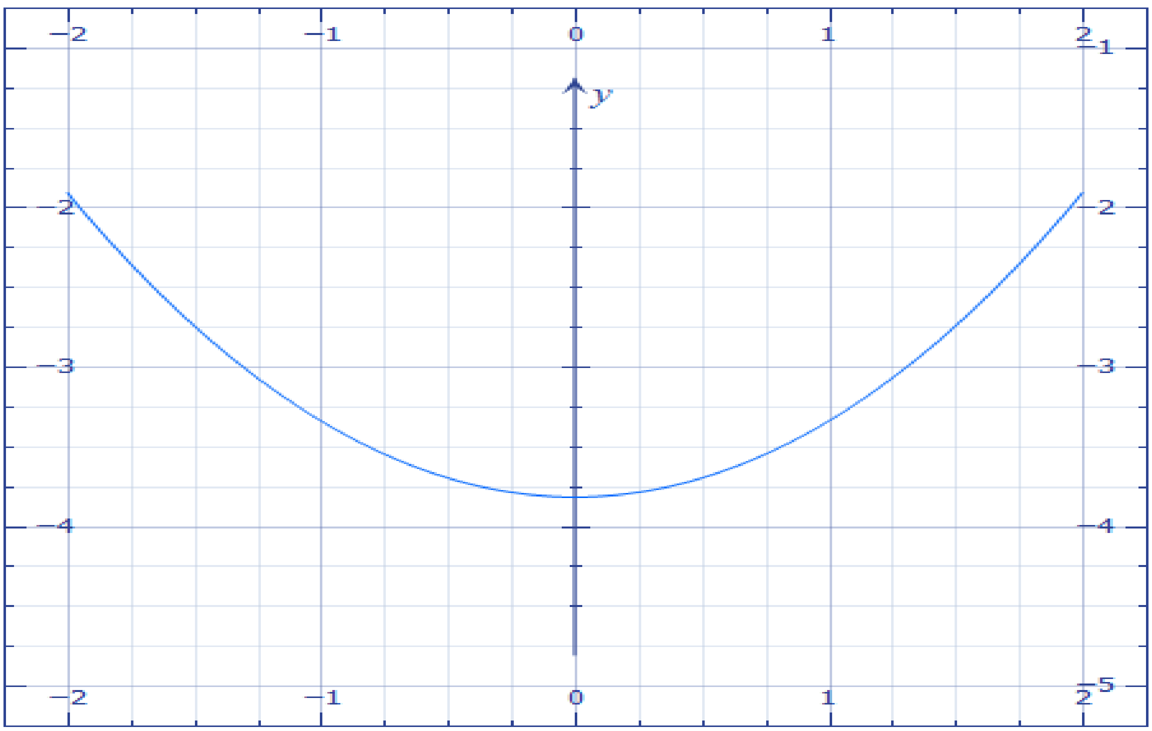
Se iguala cada factor a **0:**

$$x+3=0 \rightarrow x=-3$$
$$x-3=0 \rightarrow x=3$$

Solución: las coordenadas de estos interceptos con el eje **x** son:

$(-3,0)\ y\ (3,0)$

c. Su gráfica sería**:**



Nota: se observa en la gráfica claramente el intercepto con el eje **y**, prolongando la gráfica también se notarán los cortes o interceptos con el eje **x**.

La siguiente dirección corresponde a un applet que permite factorizar.
http://www.cidse.itcr.ac.cr/webMathematica/NewScript/factor.jsp

En esta página se tiene un applet para solucionar ecuaciones.
http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/MATEGENERAL/index.htm

CONTINUIDAD: (http://www.youtube.com/watch?v=wuAdn84VSoc)

Se dice que una función es continua en todo su dominio, cuando se puede recorrer toda la gráfica sin tener que levantar la mano, cuando no hay huecos o espacios entre sus gráficas, si algo de esto se llega a presentar se dice que la función es discontinua.

La función $\boldsymbol{y = f(x)}$ mostrada en la figura 2 **es continua**, porque podemos recorrer toda su gráfica sin necesidad de levantar la mano.

La función$\boldsymbol{y = g(x)}$ mostrada en la figura **3 es discontinua** (no es continua), porque al recorrer su gráfica hay que levantar la mano para continuar, o porque hay un espacio entre sus gráficas. Esta función es discontinua en el punto $\boldsymbol{x_1}$.
Para indicar puntos de discontinuidad se debe nombrar la **x** del punto.

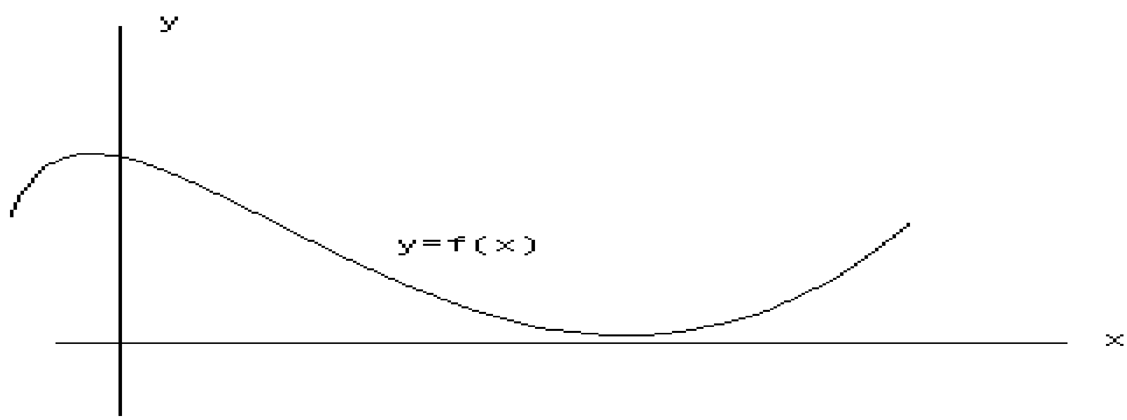


Figura 2. Función continua

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

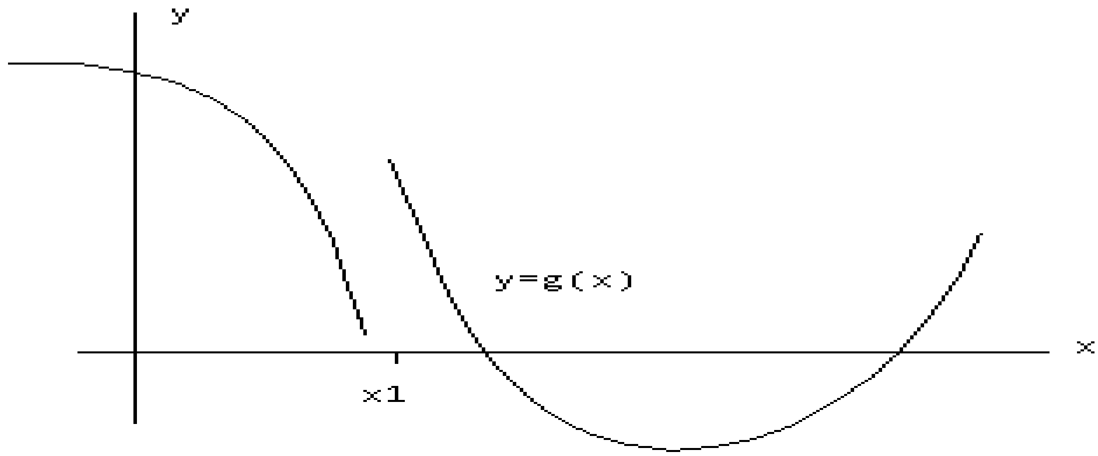


Figura 3. Función discontinua.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

- **Intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento de una función:**

http://www.youtube.com/watch?v=mvj_KLgO_5Q&feature=related

- ○ **CRECIMIENTO:** se dice que una función es creciente cuando al aumentar la **x**, la **y** también aumenta (o viceversa).
- ○ **DECRECIMIENTO:** se dice que una función es decreciente cuando al aumentar la **x**, la **y** disminuye (o viceversa).

Entiéndase por **x** a la variable independiente, entiéndase por **y** a la variable dependiente.

$$\textbf{FUNCIÓN CRECIENTE}\left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{X} \uparrow - \boldsymbol{Y} \uparrow (aumentan\ las\ dos) \\ \sigma \\ \boldsymbol{X} \downarrow - \boldsymbol{Y} \downarrow (disminuyen\ las\ dos) \end{array}\right\}$$

Función decreciente:

FUNCIÓN DECRECIENTE $\left\{\begin{matrix} \boldsymbol{X \uparrow -Y \downarrow (crece\ X,\ decrece\ Y)} \\ \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{X \downarrow -Y \uparrow (decrece\ X,\ crece\ Y} \end{matrix}\right\}$

Gráficamente puede determinarse fácilmente si una función es creciente o decreciente, recorriendo la gráfica de la función de izquierda a derecha, si la sensación es que se sube por la gráfica, quiere decir que en este tramo la función es creciente, y si la sensación es de bajada, quiere decir que en este tramo la función es decreciente.

Para determinar intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento siempre se toma como límites del intervalo el valor de **x** del punto y los intervalos pueden ser abiertos o cerrados.

Para la figura 4 se tiene que los intervalos de crecimiento y de decrecimiento son:

- ✓ **Crecimiento**: $x \in \boldsymbol{(-\infty,\ x_1)\ y\ (x_{2,} + \infty)}$

- ✓ **Decrecimiento**: $x \in \boldsymbol{(x_1, x_2)}$

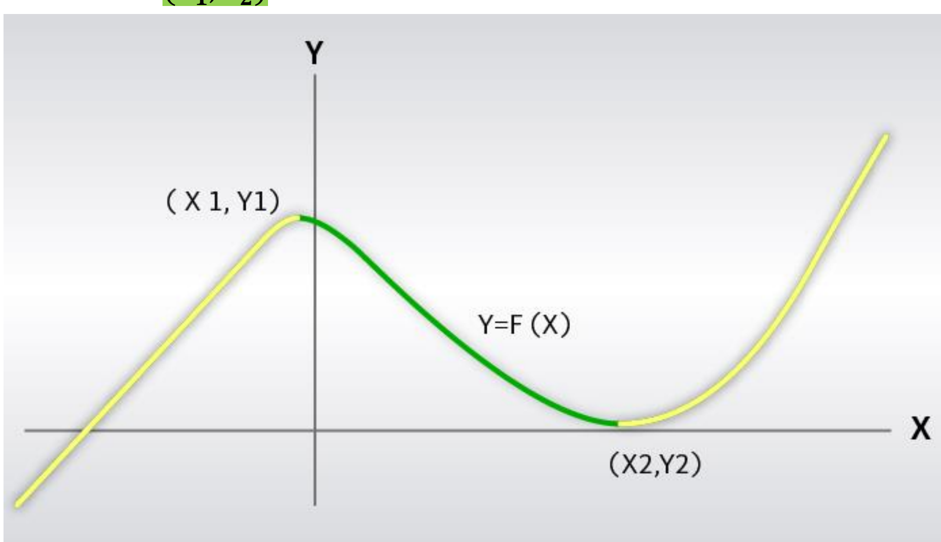


Figura 4. Crecimiento y decrecimiento de una función
(Autor. Elkin Ceballos Gómez).

Enlaces para crecimiento y decrecimiento de funciones:

http://www.youtube.com/watch?v=Dgl23EjUtRs

http://www.youtube.com/watch?v=5HHdMwt3X6Q

OPERACIONES CON FUNCIONES

Este tema también recibe el nombre de: ÁLGEBRA DE FUNCIONES:

Dadas dos funciones $\boldsymbol{f}$ **·g** se pueden combinar para formar nuevas funciones así:

OPERACIÓN	NOTACIÓN
• **Suma de funciones**	$(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$
• **Resta (diferencia) de funciones**	$(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$
• **Producto de funciones**	$(\boldsymbol{f}*\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})*\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$
• **Cociente de funciones**	$(\boldsymbol{f}/\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})/\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$
La **función compuesta** de **f y g** se denota como$\boldsymbol{f}\ \boldsymbol{\sigma}\ \boldsymbol{g}$ y se define como: $(\boldsymbol{f}\ \boldsymbol{o}\ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$ • **Función compuesta o composición de funciones** ○ $(\boldsymbol{f}\ \boldsymbol{o}\ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$ ○ $(\boldsymbol{g}\ \boldsymbol{o}\ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$	

NOTA: $(\boldsymbol{f}\ \boldsymbol{o}\ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})\neq(\boldsymbol{g}\ \boldsymbol{o}\ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE:

1. Si $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ y $g(x) = 4x - 3$

a. $f(x) + g(x)$:

Procedimiento

- Se coloca un polinomio a continuación del otro (precedidos del signo más +) y se eliminan los paréntesis:
- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x^2 - 3x + 1 + (4x - 3) =$

$$2x^2 - 3x + 1 + 4x - 3$$

- Se reducen términos semejantes:

$$(f+g)(x) = 2x^2 + x - 2$$

2. Si $f(x) = 3x^2 - 1$ y $g(x) = 7x - 9$

a. Halle: $f(x) + g(x)$:

Procedimiento

- Se coloca un polinomio a continuación del otro (precedidos del signo más +), se eliminan los paréntesis:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 3x^2 - 1 + (7x - 9) = 3x^2 - 1 + 7x - 9$$

- Se reducen términos semejantes:

$$(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{1} + \mathbf{7}\boldsymbol{x} - \mathbf{9}$$

$$(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{7}\boldsymbol{x} - \mathbf{10}$$

3. Si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{5}\boldsymbol{x} + \mathbf{3}\ \ \boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$

Halle:
$\boldsymbol{a}.\,(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$,
$\boldsymbol{b}.\,(\boldsymbol{f}*\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$,
$\boldsymbol{c}.\,(\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{f}})(\boldsymbol{x})$

Procedimiento

a. $(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$:

- Se coloca el minuendo y a continuación el sustraendo precedido del signo menos, se eliminan paréntesis:

$$(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{5}\boldsymbol{x}+\mathbf{3} - (\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}) = \mathbf{5}\boldsymbol{x}+\mathbf{3}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$$

- Se reducen términos semejantes y se ordena el polinomio en forma descendente:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{5}\boldsymbol{x} + \mathbf{3}$$

b. $(\boldsymbol{f}*\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$:

- Se indica en forma de producto:

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) = (5x + 3) * (x^2)$$

- Se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación y se reducen términos semejantes (si existen).

$$f(x) * g(x) = (5x + 3) * (x^2) = 5x^3 + 3x^2$$

$$f(x) * g(x) = 5x^3 + 3x^2$$

C. $(\frac{g}{f})(x)$

- Se indica en forma de cociente o de fracción (división) :

- $(g/f)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2}{5x+3}$

- Se factoriza el numerador y el denominador de la fracción (si es posible) y luego se simplifica si es del caso.

En este ejercicio no es posible factorizar, por lo tanto queda:

$$(g/f)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2}{5x+3}$$

4. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$

Halle las funciones compuestas:

a. $(f\ o\ g)(x)$:

Procedimiento

$$(f\ o\ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x-3) = (x-3)^2$$

b. $(g\ o\ f)(x)$:

Procedimiento

a. $(g\ o\ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = (x^2) - 3 = x^2 - 3$

5. http://www.youtube.com/watch?v=GHITUxxaj4Q

6. http://www.youtube.com/watch?v=LFpnVDnYKPY&feature=related

7. http://www.youtube.com/watch?v=2ICR830CkPg&feature=fvwrel

Taller de Entrenamiento

1. **En una fábrica hay en total 352 empleados, los sueldos que se pagan mensualmente oscilan entre 1 y 8.5 salarios mínimos legales. Estudie la relación que existe entre los trabajadores y el salario mensual de cada uno de ellos, para ello determine:**

a. **Variable independiente**
b. **Variable dependiente**
c. **Dominio**
d. **Rango**

2. **Si los valores de "x" son 3, 5, 7, 8 y la función es $f(x)=\frac{x^2}{2}$, encuentre los respectivos valores de "y" (Coloque en el paréntesis la letra correspondiente).**

VALORES DE X	VALORES DE $f(x)$
a. 3	( ) $\frac{49}{2}$
b. 5	( ) 32
c. 7	( ) $\frac{9}{2}$
d. 8	( ) $\frac{25}{2}$

3. **Determine los interceptos de las siguientes funciones:**

FUNCIONES	INTERCEPTOS
$f(x)=5x^2+8x-4$	**INTERCEPTO EJE Y:** $(0,-4)$ **INTERCEPTOS EJE X:** $(-2,0)$ y $\left(\frac{2}{5},0\right)$ **Realiza el cálculo y responde:** **Sí__________ No________ ¿Por qué?** **Justifique su respuesta____________**
$g(x)=\sqrt{20x-5x^2}$	**INTERCEPTO EJE Y:** $(0,0)$ **INTERCEPTOS EJE X:** $(0,0)$ y $(4,0)$ **Realiza el cálculo y responde:** **Sí__________ No________ ¿Por qué?** **Justifique su respuesta____________**
$h(x)=2^{x^2-1}$	**Realiza el cálculo correspondiente y encuentra:** **INTERCEPTO(s) EJE Y:** **INTERCEPTO(s) EJE X:**

$j(x)=\dfrac{6x^2-7x-3}{x^2+9}$	**Realiza el cálculo correspondiente y encuentra:** **INTERCEPTO(s) EJE Y:** **INTERCEPTO(s) EJE X:**

4. **Para las siguientes funciones realice las operaciones indicadas**

$f(x)=5x^2-3x+4 \quad y \quad g(x)=2x^2-7x$	
OPERACIONES	**DESARROLLO OPERACIONES Y SOLUCIÓN**
a. $(f-g)(x)$	
b. $(f*g)(\frac{2}{5})$	
c. $\left(\frac{f}{g}\right)(\frac{3}{2})(f-g)(x)$	
d. $(f\ o\ g)(x)$	

5. **En la figura 5 se observa la gráfica de una función** $f(x)$

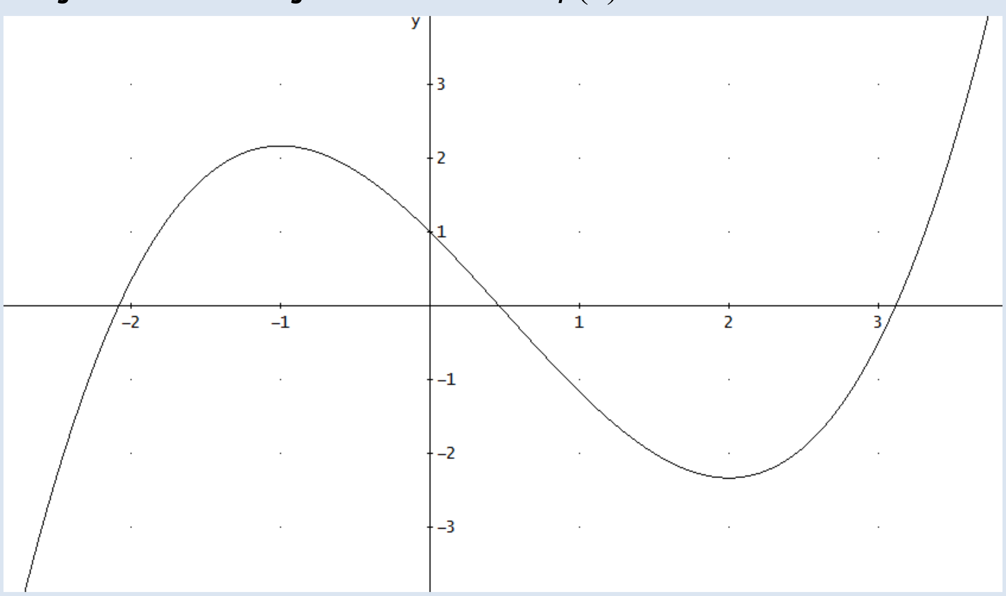


Figura 5. Gráfica de una función $f(x)$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 12 de 2011)

Teniendo en cuenta la figura 5, determine:

a. **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.**
b. **Las coordenadas de los interceptos con una cifra decimal.**
c. **Intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.**
d. **Indique si la función es continua o discontinua, explique.**

3.3. Clasificación de las funciones

Se tratarán los siguientes temas: Identificar el tipo de función, determinar su dominio, representar gráficamente la función (utilizando alguna aplicación en línea), determinar intervalos de decrecimiento e intervalos de crecimiento y determinar continuidad y discontinuidad de funciones (Observando la gráfica).

FUNCIÓN POLINÓMICA

Una función polinómica es toda función de la forma:

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Se identifica porque:

- No tiene variable en logaritmos,
- No tiene variable en el denominador,
- No tiene variable dentro de una raíz,
- No es exponencial,
- No es trigonométrica.

Ejemplos de función polinómica:

$$y = g(x) = 7x - 3$$

$$y = h(x) = 7x^3 - 10x + 2$$

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 6$$

- **DOMINIO:**

El dominio de las funciones polinómicas está formado por el conjunto de todos los números reales, es decir**:** $D_{f= R_e=(-\infty,+\infty)}$

Donde m y b son constantes que pertenecen a los números Reales: m: la pendiente de la línea recta. b: el intercepto o punto de corte de la línea recta con el eje **y**.

- **CONTINUIDAD:** las funciones polinómicas son continuas en todo su dominio.

- **REPRESENTACIÓN GRÁFICA:** la forma de graficar las funciones polinómicas depende de cada tipo de función.

Las funciones polinómicas se clasifican a su vez en:

Función lineal o función de primer grado:

Es una función de la forma:

$$y = f(x) = mx + b$$

PISTA DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta:

La pendiente da información acerca del ángulo de inclinación de la recta con el eje positivo de **"X"** (OX^+) así:

- Cuando el ángulo de inclinación es menor de 90° ($\acute{a}\boldsymbol{ngulo} < \mathbf{90}°$: $\acute{a}\boldsymbol{ngulo\ agudo}$), **la pendiente (*m*)** tiene **signo positivo** y la **función es creciente** **(Ver gráfica 1).**

- Cuando el ángulo de inclinación es mayor de 90° ($\acute{a}\boldsymbol{ngulo} > \mathbf{90}°$: $\acute{a}\boldsymbol{ngulo\ obtuso}$), **la pendiente (*m*)** tiene **signo negativo** y la **función es decreciente.** **(Ver gráfica 2).**
- Cuando el ángulo de inclinación es igual a 90°($\acute{a}\boldsymbol{ngulo} = \mathbf{90}°$: $\acute{a}\boldsymbol{ngulo\ recto}$) **la pendiente no existe**, esto se asocia con división entre cero, en este caso se tiene una recta vertical cuya ecuación es $\boldsymbol{x = \pm c}$ **(**Es una recta paralela al eje **y). (Ver gráfica 3).**
- Cuando el ángulo de inclinación es igual a cero ($\acute{a}\boldsymbol{ngulo} = \mathbf{0}°$: $\acute{a}\boldsymbol{ngulo\ plano\ o\ llano}$) la **pendiente es igual a cero**, en este caso se tiene una recta horizontal cuya ecuación es $\boldsymbol{y = \pm b}$ (Es una recta paralela al eje **X). (Ver gráfica 4**).

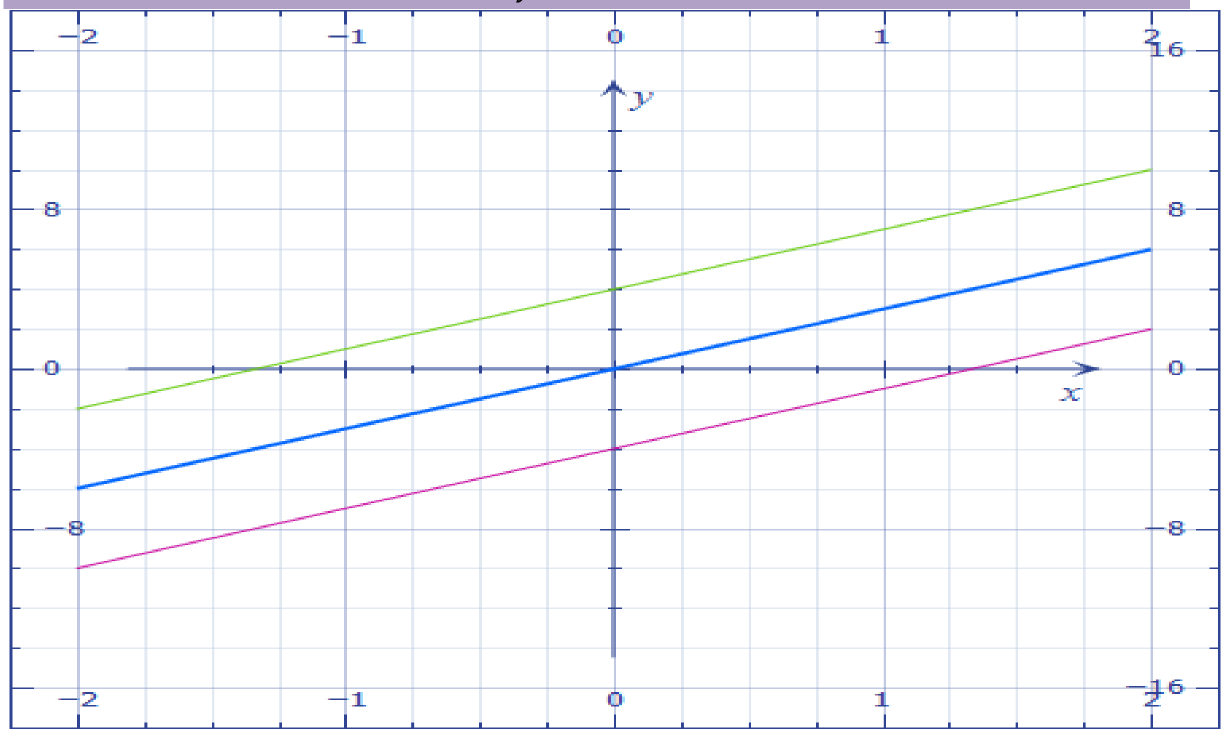
De acuerdo a la anterior pista se determinan las siguientes ecuaciones para la línea recta (se ilustra gráficamente cada una de ellas:

- **FUNCIÓN LINEAL CRECIENTE con $m > 0$ $(positiva)$(Gráfica 1):**

$$y = mx + b$$

$$y = mx$$

$$y = mx - b$$



$y = mx + b$ $y = mx$ $y = mx - b$

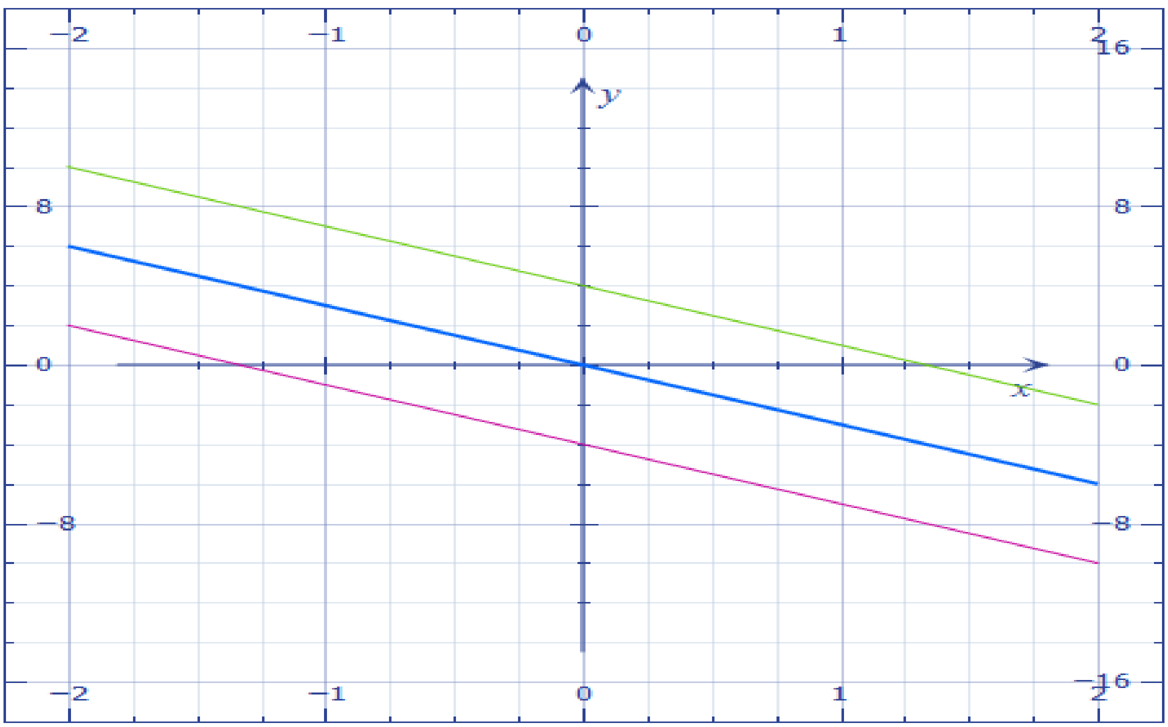
Gráfica 1

- **FUNCIÓN LINEAL DECRECIENTE con $m < 0$ $(negativa)$ (Gráfica 2)**

$$\boldsymbol{y = -mx + b}$$

$$\boldsymbol{y = -mx}$$

$$\boldsymbol{y = -mx - b = -(mx + b)}$$



$\boldsymbol{y = -mx + b}$ $\boldsymbol{y = -mx}$ $\boldsymbol{y = -mx - b = -(mx + b)}$

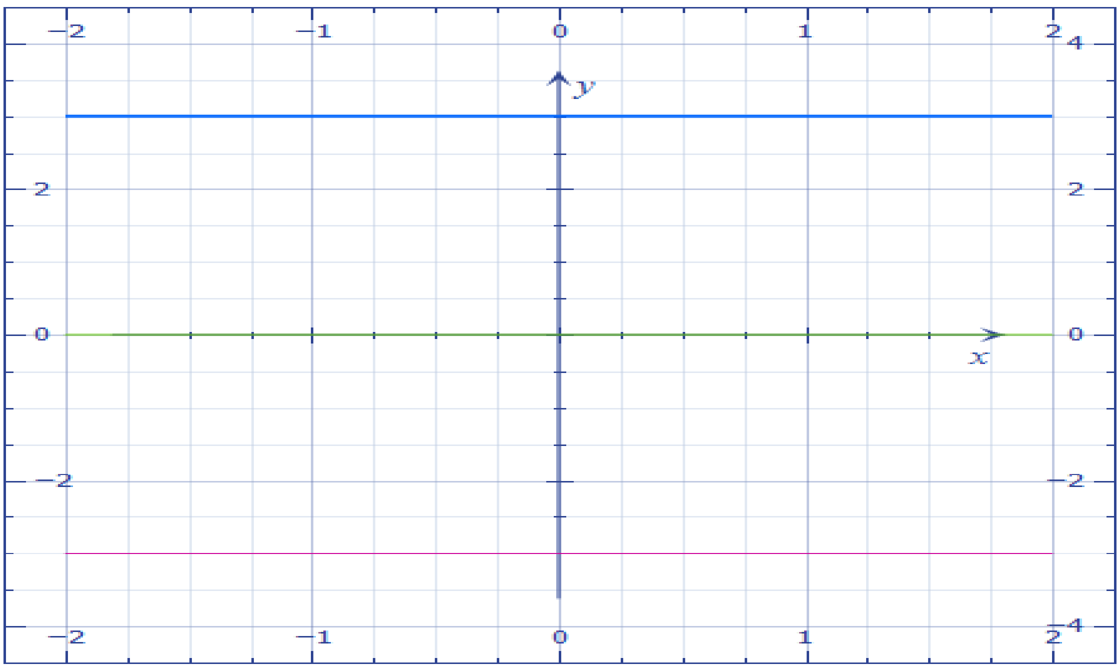
Gráfica 2

- **FUNCIÓN LINEAL con $m = 0$ (Gráfica3):Recta paralela al eje x**

$$y = +b$$

$$y = 0$$

$$y = -b$$



$y = +b$ $y = 0$ $y = -b$

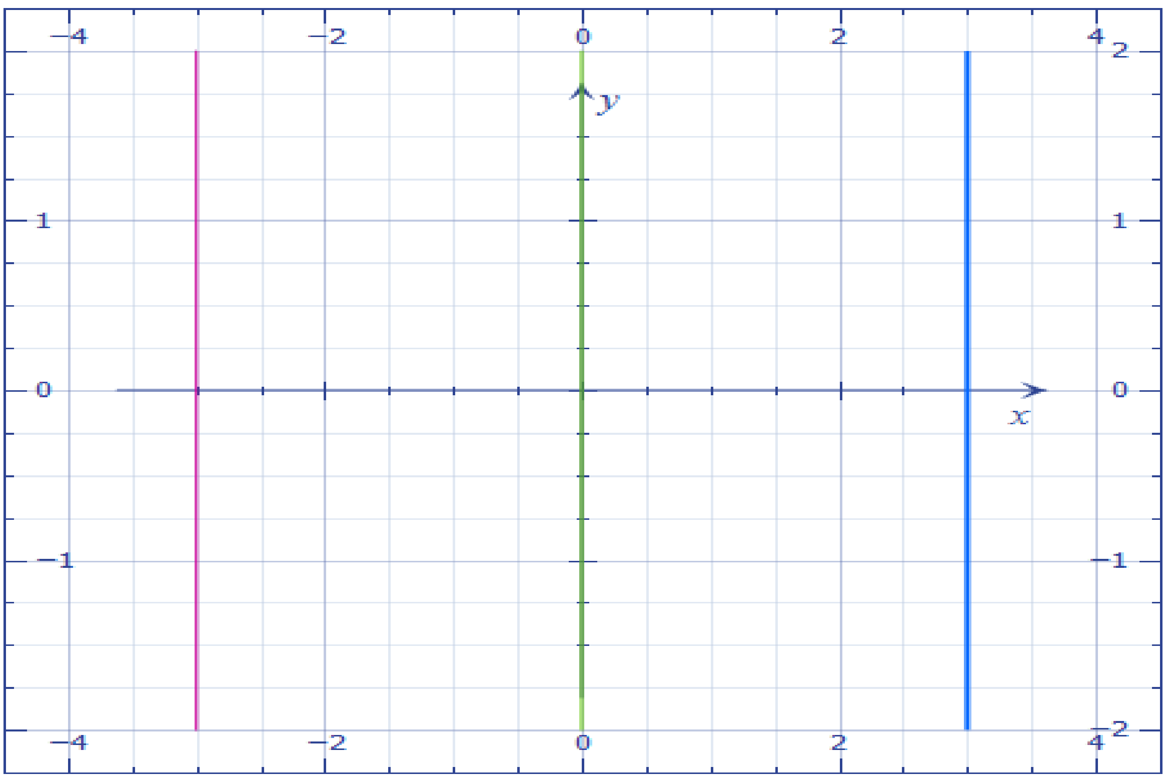
Gráfica 3

- **FUNCIÓN LINEAL $m = no\ existe$ (Gráfica 4): Recta paralela al eje y**

$$\boldsymbol{x = +c}$$

$$\boldsymbol{x = 0}$$

$$\boldsymbol{x = -c}$$



$\boldsymbol{x = +c}$ $\boldsymbol{x = 0}$ $\boldsymbol{x = -c}$

Gráfica 4

- **GRÁFICA:**

Para graficar una función lineal es suficiente con dos puntos.

Los paso a seguir son:

1. Se seleccionan dos valores de **x** arbitrariamente, ya que el dominio de la función son los números Reales.
2. Cada valor de **x** seleccionado se reemplaza en el modelo para obtener la respectiva **y**.
3. Las parejas obtenidas se ubican en el plano cartesiano.
4. Unimos los dos puntos obtenidos mediante una línea recta.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Para la función $\boldsymbol{y = f(x) = 3x - 5}$.

a) Halle su dominio.

b) Realice su gráfica.

c) Determine intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.

d) Indique si la función es continua o discontinua, en caso de ser discontinua indique los puntos de discontinuidad.

Procedimiento

a. Dominio $\boldsymbol{x \in R_e}$, por ser una función polinómica.

b. Gráfica:

Seleccione dos valores de **x** (los que desee) por ejemplo x = 0 y x = 4, con estos valores se obtiene la respectiva **y** reemplazando en la función.

Haciendo una tabla de valores queda:

VALORES PARA X	$f(x) = 3x - 5.$	VALORES PARA Y	PAREJA ORDENADA
$x = 0$	$3 * (0) - 5$	-5	$(0, -5)$
$x = 4$	$3 * (4) - 5$	7	$(4, 7)$
Parejas ordenadas para representar en el plano cartesiano.			

Se ubican estos dos puntos en el plano cartesiano y se unen mediante una línea recta. La gráfica se muestra en la siguiente figura:

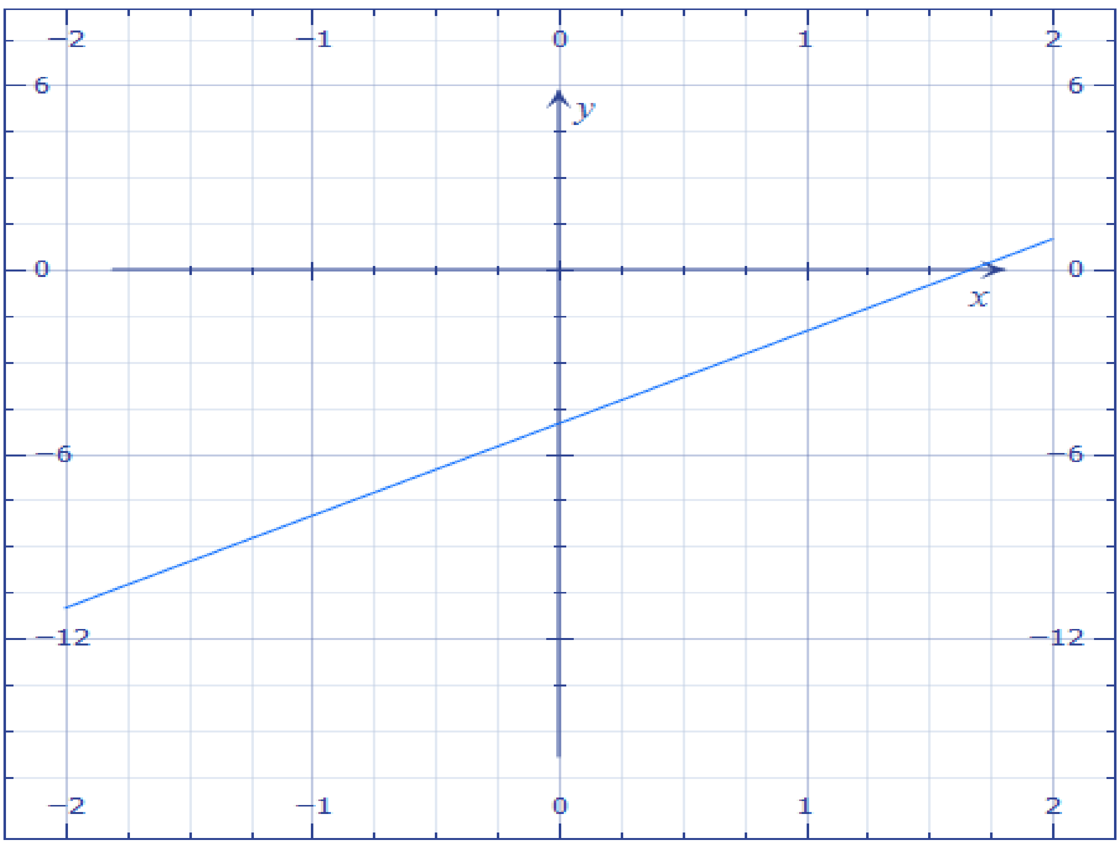


Figura: Gráfica de $y = f(x) = 3x - 5$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Las siguientes direcciones corresponden a applets en línea que permiten realizar la gráfica de funciones.

http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/NUMERICO/index.htm

Ejemplo:

Para utilizar el applet anterior para graficar:

$$y = f(x) = 3x - 5$$

Debe digitar: 3*x-5 y dar la opción graficar.

http://www.luventicus.org/articulos/03U004/index.html
Ejemplo:

Para utilizar el applet anterior para graficar

$$y = f(x) = 3x - 5$$

Debe digitar: 3x-5 y dar la opción graficar

c. Determine intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.

Observando la gráfica de la figura se puede ver que la función es siempre **creciente**.

Creciente:$(-\infty, +\infty)$

d. **Continuidad**: la función es continua en todo su dominio.

2. Para la función: $\boldsymbol{y = f(x) = -4x + 10}$

a) Halle su dominio.

b) Realice su gráfica.

c) Determine intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.

d) Indique si la función es continua o discontinua, en caso de ser discontinua indique los puntos de discontinuidad.

Procedimiento

a. Dominio $\boldsymbol{x \in R_e}$, por ser una función polinómica.
b. Gráfica:

VALORES PARA X	$\boldsymbol{f(x) = -4x + 10}$	**VALORES PARA Y**	**PAREJA ORDENADA**
$\boldsymbol{x = 2}$	$\boldsymbol{-4 * (2) + 10}$	$\boldsymbol{2}$	$\boldsymbol{(2, 2)}$
$\boldsymbol{x = 5}$	$\boldsymbol{-4 * (5) + 10}$	$\boldsymbol{-10}$	$\boldsymbol{(5, -10)}$
Parejas ordenadas para representar en el plano cartesiano.			

Si $x = 2 \quad y = f(2) = -4(2) + 10 = -8 + 10 = 2$.

Si $x = 5 \quad y = f(5) = -4(5) + 10 = -20 + 10 = -10$.

La gráfica se muestra en la siguiente figura:

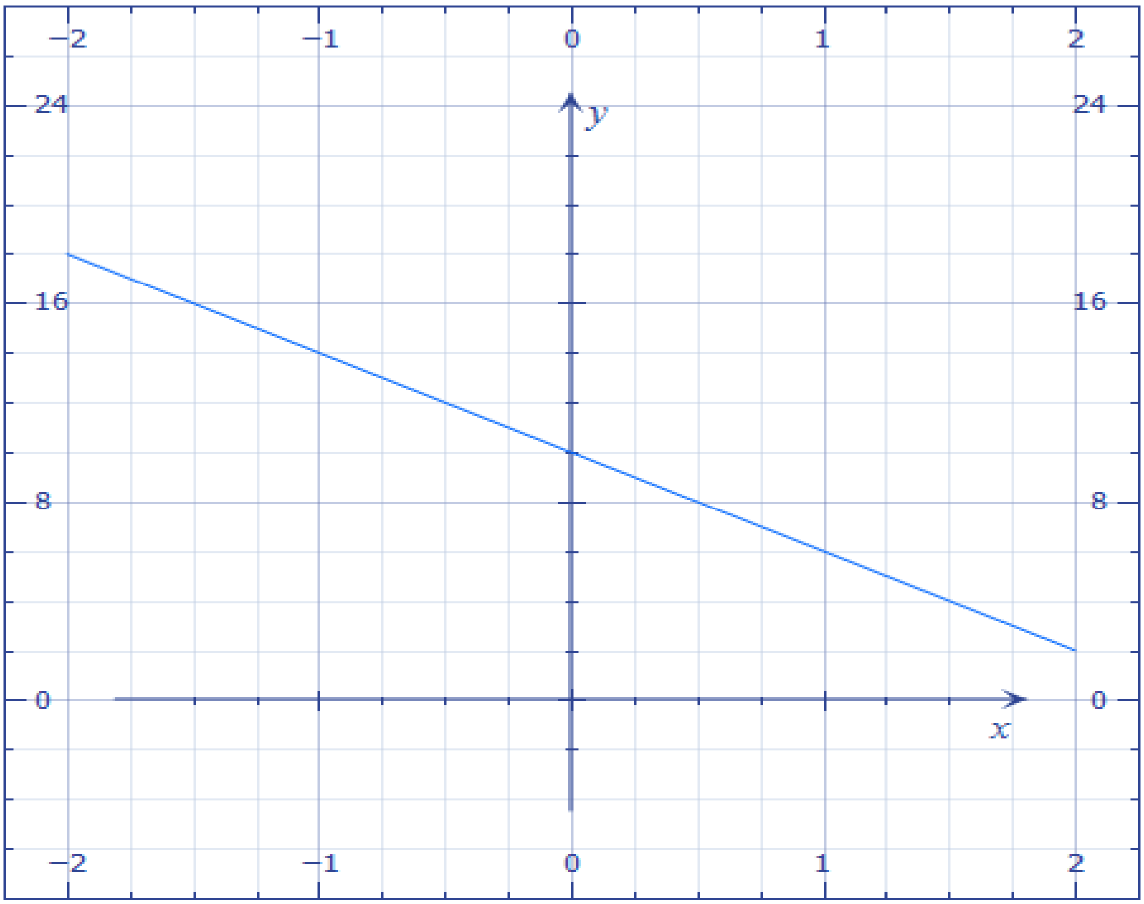


FIGURA: Gráfica de $y = f(x) = -4x + 10$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

c. Determine intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.

Como la pendiente es negativa, la función **es decreciente**, esto también se puede observar en la figura.

d. Indique si la función es continua o discontinua, en caso de ser discontinua indique los puntos de discontinuidad.

La función **es continua** en todo su dominio.

3. Para la función: $y = g(x) = 2$

a) Halle su dominio.

b) Realice su gráfica.

c) Determine intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.

d) Indique si la función es continua o discontinua, en caso de ser discontinua indique los puntos de discontinuidad.

Procedimiento

a. Dominio: $x \in R_e$, por ser una función polinómica.

b. Gráfica.

Se puede ver que para cualquier valor de **x**, la **y** siempre tendrá el mismo valor. La gráfica se ve en la siguiente figura:

x	**- 8**	**8**
y	**2**	**2**

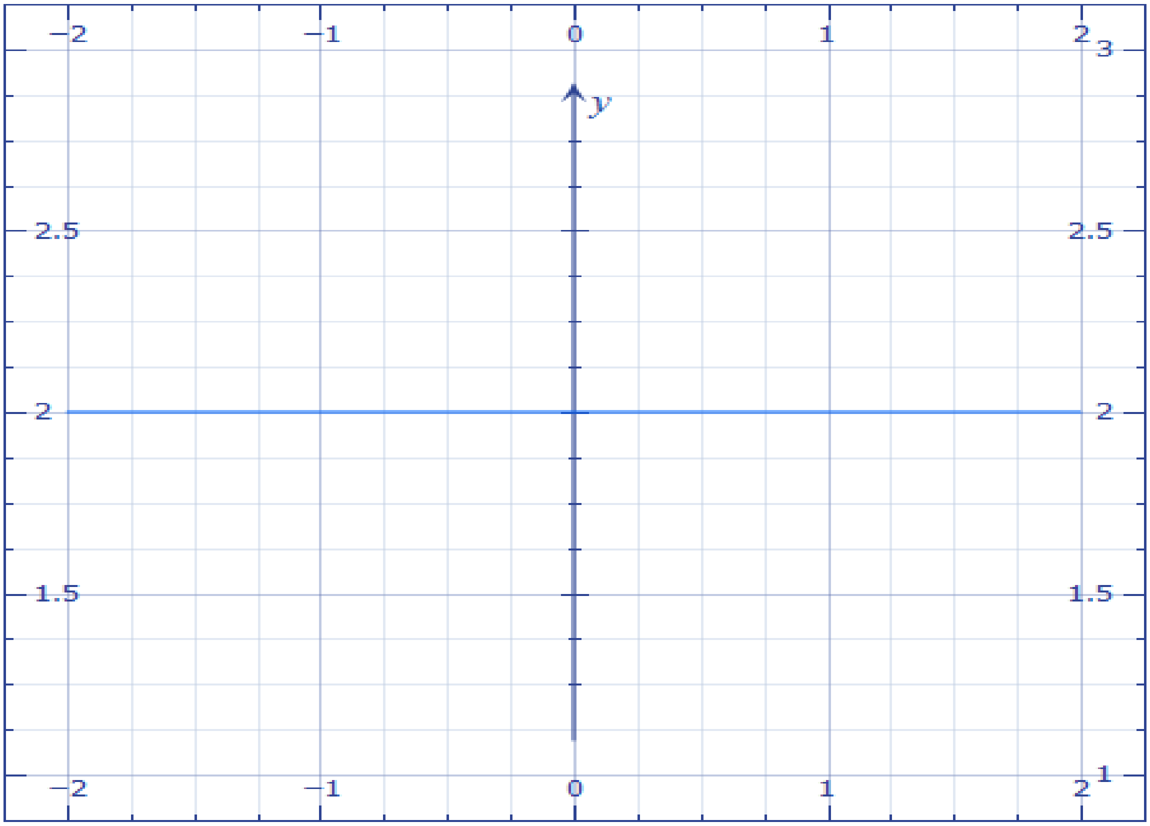


FIGURA: Gráfica de $y = g(x) = 2$
(Autor: Elkin Ceballos Gómez)

c. **Crecimiento o decrecimiento.**

Como la pendiente es igual a cero, la función no crece ni decrece, es una función constante.
No crece, no decrece, es una **recta paralela** al eje **x** que pasa por el punto $\boldsymbol{y = 2.}$

d. **Continuidad.** Es siempre continua.

Los siguientes enlaces tratan la función lineal.

http://www.youtube.com/watch?v=gCqprj3jTzQ&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=BxsVZUHCDMk&feature=related

http//www.youtube.com/watch?v=rIpnGj3Vge0&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=BxsVZUHCDMk&feature=related

FUNCIÓN CUADRÁTICA O FUNCIÓN DE SEGUNDO GRADO

Es una función de la forma:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde **a**, **b**, **c** son constantes con **a** diferente de cero$(a \neq 0)$.

- **DOMINIO:**

Por ser una función polinómica, su dominio corresponde a todos los números reales:

$$x \in R_e = (-\infty, +\infty)$$

- **GRÁFICA:**

Esta función corresponde a una **parábola** y su gráfica depende del valor de a.

a	LA PARÁBOLA	VÉRTICE	FIGURA
Positiva $(a > 0)$.	**abre hacia arriba**	**mínimo**	**9**
Negativa $(a < 0)$.	**abre hacia abajo**	**máximo**	**10**
Nota 1 : Ver figuras 9 y 10 a continuación.			
Nota 2: El vértice de una parábola es el punto en el cual la parábola pasa de crecer a decrecer o de decrecer a crecer.			

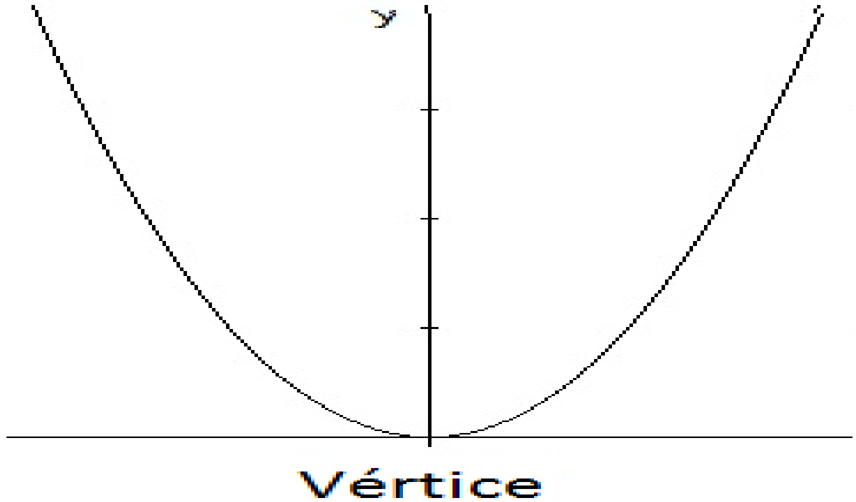


Figura 9. Parábola que abre hacia arriba
(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 11 de 2011)

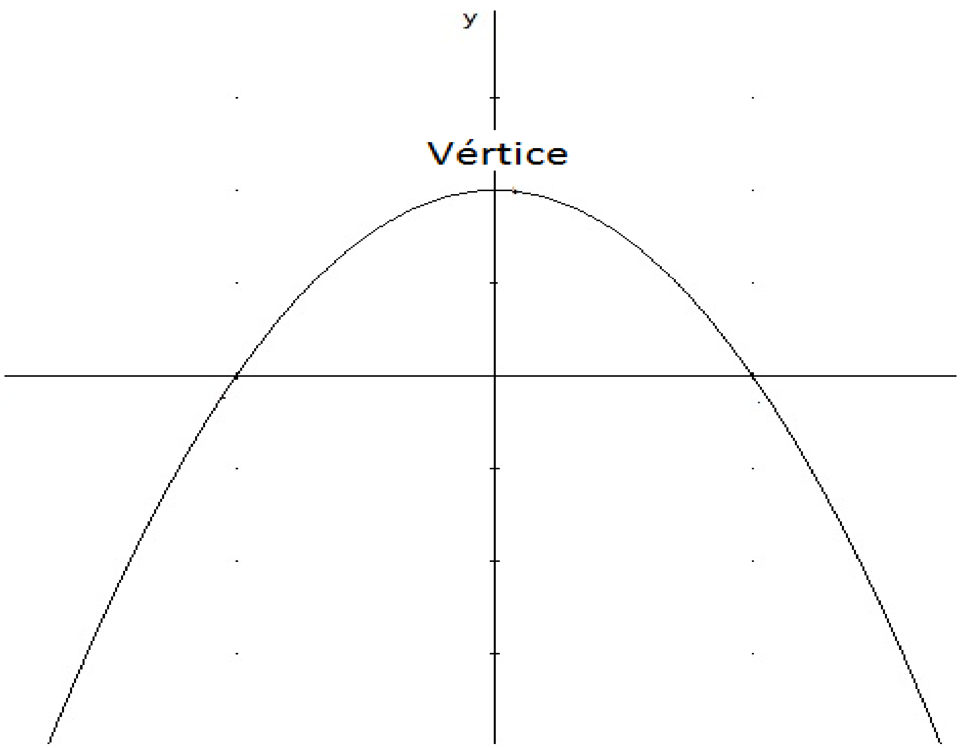


Figura 10. Parábola que abre hacia abajo.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 11 de 2011)

Para graficar una parábola se debe tener en cuenta los siguientes pasos:

1. Identificar los valores de las constantes **a**, **b**, **c**:
   a es el coeficiente de $\boldsymbol{x^2}$
   b es el coeficiente de: $\dot{\boldsymbol{x}}$
   c es el término independiente, número que no tiene variable.

2. Dependiendo del **signo** del número a se identifica hacia donde abre la parábola.

3. Encontrar las coordenadas del vértice: el vértice tiene coordenadas $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$, dónde:

$$\boxed{\boldsymbol{h = -\frac{b}{2a} \qquad y \qquad k = f(h)}}$$

Nota:

- $\boldsymbol{a > 0} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{Decrece\ (-\infty, h)} \\ \boldsymbol{Crece\ (h, +\infty)} \end{Bmatrix}$
- $\boldsymbol{a < 0} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{Crece\ (-\infty, h)} \\ \boldsymbol{Decrece: desde\ h\ hasta -\infty} \end{Bmatrix}$

4. Se pueden ubicar los interceptos.

5. <u>**Este paso es opcional**</u>: se dan valores a **x** alrededor del vértice aproximadamente 3 a la izquierda y 3 a la derecha. (Estos puntos incluyen el vértice). Obtenga la respectiva **y** reemplazando en la función.

6. Ubique los puntos anteriores en el plano cartesiano y únalos mediante una curva.

NOTA:
Una función cuadrática es siempre continua

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Para la función**:** $\boldsymbol{y = f(x) = x^2 + 6x + 8}$

Determine: dominio, grafique, determine intervalos de crecimiento y de decrecimiento, determine si la función es continua o discontinua (indique en qué punto):

Procedimiento

a. **Dominio de la función:** $\boldsymbol{D_f = x \in R_e = (-\infty, +\infty)}$**,** es una función polinómica.

b. **Gráfica**: se toman los valores de los coeficientes:

$$\boxed{\boldsymbol{a = 1, \qquad b = 6, \qquad c = 8}}$$

- Como **a** es **positiva** $(\boldsymbol{a = 1,\ 1 > 0})$. La parábola **abre hacia arriba**.

- Se determina el vértice:

$$\boldsymbol{h = -\frac{b}{2a} \rightarrow h = -\frac{6}{2(1)} \rightarrow h = -\frac{6}{2} \rightarrow h = -3}$$

$$\boldsymbol{k = f(h) = f(-3) = (-3)^2 + 6 * (-3) + 8 = 9 - 18 + 8 = -1 \rightarrow}$$
$$\boldsymbol{k = -1}$$

El vértice tiene coordenadas $(-3,-1)$

- Puntos alrededor de la **x** del vértice (o sea alrededor de **-3**):

$A\ su\ izquierda$	VÉRTICE	$A\ su\ derecha$
$-6,-5,-4$	-3	$-2,-1,0$

Se elabora la tabla con estos valores:

	X	$y=f(x)=x^2+6x+8$	y	(x,y)
IZQUIERDA	-6	$(-6)^2+6(-6)+8 =$ 36-36+8	8	$(-6,-8)$
	-5	$(-5)^2+6(-5)+8 =$ 25-30+8	3	$(-5,3)$
	-4	$(-4)^2+6(-4)+8 =$ 16-24+8	0	$(-4,0)$
VÉRTICE	-3	$(-3)^2+6(-3)+8 =$ 9-18+8	-1	$(-3,-1)$

DERECHA	-2	$(-2)^2+6(-2)+8 =$ 4-12+8	0	$(-2,0)$
	-1	$(-1)^2+6(-1)+8 =$ 1-6+8	3	$(-1,3)$
	0	$(0)^2+6(0)+8 =$ 0-0+8	8	$(0,8)$

- Ubique estos puntos en el plano cartesiano y los unimos mediante líneas.

La gráfica se muestra en la figura 11.

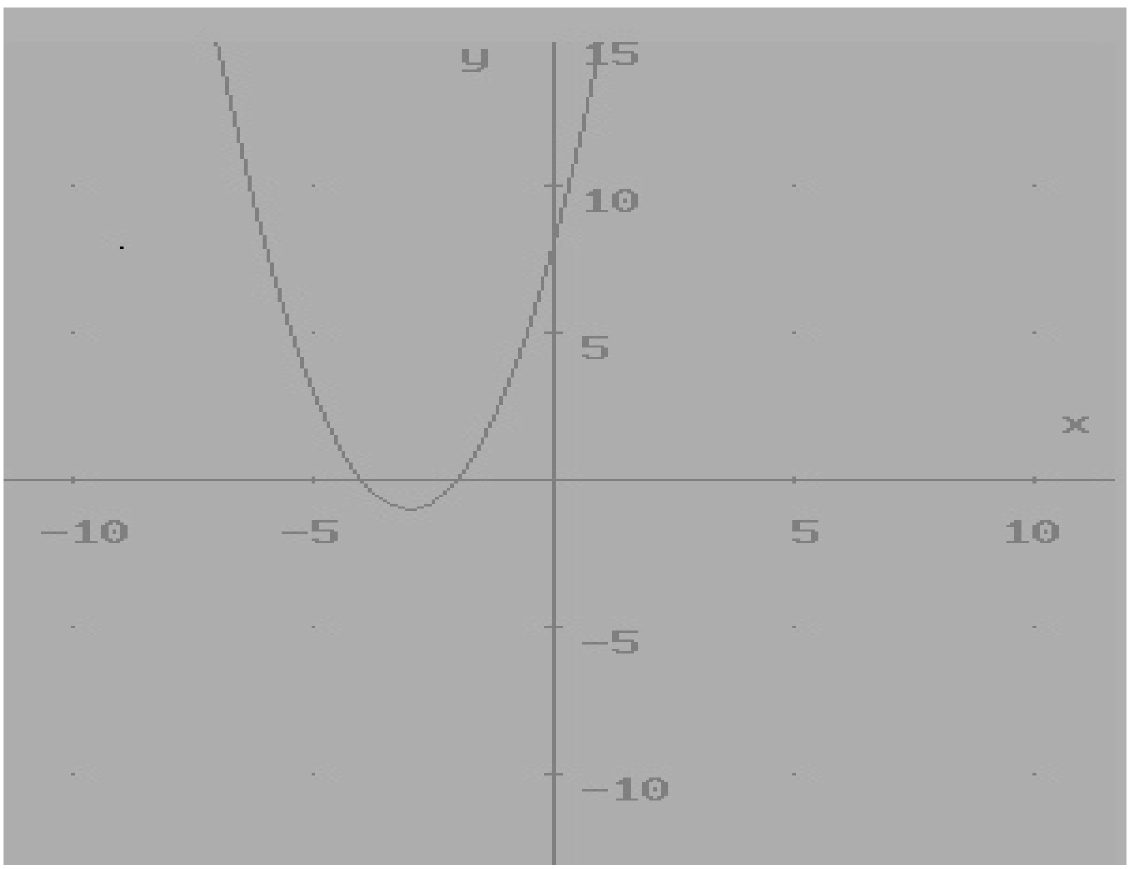


FIGURA 11. Gráfica de: $y = f(x) = x^2 + 6x + 8$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

- De la gráfica de la figura 11 se tiene que la función es:

Creciente en el intervalo**:**$(-3, +\infty)$; **Decreciente** en el intervalo: $(-\infty, -3)$

- La **función es continua**, por ser una función polinómica.

Nota: esta gráfica se puede realizar utilizando el applet de la siguiente página: http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/NUMERICO/index.htm

2. Para la función $y = \boldsymbol{f(x) = -3x^2 + 4x + 5}$

Determine: dominio, grafique, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, si la función es continua o discontinua (indique en qué punto):

PROCEDIMIENTO

a. **Dominio:** $\boldsymbol{D_f = x \epsilon R_e = (-\infty, +\infty)}$**,** es una función polinómica.
b. **Gráfica:**

$$\boxed{\boldsymbol{a = -3, \quad b = 4, \quad c = 5}}$$

- Como **a** es **negativa**$(\boldsymbol{a = -3, -3 < 0})$. La parábola **abre hacia abajo**.

- Se determina el vértice:

$$\boldsymbol{h = -\frac{b}{2a} \to h = -\frac{4}{2(-3)} \to h = -\frac{4}{-6} \to h = \frac{4}{6} \to h = \frac{2}{3}}$$

$$\boldsymbol{k = f(h) = f\left(\frac{2}{3}\right) = -3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{3}\right) + 5 \to}$$
$$\boldsymbol{k = -3 * \frac{4}{9} + \frac{8}{3} + 5 \to k = -\frac{12}{9} + \frac{8}{3} + 5}$$

$$\boldsymbol{k = -\frac{4}{3} + \frac{8}{3} + 5 \rightarrow k = \frac{-4+8+15}{3} \rightarrow k = \frac{19}{3}}$$

Las coordenadas del vértice: $\left(\frac{2}{3}, \frac{19}{3}\right)$

- Puntos alrededor de la **x** del vértice (o sea alrededor de $\frac{2}{3}$):

A su izquierda	**VÉRTICE**	***A su derecha***
$\mathbf{0, -1, -2}$	$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$	$\mathbf{1, 2, 3}$

Se elabora la tabla de valores:

	X	$y = f(x) = -3x^2 + 4x + 5$	**y**	**(x, y)**
IZQUIERDA	-2	$-3(-2)^2 + 4(-2) + 5 =$ **-12-8+5**	**-15**	$(-2, -15)$
	-1	$-3(-1)^2 + 4(-1) + 5 =$ **-3-4+5**	**-2**	$(-1, -2)$
	0	$(0)^2 + 4(0) + 5 =$ **0+0+5**	**5**	$(0, 5)$
VÉRTICE	$\frac{2}{3}$	$-3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{3}\right) + 5 =$ $-\frac{12}{9} + \frac{8}{3} + 8=$ $-\frac{4}{3} + \frac{8}{3} + 5$ $\frac{-4+8+15}{3}$	$\frac{19}{3}$	$\left(\frac{2}{3}, \frac{19}{3}\right)$

DERECHA	$\mathbf{1}$	$-\mathbf{3(1)^2+4(1)+5=}$ **-3+4+5**	**6**	$\mathbf{(1,6)}$
	$\mathbf{2}$	$-\mathbf{3(2)^2+4(2)+5=}$ **-12+8+5**	**1**	$\mathbf{(2,1)}$
	$\mathbf{3}$	$-\mathbf{3(3)^2+4(3)+5=}$ **-27+12+5**	**-10**	$\mathbf{(3,-10)}$

Se ubican estos puntos en el plano cartesiano y se unen con una curva.

La gráfica es la mostrada en la figura 12

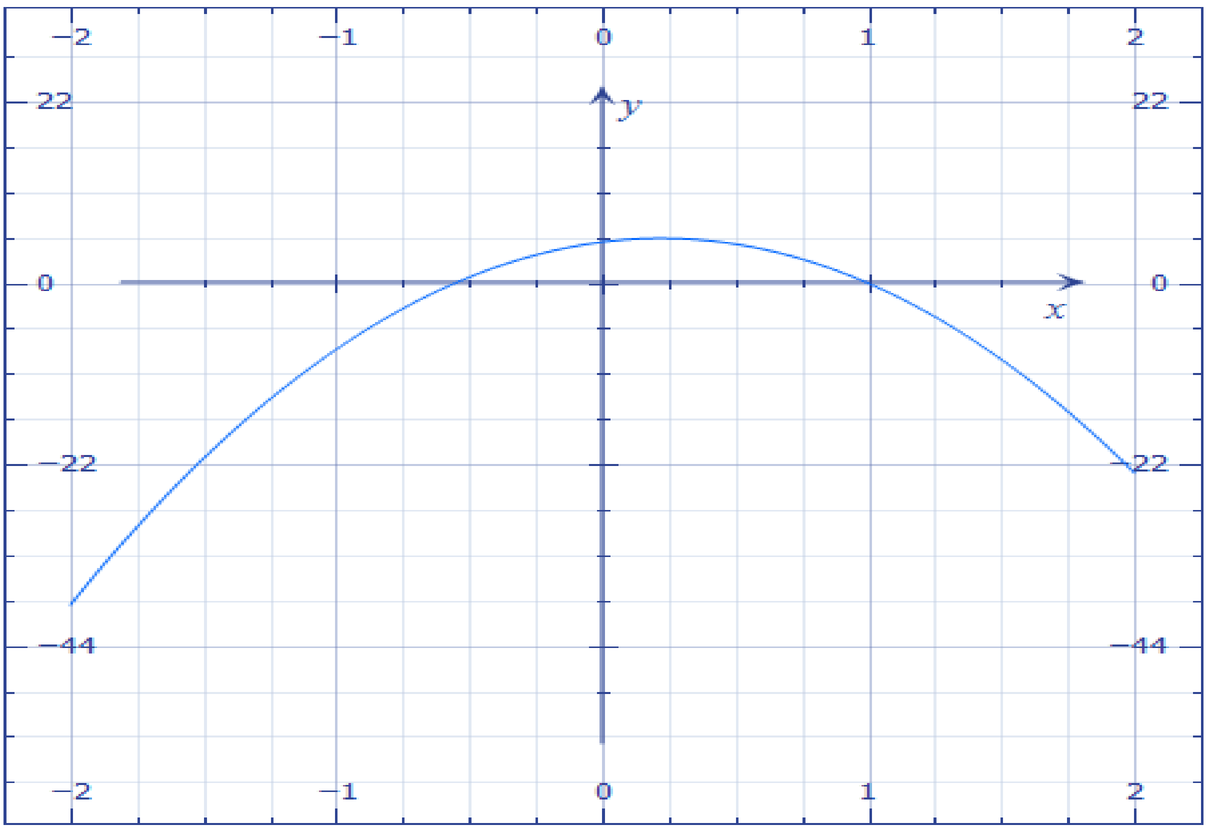


FIGURA 12 Gráfica de: $y=f(x)=-3x^2+4x+5$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

- De la gráfica de la figura 12 se tiene que la función es:

Creciente en el intervalo: $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$; **Decreciente** en el intervalo: $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$

- La **función es continua**, por ser una función polinómica.

3. : http://www.youtube.com/watch?v=0pUnHF1FJ2s&feature=related

4. : http://www.youtube.com/watch?v=IC4ZV4du_Jg&feature=related

5. : http://www.youtube.com/watch?v=PDFZm6L_ge0&feature=fvw

6. : http://www.youtube.com/watch?v=mVodIKYyRF4&feature=related

Enlaces función cuadrática

http://www.youtube.com/watch?v=eIq654T4mcs&feature=related

http://www.youtube.com/watch?v=oi3inrtM7H0&feature=related

Función cúbica:

Es una función de la forma:

$$y = f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Con: **A, B, C, D** constantes y $\mathbf{A \neq 0}$.
Para graficar estas funciones y funciones de grado superior a tres, se utilizan otras técnicas que se verán más adelante.

Pero se puede utilizar el applet de la página http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/NUMERICO/index.htm para realizar estas gráficas.

Como **ejercicio de entrenamiento** intente realizar con el applet la gráfica de las siguientes funciones:

$$f(x) = 3x^3 - 10x^2 + 2x + 5$$

$$g(x) = x^4 + 2x^3 - 15x^2 + x - 3$$

Función Racional

Es una función de la forma:

$$\boldsymbol{y = \frac{f(x)}{g(x)}, con\ g(x) \neq 0}$$

- **La función racional**: es la función cociente de dos funciones polinómicas.

Se identifica porque la función tiene **x** en el denominador.

- **DOMINIO:**

Están formados por todos los números reales menos las asíntotas verticales y/o huecos de la función.

Nota: una **asíntota vertical** es un valor de **x** donde el **denominador se hace cero.**

Un hueco es un valor de **x** donde el numerador y el denominador son iguales a cero.
Para determinar las asíntotas verticales y/o los huecos de una función racional (si tiene) se procede de la siguiente manera:

1. Se iguala el denominador a cero.
2. Se soluciona la ecuación resultante. Si la ecuación no tiene solución, quiere decir que la función racional no tiene ni asíntotas verticales ni huecos.
3. Los valores de **x** obtenidos se deben eliminar del dominio de la función.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Determine el dominio de cada una de las siguientes funciones:

1. $\boldsymbol{y = w(x) = \frac{5x}{2x-5}}$

Procedimiento

a. Se iguala el denominador a cero y se despeja el valor de **x:**

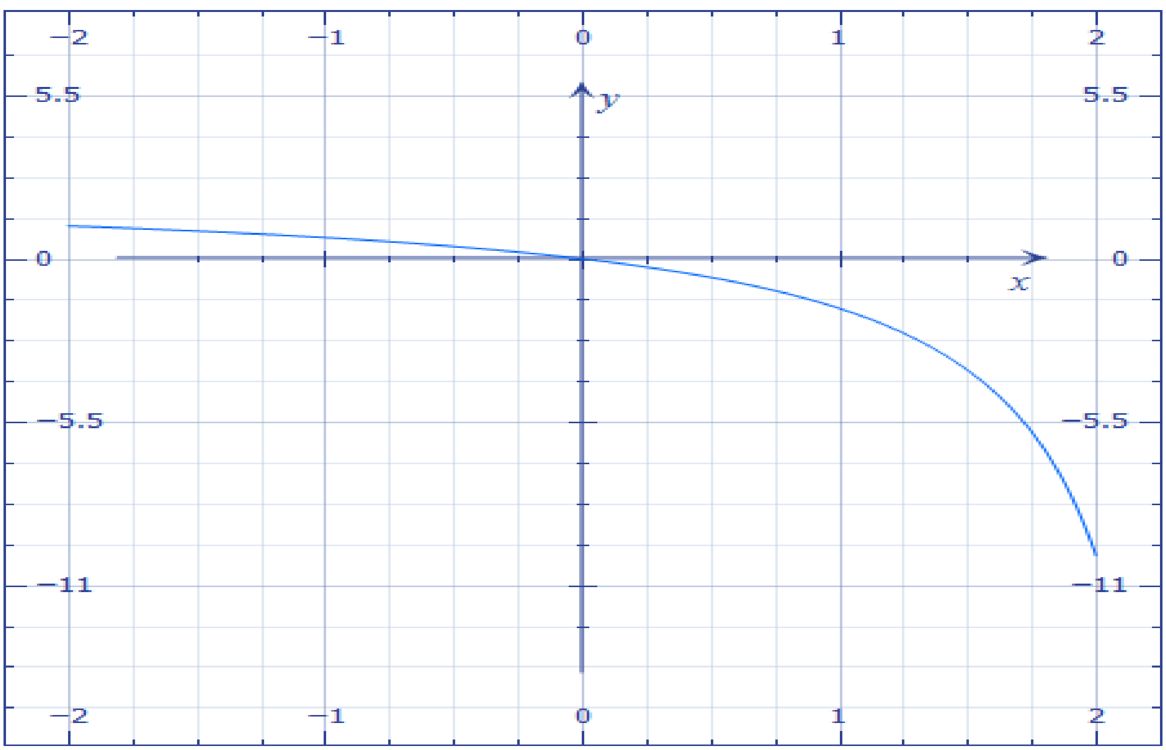
$$\boldsymbol{2x - 5 = 0 \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{2}}$$

$x = \frac{5}{2}$ **es una asíntota vertical**; se debe excluir del dominio.

b. El dominio de la función se puede expresar de la siguiente forma:

- $D_f = R_e - \left\{\frac{5}{2}\right\}$
- $D_f = \left(-\infty, \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$, un intervalo abierto en 5/2. Por lo tanto este no se incluye.
- $D_f : x \neq \frac{5}{2}$

c. Su gráfica es la siguiente:



2. $\boldsymbol{y = f(x) = \frac{4x-7}{2x^2-x-6}}$

Procedimiento

a. Se iguala el denominador a cero y se despeja el valor de **x,** en este caso se debe factorizar e igualar cada factor a cero:

$$\boldsymbol{2x^2 - x - 6 = 0}$$

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga presente: para factorizar un polinomio de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$, se debe multiplicar el polinomio por el coeficiente **a** y dividir por el mismo.

$\boldsymbol{2x^2 - x - 6 = 0}$ en este caso multiplicamos el polinomio por 2 y dividimos por 2:

$$\boldsymbol{* \frac{2}{2}(2x^2 - x - 6) = 0 \rightarrow \frac{4x^2 - 1(2x) - 12}{2} = 0 \rightarrow}$$

$\boldsymbol{\frac{(2x-4)(2x+3)}{2} = 0}$ **,** sacando el factor común **2** en el primer paréntesis, tenemos:

$\boldsymbol{\frac{2(x-2)(2x+3)}{2} = 0,}$ simplificando:

$\boldsymbol{(x-2)(2x+3) = 0,}$ igualando cada factor a cero:

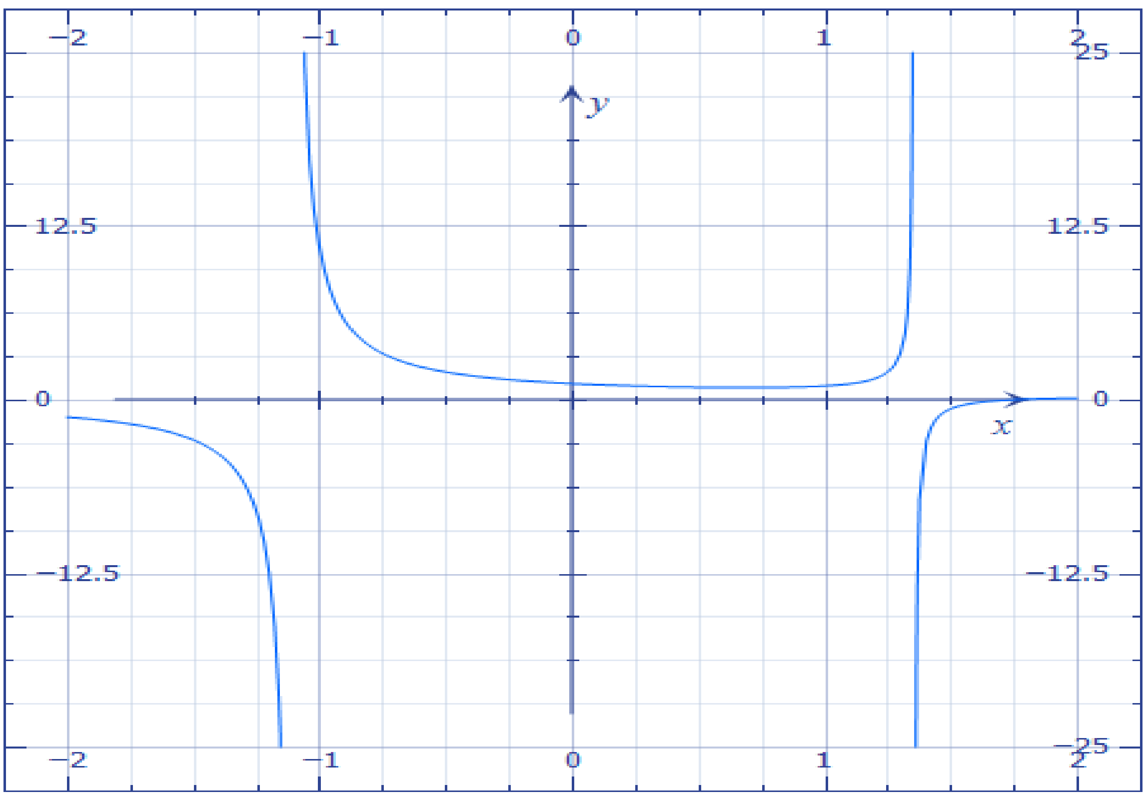
$$\boldsymbol{(x-2) = 0 \rightarrow x = 2}$$
$$\boldsymbol{(2x+3) = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2}}$$

b. El Dominio de la función sería:

$\boldsymbol{D_f = R_e - \left\{2, -\frac{3}{2}\right\}}$, también se puede expresar de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{D_f: x \neq 2 \ y \ x \neq -\frac{3}{2}}$$

c. Su gráfica es la siguiente:



3. $\boldsymbol{y = f(x) = \frac{3}{x^2-1}}$

PISTA DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria: para factorizar un polinomio de la forma $\boldsymbol{x^2-1}$ se procede como una diferencia de cuadrados: $\boldsymbol{x^2-y^2=(x+y)(x-y)}$

Procedimiento

a. Se factoriza el denominador de la fracción $\boldsymbol{x^2-1}$ y se iguala cada factor a cero:

$$\boldsymbol{x^2-1=0 \rightarrow (x+1)*(x-1)=0}$$

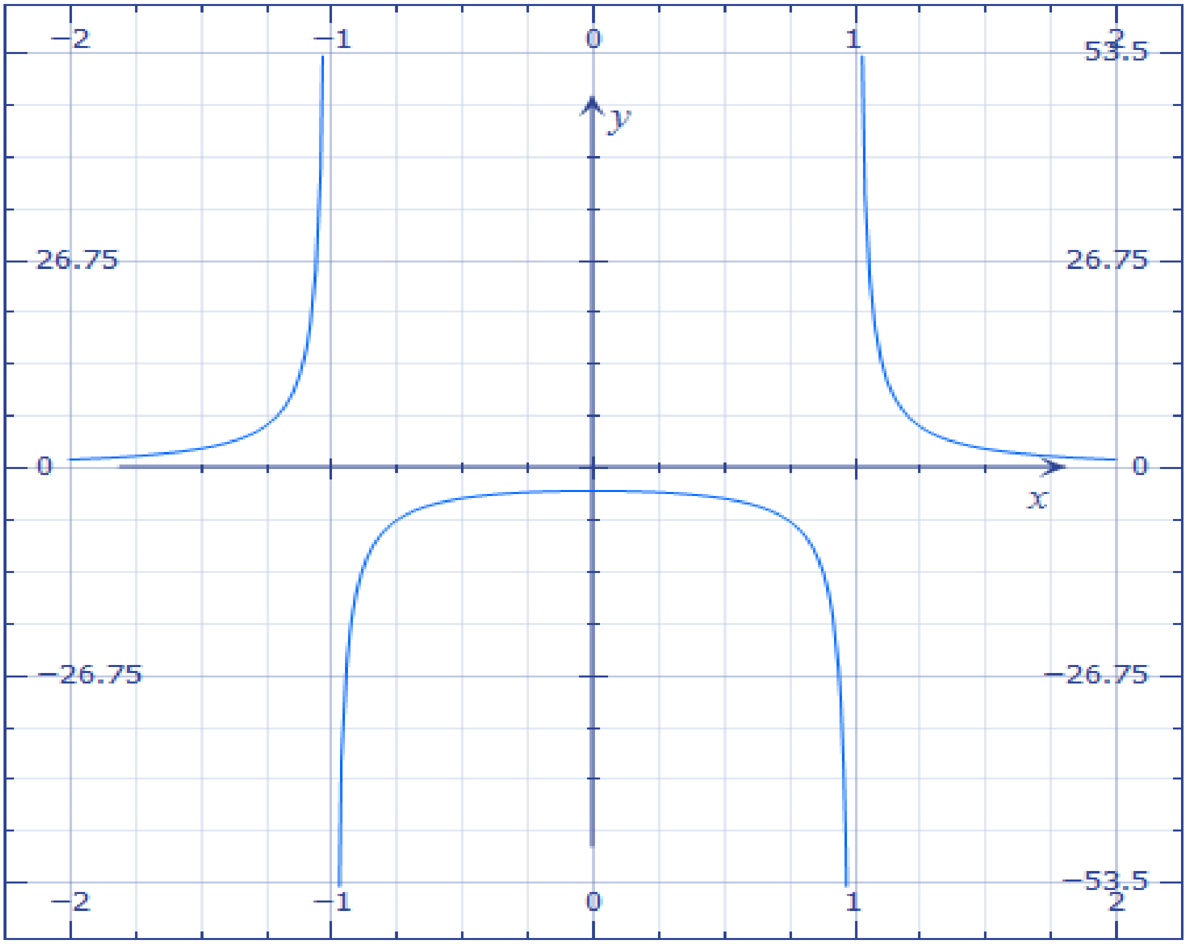
$$\boldsymbol{(x+1)=0 \rightarrow x \neq -1}$$

$$\boldsymbol{(x-1)=0 \rightarrow x \neq 1}$$

b. El Dominio de la función sería:

$\boldsymbol{D_f=R_e-\{1,-1\}}$**,** también se puede expresar de la siguiente forma
$\boldsymbol{D_f: x \neq 1\ y\ x \neq -1}$

c. Su gráfica es la siguiente:



4. $y = k(x) = \frac{3x^2-6x+7}{x^2+3x+3}$

Procedimiento

a. Se factoriza el denominador de la fracción $x^2 + 3x + 3$ y se iguala cada factor a cero:

No es posible factorizarlo, se utiliza entonces la fórmula general para buscar las posibles raíces, esto es:

PISTA DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta: La fórmula general está dada **por:**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a * c}}{2a}$$

Reemplazando, tenemos:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1) * (3)}}{2(1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

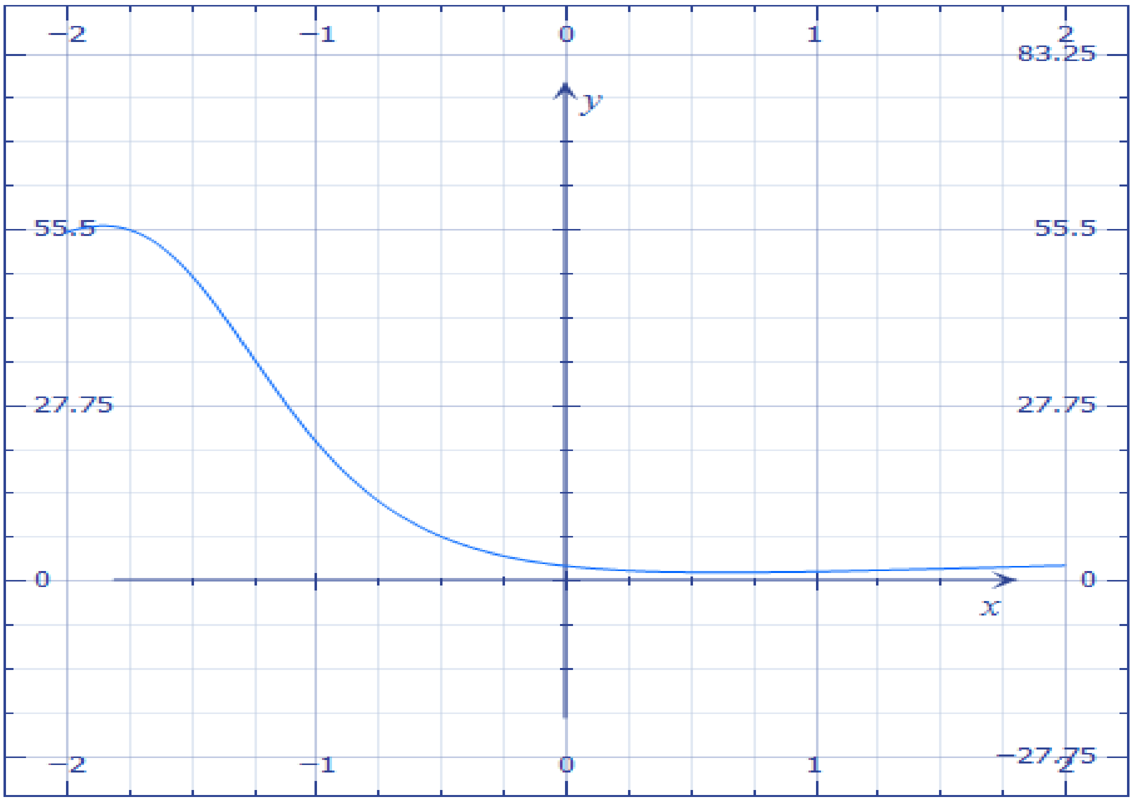
Pero $\sqrt{-3}$ **es un número imaginario,** por lo tanto esta ecuación no tiene solución en los números Reales, quiere decir que la función no tiene ni asíntotas verticales ni huecos, así qué, el dominio son todos los números reales.

$$D_f : x \in R_e$$

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga presente: una función racional presenta discontinuidad en cada asíntota vertical y en cada hueco.

b. Su gráfica es la siguiente:



5. http://www.youtube.com/watch?v=opcIlP0qGTI&feature=related
6. http://www.youtube.com/watch?v=8eAfMqRXwbY

- **Gráfica de funciones racionales**

Nota: se recomienda hacer estas gráficas utilizando algún applet en línea.

Procedimiento:

1. Se determina el dominio de la función.
2. Se asignan a **"x"** valores que se encuentren a la izquierda y a la derecha de cada asíntota vertical y/o hueco. Por cada asíntota vertical y/o hueco que haya, asigne como mínimo cinco valores a su izquierda y cinco a su derecha. **Tenga en cuenta que a "x" no se le pueden asignar ni los huecos ni las asíntotas verticales.**
3. Se obtiene la respectiva **y** reemplazando en la función.
4. Se ubican estos puntos en el plano cartesiano.
5. Se ubican las asíntotas verticales en el plano cartesiano. Las asíntotas verticales son líneas rectas verticales que se trazan por cada valor de **x** que **haga cero el denominador** de la función. Las asíntotas verticales dividen el plano cartesiano de tal manera que los puntos que se encuentren a la derecha de una asíntota vertical no se pueden unir con los puntos que se encuentren a su izquierda.
6. Ubique las asíntotas horizontales. Para ello identifique cual es la "x" de mayor exponente en la fracción y divida el coeficiente del denominador entre el coeficiente del numerador, el valor obtenido corresponde a la **"y"** y es la asíntota horizontal. Trace una recta horizontal en **"y"** igual a dicho valor.
7. Una los puntos resultantes con líneas curvas; pero dichas líneas no pueden tocar las asíntotas.
8. Si se quiere una gráfica mejor, se puede ubicar también los interceptos.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Para la función: $\boldsymbol{y = f(x) = \frac{5x}{x+6}}$

a. Determine el dominio.
b. Determine intersecciones con los ejes.
c. Grafique.
d. Determine intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.
e. Determine si la función es continua o discontinua, en caso de que sea discontinua, indique los puntos de discontinuidad.

Procedimiento

a. **Dominio:** como es una función racional se toma el denominador, se iguala a cero y se despeja la **x.**

$x+6=0 \rightarrow x=-6$ **, entonces:**

$D_f = x\epsilon\, R_e - \{-6\}$

b. **Gráfica:** para graficar se debe dar valores a **x** a la izquierda y a la derecha de menos seis y reemplazando en la función se obtiene la respectiva **y**. Los valores se pueden ver en la siguiente tabla:

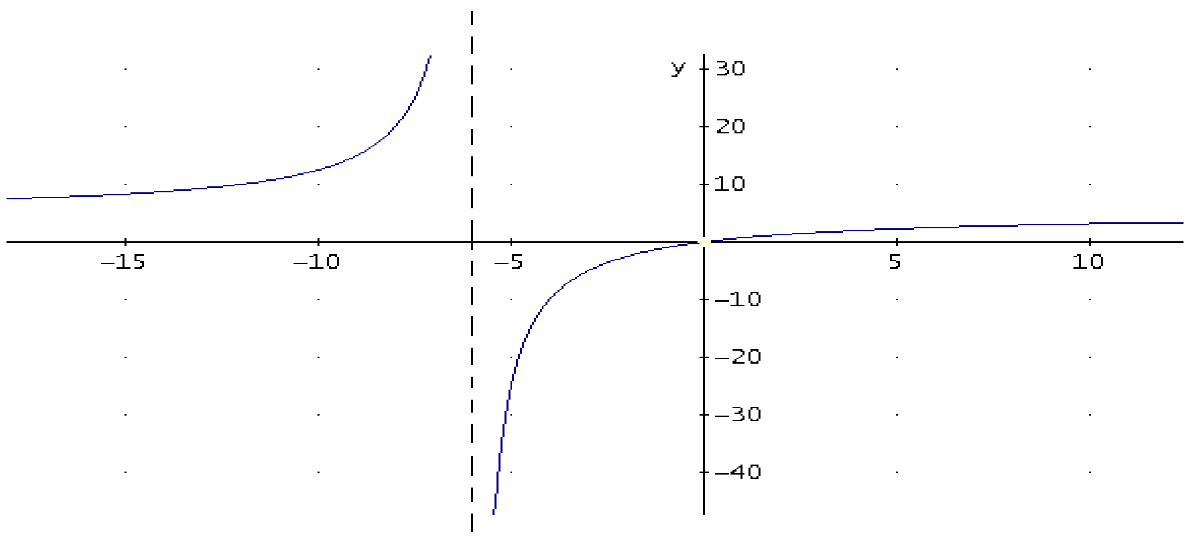
	X	$y=f(x)=\dfrac{5x}{x+6}$	Y	(X,Y)
IZQUIERDA	-11	$\dfrac{5x}{x+6}=\dfrac{5(-11)}{-11+6}$	11	$(-11,11)$
	-10	$\dfrac{5x}{x+6}=\dfrac{5(-10)}{-10+6}$	12.5	$(-10,12.5)$
	-9	$\dfrac{5x}{x+6}=\dfrac{5(-9)}{-9+6}$	15	$(-9,15)$
	-8	$\dfrac{5x}{x+6}=\dfrac{5(-8)}{-8+6}$	20	$(-8,20)$
	-7	$\dfrac{5x}{x+6}=\dfrac{5(-7)}{-7+6}$	35	$(-7,35)$
ASÍNTOTA	-6	$\dfrac{5x}{x+6}=\dfrac{5(-6)}{-6+6}$	∞	$(Asíntota\ vertical)$
DERE	-5	$\dfrac{5x}{x+6}=\dfrac{5(-5)}{-5+6}$	-25	$(-5,-25)$
	-4	$\dfrac{5x}{x+6}=\dfrac{5(-4)}{-4+6}$	-10	$(-4,-10)$

C				
H	-3	$\frac{5x}{x+6}=\frac{5(-3)}{-3+6}$	-5	$(-3,-5)$
A	-2	$\frac{5x}{x+6}=\frac{5(-2)}{-2+6}$	-2.5	$(-2,2.5)$
	-1	$\frac{5x}{x+6}=\frac{5(-1)}{-1+6}$	-1	$(-1,-1)$

Para hallar la asíntota horizontal, la **"x"** de mayor exponente es **"x elevada a la potencia 1"**. El coeficiente de **"x" en el numerador es 5 y el coeficiente de "x" en el denominador es 1**, se dividen, entonces la asíntota horizontal es: $\boldsymbol{y} = \frac{5}{1} = 5$

$$\boldsymbol{y = 5 \ \ As\acute{\imath}ntota\ horizontal}$$

La gráfica de esta función tiene la forma mostrada en la figura 13.



$$x = -6$$

FIGURA 13. Gráfica de: $y = f(x) = \dfrac{5x}{x+6}$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

c. Crecimiento:

Crece:$(-\infty, -6)$ y $(-6, +\infty)$

d. La función es discontinua en: $x = -6$

2. Para la función: $y = f(x) = \frac{100x}{x^2-10x+9}$

a. Determine el dominio.
b. Determine intersecciones con los ejes.
c. Grafique.
d. Determine intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.
e. Determine si la función es continua o discontinua, en caso de que sea discontinua, indique los puntos de discontinuidad.

Procedimiento

a. Dominio:

Como es una función racional se toma el denominador, se iguala a cero y luego se despeja la **x**:

- Factorizando, tenemos:

$$x^2 - 10x + 9 = 0 \rightarrow (x-9)(x-1) = 0$$

- Se iguala cada factor a cero y se despeja **x**:

$$(x-9) = 0 \rightarrow x = 9$$

$$(x-1) = 0 \rightarrow x = 1$$

- Por lo tanto, el dominio de la función es:

$$D_f: x\epsilon\ R_e - \{1, 9\}$$

Se lee: el dominio de la función son los números reales menos el **uno (1)** y el **nueve (9).**

b. Interceptos con los ejes cartesianos:

1. Intercepto con el eje **x**: se hace $\boldsymbol{y = 0}$

$$\boldsymbol{0 = \frac{100x}{x^2-10x+9} \rightarrow 0(x^2 - 10x + 9) = 100x \rightarrow 100x = 0 \rightarrow}$$

$$\boldsymbol{x = 0}$$

c. El intercepto con el eje **x** es el punto de coordenadas: $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$

d.
2. Intercepto con el eje **y**: se hace $\boldsymbol{x = 0}$

$$\boldsymbol{y = \frac{100x}{x^2 - 10x + 9} \rightarrow y = \frac{100\,(0)}{0^2 - 10\,(0) + 9} = \frac{0}{9} = 0}$$

$$\boldsymbol{y = 0}$$

El intercepto con el eje **y**es el punto de coordenadas: $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$

e. **Gráfica:**

1. Se determina **la asíntota horizontal**. La **x** de mayor exponente es $\boldsymbol{x^2}$**.**

- En el numerador tiene exponente **cero** (no hay x^2 en el numerador),
- En el denominador su exponente es **1**.

Por lo tanto, la **asíntota horizontal** es: $\boldsymbol{y = \frac{0}{1} = 0}$

$$\boldsymbol{y = 0\ asíntota\ horizontal}$$

2. Se dan valores a la izquierda y a la derecha de **x = 1**, y a la izquierda y a la derecha de **x = 9**

Los resultados se observan en las siguientes tablas: **x = 1**

	X	$y = f(x) = \frac{100x}{x^2 - 10x + 9}$	Y	(x, y)
IZQUIERDA	-4	$\frac{100(-4)}{(-4)^2 - 10(-4) + 9}$	-6.15	$(-4, -6.15)$
	-3	$\frac{100(-3)}{(-3)^2 - 10(-3) + 9}$	-6.25	$(-3, -6.25)$
	-2	$\frac{100(-2)}{(-2)^2 - 10(-2) + 9}$	-6.06	$(-2, -6.06)$
	-1	$\frac{100(-1)}{(-1)^2 - 10(-1) + 9}$	-5	$(-1, -5)$
	0	$\frac{100(0)}{(0)^2 - 10(0) + 9}$	0	$(0, 0)$
ASÍNTOTA VERTICAL	1	$\frac{100(1)}{(1)^2 - 10(1) + 9} = \frac{100}{0}$	**Asíntota**	$(asíntota)$
DERECHA	2	$\frac{100(2)}{(2)^2 - 10(2) + 9}$	-28,57	$(2, -28.57)$
	3	$\frac{100(3)}{(3)^2 - 10(3) + 9}$	-25	$(3, -25)$
	4	$\frac{100(4)}{(4)^2 - 10(4) + 9}$	-26,66	$(4, -26.66)$
	5	$\frac{100(5)}{(5)^2 - 10(5) + 9}$	-31,25	$(5, -31.25)$

x = 9

	X	$y = f(x) = \frac{100x}{x^2 - 10x + 9}$	Y	(x, y)
I Z Q U I E R D A	4	$\frac{100(4)}{(4)^2 - 10(4) + 9}$	-26,66	$(4, 26.66)$
	5	$\frac{100(5)}{(5)^2 - 10(5) + 9}$	-31,25	$(5, -31.25)$
	6	$\frac{100(6)}{(6)^2 - 10(6) + 9}$	-40	$(6, -40)$
	7	$\frac{100(7)}{(7)^2 - 10(7) + 9}$	-58,33	$(7, -58.33)$
	8	$\frac{100(8)}{(8)^2 - 10(8) + 9}$	-114,28	$(8, -114.28)$
ASÍNTOTA VERTICAL	9	$\frac{100(9)}{(9)^2 - 10(9) + 9} = \frac{900}{0}$	Asíntota	$(asíntota)$
D E R E C H A	10	$\frac{100(10)}{(10)^2 - 10(10) + 9}$	111,11	$(10, 111.11)$
	11	$\frac{100(11)}{(11)^2 - 10(11) + 9}$	55	$(11, 55)$
	12	$\frac{100(12)}{(12)^2 - 10(12) + 9}$	36,36	$(12, 36.36)$
	13	$\frac{100(13)}{(13)^2 - 10(13) + 9}$	27,08	$(13, 27.08)$
	14	$\frac{100(14)}{(14)^2 - 10(14) + 9}$	21,53	$(14, 21.53)$

La gráfica se muestra en la figura 14.

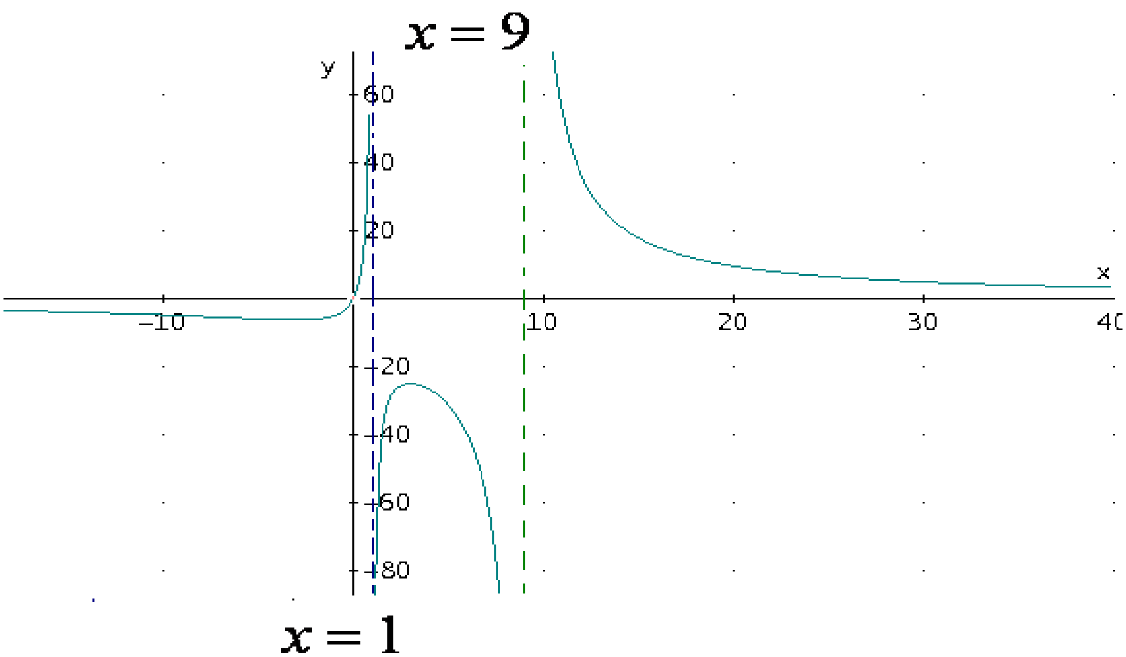


FIGURA 14 Gráfica de $y = f(x) = \dfrac{100x}{x^2 - 10x + 9}$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

d. **Crecimiento:**

- La función **decrece:** $(-\infty, -3)$, $(3, 9)$ y $(9, +\infty)$
- La función **crece**: $(-3, 1)$, $(1, 3)$

e. **Continuidad:**

La función es discontinua en: $x = 1$ y $x = 9$

PISTA DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria: si la función racional a graficar tiene como dominio todos los reales (quiere decir que no tiene polos) en este caso para hacer su gráfica podemos dar valor a **x** partiendo del **cero** (valores a la izquierda y a la derecha del cero).
Se asigna a **"x"** el cero cinco valores a su izquierda y cinco valores a su derecha.

3. Para la función cuya gráfica se muestra en la figura 15. Indique:

a. Intervalos en los cuales la función es continua.
b. La ecuación de cada asíntota vertical y de cada asíntota horizontal.
c. Intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.

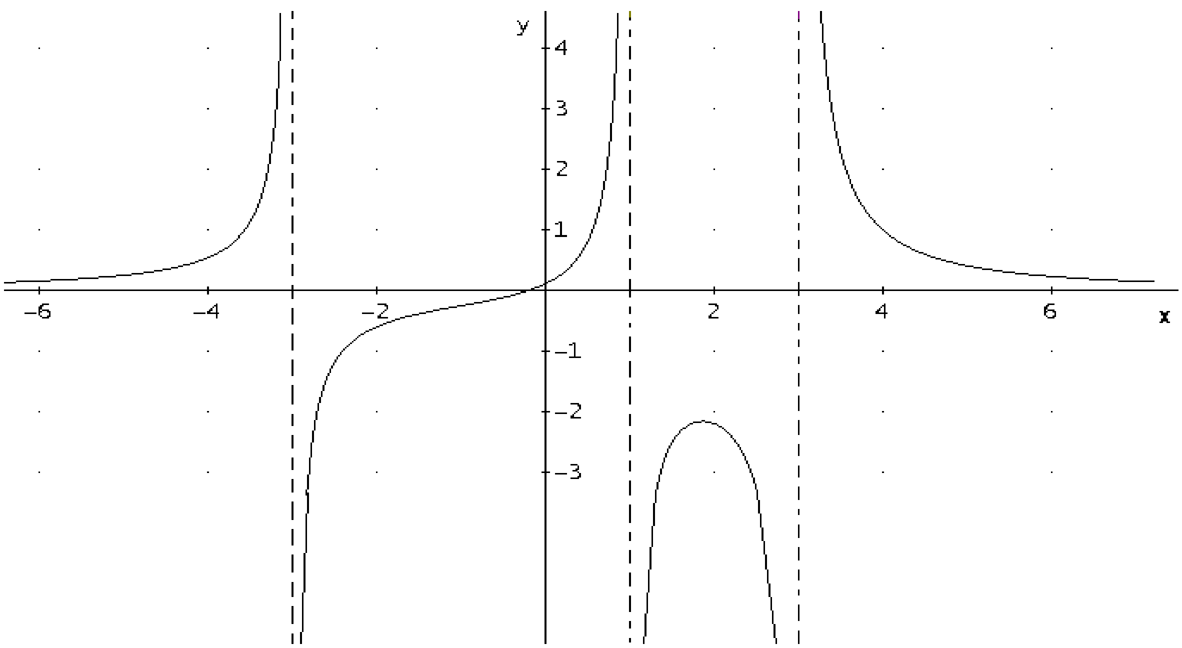


Figura 15: Gráfica de la función $y = f(x)$
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Procedimiento

Para $\boldsymbol{y = f(x)}$:

a. La función es continua en : $(-\infty, -3), (-3, 1), (1, 3), (3, \infty)$
b. **Asíntotas verticales:** $\boldsymbol{x = -3, x = 1 \wedge x = 3}$
Asíntotas horizontales: $\boldsymbol{y = 0}$
c. **Crece**: $(-\infty, -3), (-3, 1) \wedge (1, 2]$
Decrece: $[2, 3) \wedge (3, \infty)$

4. Para la función $\boldsymbol{y = f(x) = \frac{5-9x^2}{2x^2+3x-20}}$

Determine:
a. Dominio.
b. La ecuación de las asíntotas.
c. Indique en que intervalos la función es continua.
d. Halle: $f\left(-\frac{3}{5}\right)$

Procedimiento

a. Dominio:

$2x^2 + 3x - 20 = 0$, se factoriza

$$\frac{2(2x^2 + 3x - 20)}{2} = 0, se\ multiplica\ y\ se\ divide\ por\ 2\ (coeficiente\ de\ x^2)$$

$\boldsymbol{\frac{4x^2+3(2x)-40}{2} = 0 \rightarrow \frac{(2x+8)*(2x-5)}{2} = 0 \rightarrow \frac{2(x+4)*(2x-5)}{2}}$, simplificando, tenemos:

$\boldsymbol{(x+4)*(2x-5) = 0}$

Igualando acero cada factor y despejando **x**:

$\boldsymbol{(x+4) = 0 \rightarrow x = -4}$

$$\boldsymbol{(2x-5) = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}}$$

El Dominio es:

$$\boldsymbol{x \neq -4 \wedge x \neq \frac{5}{2}}$$

- De este dominio se determinan: **Las Asíntotas verticales**:

$\boldsymbol{x = -4}$, $\boldsymbol{x = \frac{5}{2}}$

- De los coeficientes de la mayor potencia de x se determinan **las asíntotas horizontales**:

Recuerde que el mayor exponente de **x**, tanto en el numerador (coeficiente **-9**) como en el denominador (coeficiente **2**), es **2**, por lo tanto la asíntota horizontal es $\boldsymbol{y = -\frac{9}{2}}$

f. La continuidad de la función se da en los intervalos: $(-\infty, \boldsymbol{-4}), \left(\boldsymbol{-4}, \frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{2}}\right), \left(\frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{2}}, \infty\right)$

g. $f\left(-\frac{3}{5}\right)$

$$f\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{5 - 9\left(-\frac{3}{5}\right)^2}{2\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{5}\right) - 20} = \frac{5 - 9\left(\frac{9}{25}\right)}{2\left(\frac{9}{25}\right) - \frac{9}{5} - 20} = \frac{5 - \frac{81}{25}}{\frac{18}{25} - \frac{9}{5} - 20} = \frac{\frac{125-81}{25}}{\frac{18-45-500}{25}}$$

$$= \frac{\frac{44}{25}}{-\frac{527}{25}} = -\frac{44 * 25}{527 * 25} = -\frac{44}{527}$$

$$\boldsymbol{f\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{44}{527}}$$

Enlaces función racional

http://www.youtube.com/watch?v=adxHYh-0OHM&feature=fvsr

FUNCIÓN IRRACIONAL

Es una función de la forma:

$$y = f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$$

Llamamos función irracional a aquella en la que la variable aparece elevada a exponentes racionales no enteros.
Se identifica porque tiene variable dentro de un radical.

DOMINIO: se presentan dos casos:

Caso #1:
Si la **raíz es impar** el dominio corresponde a todos los números reales:
Dom. $\boldsymbol{x \in R_e}$

Caso #2:
Si la **raíz es par**, se debe garantizar que los valores que se le asignen a **"x"** hagan positivo todo dentro de la raíz, es decir que la cantidad subradical sea mayor o igual que cero:
$(\boldsymbol{g(x) \geq 0})$

Procedimiento:

1. Plantee la inecuación $\boldsymbol{g(x) \geq 0}$.
2. Se soluciona la inecuación.
3. La solución de la inecuación es el dominio de la función irracional.
4. Si la inecuación planteada no tiene solución o si toda dentro de la raíz par es positivo, quiere decir que el dominio de la función es todos los reales: $\boldsymbol{D_f = x \in R_e}$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO:

1. Determine el dominio de: $\boldsymbol{y = f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 5}}$

Procedimiento

Es una inecuación cuadrática.

PASOS:

1. Todo lo que está dentro de la raíz debe ser mayor o igual que cero, se debe plantear la inecuación: $\boldsymbol{x^2 + 2x - 15 \geq 0}$

2. Se encuentran los **números críticos** de la expresión resultante. Esto es igual a cero y resuelva la ecuación resultante, los valores obtenidos son los números críticos de la expresión.

   Nota: un número crítico es un número donde una expresión se hace cero, es decir, donde posiblemente hay cambio de signo en la expresión.

Para el ejemplo: $\boldsymbol{x^2 + 2x - 15 \geq 0 \rightarrow x = -5 \; \sigma \; x = 3}$ Números críticos

(Se obtuvieron factorizando el polinomio e igualando cada factor a cero)

3. Se ubican los Números críticos en la recta numérica. Véase la figura 16.

4. Se evalúa el signo de la expresión obtenida en el paso uno. Para ello se toma un número que se encuentre a la izquierda del primer número crítico, se toma un número que se encuentre entre ambos números críticos y se toma otro que se encuentre a la derecha del segundo número crítico. Estos números se reemplazan en la expresión obtenida en el paso uno y el signo del resultado se coloca en la recta numérica. Véase la figura 16.

5. La respuesta o solución de la inecuación, se da tomando los intervalos que cumplan con el sentido de la desigualdad. Para ello nos fijamos en el sentido de la desigualdad de la expresión obtenida en el paso dos.

Si dice: > 0 Se toman los ++++, sin incluir los números críticos.
Si dice: ≥ 0 Se toman los ++++, incluyendo los números críticos.
Si dice: < 0 Se toman los-------, sin incluir los números críticos.
Si dice: ≤ 0 Se toman los ------, incluyendo los números críticos.

La solución de la inecuación es: $\boldsymbol{x \in (-\infty, -5] \cup [3, +\infty)}$
Este es el mismo dominio de la función: **Dom.** $\boldsymbol{x \in (-\infty, -5] \cup [3, +\infty)}$

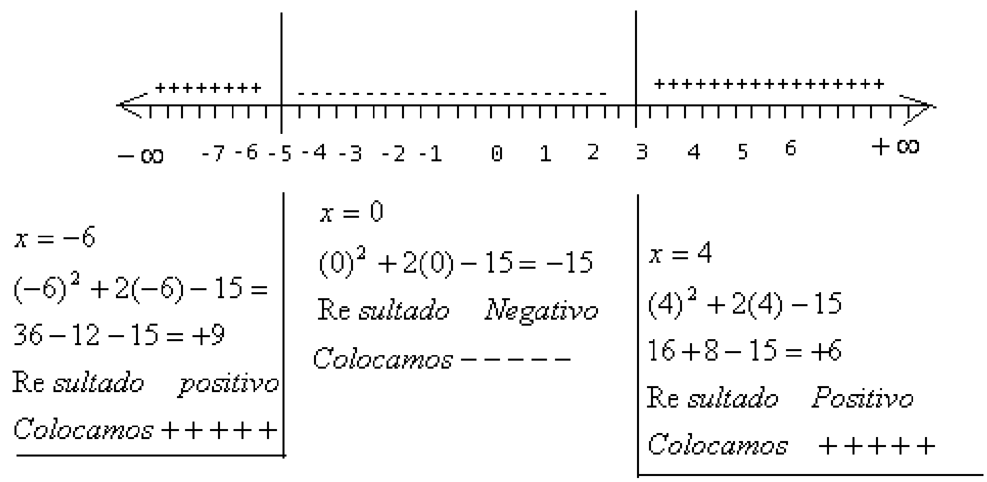


Figura 16. Dominio de $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

PISTA DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta: los ejercicios también se pueden realizar utilizando el método de los intervalos, ver matemáticas generales.

2. Determine el dominio de: $\boldsymbol{y = f(x) = \sqrt{3x - 5}}$

Procedimiento

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga presente: la cantidad subradical se debe hacer mayor – igual que cero.

Por lo tanto, se hace:

$$\mathbf{3x - 5 \geq 0 \rightarrow 3x - 5 = 0 \rightarrow 3x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{3}}$$

Ubicando $\frac{5}{3}$ en la recta numérica, tenemos:

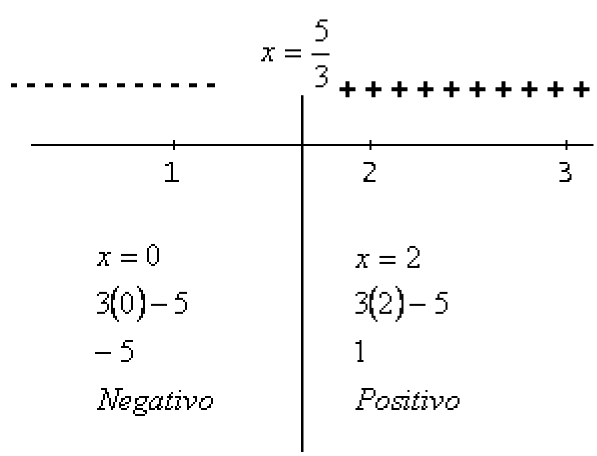


Figura 17. Dominio de la función $y = f(x) = \sqrt{3x - 5}$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

El Dominio de la función es:

$\boldsymbol{D_{f}}$: $\boldsymbol{x \in [\frac{5}{3}, +\infty)}$

3. Determine el dominio de: $y = \sqrt{x^2 - 9}$

Solución

- Se soluciona la siguiente inecuación:

$$\boldsymbol{x^2 - 9 \geq 0}$$

- Se resuelve, entonces, la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{x^2 - 9 = 0}$$

$$\boldsymbol{x^2 - 9 = 0 \rightarrow (x+3)(x-3) = 0 \rightarrow x+3 = 0 \;\; \sigma \;\; x - 3 = 0}$$

$$\boldsymbol{x = -3}$$
$$\boldsymbol{\sigma}$$
$$\boldsymbol{x = 3}$$

- Se ubican estos dos valores en la recta numérica y se dan valores a la izquierda y a la derecha de cada uno de ellos, tenemos:

++++++++++++	$x = -3$ - - - - - - - - - - - -	$x = 3$ ++++++++++++
$x = -4$ $(-4)^2 - 9 = 16 - 9$ *Positivo*	$x = 0$ $(0)^2 - 9 = 0 - 9$ *Negativo*	$x = 4$ $(4)^2 - 9 = 16 - 9$ *Positivo*

Figura 18. Dominio de la función $y = \sqrt{x^2 - 9}$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

- El dominio es:

$$D_f : x \in (-\infty, -3] \;\cup [3, +\infty)$$

4. Determine el dominio de:

$$y = g(x) = \sqrt{6x^2 - 7x - 3}$$

Procedimiento

PISTA DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria: $y = \sqrt[n]{f(x)}$ **,** si **n** (índice radical) es un número **par**, entonces $f(x) \geq 0$ para que tenga solución en los números Reales**.**

- Se soluciona la desigualdad:

$$6x^2 - 7x - 3 \geq 0$$

- Por lo tanto, se resuelve la ecuación:

$6x^2 - 7x - 3 = 0$ factorizando (es un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$)

$\frac{6}{6}(6x^2 - 7x - 3) = 0 \rightarrow \frac{36x^2 - 7(6x) - 18}{6} = 0$

$\rightarrow \frac{(6x-9)*(6x+2)}{6} = 0$, sacando factor común en cada paréntesis, tenemos

$\frac{3(2x-3)*2(3x+1)}{3*2} = 0$ →Simplificando:

$(2x - 3)$*$(3x + 1) = 0$**,** igualando cada factor a cero:

$(2x-3)=0 \rightarrow 2x=3 \rightarrow x=\frac{3}{2}$

σ

$$(3x+1)=0 \rightarrow 3x=-1 \rightarrow x=-\frac{1}{3}$$

La solución de la ecuación es:

$x=\frac{3}{2}\ \sigma\ x=-\frac{1}{3}$

Se ubican estos dos números en la recta numérica y determinamos el signo a la izquierda y a la derecha de cada uno de ellos.

$x=-\frac{1}{3}$ $\qquad\qquad$ $x=\frac{3}{2}$

+++++++++++	- - - - - - - - - - -	+++++++++++
$x=-1$	$x=0$	$x=2$
$6(-1)^2-7(-1)-3$	$6(0)^2-7(0)-3$	$6(2)^2-7(2)-3$
$6+7-3$	-3	$24-14-3$
Positivo	*Negativo*	*Positivo*

Figura 19. Dominio de la función $y=g(x)=\sqrt{6x^2-7x-3}$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

El dominio de la función es:

$$D_f:\ x\epsilon\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$$

5. Determine el dominio de: $y=g(x)=\sqrt[7]{5x-7}$

Procedimiento

Como la **raíz** es **impar** el dominio son todos los números reales

$$D_f: x \in R_e$$

Los siguientes ejercicios los encuentras en los siguientes link:

6. http://www.youtube.com/watch?v=BCjQrBEBGdU
7. http://www.youtube.com/watch?v=QUCCVAEu4TM
8. http://www.youtube.com/watch?v=GwkbhPJiHDk&feature=related

- **GRÁFICA DE LA FUNCIÓN IRRACIONAL:**

El procedimiento a seguir es el siguiente:

1. Se determina el dominio de la función.
2. Se asignan valores a **x** que estén dentro de cada intervalo empezando por los extremos. **Nota:** por cada intervalo asigne aproximadamente cinco valores.
3. Para cada valor se obtiene la respectiva **y** reemplazando en la respectiva función.
4. Se ubican estos puntos en el plano cartesiano.
5. Se unen los puntos mediante líneas.

Nota: los puntos de intervalos diferentes no se pueden unir entre sí.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Para la función: $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 5}$

a. Determine el dominio.
b. Realice su gráfica.
c. Determine intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
d. Determine si es continua o discontinua.

Procedimiento

a. Se determina el dominio haciendo la cantidad subradical mayor – igual que cero:

$$x^2 + 6x + 5 \geq 0$$

Por lo tanto, se resuelve la ecuación:

$x^2 + 6x + 5 = 0,$ factorizando:

$x^2 + 6x + 5 = 0 \rightarrow (x + 5)(x + 1) = 0,$ igualando cada factor a cero y despejando **x**:

$$(x + 5) = 0 \rightarrow x = -5$$

$$\sigma$$

$$(x + 1) = 0 \rightarrow x = -1$$

Se ubican estos puntos en la recta numérica:

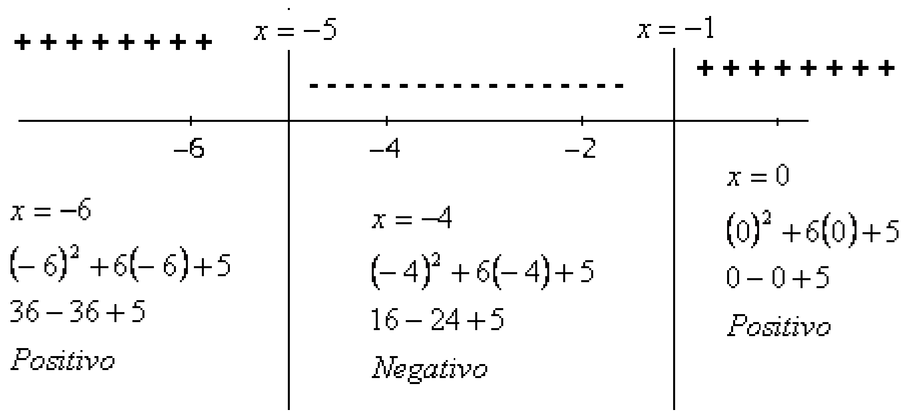


Figura 20. Dominio de la función $y=f(x)=\sqrt{x^2+6x+5}$

El dominio es:

$$\boldsymbol{D_{f}}\colon\ \boldsymbol{x \in (-\infty,-5] \cup [-1,+\infty)}$$

b. Gráfica:

Los valores de **x** a dar son: el menos cinco y cuatro valores a la izquierda de **x = - 5** y el menos uno y cuatro valores a la derecha de **x = -1**.

Tabla de valores:

	X	$y=f(x)=\sqrt{x^2+6x+5}$	Y	(x,y)
I Z Q U I E	-9	$\sqrt{(-9)^2+6(-9)+5}$	5.65	$(-9,5.65)$
	-8	$\sqrt{(-8)^2+6(-8)+5}$	4.58	$(-8,4.58)$
	-7	$\sqrt{(-7)^2+6(-7)+5}$	3.46	$(-7,3.46)$
	-6	$\sqrt{(-6)^2+6(-6)+5}$	2.23	$(-6,2.23)$

R D A				
EXTREMO	-5	$\sqrt{(-5)^2+6(-5)+5}$	0	$(-5,0)$
EXTREMO	-1	$\sqrt{(-1)^2+6(-1)+5}$	0	$(-1,0)$
D E R E C H A	0	$\sqrt{(-0)^2+6(-0)+5}$	2.23	$(0,2.23)$
	1	$\sqrt{(1)^2+6(1)+5}$	3.46	$(1,3.46)$
	2	$\sqrt{(2)^2+6(2)+5}$	4.58	$(2,4.58)$
	3	$\sqrt{(3)^2+6(3)+5}$	5.65	$(3,5.65)$

La gráfica es la siguiente:

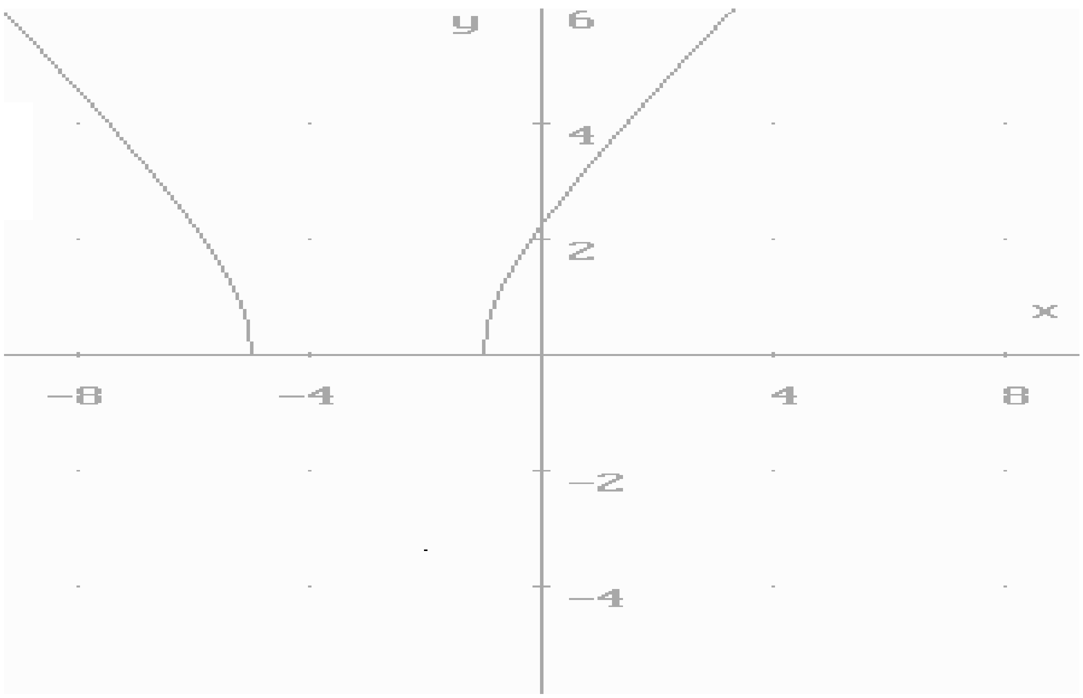


Figura 21. Gráfica de $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 5}$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

c. Crecimiento y decrecimiento:

- <u>Crece</u>: $(-\mathbf{1}, +\infty)$
- <u>Decrece</u>: $(-\infty, -\mathbf{5})$

2. Para la función:

$$\boldsymbol{y = f(x) = \sqrt{2 - x}}$$

a. Determine el dominio.
b. Realice la respectiva gráfica.
c. Determine intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
d. Determine si es continua o discontinua.

Procedimiento

a. **Dominio**: se toma la cantidad subradical $\boldsymbol{2 - x}$ y se hace mayor – igual que cero:

$$\boldsymbol{2 - x \geq 0 \rightarrow -x \geq -2 \rightarrow x \leq 2}$$

PISTA DE APRENDIZAJE
Tener en cuenta: al multiplicar los miembros de una desigualdad por un número real negativo, la desigualdad cambia de sentido.

Por lo tanto, el dominio de la función es:

$$\boldsymbol{D_{f:}\, x\epsilon\, (-\infty. 2]}$$

b. Gráfica

Se asignan valores empezando en **2** y menores que **2**, se puede ver en la siguiente tabla:

X	$y = f(x) = \sqrt{2-x}$	Y	(x, y)
2	$\sqrt{2-2} = \sqrt{0}$	0	$(2, 0)$
1	$\sqrt{2-1} = \sqrt{1}$	1	$(1, 1)$
0	$\sqrt{2-0} = \sqrt{2}$	1.41	$(0, 1.41)$
-1	$\sqrt{2-(-1)} = \sqrt{3}$	1.73	$(-1, 1.73)$
-2	$\sqrt{2-(-2)} = \sqrt{4}$	2	$(-2, 2)$

La gráfica se muestra en la siguiente figura (fig. 22)

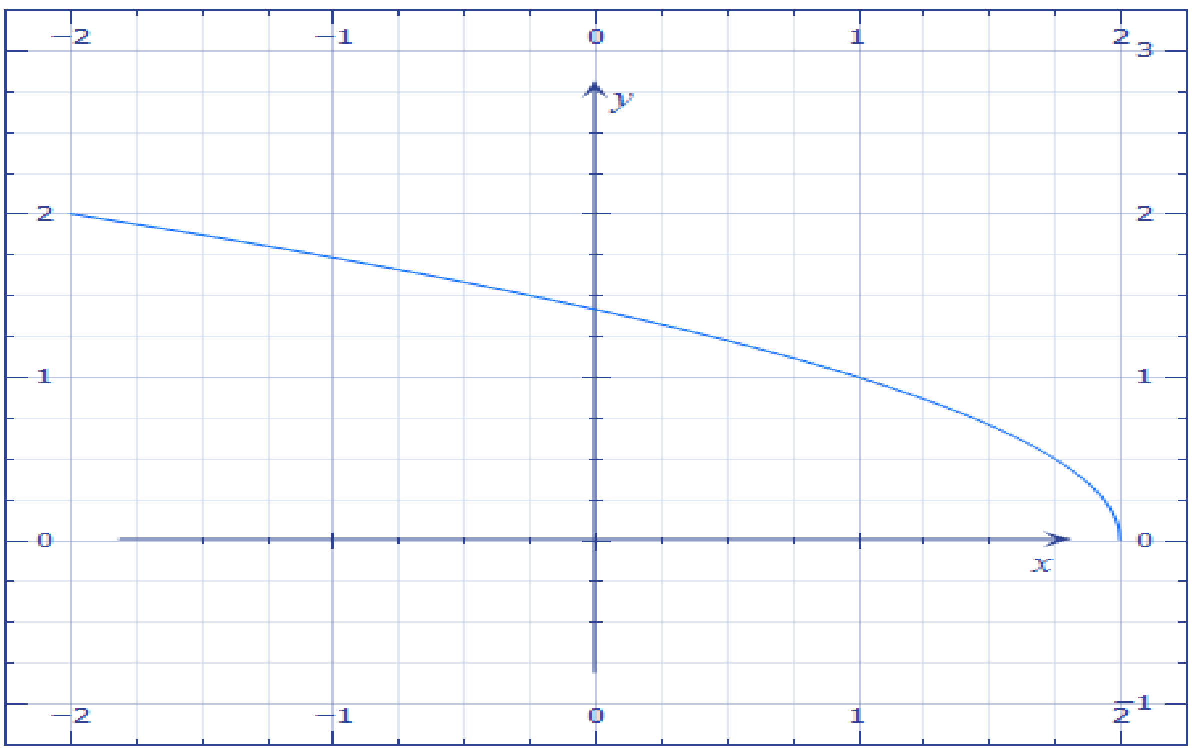


FIGURA 19 Gráfica de: $y = f(x) = \sqrt{2-x}$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

c. Crecimiento – decrecimiento

Decrece: $(-\infty, \mathbf{2})$

d. Continuidad o discontinuidad:

La función **es continua**.

PISTAS DE APRENDIZAJE

Tenga presente: si el dominio de una función irracional son todos los números reales (esto se presenta cuando la raíz es impar o cuando la inecuación no tiene solución). Para hacer su gráfica se puede tomar como referencia el cero (de valores **X** a la izquierda y a la derecha del cero).

Traer a la memoria: una función irracional es continua en todo su dominio.

3. Para la función $\boldsymbol{y = \sqrt{-3x^2 - 10x + 48}}$

Determine:

a. Dominio.

b. Halle: $f\left(-\frac{8}{3}\right)$

Procedimiento

a. **Dominio:** se toma el polinomio subradical y se hace mayor – igual que cero:

$$-3x^2 - 10x + 48 \geq 0$$

- Se soluciona la inecuación: se utilizará el método de los intervalos:

$\boldsymbol{3x^2 + 10x - 48 \leq 0}$ se multiplica por -1 (cambia el sentido de la inecuación)

Se toma la ecuación:

$\mathbf{3x^2+10x-48=0}$ se factoriza (polinomio de la forma ax^2+bx+c):

$$\frac{3}{3}*\ 3x^2+10x-48=0 \rightarrow \frac{9x^2+10(3)x-144}{3}=0 \rightarrow$$

$\frac{(3x+18)*(3x-8)}{3}=0 \rightarrow \frac{3(x+6)*(3x-8)}{3}=0$ simplificando por 3:

$(x+6)*(3x-8)=0$ se iguala cada factor a cero:

$(x+6)=0 \rightarrow x=-6$

σ

$(3x-8)=0 \rightarrow x=\frac{8}{3}$

Se representan sobre la recta numérica:

$-\infty$_______A________-6_______B_______$\frac{8}{3}$_____C_______$+\infty$

Se forman 3 intervalos y se toma un número cualquiera de cada uno de ellos y se reemplaza en la ecuación original.

A= $(-\infty,-6)$**: (-7):** $3(7)^2+10(7)-48=147+70-48=169>0$

B= $\left(-6,\frac{8}{3}\right)$**: (0):** $3(0)^2+10(0)-48=-48<0$

C=$\left(\frac{8}{3},+\infty\right)$**: (3):** $3(3)^2+10(3)-48=27+30-48=9>0$

Tenemos la inecuación $3x^2 + 10x - 48 \leq 0$ y al reemplazar los valores asignados, el único intervalo que cumple con las condiciones (ser menor que…) es el intervalo **B**, por lo tanto la solución de la inecuación y dominio de la función es:

$$D_{f:}\ x \in \left[-6, \frac{8}{3}\right]$$

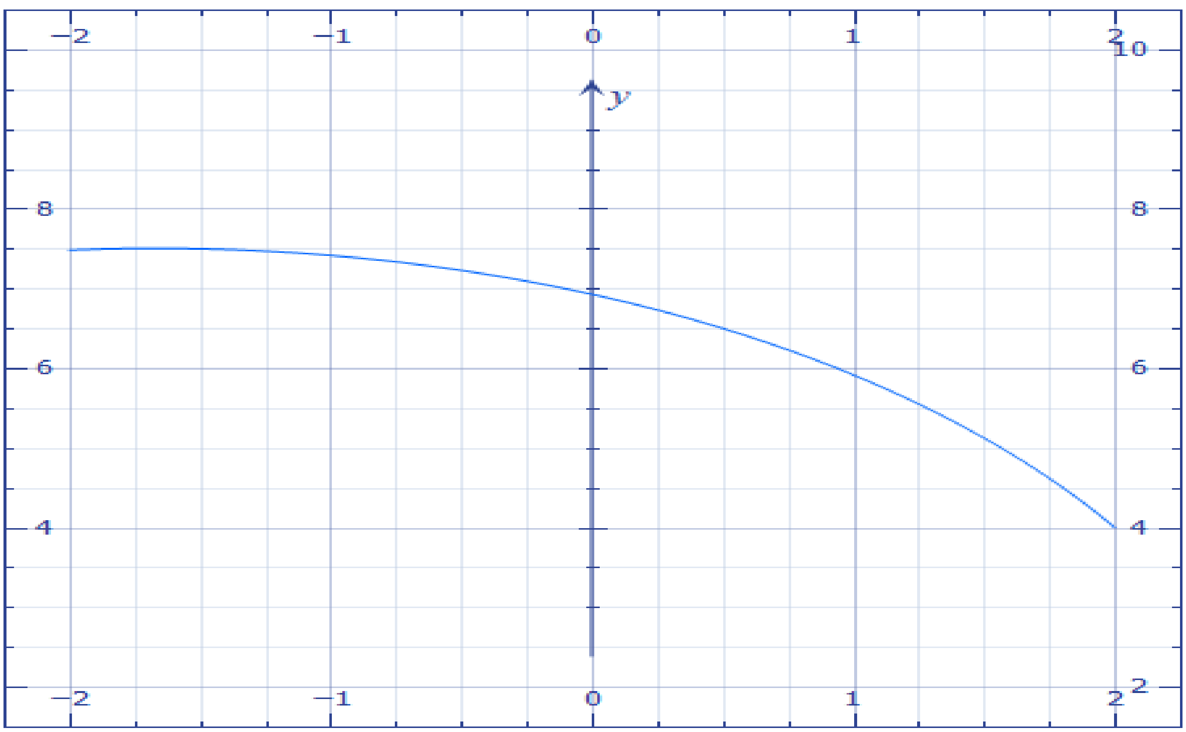
b. $f\left(-\frac{8}{3}\right)$

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = \sqrt{-3\left(-\frac{8}{3}\right)^2 - 10\left(-\frac{8}{3}\right) + 48} = \sqrt{-3\left(\frac{64}{9}\right) + \frac{80}{3} + 48}$$

$$= \sqrt{-\frac{64}{3} + \frac{80}{3} + 48} = \sqrt{\frac{-64 + 80 + 144}{3}}$$

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = \sqrt{\frac{160}{3}}$$

c. Su gráfica es la siguiente:



Función algebraica

Se llama función algebraica a una función **f** que puede expresarse como combinaciones de sumas, restas, divisiones, potencias o raíces de funciones polinómicas.

Entonces todas las funciones polinómicas, racionales e irracionales son algebraicas, pero también lo son cualquier combinación de éstas.

Ejemplo1: $y = g(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{5x+1}}$

Ejemplo2: $y = h(x) = \frac{\sqrt{x}}{5x+2}$

Nota: para determinar el dominio de estas funciones se debe tener en cuenta el tipo de funciones que se están combinando.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

Determine el dominio de las siguientes funciones

1. $y = f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$

Procedimiento

a. **Dominio:**

- En el **numerador** se debe cumplir que: $x \geq 0$

- El **denominador** se debe hacer diferente de 0, esto es: $\boldsymbol{x-1\neq 0 \to x\neq 1}$

En general, tenemos que hacer: $\boldsymbol{x \geq 0}$ y $\boldsymbol{x \neq 1}$

Ubicando estos valores en la recta numérica, tenemos:

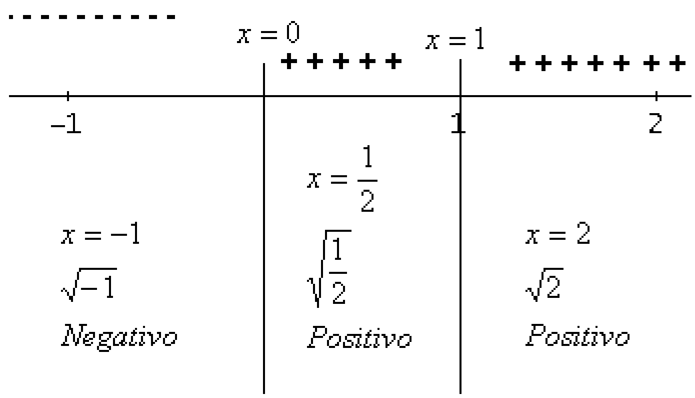


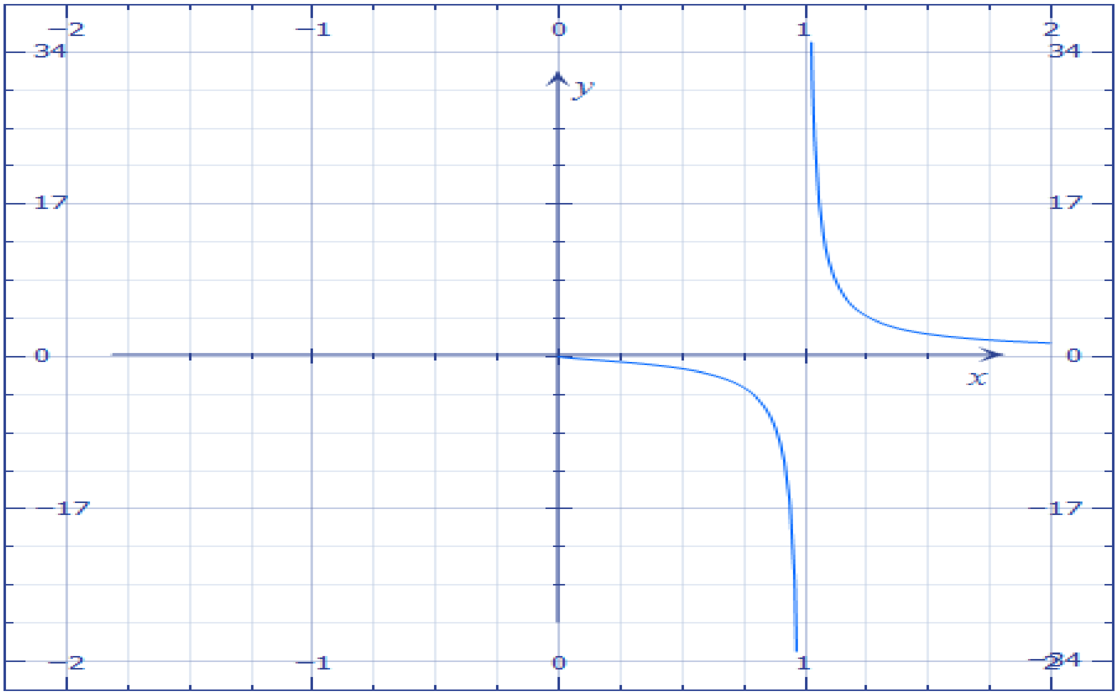
Figura 23. Dominio de la función $y=f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

El dominio de la función es:: $\boldsymbol{D_f: x \,\epsilon\, [0,1) \cup (1,+\infty)}$

b. Gráfica:

Su grafica es la siguiente:



2. $y = f(x) = \sqrt{\frac{x^2-9}{2x-1}}$

Procedimiento

a. **Dominio:**

- En la raíz se debe cumplir que: $\frac{x^2-9}{2x-1} \geq 0$
- En la raíz el denominador de la fracción tiene que ser diferente de cero: $2x - 1 \neq 0$

Entonces, obtenemos los siguientes puntos:

$x^2 - 9 = 0,$ Factorizando $(x+3)*(x-3) = 0,$ igualando cada factor a cero:

$$(x+3)=0 \rightarrow x=-3$$
$$(x-3)=0 \rightarrow x=3$$
$$2x-1=0 \rightarrow 2x=1 \rightarrow x=\frac{1}{2}$$

Los representamos en la recta numérica:

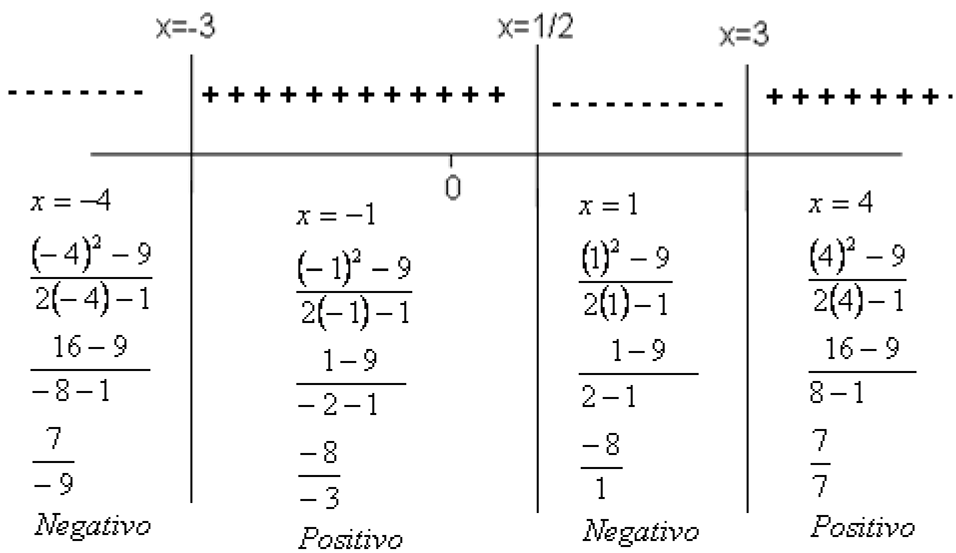


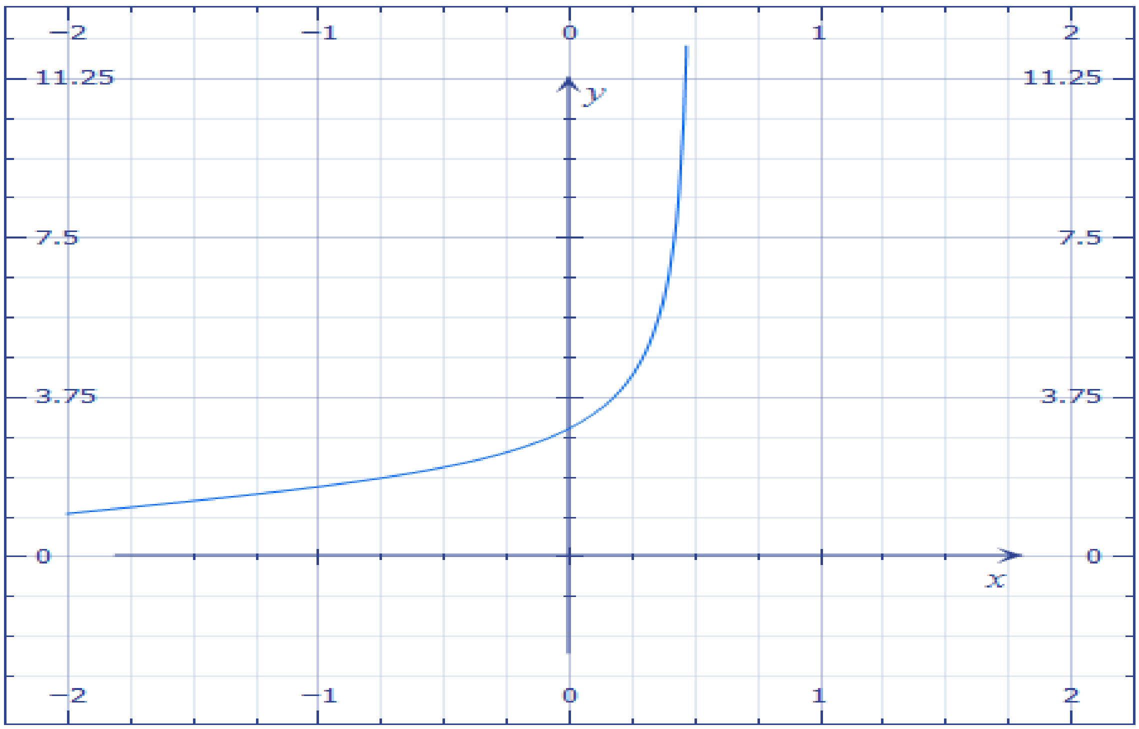
Figura 24. Dominio de $y=f(x)=\sqrt{\frac{x^2-9}{2x-1}}$

Dominio: $\boldsymbol{D_f = x \in \left[-3,\frac{1}{2}\right) \cup [3,+\infty)}$

Nota: en $x=\frac{1}{2}$ el **intervalo es abierto**, ya que en dicho valor el denominador se hace **cero**, es decir, $x=\frac{1}{2}$ es un **polo.**

b. Gráfica:

Su gráfica es la siguiente:



3. $y = g(x) = \frac{20x-7}{\sqrt{5-3x}}$

Procedimiento

Es una función con un radical en el denominador, por lo tanto, este denominador se hace mayor -igual que cero y también diferente de cero quedando entonces, el denominador mayor que cero, así:

$$5 - 3x > 0$$

- Se iguala a cero, se encuentra el valor de x:

$$\mathbf{5 - 3x = 0 \rightarrow -3x = -5 \rightarrow 3x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{3}}$$

- Se ubica este valor en la recta numérica:

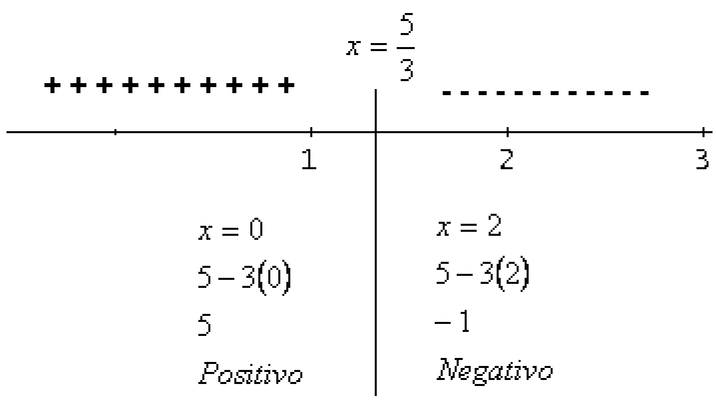


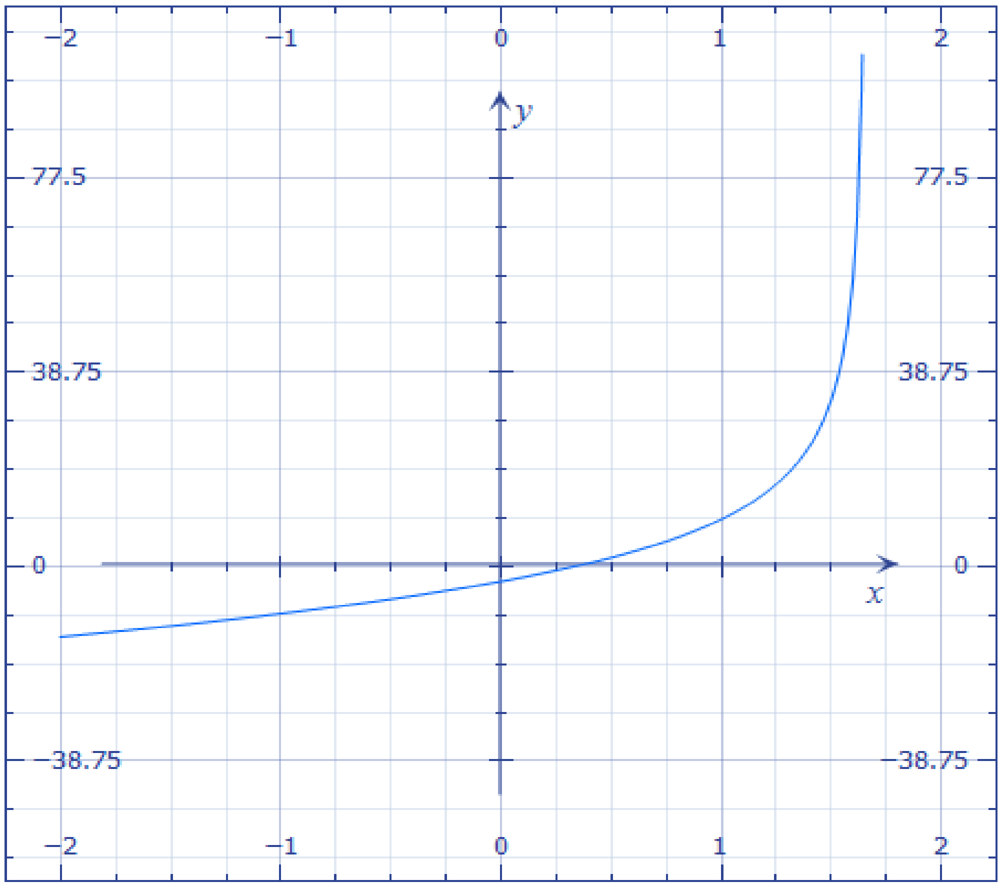
Figura 25. Dominio de la función $y = g(x) = \dfrac{20x - 7}{\sqrt{5 - 3x}}$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

- ***Dominio***: $\boldsymbol{x \in \left(-\infty, \ \frac{5}{3}\right)}$

c. Gráfica:

Su gráfica es la siguiente:



PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga presente: una función algebraica es continua en todo su dominio.

Para graficar estas funciones se verán más adelante técnicas apropiadas, utilizando la derivada. Se puede hacer la gráfica, utilizando el applet de la página: http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/NUMERICO/index.htm

También lo podemos hacer utilizando una herramienta informática como el Excel o el Derive.

Enlaces dominio funciones algebraicas.
http://www.youtube.com/watch?v=N-5-UZszfWo&feature=fvw
http://www.youtube.com/watch?v=IOY19h2EUqk&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=y7pyPffU0kA&feature=fvsr

FUNCIONES TRASCENDENTES

Son funciones que no son algebraicas, entre estas están las funciones exponenciales, las funciones trigonométricas, las funciones logarítmicas, las funciones trigonométricas inversas, las funciones hiperbólicas, entre otras.

- **FUNCIÓN EXPONENCIAL**

http://www.youtube.com/watch?v=cXnw6kzqASI&feature=related

Es una función de la forma: $\boldsymbol{y = f(x) = b^{g(x)}}$ (Exponencial general) que cumple las siguientes condiciones: $\boldsymbol{b > 0 \ \ y \ \ b \neq 1}$

- **DOMINIO:**

El dominio de esta función depende de **g(x).**

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

Determine el dominio de las siguientes funciones:

1. $y = f(x) = 5^x$

Procedimiento

Es una función exponencial que tiene en **el exponente un polinomio**, por lo tanto, su dominio corresponde a todos los números reales.

$$D_{f:}\ x \in R_e$$

2. $y = f(x) = e^{2x+1}$

Solución

Como en el exponente hay una **función lineal**, entonces el dominio de la función es $D_f: x \in R_e$.

3. $y = f(x) = e^{\frac{5x}{x-4}}$

Procedimiento

Como en el exponente hay una **función racional**, se toma el denominador y se hace diferente de cero, por lo tanto, el dominio serán todos los números reales menos las asíntotas verticales y/o los huecos, esto es:

$$x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$$

Por lo tanto, el dominio de la función es $D_f : x \in R_e - \{4\}$

- **Gráfica de funciones exponenciales:**

Si el dominio es $x \in lR$ para su grafica asigne a **X** el cero y aproximadamente 2 o 3 valores a su izquierda y 2 o 3 valores a su derecha.

Nota: si el dominio no son todos los números reales, para graficar siga las pautas de la gráfica de la expresión que está en el exponente.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Para la función: $y = f(x) = 5^x$

a. Determine el **dominio**:

Como es una función lineal el dominio son los números reales: $D_f : x \in R_e$.

b. Determine **los interceptos**:

- Con el eje **y** se hace $\boldsymbol{x = 0}$ entonces $\boldsymbol{y = 5^0 \rightarrow y = 1}$, el intercepto con el eje **y** es el punto $\boldsymbol{(0, 1)}$.
- Con el eje **x** no tiene intersecciones, ya que si y = 0 queda $0 = 5^x \Leftrightarrow \log_5 0 = x$, el logaritmo de cero no existe, por lo tanto la ecuación no tiene solución**.**

c. Grafique. Los puntos para la gráfica se muestran en la siguiente tabla y la gráfica se muestra en la figura 26.

	X	$y = f(x) = 5^x$	Y	(x, y)
IZQUIERDA	-3	$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$	0.008	$(-3, 0.008)$
	-2	$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$	0.04	$(-2, 0.04)$
	-1	$5^{-1} = \frac{1}{5}$	0.2	$(-1, 0.2)$
INTERCEPTO	0	5^0	1	$(0, 1)$
DERECHA	1	5^1	5	$(1, 5)$
	2	5^2	25	$(2, 25)$
	3	5^3	125	$(3, 125)$

d. Determine intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.

Crece en el intervalo: $(-\infty, +\infty)$

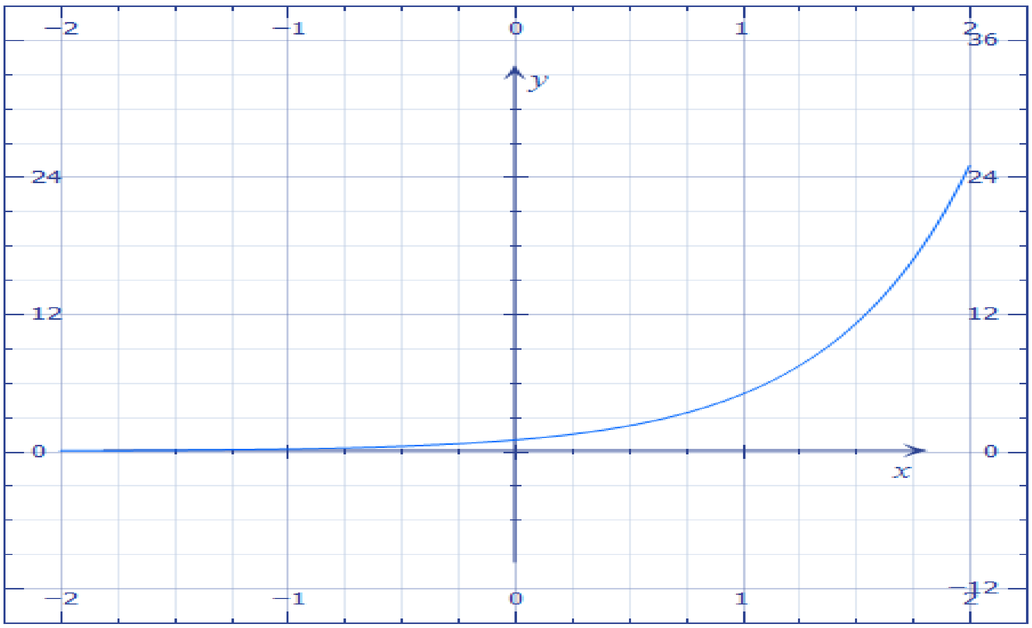


FIGURA 26. Gráfica de: $y = f(x) = 5^x$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

2. Para la función: $\boldsymbol{y = f(x) = 3^{5x+1}}$

a. Determine **el dominio**: que son todos los números reales, ya que en el exponente hay un polinomio:

$\boldsymbol{D_f : x \in R_e}$

b. Determine **los interceptos**:

- Intercepto con el eje **y**: se hace $x = 0$
  Entonces:

$$y = f(x) = 3^{5x+1} = 3^{5(0)+1} = 3^1 = 3$$

Por lo tanto, el intercepto con el eje **y** es el punto de coordenadas: $(0,3)$

- Intercepto con el eje **x**: con el eje **x** no tiene intersecciones, ya que si **y = 0**, la ecuación $\mathbf{0} = 3^{5x+1}$, no tiene solución.

c. **Gráfica:**

Nota: para hacer la gráfica, se debe asignar a **x**: el cero y cinco valores a su izquierda y cinco a su derecha, como lo muestra la tabla.

	X	$y = f(x) = 3^{5x+1} =$	Y	(x, y)
I Z Q U I E R D A	-5	$3^{5(-5)+1} = 3^{-25+1} = 3^{-24} = \frac{1}{3^{24}}$	$3.54 * 10^{-12}$	$(-5, 3.54 * 10^{-12})$
	-4	$3^{5(-4)+1} = 3^{-20+1} = 3^{-19} = \frac{1}{3^{19}}$	$8.6 * 10^{-10}$	$(-4, 8.6 * 10^{-10})$
	-3	$3^{5(-3)+1} 3^{-15+1} = 3^{-14} = \frac{1}{3^{14}}$	$2.09 * 10^{-7}$	$(-3, 2.09 * 10^{-7})$
	-2	$3^{5(-2)+1} = 3^{-10+1} = 3^{-9} = \frac{1}{3^{9}}$	$5.08 * 10^{-5}$	$(-2, 5.08 * 10^{-5})$

	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{3^{5(-1)+1}3^{-5+1} = 3^{-4} = \frac{1}{3^4}}$	0.012	$(\mathbf{-1}, 0.012)$
INTERCEPTO EJE Y	$\mathbf{0}$	$\mathbf{3^{5(0)+1} = 3^{0+1} = 3^1}$	3	$(\mathbf{0}, \mathbf{3})$
D E R E C H A	$\mathbf{1}$	$\mathbf{3^{5(1)+1} = 3^{5+1} = 3^6}$	729	$(\mathbf{1}, 729)$
	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3^{5(2)+1} = 3^{11} = 3^{12}}$	531441	$(\mathbf{2}, 531441)$
	$\mathbf{3}$	$\mathbf{3^{5(3)+1} = 3^{15+1} = 3^{16}}$	43046721	$(\mathbf{3}, 43046721)$
	$\mathbf{4}$	$\mathbf{3^{5(4)+1} = 3^{20+1} = 3^{21}}$	10460353203	$(\mathbf{4}, 10460353203)$
	$\mathbf{5}$	$\mathbf{3^{5(5)+1} = 3^{25+1} = 3^{26}}$	2541865828329	$(\mathbf{5}, 2541865828329)$

La gráfica se muestra en la figura 27.

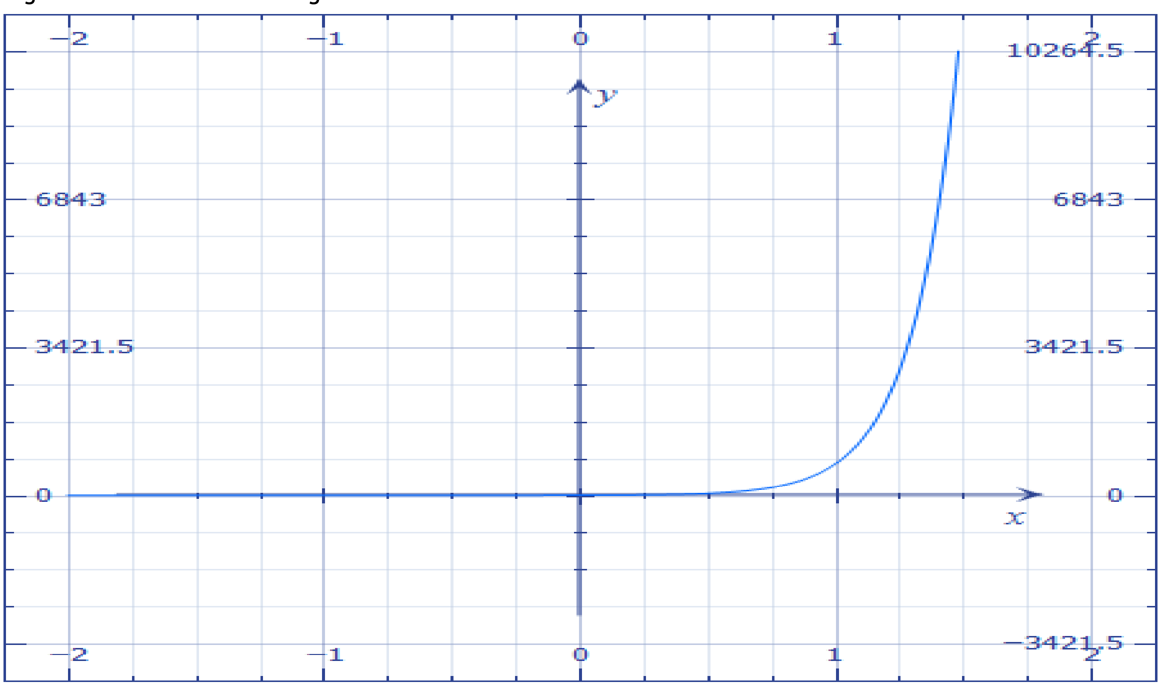


Figura 27: Gráfica de $y = f(x) = 3^{5x+1}$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

d. Determine intervalos de **crecimiento** e intervalos de **decrecimiento.**

La función **crece** en el intervalo: $(-\infty, +\infty)$

3. Para la función : $\boldsymbol{y = f(x) = e^{\frac{2x-1}{x^2-4}}}$

a. Dominio:

Como en el exponente hay una función racional para determinar su dominio se hace el denominador del exponente igual a cero:

$\boldsymbol{x^2 - 4 = 0}$ se factoriza (diferencia de cuadrados)

$\boldsymbol{x^2 - 4 = 0 \rightarrow (x+2) * (x-2) = 0}$ se iguala cada factor a cero y se despeja **x:**

$\boldsymbol{(x+2) = 0 \rightarrow x = -2}$

$\boldsymbol{(x-2) = 0 \rightarrow x = 2}$ por lo tanto, el dominio de la función es:

$$\boldsymbol{D_f : x \neq 2 \quad y \quad x \neq -2 \qquad \sigma \quad D_f = x \,\epsilon\, R_e - \{2, -2\}}$$

b. Interceptos:

- **Si** $\boldsymbol{x = 0}$ se tiene:

$$\boldsymbol{y = e^{\frac{2(0)-1}{(0)^2-4}} \rightarrow y = e^{\frac{-1}{-4}} \rightarrow y = e^{\frac{1}{4}} \rightarrow y = 1.284} \ldots$$

El intercepto con el eje **y** es el punto de coordenadas: $(\boldsymbol{0, 1.284} \ldots)$

- Con el eje **x** no tiene intercepto.

c. Gráfica

Para la gráfica se asignan a **x** cinco valores a la izquierda de −2, cinco valores entre −2 y 2, y cinco valores a la derecha de 2. A continuación se muestra estos valores en la tabla.

	X	$y = f(x) = e^{\frac{2x-1}{x^2-4}}$	Y	(x, y)
IZQUIERDA	-7	$e^{\frac{2(-7)-1}{(-7)^2-4}}$	0.7	$(-7, 0.7)$
	-6	$e^{\frac{2(-6)-1}{(-6)^2-4}}$	0.6	$(-6, 0.6)$
	-5	$e^{\frac{2(-5)-1}{(-5)^2-4}}$	0.5	$(-5, 0.5)$
	-4	$e^{\frac{2(-4)-1}{(-4)^2-4}}$	0.4	$(-4, 0.4)$
	-3	$e^{\frac{2(-3)-1}{(-3)^2-4}}$	0.2	$(-3, 0.2)$
	-2	$e^{\frac{2(-2)-1}{(-2)^2-4}}$	nada	∞
	-1	$e^{\frac{2(-1)-1}{(-1)^2-4}}$	2.7	$(-1, 2.7)$
	0	$e^{\frac{2(0)-1}{(0)^2-4}}$	1.2	$(0, 1.2)$
	1	$e^{\frac{2(1)-1}{(1)^2-4}}$	0.7	$(1, 0.7)$
	2	$e^{\frac{2(2)-1}{(2)^2-4}}$	nada	∞
DERECHA	3	$e^{\frac{2(3)-1}{(3)^2-4}}$	2.7	$(3, 2.7)$
	4	$e^{\frac{2(4)-1}{(4)^2-4}}$	1.7	$(4, 1.7)$
	5	$e^{\frac{2(5)-1}{(5)^2-4}}$	1.5	$(5, 1.5)$
	6	$e^{\frac{2(6)-1}{(6)^2-4}}$	1.4	$(6, 1.4)$
	7	$e^{\frac{2(7)-1}{(7)^2-4}}$	1.3	$(7, 1.3)$

d. Determine intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.

- La función crece$(-\infty, \infty)$

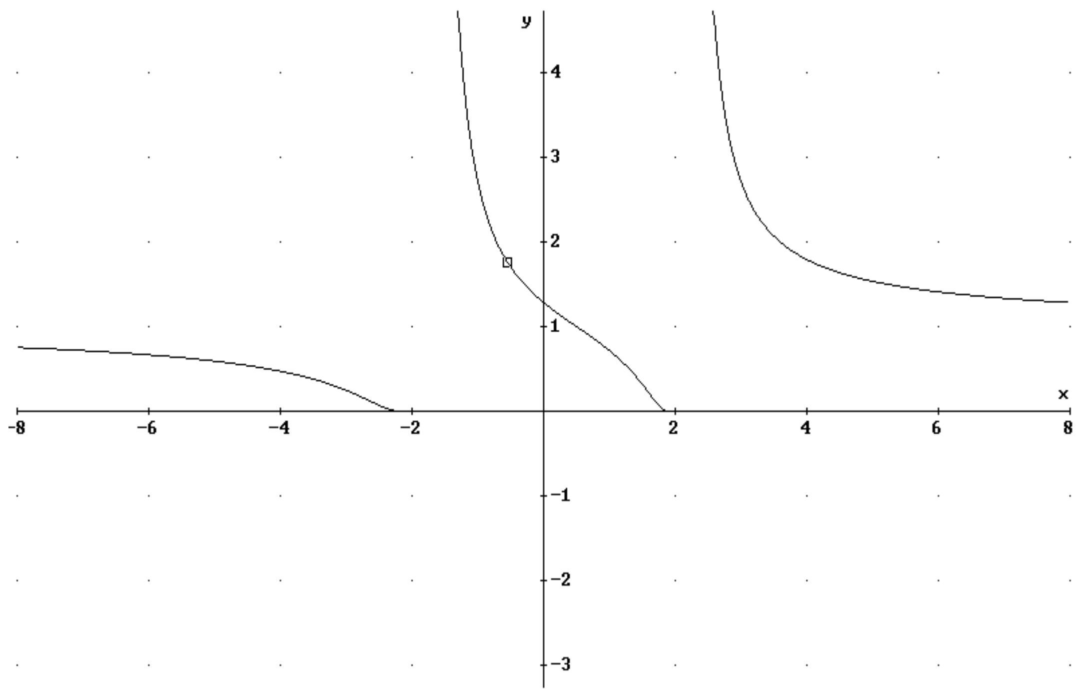


Figura 24. Gráfica de $y = f(x) = e^{\frac{2x-1}{x^2-4}}$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

4. http://www.youtube.com/watch?v=Uee7HeiCkt4

5. http://www.youtube.com/watch?v=pogo0SmmSbE

6. Solución de ecuaciones exponenciales.

http://www.youtube.com/watch?v=aPVTZAxOykY&feature=PlayList&p=77286F52BE3722A4&index=0&playnext=1

Ejemplo7: Solución de ecuaciones exponenciales.

http://www.youtube.com/watch?v=wW7UQGAw_sA&feature=PlayList&p=77286F52BE3722A4&playnext=1&playnext_from=PL&index=2

PISTA DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta: una función exponencial es continua en todo su dominio.

- **FUNCIÓN LOGARÍTMICA**

http://www.youtube.com/watch?v=FGwxP3F5Qj0
http://www.youtube.com/watch?v=MMXOEhzSsYY
http://www.youtube.com/watch?v=avU9orGN_oc

Es una función de la forma:

$$\boldsymbol{y = f(x) = log_b\, g(x)}$$

Con $\boldsymbol{b > 0 \ \ y\ b \neq 1}$

- **DOMINIO:**

Para hallar el dominio se debe resolver la inecuación: $\boldsymbol{g(x) > 0}$

Ejercicios de entrenamiento

Determine el dominio y los interceptos de las siguientes funciones:

1. $\boldsymbol{y = f(x) = log_3 x}$

Procedimiento

a. **DOMINIO**

Se plantea y se soluciona la inecuación: $\boldsymbol{x > 0}$ entonces el dominio de la función es:
$\boldsymbol{D_f : x \in (0, +\infty)}$

b. **INTERCEPTOS**

- Con el eje **y** si $\boldsymbol{x = 0} \rightarrow$ $\boldsymbol{y = log_3 0\ no\ existe,}$ por lo tanto no hay intersecciones con el eje y.
- Con el eje **x**: $\boldsymbol{y = 0}$ $y = 0 \Rightarrow 0 = \log_3 x = 0 \Rightarrow x = 3^0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ (1, 0).

$\boldsymbol{0 = log_3 x,}$ expresándolo en forma de potencia *, $\boldsymbol{3^0 = x \rightarrow x = 1}$

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga presente: $\boldsymbol{log_a R = e \leftrightarrow a^e = R}$

2. $\boldsymbol{y = f(x) = log_2(2x - 3)}$

Procedimiento

a. **Dominio:** recuerde que para hallar el dominio se hace $g(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{0}$

$$2x - 3 > 0 \rightarrow 2x - 3 = 0 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Ubicando este valor en la recta numérica:

$-\infty$\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\0 ///////////////////////////////////$+\infty$

$-\frac{3}{2}$

Se toman valores en los intervalos indicados y se remplazan en la ecuación dada:

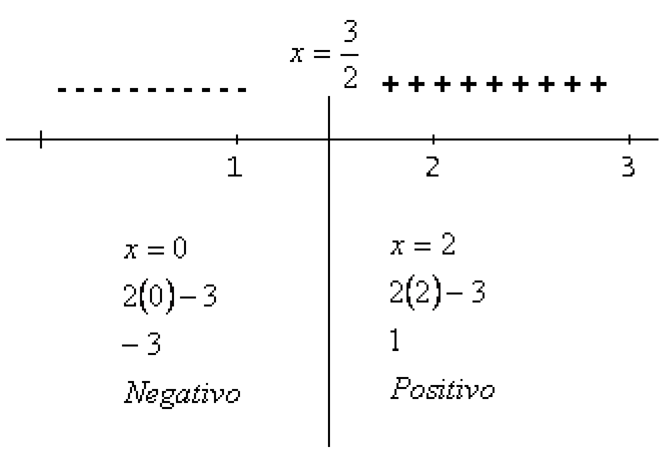


Figura 29. Dominio de $y = f(x) = \log_2(2x - 3)$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Por lo tanto, el dominio de la función es: $\boldsymbol{D_f} = (\frac{3}{2}, +\infty)$

b. Interceptos

- Intercepto con el eje **y**:

$$\boldsymbol{Se\ hace\ x = 0 \to y = log_2(2 * 0 - 3) \to log_2(-3)\ No\ existe}$$

Por lo tanto, No hay intersección con el eje **y**.

- Intercepto con el eje **x**:

$\boldsymbol{Se\ hace\ y = 0 \to 0 = \log_2(2x - 3)}$ aplicando la definición, tenemos:

$\boldsymbol{2x - 3 = 2^0}$ Recuerde $2^0 = 1$

$$\boldsymbol{2x - 3 = 1 \to 2x = 1 + 3 \to 2x = 4 \to x = \frac{4}{2} \to x = 2}$$

La intersección con el eje X es el punto de coordenadas: $\boldsymbol{(2, 0)}$

3. $\boldsymbol{y = f(x) = \log(x^2 - 4)}$

Procedimiento

a. Dominio: $Se\ hace \quad \boldsymbol{x^2 - 4 > 0}$

$\boldsymbol{x^2 - 4 = 0}$ factorizando e igualando a cero cada factor:

$$\boldsymbol{x^2 - 4 = 0 \to (x + 2) * (x - 2) = 0}$$

$$\boldsymbol{x + 2 = 0 \to x = -2 \quad \sigma\ x - 2 = 0 \to x = 2}$$

Se ubican estos puntos en la recta numérica y se tiene:

$-\infty$\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\0______________0//////////////////////////////$+\infty$

$\boldsymbol{-2}$ $\boldsymbol{+2}$

Se toman valores en los intervalos indicados y se remplazan en la ecuación dada:

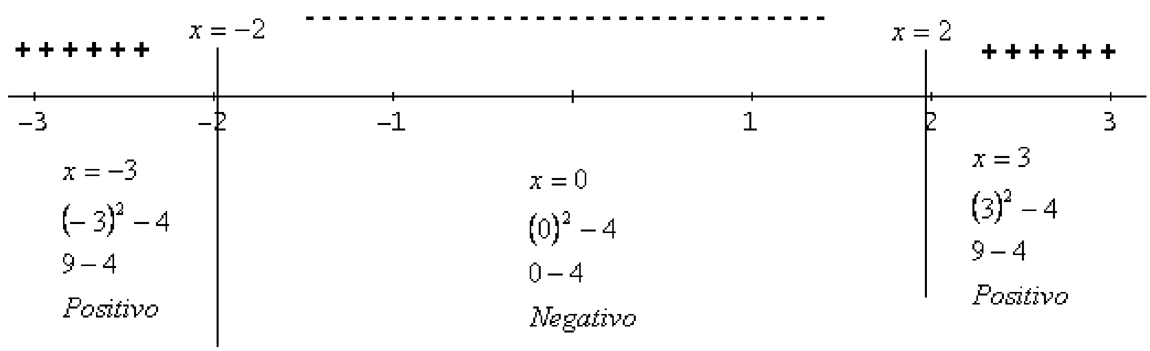


Figura 30. Dominio de $y = f(x) = \log\left(x^2 - 4\right)$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Por lo tanto el dominio de la función es: $\boldsymbol{D_f : x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)}$, o también $\boldsymbol{D_f = R_e - [-2, 2]}$

a. Interceptos

- Con el eje **y**: se hace **x = 0**

Si $\boldsymbol{x = 0 \rightarrow y = \log((0)^2 - 4) \rightarrow y = \log(-4)}$ $\boldsymbol{no\ existe}$, por lo tanto no hay intersecciones con el eje **y**.

- Con el eje **x**: se hace **y = 0**

Si $\boldsymbol{y = 0 \rightarrow 0 = lo\,g(x^2 - 4) \rightarrow x^2 - 4 = 10^0}$

PISTA DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria: cuando en el logaritmo no aparece la base, éste es de base **diez (10).**

$\boldsymbol{x^2 - 4 = 10^0 \to x^2 - 4 = 1 \to x^2 = 1 + 4 \to x^2 = 5}$ Sacando raíz a ambos lados de la ecuación, tenemos:

$$\boldsymbol{\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{5} \to x = \pm\sqrt{5}}$$

$$\boldsymbol{x = \sqrt{5}\ \sigma\ x = -\sqrt{5}}$$

Por lo tanto, las intersecciones con el eje **x** son los puntos de coordenadas:

$$\boldsymbol{(-\sqrt{5}, 0\ )\hat{}(\sqrt{5}, 0)}$$

4. $\boldsymbol{y = \ln(5x + 10)}$

Procedimiento

a. **Dominio:** se hace $\boldsymbol{5x + 10 > 0}$

$\boldsymbol{5x + 10 > 0}$

$\boldsymbol{5x + 10 - 10 > -10}$ **Inverso aditivo de +10 es -10**

$\boldsymbol{5x > -10}$

$\boldsymbol{\frac{5x}{5} > \frac{-10}{5}}$ **se divide por 5 ambos lados de la inecuación**

$\boldsymbol{x > -2}$

Por lo tanto, el dominio de la función es el intervalo:

$$\boldsymbol{D_f : x \in (-2, +\infty)}$$

b. Interceptos

- Con el eje **y**: se hace **x = 0**

Si $\boldsymbol{x = 0 \rightarrow y = \ln(5 * (0) + 10) \rightarrow y = \ln 10 \rightarrow y = 2.302}$

La intersección con el eje Y es el punto de coordenadas: $(\mathbf{0, 2.302})$

- Con el eje **x**: se hace **y = 0**

Si $\boldsymbol{y = 0 \rightarrow 0 = \ln(5x + 10) \rightarrow 5x + 10 = e^0}$**.** Continua en *

e: es la base de los logaritmos naturales.

PISTA DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta: la constante matemática e es uno de los más importantes números reales. Se relaciona con muchos interesantes resultados. Por ejemplo, la derivada de la función exponencial $f(x) = e^x$ es esa misma función. El logaritmo en base e se llama logaritmo natural o neperiano.

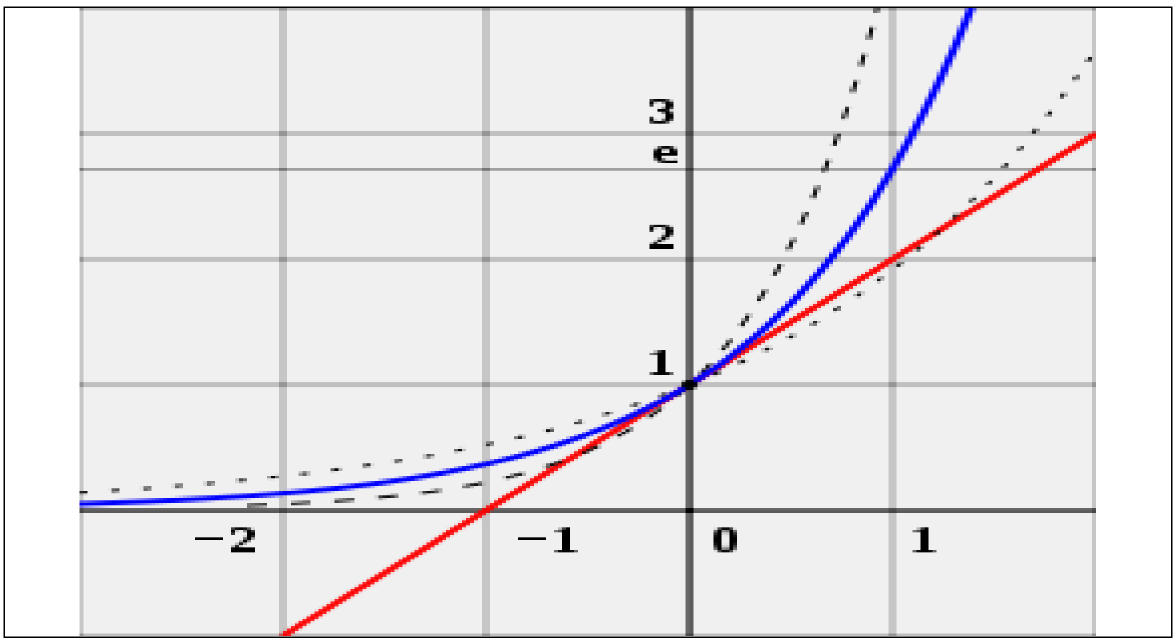
El número e, conocido a veces como **número de Euler** o **constante de Napier**, fue reconocido y utilizado por primera vez por el matemático escocés John Napier, quien introdujo el concepto de *logaritmo* en el cálculo matemático.

Es considerado el número por excelencia del cálculo, así como π lo es de la geometría y el número i del análisis complejo. El simple hecho de que la función e^x coincida con su derivada hace que la función exponencial se encuentre frecuentemente en el resultado de ecuaciones diferenciales sencillas. Como consecuencia de esto, describe el comportamiento de acontecimientos físicos regidos por leyes sencillas, como pueden ser la velocidad de vaciado de un depósito de agua, el giro de una veleta frente a una ráfaga de viento, el movimiento del sistema de amortiguación de un automóvil o el cimbreo de un edificio metálico en caso de terremoto. De la misma manera, aparece en muchos otros campos de la ciencia y la técnica, describiendo fenómenos eléctricos y electrónicos (descarga de un condensador, amplificación de corrientes en transistores BJT, etc.), biológicos (crecimiento de células, etc.), químicos (concentración de iones, periodos de semidesintegración, entre otras), y muchos más.

El número e, al igual que el número π y el número áureo (φ), es un irracional, no expresable por la razón de dos enteros; o bien, no puede ser expresado con un número finito de cifras decimales o con decimales periódicos. Además, es un número trascendente, es decir, que no puede ser obtenido mediante la resolución de una ecuación algebraica con coeficientes racionales.

Su valor aproximado (truncado) es:

e ≈ **2,71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 69995...**



e es el único número *a*, tal que la derivada de la función exponencial $f(x) = a^x$ (curva azul) en el punto $x = 0$ es igual a 1. En comparación, las funciones 2^x (curva a puntos) y 4^x (curva a trazos) son mostradas; no son tangentes a la línea de pendiente 1 (rojo).
Tomado 05 de agosto de 2013 de: es.wikipedia.org/wiki/**Número_e**

$$*\ \mathbf{5x+10=1 \rightarrow 5x=1-10 \rightarrow 5x=-9 \rightarrow x=-\frac{9}{5}}$$

Por lo tanto, la intersección con el eje **x** es el punto de coordenadas: $\left(-\frac{9}{5},0\right)$

Buscar en los link indicados a continuación y resolver los ejercicios allí planteados:

5. http://www.youtube.com/watch?v=h-6XK99tcVo
6. http://www.youtube.com/watch?v=ugxhemt8fcI&feature=related

ASPECTOS A TENER EN CUENTA PARA OPERAR CON LOGARITMOS:

La calculadora solo tiene dos teclas para trabajar logaritmos:

- La tecla $\boldsymbol{log}$ que significa $\boldsymbol{log_{10}}$ **(logaritmo en base 10).**
- La tecla $\boldsymbol{l_n}$que significa $\boldsymbol{log_e}$ **(logaritmo en base e).**

Calcular el valor de un **log** o un **ln,** con estas calculadoras es sencillo.
En una calculadora Casio $fx-82MS$ o similar, que se identifican porque ellas operan igual que como se escribe, el procedimiento es el siguiente:

Ejemplos:

Obtenga el valor de los siguientes logaritmos:

$\boldsymbol{a}.\log 20$: digite: la **tecla** $\boldsymbol{log}$, el número **20**, la **tecla igual** y el resultado obtenido es: **1.30109996**

La secuencia es:

log	2	0	=	1.30109996

$\boldsymbol{b}.\ \mathbf{ln\ 135}$: Digite la **tecla** $\boldsymbol{ln}$, **digite el número** $\mathbf{135}$, digite **la tecla igual**, el resultado obtenido es: $\mathbf{4.905274778}$**,** la secuencia es:

ln	1	3	5	=	4.905274778

Nota: cuando la base del logaritmo es **diferente a 10** o del **número e**, se debe hacer **cambio de base**, para ello se aplica la siguiente fórmula:

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a}}$$

Ejemplos:

Calcule los siguientes logaritmos:

a. $\log_2 24 = \dfrac{\log 24}{\log 2} = \dfrac{\ln 24}{\ln 2} = 4.584962501$

b. $\log_3 625 = \dfrac{\log 625}{\log 3} = \dfrac{\ln 625}{\ln 3} = 5.859894083$

- **GRÁFICA DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS:**

Se debe asignar valores a **X** dentro de cada intervalo, se recomienda asignar a **X** aproximadamente cinco valores por intervalo, empezando en un valor ligeramente mayor o menor que cada extremo del intervalo.

Nota: los extremos de cada intervalo son **asíntotas verticales**.

Ejercicios de aprendizaje

1. Para la función: $\boldsymbol{y = f(x) = \log_2 x}$

Determine:

- ✓ El dominio.
- ✓ Los interceptos con los ejes coordenados.
- ✓ La gráfica.
- ✓ Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Procedimiento

a. **Dominio:** para calcular el dominio de la función se hace $\boldsymbol{x > 0}$

Por lo tanto, el dominio de la función es:

$\boldsymbol{D_f : x \in (0, +\infty)}$

b. **Interceptos:**

- Intercepto con el eje **x**: se hace $\boldsymbol{y = 0}$

Si $\boldsymbol{y = 0 \to 0 = \log_2 x}$ aplicando la definición, tenemos

$\boldsymbol{2^0 = x \to x = 1}$

La intersección con el eje **x** es el punto de coordenadas: $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$

- Intercepto con el eje **y**: se hace $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$\boldsymbol{y} = \mathbf{log_2}\, \boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{y} = \mathbf{log_2}\, \mathbf{0}$, el logaritmo **de cero no existe**, por lo tanto, la función **no tiene interceptos** con el eje **y**.

c. Realice la gráfica:

Los valores se muestran en la tabla, la gráfica se muestra en la figura 31.
x = 0 es una asíntota vertical.

	x	$y = f(x) = \log_2 x$	y	(x, y)
DERECHA	**0**	$\log_2 0$	**No existe, hay Asíntota vertical**	
	0.2	$\log_2 0.2 = \frac{log\ 0.2}{log\ 2}$	-2.32	$(0.2, -2.32)$
	0.5	$\log_2 0.5 = \frac{log\ 0.5}{log\ 2}$	-1	$(0.5, -1)$
	1	$\log_2 1 = \frac{log\ 1}{log\ 2}$	0	$(1, 0)$
	2	$\log_2 2 = \frac{log\ 2}{log\ 2}$	1	$(2, 1)$
	3	$\log_2 3 = \frac{log\ 3}{log\ 2}$	$1.58\ldots$	$(3, 1.58\ldots)$
	4	$\log_2 4 = \frac{log\ 4}{log\ 2}$	2	$(4, 2)$

Nota: recuerde que para resolver el logaritmo se debe cambiar la base (ver propiedad).

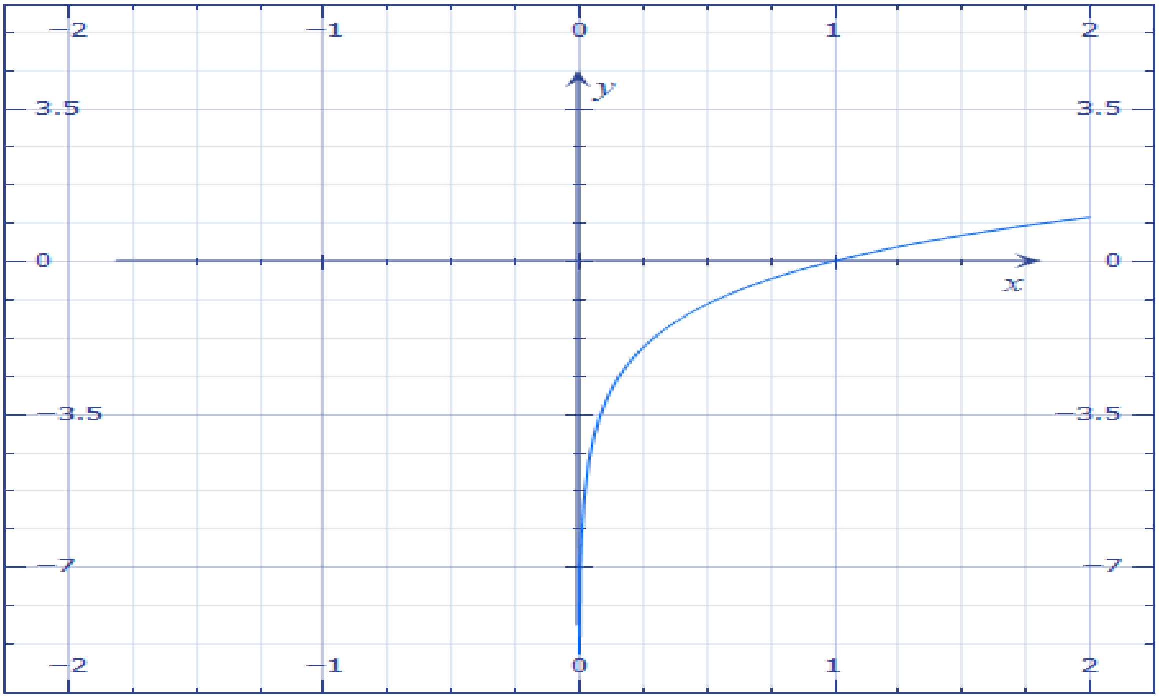


FIGURA 31. Gráfica de $y = f(x) = \log_2 x$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

d. Determine intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.

e.

Crece en el intervalo: $(\mathbf{0}, +\infty)$

2. Para la función: $\boldsymbol{y = f(x) = \log_5(2x - 10)}$

Dominio: se hace $\mathbf{2x - 10 > 0}$ **,** se soluciona la inecuación

$\mathbf{2x - 10 + 10 > 0 + 10}$ **Inverso aditivo**

$\mathbf{2x > 10 \rightarrow (2x)\left(\frac{1}{2}\right) > (10)(\frac{1}{2})}$ **Inverso multiplicativo**

$\mathbf{x > 5}$

Por lo tanto, el dominio de la función es el intervalo: $\boldsymbol{D_f : x \in (5, +\infty)}$

a. **Interceptos:**

- Intercepto con el eje **x**: se hace $\mathbf{y = 0}$

Si $\mathbf{y = 0 \rightarrow 0 = \log_5(2\,x - 10)}$ aplicando la definición, tenemos

$\mathbf{5^0 = 2x - 10}$

$\mathbf{1 = 2x - 10 \rightarrow 2x - 10 = 1 \rightarrow 2x - 10 - 1 = 0 \rightarrow 2x - 11 = 0}$

$$\mathbf{2x = 11 \rightarrow x = \frac{11}{2}}$$

La intersección con el eje **x** es el punto de coordenadas: $\mathbf{\left(\frac{11}{2}, 0\right)}$

- Intercepto con el eje **y**: se hace $\mathbf{x = 0}$

$\mathbf{y = \log_5(2 * 0 - 10) \rightarrow \ y = \log(-10)}$ **no existe,** por lo tanto no tiene intersección con el eje **y**

b. **Gráfica**

c.

Los valores se muestran en la tabla, la gráfica se muestra en la figura 32.

x = 5 es una asíntota vertical.

	X	$y = f(x) = \log_5(2x - 10)$	Y	(x, y)
Asíntota vertical	5	$\log_5(2 * 5 - 10) = \log_5(0)$	No existe	
D	6	$\log_5(2 * 6 - 10) = \log_5(2)$	0.43…	$(6, 0.43$
E	7	$\log_5(2 * 7 - 10) = \log_5(4)$	0.86…	$(7, 0.86$
R	8	$\log_5(2 * 8 - 10) = \log_5(6)$	1.11…	$(8, 1.11$
E	9	$\log_5(2 * 9 - 10) = \log_5(8)$	1.29…	$(9, 1.29$
C	10	$\log_5(2 * 10 - 10) = \log_5 10)$	1.463…	$(10, 1.4$
H A	11	$\log_5(2 * 11 - 10) = \log_5(12)$	1.54…	$(11, 1.5$

d. Determine intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.

Crece en el intervalo: $(5, +\infty)$

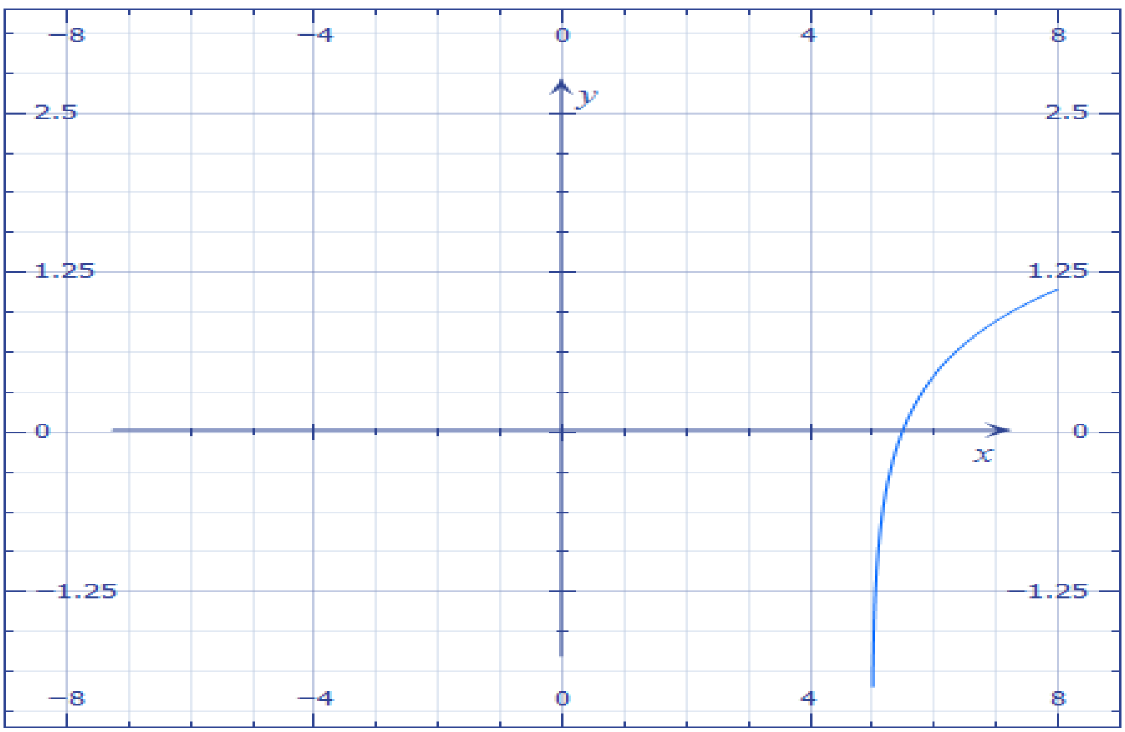


Figura 26. Gráfica de $y = f(x) = \log_5(2x - 10)$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

NOTA:

Una función logarítmica es continua en todo su dominio.

En el siguiente enlace presenta una visión de las funciones: cuadrática, logarítmica y exponencial.

http://www.youtube.com/watch?v=bSgmlSW-RVY&feature=related

- **Función definida por tramos**

Este tipo de funciones también reciben el nombre de:
Función definida por partes o función definida por tramos o función seccionalmente definida.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Grafique la función: $\boldsymbol{y = f(x) = \begin{Bmatrix} 1 - x, & si\ x \leq 1 \\ x^2, & si\ x > 1 \end{Bmatrix}}$

Procedimiento

a. Cuando: $\boldsymbol{x \leq 1}$ se debe utilizar $\boldsymbol{f(x) = 1 - x}$, como es una **línea recta** se asignan dos valores (cualquiera) a **x**, en este caso se asignan el **1** y el $\boldsymbol{-2}$ para hacer su gráfica.

X	$\boldsymbol{f(x) = 1 - x}$	Y	$\boldsymbol{(x, y)}$
1	$\boldsymbol{1{-}(1) = 1 - 1}$	**0**	$\boldsymbol{(1, 0)}$
-2	$\boldsymbol{1 - (-2)1 + 2}$	**3**	$\boldsymbol{(-2, 3)}$

Nota: el valor correspondiente a $x = 1$ **sí hace parte de esta gráfica**, por esto se coloca en dicho punto **un punto lleno**.

b. Cuando: $x > 1$, se debe utilizar $f(x) = x^2$, es una **parábola**, se da a x valores de **1** en adelante:

X	$f(x) = x^2$	Y	(x, y)
1	$(1)^2$	**1**	$(1, 1)$
2	$(2)^2$	**4**	$(2, 4)$
3	$(3)^2$	**9**	$(3, 9)$
4	$(4)^2$	**16**	$(4, 16)$
5	$(5)^2$	**25**	$(5, 25)$

Tenga en cuenta que para este tramo el valor $x = 1$ **no hace parte de esta figura**, para indicar esto en la gráfica se hace con un **punto hueco (o en blanco)**.

La gráfica se muestra en la figura 33.

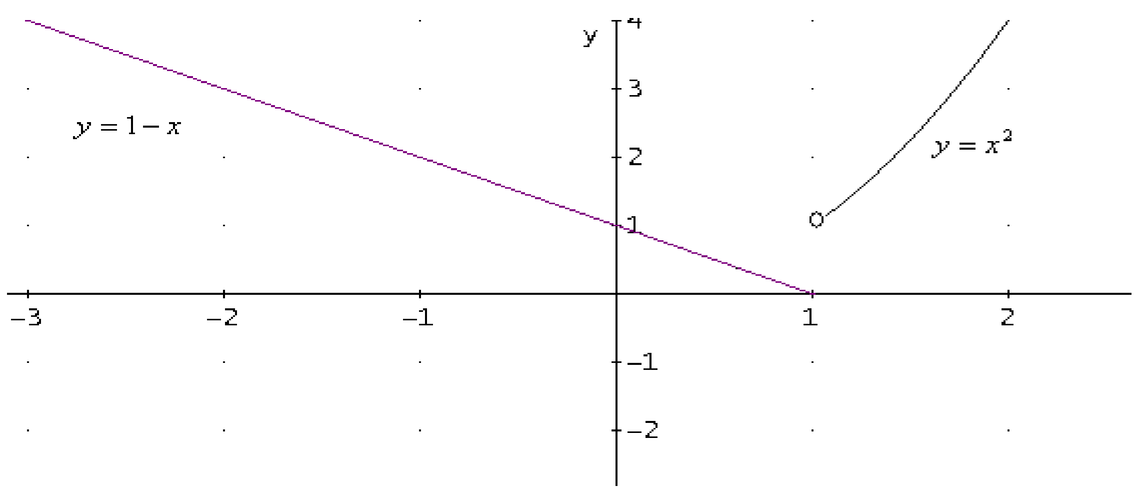


Figura 33. Gráfica de la función: $y = f(x) = \begin{cases} 1 - x \; si \; x \leq 1 \\ x^2 \;\; si \;\; x > 1 \end{cases}$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

2. Para la función:

$$y = f(x) = \begin{cases} 3x + 2 \;\; si\; x \leq -2 \\ x^2 + 1 \;\; si\; x > -2 \end{cases}$$

a. Calcule: $f(0),\ f(-1),\ f(-2),\ f(10),\ f(-5),\ f(-2)$

Procedimiento

Como $x = 0$ es **mayor** que-2, debemos reemplazar en el tramo: $x^2 + 1$

- $f(0) = (0)^2 + 1 = 1$

Como $x = -1$ es **mayor** que **– 2**, debemos reemplazar en el tramo: $x^2 + 1$

- $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

Como $x = 10$ es **mayor** que **– 2**, debemos reemplazar en el tramo: $x^2 + 1$

- $f(10) = (10)^2 + 1 = 100 + 1 = 101$

Como $x = -5$ es **menor** que **– 2**, debemos reemplazar en el tramo: $3x + 2$

- $f(-5) = 3 * (-5) + 2 = -15 + 2 = -13$

Como $x = -2$ es **igual** a **– 2**, debemos reemplazar en el tramo: $3x + 2$

- $f(-2) = 3 * (-2) + 2 = -6 + 2 = -4$

b. Gráfica:

Procedimiento

Para graficar esta función se dan 5 valores a x menores o iguales a − 2 (incluyendo el − 2) y se reemplazan en $3x+2$. Y se dan 5 valores a x mayores que − 2 (sin incluir el − 2) y se reemplazan en x^2+1.

Para ello se completa la siguiente tabla de valores:

Línea Recta				Parábola		
X	$3x+2$	Y		X	x^2+1	Y
-6	$3(-6)+2$ $=-18+2$	-16		-1	$(-1)^2+1$ $=1+1$	2
-5	$3(-5)+2$ $=-15+2$	-13		0	$(0)^2+1$ $=0+1$	1
-4	$3(-4)+2$ $=-12+2$	-10		1	$(1)^2+1$ $=1+1$	2
-3	$3(-3)+2$ $=-9+2$	-7		2	$(2)^2+1$ $=4+1$	5
-2	$3(-2)+2$ $=-6+2$	-4		3	$(3)^2+1$ $=9+1$	10

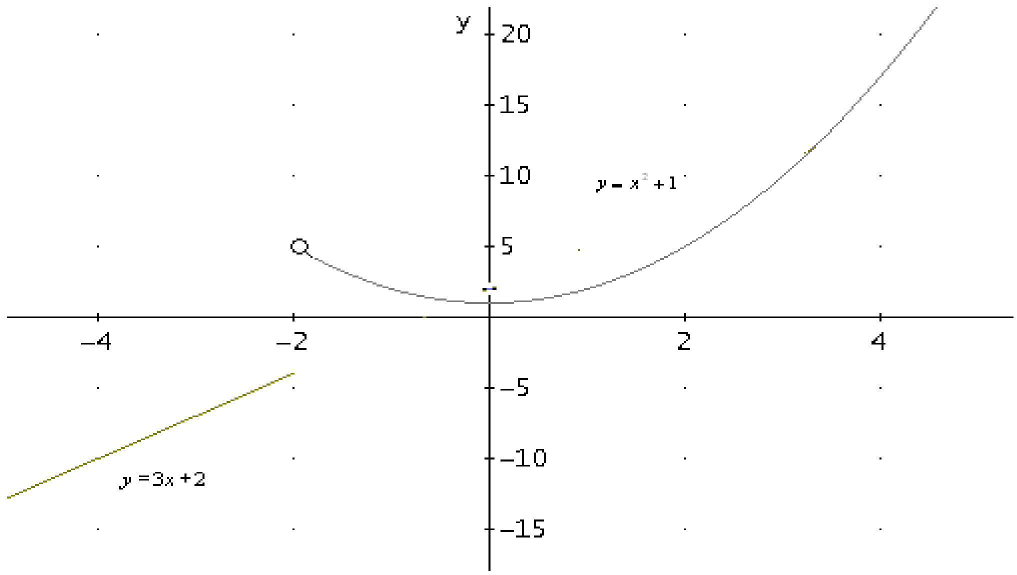


Figura 34.

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN: $y = f(x) = \begin{cases} 3x+2 & si \quad x \leq -2 \\ x^2+1 & si \quad x > -2 \end{cases}$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Enlaces para funciones por tramos:

http://www.youtube.com/watch?v=jkUW3dtMSyU&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=F8lDKlw4N-U&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=5Z52EpuyYOw&feature=related

ALGUNAS FUNCIONES ESPECIALES:

- **Función valor absoluto de x,** que se escribe como:

$$\boldsymbol{y = f(x) = |x|}$$

Esta función toma cualquier número y lo convierte a positivo.
Se define:

$$\boldsymbol{y = f(x) = |x| = \begin{Bmatrix} x \; si \; x \geq 0 \\ -x \; si \; x < 0 \end{Bmatrix}}$$

El dominio de esta función son todos los números reales: $\boldsymbol{D_f}: \boldsymbol{x \in R_e}$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $\boldsymbol{y = f(x) = |x|}$

Hallar:

a. $\boldsymbol{f(2) = 2}$

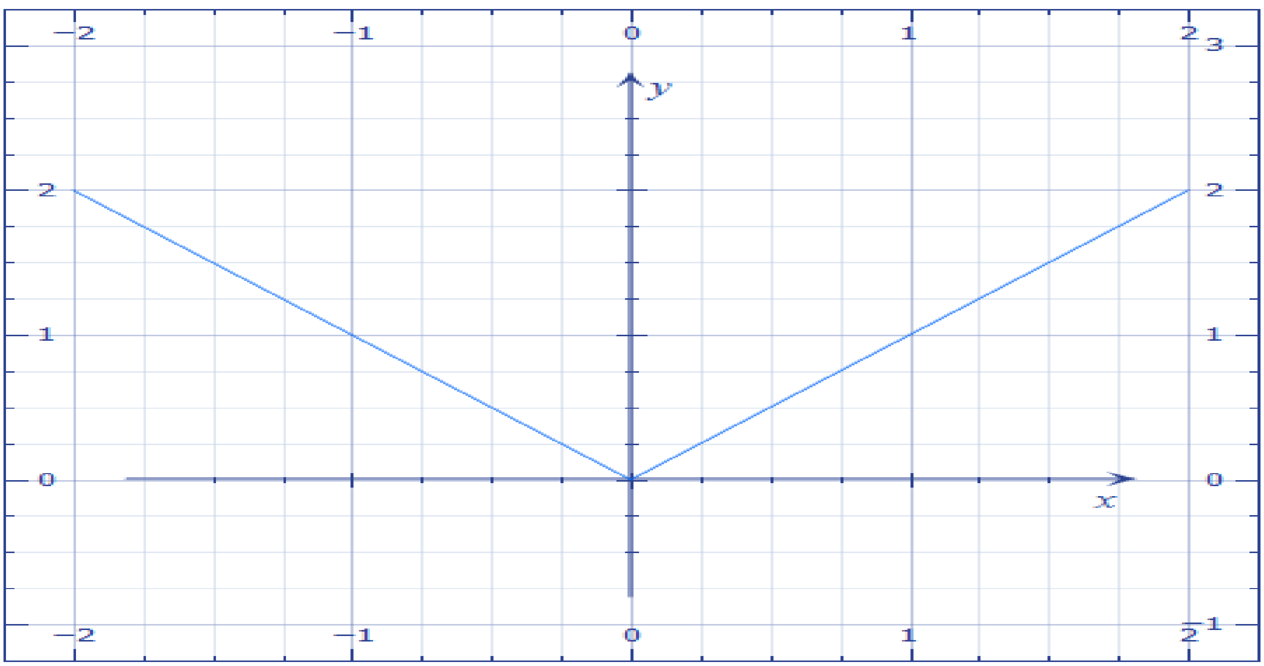
b. $\boldsymbol{f(-3) = 3}$

c. $\boldsymbol{f(0) = 0}$

d. $\boldsymbol{f(-\frac{3}{5}) = \frac{3}{5}}$

- **Gráfica de la función valor absoluto**

Su gráfica es de la forma (forma general):



2. Realice la gráfica de la siguiente función valor absoluto:

$$y = f(x) = |2x - 1|$$

a. **Dominio**: el dominio de la función, por definición, son los números Reales: $D_f: x \in R_e$

b. **Interceptos**:

- Con el eje **x**: se hace $y = 0 \rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$
  El intercepto con el eje **x** es el punto de coordenadas**:**$(0.5, 0)$
- Con el eje y: se hace $x = 0 \rightarrow y = |2(0) - 1| \rightarrow y = |-1| \rightarrow$

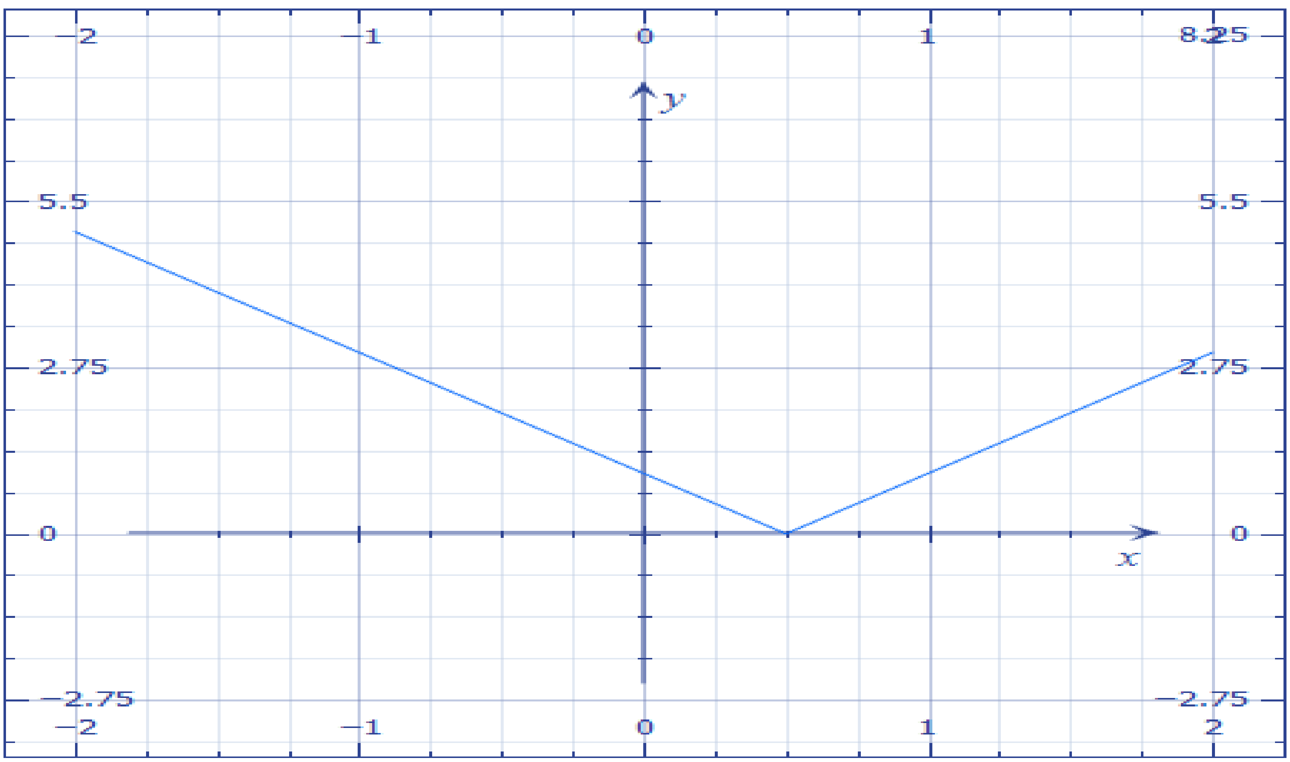
$y = 1$
  El intercepto con el eje **y** es el punto de coordenadas**:**$(0, 1)$

c. **Gráfica:** para realizar la gráfica se asignan valores a la izquierda y valores a la derecha del intercepto con el eje **x,** de acuerdo a la siguiente tabla:

	X	$y = f(x) = \|2x - 1\|$	Y	(x, y)
IZQUIERDA	-3	$\|2(-3) - 1\| = \|-7\|$	7	$(-3, 7)$
	-2	$\|2(-2) - 1\| = \|-5\|$	5	$(-2, 5)$
	-1	$\|2(-1) - 1\| = \|-3\|$	3	$(-1, 3)$
	0	$\|2(0) - 1\| = \|-1\|$	1	$(0, 1)$
Intercepto eje x	0.5	$\|2(0.5) - 1\| = \|-1\|$	0	$(0.5, 0)$
	1	$\|2(1) - 1\| = \|1\|$	1	$(1, 1)$

D E R E C H A	**2**	$\lvert 2(2)-1\rvert = \lvert 3\rvert$	**3**	$(2,3)$
	3	$\lvert 2(3)-1\rvert = \lvert 5\rvert$	**5**	$(3,5)$

La gráfica sería:



- **Función mayor entero menor o igual a x.**

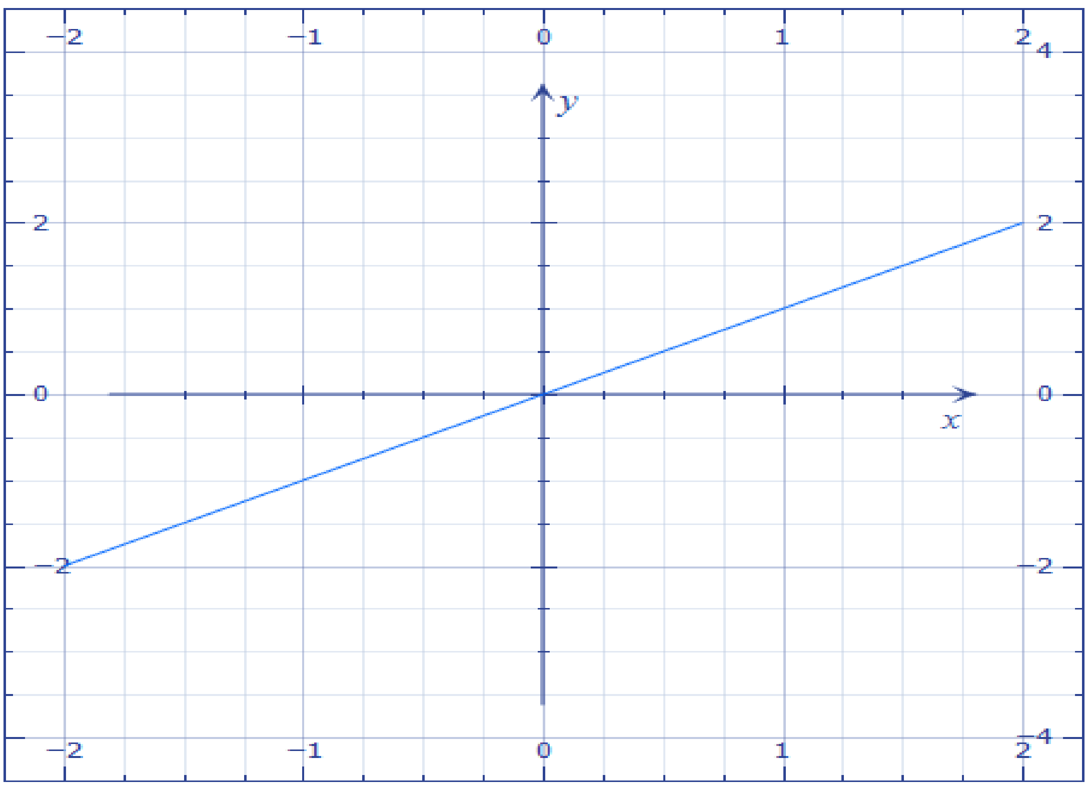
  Se escribe:

$$y = f(x) = [\![x]\!]$$

Esta función toma cualquier número y lo convierte en el entero más próximo menor o igual que el número de entrada.

Dominio: el dominio de esta función son todos los números reales, $D_f : x \in R_e$

Gráfica: su gráfica es de la forma:



EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

a. Si $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [\![\boldsymbol{x}]\!]$

Hallar:

1. $\boldsymbol{f(5) = [\![5]\!] = 5}$

2. $\boldsymbol{f(9.5) = [\![9.5]\!] = 9}$

3. $\boldsymbol{f(0) = [\![0]\!] = 0}$

4. $\boldsymbol{f(-4.65) = [\![-4.65]\!] = -5}$

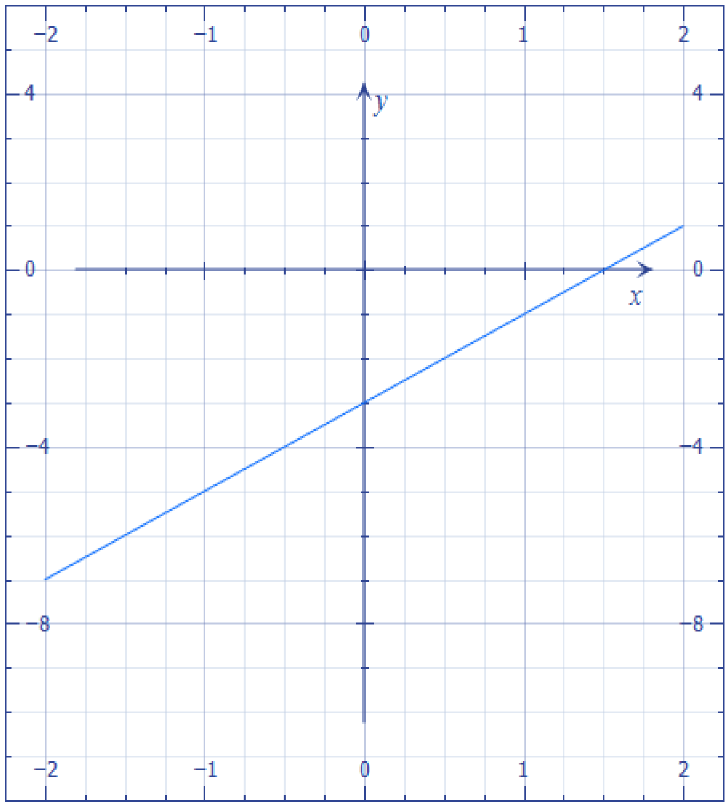
5. $\boldsymbol{f\left(\frac{2}{5}\right) = \left[\!\!\left[\frac{2}{5}\right]\!\!\right] = [\![0.4]\!] = 0}$

6. $\boldsymbol{f\left(\sqrt{30}\right) = \left[\!\!\left[\sqrt{30}\right]\!\!\right] = [\![5.47\ldots]\!] = 5}$

b. Grafique la función $\boldsymbol{y = f(x) = [\![2x-3]\!]}$

¿Cómo se realizaría la tabla de valores? Represéntela

Su gráfica sería:



- **Función signo de x:**

Se escribe de la forma: $\boldsymbol{f(x) = signo(x)}$

Se define como: $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 1, \; si\; x > 0 \\ 0 \; si\; x = 0 \\ -1, \; si\; x < 0 \end{cases}}$

Para la función $\boldsymbol{f(x) = signo(x)}$, halle:

1. $f(10) = 1$
2. $(-2) = -1$
3. $f(0) = 0$
4. $\sqrt{3} = 1$
5. $f\left(-\frac{2}{3}\right) = -1$
6. $(-5) = -1$
7. $f\left(-\frac{1}{4}\right) = -1$
8. $f(3) = 1$
9. $(-8) = -1$
10. $f(6) = 1$

Ejercicios de Entrenamiento

1. **Determine el dominio, los interceptos y grafique cada una de las siguientes funciones:**

a. $f(x) = 6x^2 - 11x + 4$

b. $f(x)\sqrt{x^2 - 25}$

c. $f(x) = \dfrac{7x-3}{5x^2 + x - 4}$

Para las funciones anteriores determine intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento. Diga en qué puntos la función es discontinua.

2. **Grafique:** $y = f(x) = |2x+1|$

3. **Grafique:** $y = f(x) = |x^2 - 5x + 4|$

4. **Para la función:** $y = f(x) = [\![2x-3]\!]$ **realice su gráfica (elabore la tabla de valores) y determine:**

1. $f(0)$
2. $f(2/3)$
3. $f(5)$
4. $f(\sqrt{3})$
5. $f(e)$
6. $f(\pi)$

3.4. Aplicaciones

1. Se tiene una lámina rectangular de cartón de dimensiones **a** y **b** conocidas, véase la figura 35.

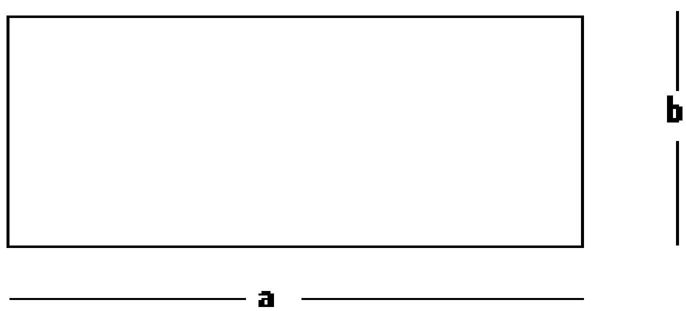


Figura 35.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Con esta lámina de cartón se pueden fabricar cajas sin tapa y de altura **X**. Para ello en cada esquina de la caja se cortan cuadrados idénticos de lado x. Véase figura 36.

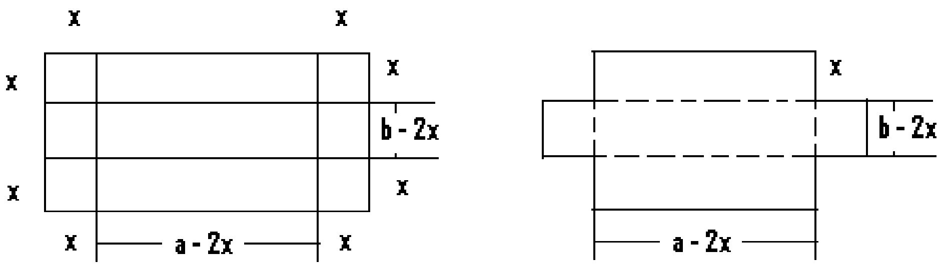


Figura 36
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Luego se doblan los lados hacia arriba. Véase figura 37

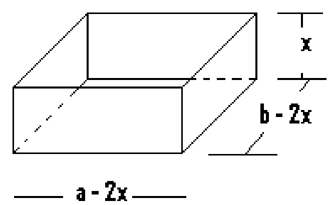


Figura 37
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

El volumen de una caja de **base rectangular** se obtiene como:

Volumen = **altura (x)** multiplicada por el **largo (a-2x)** multiplicado por el **ancho (b-2x)**, en unidades cúbicas.

Para la caja se tiene que:

$\boldsymbol{Altura = x}$
$\boldsymbol{Largo = a - 2x}$
$\boldsymbol{Ancho = b - 2x}$

Por lo tanto el volumen, simbolizado como **v** es igual a:

$$\boldsymbol{v = altura * largo * ancho}$$

Reemplazando por sus valores, tenemos:

$$\boldsymbol{v(x) = x * (a - 2x) * (b - 2x)}$$

Efectuando la multiplicación: ==

$$\boldsymbol{v(x) = (ax - 2x^2) * (b - 2x) \rightarrow}$$

$$\boldsymbol{v(x) = abx - 2ax^2 - 2bx^2 + 4x^3 \rightarrow}$$

$$\boldsymbol{v(x) = 4x^3 - (2ax^2 + 2bx^2) + abx}$$

La expresión para el volumen sería, entonces:

$$\boxed{\boldsymbol{v(x) = 4x^3 - 2x^2(a + b) + abx}}$$

Teniendo en cuenta la situación anterior resuelva el siguiente problema particular:

- Se desea construir una caja de forma rectangular sin tapa a partir de una lámina de cartón de 20 cm por 15 cm. Para ello se cortarán cuadrados idénticos en las cuatro esquinas y se doblarán los lados hacia arriba.

1. Escriba la función para el volumen.

Procedimiento

Se tiene que la función para el volumen es:

$$\boxed{\boldsymbol{v(x) = 4x^3 - 2x^2(a + b) + abx}}$$

Con: $\boldsymbol{a = 20\ cm \quad y \quad b = 15cm}$

Reemplazando en la función de volumen, se tiene:

$\boldsymbol{v = 4x^3 - 2x^2 * (20 + 15) + (20) * (15) * x}$

Efectuando las operaciones indicadas:

$\boldsymbol{v = (4x^3 - 70x^2 + 300x)cm^3}$

2. Determine el dominio matemático para esta función.

Por ser una función polinómica su Dominio es**:** $\boldsymbol{D_f: x \epsilon R_e}$

3. Determine el dominio desde el punto de vista de una **situación real** para la función de volumen.

Procedimiento

a. Se debe cumplir que el **volumen** sea mayor que cero, esto es: $\boldsymbol{v(x) > 0}$
   $\boldsymbol{v(x) > 0 \rightarrow x * (a - 2x) * (b - 2x) > 0}$

b. Reemplazando los valores de **a** y de **b** en la desigualdad:

$$\boldsymbol{x * (20 - 2x) * (15 - 2x) > 0}$$

Se tiene:

$$\boldsymbol{x > 0, \qquad (20 - 2x) > 0, \qquad (15 - 2x) > 0}$$

c. Igualando a cero , despejando el valor de **x** y representando estos valores en la recta numérica:

Se tiene que:

$\boldsymbol{x = 0}$

$\boldsymbol{20 - 2x = 0 \rightarrow -2x = -20 \rightarrow x = \frac{-20}{-2} \rightarrow x = 10}$

$\boldsymbol{15 - 2x = 0 \rightarrow -2x = -15 \rightarrow x = \frac{-15}{-2} \rightarrow x = \frac{15}{2}}$

La solución para la desigualdad es:

$-\infty$________0__________$\frac{15}{2}$____________10_________$+\infty$

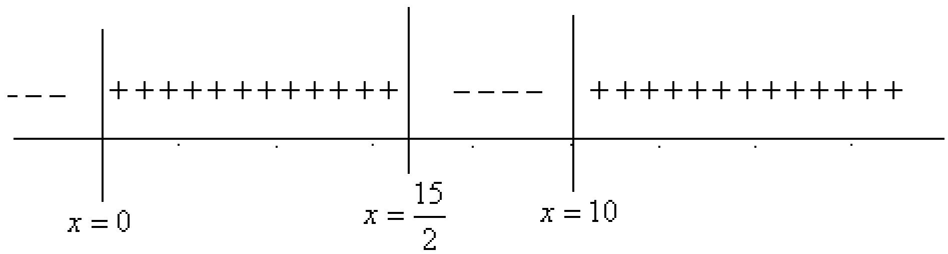


Figura 38. Solución de la desigualdad.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

El Dominio para la situación real es: $\boldsymbol{x} \ \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{0}, \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{2}}) \cup (\mathbf{10}, +\infty)$

Pero con valores de **X** en el intervalo:
$(\mathbf{10}, +\infty)$ se tendrían **dimensiones negativas**, lo cual, no es posible en problemas reales.

Por lo tanto, el dominio desde el punto de vista de una **situación real** es: $\boldsymbol{x} \ \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{0}, \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{2}})$

Nota: los valores $\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \ \boldsymbol{y} \ \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{2}}$ no se incluyen, ya que con estos valores el volumen sería igual a cero, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, es decir, no habría caja.

- Determine las dimensiones de la caja de tal manera que su volumen sea de 378 cm^3. Dé su respuesta con una precisión de tres decimales.

Procedimiento

Se debe plantear y solucionar la ecuación:
$\boldsymbol{v = (4x^3 - 70x^2 + 300x)cm^3}$ **pero** $\boldsymbol{v = 378cm^3}$
Reemplazando se tiene:

$$\boldsymbol{4x^3 - 70x^2 + 300x = 378}$$

Se iguala a cero:

$$\boldsymbol{4x^3 - 70x^2 + 300x - 378 = 0}$$

Se saca factor común el **2:**

$$\boldsymbol{2(2x^3 - 35x^2 + 150x - 189) = 0}$$

Dividiendo por 2 ambos lados de la ecuación:

$$\boldsymbol{2x^3 - 35x^2 + 150x - 189 = 0}$$

La ecuación se soluciona Factorizando un polinomio de **grado 3**, para ello se utilizará el método por evaluación (utilizando la división sintética).
Recuerde que los posibles factores del polinomio $\boldsymbol{2x^3 - 35x^2 + 150x - 189}$ son los divisores del término independiente:

Los posibles factores son:

$$\boldsymbol{x = -1 \rightarrow 2(-1)^3 - 35(-1)^2 + 150(-1) - 189 = -376\ No\ es\ factor}$$

$$\boldsymbol{x = 1 \rightarrow 2(1)^3 - 35(1)^2 + 150(1) - 189 = -72\ No\ es\ factor}$$

$$\boldsymbol{x = -3 \rightarrow 2(-3)^3 - 35(-3)^2 + 150(-3) - 189 = -1008\ No\ es\ factor}$$

$$\boldsymbol{x = 3 \rightarrow 2(3)^3 - 35(3)^2 + 150(3) - 189 = 0\ \ Si\ es\ un\ factor}$$

Esto quiere decir que: $\boldsymbol{x = 3 \rightarrow x - 3 = 0}$ es un factor. Para encontrar el otro factor debemos efectuar la división:

$$\frac{2x^3 - 35x^2 + 150x - 189}{x - 3}$$

Utilizando división sintética, se toman los coeficientes del polinomio del numerador, se iguala el denominador a cero y se despeja la **x**:

2	**-35**	**150**	**-189**	**3**
	6	**-87**	**189**	
2	**-29**	**63**	**0**	

La ecuación queda:

$(x - 3)(2x^2 - 29x + 63) = 0$

Se iguala cada factor a cero:

$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

$2x^2 - 29x + 63 = 0$

Esta última ecuación la resolvemos utilizando fórmula general:

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga presente: la fórmula general está dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De donde:

$$x = \frac{-(-29) \pm \sqrt{(-29)^2 - 4(2)(63)ac}}{2(2)} \to x == \frac{29 \pm \sqrt{841 - 504}}{4}$$

$$x = \frac{29 \pm \sqrt{377}}{4}$$

$$x_1 = \frac{29 + \sqrt{377}}{4} \approx 11,839$$

$$x_2 = \frac{29 - \sqrt{377}}{4} \approx 2.661$$

Las dimensiones de la caja, serían:

Valor variable	ALTURA X	LARGO 20 - 2X	ANCHO 15 – 2X
$x = 3$	$3cms.$	$20 - 2(3) = 14cms.$	$15 - 2(3) = 9cms.$
$x = 2,661$	$2,661$	$20 - 2(2,661)$ $= 14,678cms$	$15 - 2(2,661)$ $= 9,678cms$
$x = 11,839$	$11,839$	$20 - 2(11,839)$ $= -3,678cms$ **Se obtendría una dimensión negativa, no es posible.**	Con el ancho ocurriría lo mismo que con el largo. Verifique realizando el reemplazo correspondiente.

- Con **x** determine la cantidad de material utilizado.

Procedimiento

Serían 5 caras ya que la caja es destapada:
Con $x = 3$ la cantidad de material utilizado es:
Cantidad de material utilizado:

- **La base de la caja** (el fondo), tendría: $\mathbf{14cms * 9cms = 126cms^2}$
- **Los laterales** $\mathbf{= 9cms * 3cms = 27cms^2\ pero\ son\ 2 \rightarrow 27cms^2 * 2 = 54cms^2}$
- **El lado frontal + el lado trasero**: $\mathbf{(14 * 3) + (14 * 3) = 42cms^2 + 42cms^2 = 84cms^2}$

El material utilizado$=$ $\mathbf{126cms^2 + 54cms^2 + 84cms^2 = 264\ cms^2}$

Con $\boldsymbol{x = 2,661}$ la cantidad de material utilizado:
Siguiendo el procedimiento anterior, tenemos:

$$\mathbf{14,678cms * 9,678cms + 2 * 14,678cms * 2,661cms + 2 * 9,678cms * 2,661cms = 271,676316}$$

- Utilice las dimensiones apropiadas de tal manera que el desperdicio de material sea el más bajo dentro de los posibles para un volumen de 378 cm^3.

Solución

Observando el resultado anterior, se ve que el **menor desperdicio (por ser mayor el área del material utilizado)** se presenta cuando las dimensiones de la caja son:

Altura: 2,661 cm
Largo: 14,678 cm
Ancho: 9,678 cm

2. Se tiene una lámina cuadrada de cartón de lado **x**, véase la figura 39.

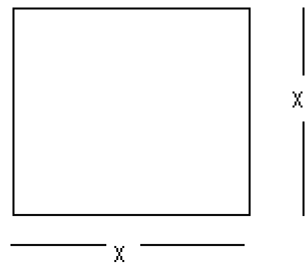


Figura 39.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Con esta lámina de cartón se pueden fabricar cajas sin tapa y de altura h. Para ello en cada esquina de la caja se cortan cuadrados idénticos de lado h. Véase figura 40.

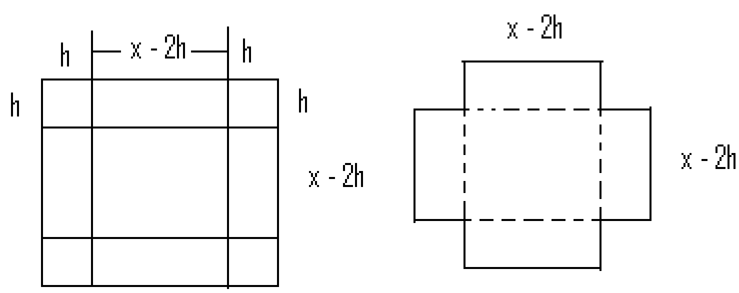


Figura 40
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Luego se doblan los lados hacia arriba. Véase la figura 41.

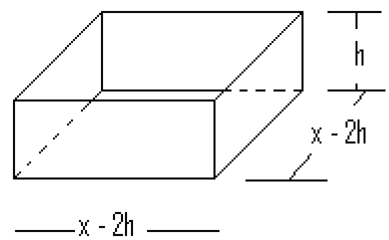


Figura 41.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

El volumen de una caja de base rectangular se obtiene como:

$$\boldsymbol{Volumen = (Altura * largo * ancho)unidades\ cúbicas}$$

Para la caja podemos ver que:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{Altura} &= \boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{Largo} &= \boldsymbol{x - 2h} \\ \boldsymbol{Ancho} &= \boldsymbol{x - 2h} \end{aligned}}$$

Por lo tanto, el volumen, que lo podemos simbolizar como v es igual a:

$$\boldsymbol{V = h * (x - 2h) * (x - 2h)}$$

Efectuando la multiplicación la expresión para el volumen es:

$$\boldsymbol{v = hx^2 - 4h^2x + 4h^3}$$

Teniendo en cuenta la situación problémica anterior resuelva:

Se desea construir una caja sin tapa. Para ello se tomará una lámina cuadrada de cartón y se cortarán en las cuatro esquinas cuadrados idénticos de 5 cm de lado y se doblarán hacia arriba. Determine el dominio de la función de volumen.

1. Escriba la función para el volumen.
2. Determine el dominio matemático para esta función.
3. Determine el dominio desde el punto de vista real para el modelo de volumen.
4. Determine las dimensiones de la lámina de cartón a utilizar, si la caja será hecha para contener un volumen de 2000 cm^3.
5. Determine las dimensiones de la caja.
6. Determine la cantidad de material utilizado.

Procedimiento

1. Escriba la función de volumen de la caja.

- Una forma es reemplazando $\boldsymbol{h = 5}$ en la expresión

$$\boldsymbol{v = hx^2 - 4h^2x + 4h^3}$$

$$\boldsymbol{v = 5x^2 - 4(5)^2x + 4(5)^3 = 5x^2 - 100x + 500\ \ cm^3}$$

Se tiene que:

$$\boldsymbol{v(x) = 5x^2 - 100x + 500\ \ cm^3}$$

- Otra forma puede ser de la siguiente manera:

Un cuadrado es un rectángulo que tiene los cuatro lados iguales, véase la figura 42.

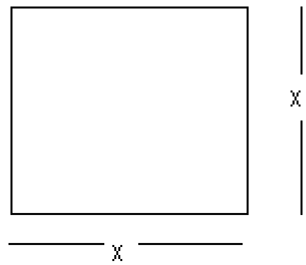


Figura 42.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Sea **x** el lado del cuadrado; se va a quitar en las cuatro esquinas 5 cm a cada lado de la esquina. Véase la figura 43.

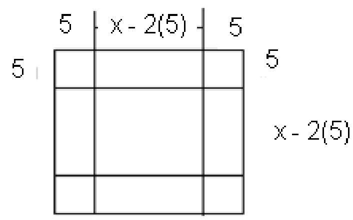


Figura. 43
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Quitando 5 cm en cada esquina el lado de la caja será: $\boldsymbol{x-5-5=x-10}$,Véase la figura 44.

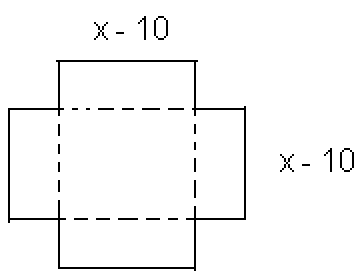


Figura 44.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Doblando los lados hacia arriba la caja queda:

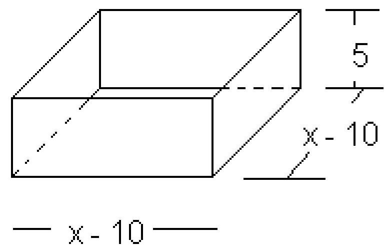


Figura 45

La función para el volumen es: $\boldsymbol{v(x) = 5(x-10)(x-10)}$

Simplificando queda: $\boldsymbol{v(x) = (5x^2 - 100x + 500)cm^3}$

1. **Dominio matemático**: por ser un polinomio su dominio es**:** $\boldsymbol{x \in R_e}$

2. Determine el dominio desde el punto de vista real para el modelo de volumen:

Procedimiento:

Se debe cumplir que: $\boldsymbol{v\ (x) > 0}$

Esto implica que: $\boldsymbol{5(x-10)(x-10) > 0 \rightarrow (x-10) > 0 \rightarrow x > 10}$

Entonces, el dominio desde el punto de vista real para el modelo es:

$$\boldsymbol{D_r : x \in \ (10, +\infty)}$$

3. Determine las dimensiones de la lámina de cartón a utilizar, Si la caja será hecha para contener un volumen de 2000 cm^3.

Procedimiento:

Se debe plantear y solucionar:

$$\boldsymbol{v(x) = 2000}$$

Esto implica que:

$$\boldsymbol{5x^2 - 100x + 500 = 2000}$$

Se saca factor común:

$\boldsymbol{5(x^2 - 20x + 100) = 2000}$

Se divide por 5 en ambos lados de la igualdad:

$\boldsymbol{\frac{5(x^2-20x+100)}{5} = \frac{2000}{5}}$, simplificando:

$\boldsymbol{x^2 - 20x + 100 = 400,}$ igualando a cero:

$\boldsymbol{x^2 - 20x + 100 - 400 = 0 \rightarrow x^2 - 20x - 300 = 0}$

Factorizando e igualando cada factor a cero:

$\boldsymbol{(x - 30)(x + 10) = 0}$

$\boldsymbol{(x - 30) = 0 \rightarrow x = 30}$

$\boldsymbol{\sigma}$

$\boldsymbol{(x + 10) = 0 \rightarrow x = -10:}$ no existen magnitudes negativas, por lo tanto $x = -10$ no es solución para el problema.

Entonces, las dimensiones de la lámina de cartón deben ser: $\mathbf{30\ cm.\ por\ 30\ cm.}$

4. Determine las dimensiones de la caja.

Procedimiento

Observando la figura 45, se tiene que:

LARGO	$x - 10$	$30 - 10$	$20\ cm.$
ANCHO	$x - 10$	$30 - 10$	$20\ cm.$
ALTO	$5\ cm.$	$-$	$5\ cm.$

5. Determine la cantidad de material utilizado:

Procedimiento

Observando las figuras 43 y 44 se puede deducir que:

Cantidad de material utilizado es igual a:

El área de la base + 4 veces el área de un costado.

El área de la base$= \mathbf{20cm. * 20cm. = 400cm^2}$
El área de un costado$= \mathbf{20cm. * 5cm. = 100cm^2}$

$$\boldsymbol{Cantidad\ de\ material = 400cm^2 + 4 * (100cm^2) = 800\ cm^2}$$

3. Se cuenta con 1200 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y sin tapa, encuentre una expresión para el volumen de la caja en términos de una sola variable.

Procedimiento

Sean:

x: Cada lado de la base cuadrada.

y: La altura de la caja. Véase la figura 46

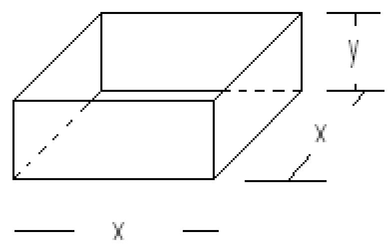


Figura 46
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Recuerde que: el volumen de la caja es igual al área de la base por la altura de la misma.

$\boldsymbol{Área_{base} = x * x = x^2\ cm^2}$

$\boldsymbol{Altura = y\ cm.}$

Reemplazando, el volumen de esta caja es:

$$\boldsymbol{v = x * x * y \rightarrow v = x^2 * y\ \ cm.^3}$$

Para escribir **"y"** en términos de **"x"**, se utiliza la condición para la cantidad de material.

Cantidad de material es: **1200 cm^2**

Para la caja de la figura 46 la cantidad de material es igual a:

La cantidad de material de la base cuadrada más 4 veces la cantidad de material de los cuatro costados, esto es:

$\acute{A}rea_{base} = x * x = x^2$
$\acute{A}rea_{costado} = x * y$: son cuatro costados $(4 * x * y)$
Material utilizado: área de la base + 4 costados= 1200, reemplazando:

$$x * x + 4x * y = 1200 \rightarrow x^2 + 4x * y = 1200$$

Despejando **"y"**:

$$x^2 + 4x * y = 1200 \rightarrow 1200 - x^2 = 4xy \rightarrow$$

$$y = \frac{1200 - x^2}{4x}$$

Reemplazando la expresión anterior en:

$v = x^2 * y \ \ cm.^3$, se tiene:

$$v = x^2 y \Rightarrow v = x^2\left(\frac{1200 - x^2}{4x}\right) \Rightarrow v = \frac{1200x - x^3}{4} cm^3$$

La expresión para el volumen de la caja es:

$$v = x^2 * y \rightarrow v = x^2 * \left(\frac{1200 - x^2}{4x}\right)$$

Efectuando el producto indicado y simplificando:

$$v = \left(\frac{1200x - x^3}{4}\right) cm.^3$$

1. Determine el dominio de la expresión anterior.

Procedimiento:

Por ser una función polinómica su dominio es: $D_f : x \in R_e$

Por ser una situación problémica y para que pueda ser construida la caja, su dominio se debe limitar sólo a los números reales que cumplan que:

$$v(x) = \left(\frac{1200x - x^3}{4}\right) > 0$$

SOLUCIÓN DE LA DESIGUALDAD

$$\frac{1200x - x^3}{4} > 0 \rightarrow 1200x - x^3 > 0$$

Factorizando:

$$x(1200 - x^2) > 0 \rightarrow x(\sqrt{1200} + x)(\sqrt{1200} - x) > 0$$

Igualando cada factor a cero, se obtienen las raíces:

$x = 0$

$\sqrt{1200} + x = 0 \rightarrow x = -\sqrt{1200}$

$\sqrt{1200} - x = 0 \rightarrow x = \sqrt{1200}$

La solución de la desigualdad, que es el dominio para que la caja pueda ser construida, es el intervalo

$$D_{real} : x \in (0, \sqrt{1200})$$

NOTA: $x = \sqrt{1200} = 34.6410161$

2. Encuentre el volumen máximo posible de la caja.

PROCEDIMIENTO

Dando valores a la variable x, reemplazando en la función de volumen y utilizando Excel.

X	v(x)
1	299,75
2	598
3	893,25
4	1184
5	1468,75
6	1746
7	2014,25
8	2272
9	2517,75
10	2750
11	2967,25
12	3168
13	3350,75
14	3514
15	3656,25
16	3776
17	3871,75
18	3942
19	3985,25
20	4000
21	3984,75
22	3938

23	3858,25
24	3744
25	3593,75
26	3406
27	3179,25
28	2912
29	2602,75
30	2250
31	1852,25
32	1408
33	915,75
34	374
35	-218,75

También puedes realizar la tabla asignando los valores de x en la función volumen correspondiente, de la siguiente manera:

X	$v = \left(\frac{1200x - x^3}{4}\right)$	$v(x)$	
1	$\left(\frac{1200(1) - (1)^3}{4}\right)$	299,75	A
2	$\left(\frac{1200(2) - (2)^3}{4}\right)$	598	U
3	$\left(\frac{1200(3) - x^3}{4}\right)$	893,25	
4	$\left(\frac{1200(4) - (4)^3}{4}\right)$	1184	M
5	$\left(\frac{1200(5) - (5)^3}{4}\right)$	1468,75	E
6	$\left(\frac{1200(6) - (6)^3}{4}\right)$	1746	
7	$\left(\frac{1200(7) - (7)^3}{4}\right)$	2014,25	N

8	$\left(\dfrac{1200(8)-(8)^3}{4}\right)$	2272	
9	$\left(\dfrac{1200(9)-(9)^3}{4}\right)$	2517,75	T
10	$\left(\dfrac{1200(10)-(10)^3}{4}\right)$	2750	A
11	$\left(\dfrac{1200(11)-(11)^3}{4}\right)$	2967,25	
12	$\left(\dfrac{1200(12)-(12)^3}{4}\right)$	3168	
13	$\left(\dfrac{1200(13)-(13)^3}{4}\right)$	3350,75	
14	$\left(\dfrac{1200(14)-(14)^3}{4}\right)$	3514	
15	$\left(\dfrac{1200(15)-(15)^3}{4}\right)$	3656,25	
16	$\left(\dfrac{120(16)-(16)^3}{4}\right)$	3776	
17	$\left(\dfrac{1200(17)-(17)^3}{4}\right)$	3871,75	
18	$\left(\dfrac{1200(18)-(18)^3}{4}\right)$	3942	
19	$\left(\dfrac{1200(19)-(19)^3}{4}\right)$	3985,25	
20	$\left(\dfrac{1200(20)-(20)^3}{4}\right)$	4000	
21	$\left(\dfrac{1200(21)-(21)^3}{4}\right)$	3984,75	D
22	$\left(\dfrac{1200(22)-(22)^3}{4}\right)$	3938	I
23	$\left(\dfrac{1200(23)-(23)^3}{4}\right)$	3858,25	S

24	$\left(\frac{1200(24)-(24)^3}{4}\right)$	3744	M
25	$\left(\frac{1200(25)-(25)^3}{4}\right)$	3593,75	I
26	$\left(\frac{1200(26)-(26)^3}{4}\right)$	3406	
26	$\left(\frac{1200(27)-(27)^3}{4}\right)$	3179,25	N
28	$\left(\frac{1200(28)-(28)^3}{4}\right)$	2912	U
29	$\left(\frac{1200(29)-(29)^3}{4}\right)$	2602,75	Y
30	$\left(\frac{1200(30)-(30)^3}{4}\right)$	2250	E
31	$\left(\frac{1200(31)-(31)^3}{4}\right)$	1852,25	
32	$\left(\frac{1200(32)-(32)^3}{4}\right)$	1408	
33	$\left(\frac{1200(33)-(33)^3}{4}\right)$	915,75	
34	$\left(\frac{1200(34)-(34)^3}{4}\right)$	374	
35	$\left(\frac{1200(35)-(35)^3}{4}\right)$	-218,75	

Se ve que el volumen máximo es **4000 cm^3** y se obtiene cuando **x = 20**

Como piden hallar las dimensiones de la caja cuando el volumen es máximo, se debe halla el valor de **y**.

$$y = \left(\frac{1200 - x^2}{4x}\right) \rightarrow y = \left(\frac{1200 - (20)^2}{4(20)}\right) \rightarrow$$

$$y = \left(\frac{1200 - 400}{80}\right) \rightarrow y = \frac{800}{80} \rightarrow y = 10\ cm.$$

Las dimensiones de la caja que permiten obtener el **máximo volumen** son:

$$\boxed{v_{máx} = 20cm * 20cm * 10cm.}$$

El volumen máximo también se puede determinar a partir de la gráfica de la parte pertinente de la función de volumen, como se ve en la figura 47:

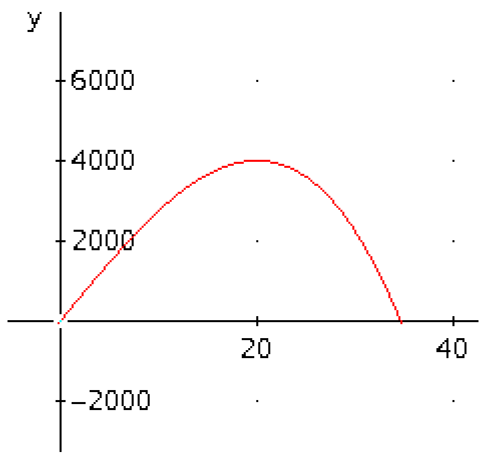


Figura 47
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

4. El siguiente ejercicio es una adaptación de un ejercicio propuesto por (Haeussler & Richard, 1997).
Una empresa de TV por cable tiene 4800 suscriptores que pagan cada uno en promedio $18000 mensuales por el servicio, un estudio determinó que puede conseguir 150 suscriptores más por cada $500 menos en la cuota mensual.

Encuentre una expresión para el ingreso de la empresa de TV.

Solución

Para determinar la función de ingreso, es conveniente llenar la siguiente tabla:

Número de disminuciones de 500	Valor de la cuota mensual	Número de suscriptores	Ingreso
1	$(18000 - 500(1))$	$4800 + 150(1)$	$[18000 - 500(1)] * [4800 + 150(1)]$
2	$(18000 - 500(2))$	$4800 + 150(2)$	$[18000 - 500(2)] * [4800 + 150(2)]$
3	$(18000 - 500(3))$	$4800 + 150(3)$	$[18000 - 500(3)] * [4800 + 150(3)]$
⋮	⋮	⋮	⋮
q	$(18000 - 500(q))$	$4800 + 150(q)$	$[18000 - 500(q)] * [4800 + 150(q)]$

Sea **q**: Número de disminuciones de $ 500 en la cuota.
La función de ingreso se obtiene efectuando las multiplicaciones en la expresión del último renglón y última columna.
Ingreso:

$$r(q) = [18000 - 500(q)] * [4800 + 150(q)]$$

$$r(q) = 86.400.000 + 2.700.000q - 2.400.000q - 75.000q^2$$

Reduciendo términos semejantes, se encuentra una expresión para el ingreso de la empresa de TV.

$$r(q) = -75.000q^2 + 300.000q + 86.400.000$$

Ejercicios de entrenamiento

1. Se desea cercar un campo rectangular en el cual el ancho es 20 metros más pequeño que el largo.
   a. Encuentre una expresión para el perímetro en términos de una sola variable.
   b. Encuentre una expresión para el área cercada en términos de una sola variable.
   c. Determine el dominio de la función de área.
   d. Utilizando una herramienta de informática represente gráficamente la función de área, a partir de la gráfica, determine el área máxima cercada.
   e. Si el área cercada es igual a 8000 m^2, determine las dimensiones del terreno.

2. Una compañía está diseñando un empaque para su producto. Una parte del empaque será una caja abierta construida de un cuadrado de aluminio cortando cuadros de 3 centímetros en cada esquina y doblando los lados hacia arriba.
   a. Encuentre un modelo para el volumen de la caja.
   b. Determine el dominio de la expresión anterior.
   c. Si la caja debe ser hecha para contener un volumen de 588 cm^3, determine la cantidad de material utilizado.

3. Se desea construir un envase cilíndrico de base circular que tenga una capacidad de 125 metros cúbicos.

   a. Halle una expresión para la cantidad de lámina utilizada en términos de una sola variable.
   b. Halle las dimensiones que debe tener para que la cantidad de lámina empleada sea mínima.
   c. Si la altura del envase es 10 cm, determine su radio.

4. El siguiente ejercicio es una adaptación de un ejercicio propuesto por los autores (Haeussler & Richard, 1997).

El fabricante de un producto encuentra que para las primeras 500 unidades que produce y vende la utilidad es de \$50 por unidad. La utilidad disminuye en \$0,10 por cada unidad que produce más allá de 500. Por ejemplo la utilidad total cuando produce y vende 502 unidades es de 500(50)+2(49,8).

a. Encuentre una expresión para la utilidad del fabricante.
b. A partir de una gráfica determine el nivel de producción que maximiza la utilidad.

5. Un mayorista ofrece un precio de venta de $ 5.200 menos un descuento de $ 5 por cada artículo comprado de las mismas especificaciones.
   a. Determine una función para el precio de venta de cada artículo.
   b. Determine una función para el ingreso.
   c. Encuentre un intervalo apropiado en el cual sea óptimo para el mayorista sostener estas condiciones.
   d. Grafique la función de ingreso.

   A partir de la gráfica determine:
   e. El nivel de producción que maximice el ingreso.
   f. El ingreso máximo.

6. Un fabricante estima que si cada pedido de materias primas contiene "x" unidades, el costo total de adquirir y almacenar el suministro anual de materias primas será:

$$\boldsymbol{c(x) = 4x + \frac{100.000}{x}\ D\acute{o}lares}$$

   a. Represente la parte pertinente de la gráfica de este modelo de costo y a partir de ella estime el tamaño óptimo de un pedido, es decir bajo qué condiciones se obtiene el costo mínimo y cual es este costo mínimo.
   b. Cuando el costo es de 1000 dólares, estime cuántas unidades fueron adquiridas y almacenadas.
   c. Si se adquiere y se almacenan 500 unidades, ¿el costo es?

7. Un fabricante estima que si se emplean X máquinas, el costo de un período de producción será:

$$\boldsymbol{c(x) = 10x + \frac{1500}{x}\ D\acute{o}lares}$$

   a. Represente la parte pertinente de la gráfica de este modelo y a partir de ella calcule cuántas máquinas deberá utilizar el fabricante para minimizar el costo.

b. ¿Si los costos en un período de producción son de 500 dólares, estime cuántas máquinas fueron utilizadas?
c. Determine el costo cuando se utilizan 50 máquinas.

8. Un proyectil es lanzado al aire con una velocidad inicial de 192 metros por segundo. Después de t segundos su altura es:

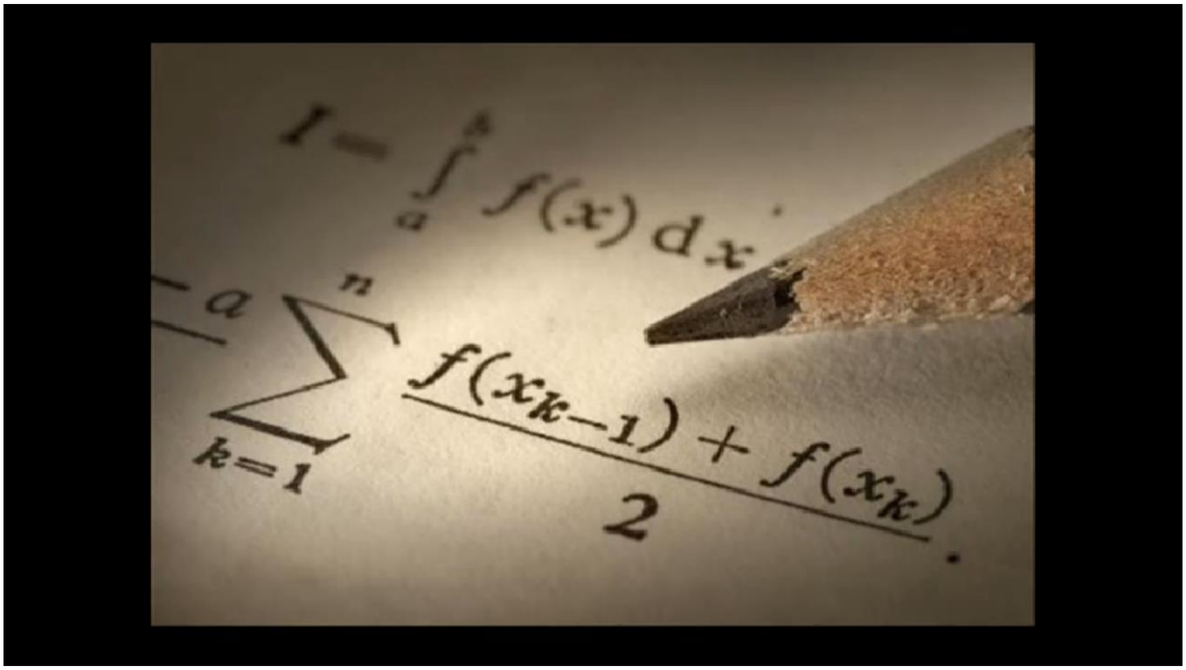
$$\boldsymbol{S(t) = 192t - 16t^2}$$

a. Elabore la gráfica de la parte pertinente de este modelo.
b. A partir de la gráfica determine el tiempo en el cual el proyectil alcanza su altura máxima.
c. Halle la altura máxima que alcanza.
d. Determine el tiempo en el cual la velocidad es de 576 m / s.

9. Un terreno rectangular de $500m^2$ de área va a ser cercado. La cerca para el frente del terreno, como da a una carretera, tiene un costo de US$ 50 el metro instalado, para los otros tres lados, el metro instalado tiene un costo de US$ 35.

a. Obtenga un modelo para el costo total del cercado del terreno en términos del lado que da a la carretera.
b. Elabore la gráfica de este modelo.
c. A partir de la gráfica, estime las dimensiones del terreno que permitan minimizar los costos.
d. Determine cuál es el costo mínimo.

4. UNIDAD 2 LÍMITES



http://www.youtube.com/watch?v=yAB1Z5F0imI&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=oM7u5wjYFUo&feature=related

OBJETIVO GENERAL

Entender el concepto de límite y su aplicación como una aproximación al estudio de la derivada.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Determinar el límite de una función teniendo en cuenta una tabla numérica de aproximaciones a un valor deseado de la variable independiente.
- Estudiar las leyes básicas para la estimación de límites, identificando indeterminaciones de la forma cero sobre cero e infinito menos infinito y el procedimiento para la eliminación de éstas indeterminaciones y la posterior evaluación del límite.
- Determinar la continuidad o discontinuidad de una función en un punto.

4.1. Prueba inicial

1. Complete la siguiente tabla:

X	$f(x)=\frac{x-2}{9-x^2}$	$f(x)$
$f(0)$		
$f(-3)$		
$f(2)$	$f(x)=\frac{2-2}{9-(2)^2}$	0
$f(\frac{5}{3})$		
$f(3)$		
$f(-4)$	$f(x)=\frac{-4-2}{9-(-4)^2}$	$\frac{6}{5}$

2. ¿Para qué valores de x la función **f** no está definida?

3. Complete la siguiente tabla:

X	$g(x) = 5 - 2x - x^2$	$g(x)$
$f(2)$		
$f\left(\frac{3}{7}\right)$		
$f(0)$	$5 - 2(0) - (0)^2$	5
$f(5)$		
$f(-3)$		
$f\left(\frac{2}{5}\right)$		
$f(-1)$	$5 - 2(-1) - (-1)^2$	6

4. ¿Para qué valores de **x** la función **g** no está definida?

5. Complete la siguiente tabla:

X	$(x) = \sqrt{x - 5}$	$h(x)$
$h(1)$		
$h(9)$		
$h(5)$	$\sqrt{5 - 5}$	**0**
$h(-2)$		
$h(0)$		
$h\left(\frac{20}{3}\right)$		
$h\left(\frac{1}{2}\right)$	$\sqrt{\frac{1}{2} - 5} = \sqrt{-\frac{9}{2}}$	No está definido en los números Reales.

6. ¿Para qué valores de **x** la función **h** no está definida?

7. Complete la siguiente tabla:

X	$f(x) = 2^{3-x}$	$h(x)$
$f(0)$		
$f(3)$	$f(x) = 2^{3-3} = 2^0$	1
$f(1)$		
$f(5)$		
$f(-3)$	$f(x) = 2^{3-(-3)} = 2^{3+3} = 2^6$	64
$f\left(\frac{1}{2}\right)$		
$f(-1)$		

8. ¿Para qué valores de x la función h no está definida?

9. Identifique y clasifique cada uno de las siguientes funciones:

Función	Clasificación
$f(x) = 2x + 1$	
$f(x) = \frac{6x-2}{x+1}$	
$f(x) = \sqrt{3x-2}$	
$f(x) = e^{3x-5}$	
$f(x) = \ln(4x+1)$	
$f(x) = x^2 - 6x + 1$	
$f(x) = 1 - \frac{2}{x} + x$	
$f(x) = 2^{2-x}$	

4.2. Definición Intuitiva de Límite

Se pretende determinar qué sucede con una función **f(x)** cuando la variable independiente (o sea la **x**) se aproxima tanto como pueda a un valor **a**, sin llegar a ser igual a dicho valor. Si el límite existe, se dice que es igual a un número **L**. Lo anterior se simboliza de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

En términos conceptuales, el límite cuando x se aproxima a un valor a de la función $f(x)$ es diferente a $f(a)$

Para entender un poco mejor se analizarán los siguientes ejercicios de entrenamiento:

1. Este ejercicio es propuesto por los autores (Haeussler & Richard, 1997). Para la función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Determinar:

a. $f(1)$:

Procedimiento: se reemplaza 1 en la función dada:

$$f(1) = \frac{1^3 - 1}{1 - 1} \to f(x) = \frac{0}{0}$$

Se obtiene una **indeterminación** de la forma: $\frac{0}{0}$

$$b. \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Se realiza el cálculo de:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

La herramienta que se tiene para calcular este límite, es por la definición intuitiva del concepto de límite, es decir, se va a determinar qué sucede con $f(x)$ cuando la variable x se aproxime lo más que pueda a **1**, tanto por **izquierda** como por derecha, esto es:

- Por valores ligeramente **menores que uno**, y
- Por valores ligeramente **mayores que uno.**

Para ello se diligencia la siguiente tabla:

$x \to 1^-$ $(x < 1)$ Se lee 1 por la izquierda	$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$	$x \to 1^+$ $(x > 1)$ Se lee 1 por la derecha	$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
0,9	2,71	1,1	3,31
0,99	2,9701	1,01	3,0301
0,999	2,997001	1,001	3,003001
0,9999	2,9997	1,0001	3,0003
0,99999	2,99997	1,00001	3,00003

Se puede ver que cuando la variable **x** se aproxima a **1**, tanto por izquierda como por derecha, la función se aproxima a **3**; esto es:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

2. Determine por definición intuitiva de límite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$$

Procedimiento

Para ello se diligencia la siguiente tabla:

$x \to 2^-$ $(x < 2)$ Se lee 2 por la izquierda	$f(x) = \frac{x^4 - 16}{x - 2}$	$x \to 2^+$ $(x > 2)$ Se lee 2 por la derecha	$f(x) = \frac{x^4 - 16}{x - 2}$
1,9	29,679	2,1	34,481
1,99	31,76079902	2,01	32,24180099
1,999	31,9760081	2,001	32,0240079
1,9999	31,997602	2,0001	32,002399
1,99999	31,99977	2,00001	32,00022

De acuerdo a los resultados.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} = 32$$

Límites a partir de una gráfica. http://www.youtube.com/watch?v=EYcwxYab0Qk

3. **Límite a partir de una gráfica**.

Utilizando la gráfica de la figura 48 estime

$$\lim_{x \to -1} f(x)$$

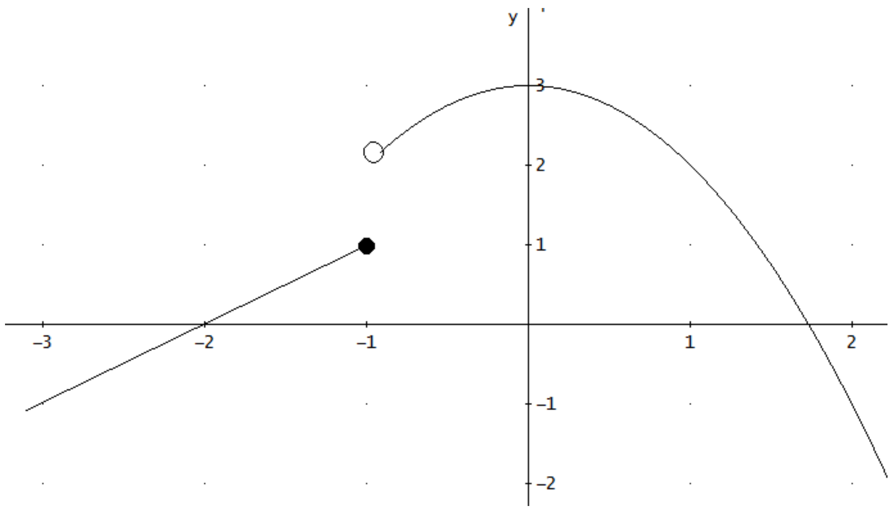


Figura 48. Estimación de límites a partir de una gráfica.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 13 de 2011)

Procedimiento

Para determinar este límite, se deben estimar dos límites que son:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) \;\; y \;\; \lim_{x \to -1^+} f(x)$$

a. Límite por la izquierda de -1:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x)$$

Observando la figura 49, se puede ver que a medida que la **X** se aproxima a **menos 1** por la izquierda, la **Y** se aproxima **a 1**, esto es:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1$$

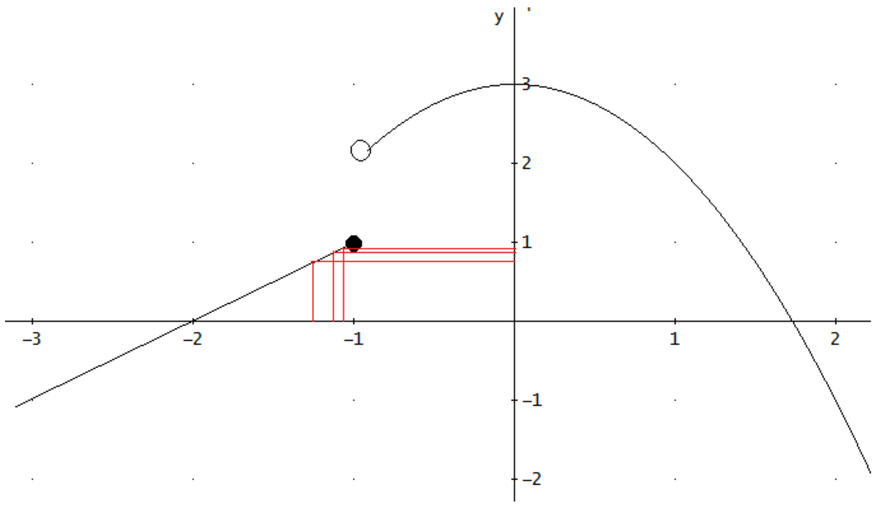


Figura 49. X se aproxima a menos uno por la izquierda
(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 13 de 2011)

b. Límite por la derecha de -1:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x)$$

Observando la figura 50, se puede ver que a medida que la **X** se aproxima a **menos 1** por la derecha, la **Y** se aproxima **a 2**, esto es:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 2$$

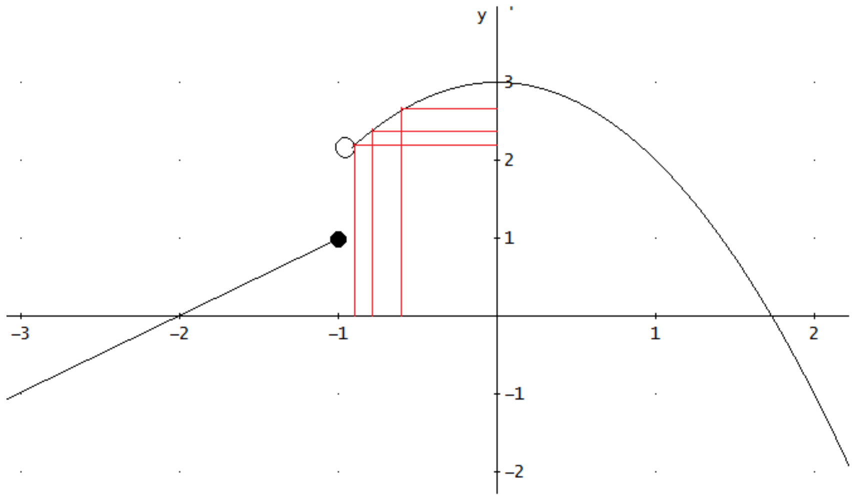


Figura 50. X se aproxima a menos uno por la derecha.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 13 de 2011)

Como:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \to -1^+} f(x) = 2$$

Entonces:

$$\lim_{x \to -1} f(x) \;\; no\ existe$$

4. Límite a partir de una gráfica.

Utilizando la gráfica de la figura 51. Estime:

$$\lim_{x \to -3} \;\; f(x)$$

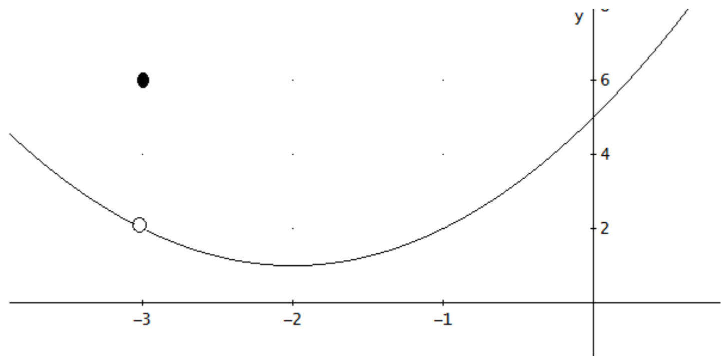


Figura 51. Límite a partir de una gráfica.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 13 de 2011)

Solución

Para determinar este límite, se debe estimar dos límites que son:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) \;\; y \;\; \lim_{x \to -3^+} f(x)$$

a. Límite por la izquierda de -3:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x)$$

Observando la figura 52, se puede ver que a medida que la **X** se aproxima a **menos 3** por la izquierda, la **Y** se aproxima **a 2**, esto es:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = 2$$

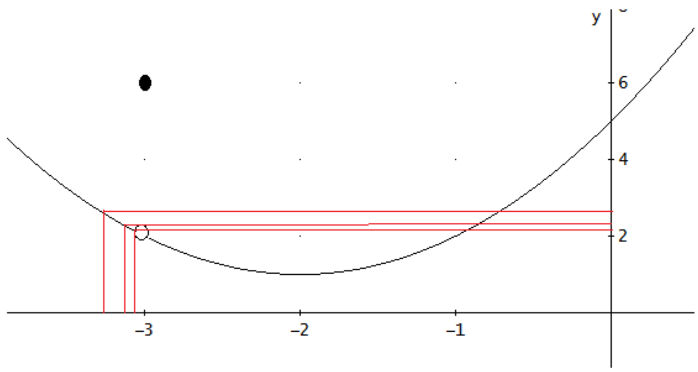


Figura 52.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 13 de 2011)

Estimación de

$$\lim_{x \to -3^+} f(x)$$

Observando la figura 53, se puede ver que a medida que la **X** se aproxima a **menos 3** por la derecha, la **Y** se aproxima **a 2**, esto es:

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = 2$$

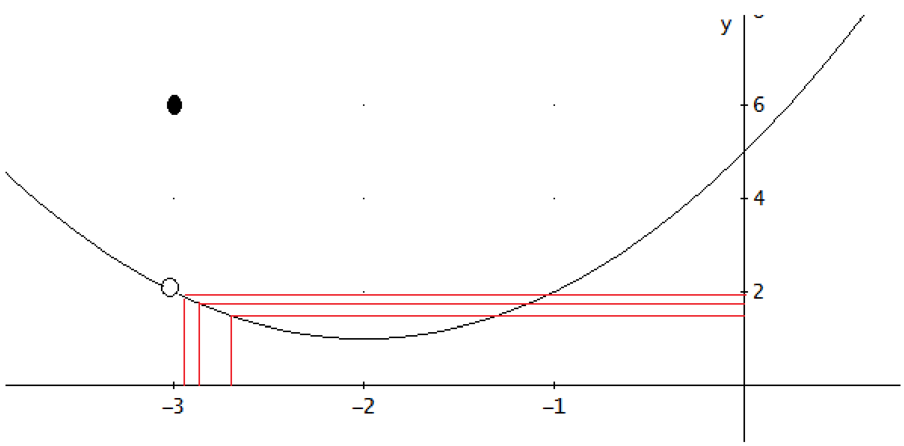


Figura 53.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 13 de 2011)

Como:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^+} f(x) = 2$$

Entonces:

$$\lim_{x \to -3} f(x) = 2$$

6. http://www.youtube.com/watch?v=92HuEpnvWyw&feature=related

Ejercicio de autoevaluación

Utilizando la definición intuitiva de límite, estime:

1. $\lim\limits_{x \to -5} 3x^2 - 2x + 3$

2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 16}{4x - 8}$

3. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

4. Dada la gráfica de la figura 54. Estime: $\lim\limits_{x \to -2} f(x) \wedge \lim\limits_{x \to 2} f(x)$

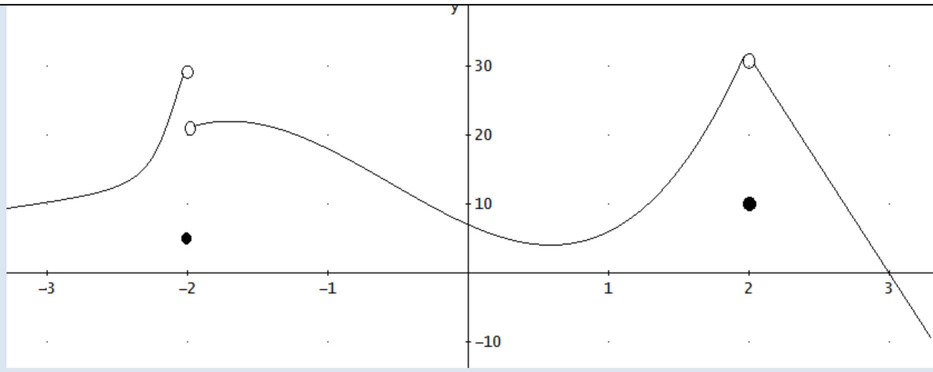


Figura 54.

(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 13 de 2011)

5. **Dada la gráfica de la figura 55. Estime:** $\lim_{x \to -2} f(x) \wedge \lim_{x \to 2} f(x)$

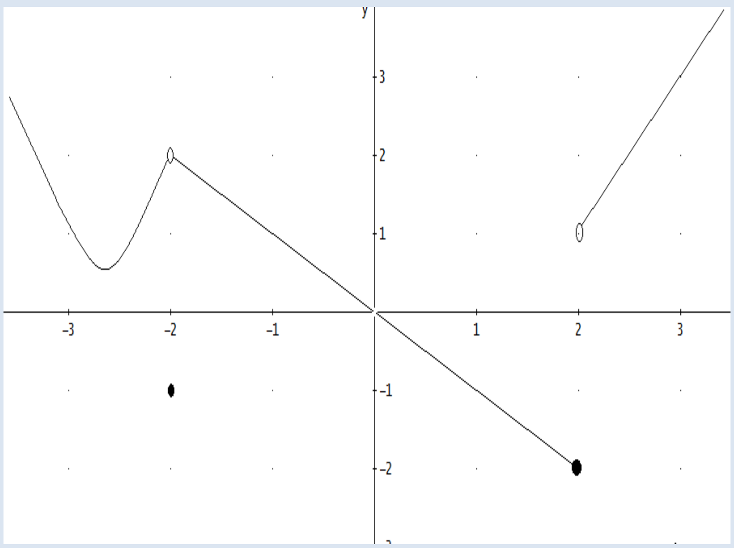


Figura 55

(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 13 de 2011)

4.3. Leyes para estimar límites

http://www.youtube.com/watch?v=rYcr2I423Fs

Applet para calcular límites:
http://www.solvemymath.com/online_math_calculator/calculus/limit_calculator/index.php

El límite de una constante es igual a la constante c:

$$\boxed{\lim_{x \to a} c = c}$$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $\lim_{x \to 7} 10 = 10$

2. $\lim_{x \to -20} 2 = 2$

- **Límite de x elevada a una potencia n.**

$$\boxed{\lim_{x \to a} x^n = (a)^n = a^n}$$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $\lim_{x \to 3} x^4 = (3)^4 = 81$

2. $\lim_{x \to -5} x^3 = (-5)^3 = -125$

3. $\lim_{x \to 4} x^{-2} = (4)^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

- **Límite de una constante por x elevada a una potencia n**

$$\lim_{x\to a} c\, x^n = c * \lim_{x\to a} (x)^n = c * (a)^n$$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $\lim_{x\to 2} 3x^5 = 3 * (2)^5 = 3 * 32 = 96$

2. $\lim_{x\to -3} 7\, x^2 = 7 * (-3)^2 = 7 * (9) = 63$

3. $\lim_{x\to -1} 4\, x^2 = 4 * (-1)^2 = 4 * (1) = 4$

- **El límite de una suma (diferencia) es igual a la suma (diferencia) de los límites.**

$$\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x) \pm \cdots \pm h(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} (g(x) \pm \cdots \pm \lim_{x\to a} h(x)$$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $\lim_{x\to 3} 3x^2 - 6x + 5 = \lim_{x\to 3} 3x^2 - \lim_{x\to 3} 6x + \lim_{x\to 3} 5 =$

$3(3)^2 - 6(3) + 5 = 27 - 18 + 5 = 14$

2. $\lim_{x\to -5} 6x - 2 = 6(-5) - 2 = -30 - 2 = -32$

lim

- **El límite de un producto es igual al producto de los límites.**

$$\boxed{\lim_{x\to a} [f(x) * g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a}(g(x)}$$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $\lim_{x\to -3} (2x+1) * (3x-2) =$

$\lim_{x\to -3} (2x+1) * \lim_{x\to -3} (3x-2)$

Reemplazando:

$[2(-3)+1] * [3(-3)-2] =$

$(-6+1) * (-9-2) = (-5) * (-11) = 55$

2. $\lim_{x\to 2} (3x-2) * (2x+5) =$

$\lim_{x\to 2} (3x-2) * \lim_{x\to 2} (2x+5)$

Reemplazando:

$$[3(2)-2] * [2(2)+5] = (6-2) * (4+5) = 4 * 9 = 36$$

- **El límite de un cociente es igual al cociente de los límites.**

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

$$\text{Si } \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^3+4}=\frac{\lim_{x\to 1} 2x^2+x-3}{\lim_{x\to 1} x^3+4}=\frac{2(1)^2+(1)-3}{(1)^3+4}=$

$$\frac{2+1-3}{1+4}=\frac{0}{5}=0$$

2. $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-2x+1}{x^2+3}=\frac{\lim_{x\to 5} \quad x^2-2x+1}{\lim_{x\to 5} \quad x^2+3}=\frac{(5)^2-2(5)+1}{(5)^2+3}=$

$$\frac{25-10+1}{25+3}=\frac{16}{28}=\frac{4}{7}$$

- **El límite de una raíz es igual a la raíz del límite.**

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

$$\text{Si n es par, entonces: } \lim_{x\to a} f(x)>0\ (\textit{tiene que ser positivo})$$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $\lim_{x \to 3} \sqrt[3]{x^2+7} = \sqrt[3]{\lim_{x \to 3}(x^2+7)} = \sqrt[3]{(3)^2+7} =$

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8} * \sqrt[3]{2} = 2 * \sqrt[3]{2}$$

2. $\lim_{x \to -1} \sqrt{4-5x} = \sqrt{\lim_{x \to -1}(4-5x)} = \sqrt{4-5(-1)} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$

LÍMITES Y MANIPULACIÓN ALGEBRAICA

Límite indeterminado de la forma $\frac{0}{0}$

Cuando al evaluar un límite el resultado es cero sobre cero $\left(\frac{0}{0}\right)$ ***o sea un indeterminado***, se debe factorizar o racionalizar la expresión, simplificar y volver a evaluar el límite las veces que sea necesario para eliminar dicho indeterminado.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $\lim_{x \to -4} \frac{5x^2+17x-12}{3x^2+13x+4}$, Reemplazando por $x = -4$, **se tiene:**

$$\lim_{x \to -4} \frac{5x^2+17x-12}{3x^2+13x+4} = \frac{5(-4)^2+17(-4)-12}{3(-4)^2+13(-4)+4} = \frac{80-68-12}{48-52+4}$$
$$= \frac{0}{0}\ \boldsymbol{Indeterminado}.$$

PISTA DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria: para solucionar el indeterminado de la forma $\frac{0}{0}$ se debe **factorizar** o **racionalizar** la fracción, según sea el caso.

En este caso hay que factorizar tanto el numerador como el denominador de la fracción:

- **Factorización del numerador:**

$$\frac{5(5x^2+17x-12)}{5}=\frac{25x^2+17(5x)-60}{5}$$
$$=\frac{(5x+20)*(5x-3)}{5}=\frac{5(x+4)*(5x-3)}{5}$$

Simplificando:

$$(x+4)*(5x-3): Numerador$$

- **Factorizando el denominador:**

$$\frac{3(3x^2+13x+4)}{3}=\frac{9x^2+13(3x)+12}{3}=\frac{(3x+12)*(3x+1)}{3}$$
$$=\frac{3(x+4)*(3x+1)}{3}$$

Simplificando:

$$(x+4)*(3x+1): Denominador$$

Reemplazando en la expresión inicial:

$$\lim_{x\to-4}\frac{5x^2+17x-12}{3x^2+13x+4}=\lim_{x\to-4}\frac{(x+4)*(5x-3)}{(x+4)*(3x+1)}$$

Simplificando $x+4$ **se elimina el cero** tanto en el numerador como en el denominador, por lo tanto:

$\lim_{x\to -4}\frac{5x^2+17x-12}{3x^2+13x+4}=\lim_{x\to -4}\frac{5x-3}{3x+1}=\frac{5(-4)-3}{3(-4)+1}=\frac{-20-3}{-12+1}=\frac{-23}{-11}=\frac{23}{11}$, **con** $x\neq -4$

2. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ reemplazando, se tiene: $\frac{1^3-1}{1-1}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$ $Indeterminado$

Para solucionar este indeterminado se factoriza el numerador (**diferencia de cubos**) de la fracción (el denominador no es factorizable):

$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)*(x^2+x+1)}{x-1}$, simplificando $x-1$ **se elimina el cero** en el numerador y en el denominador, por lo tanto:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}x^2+x+1=(1)^2+1+1=$$

$$1+1+1=3 \quad con\ x\neq 1$$

3. $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$ reemplazando, se tiene:

$$\frac{2^4-16}{2-2}=\frac{16-16}{1-1}=\frac{0}{0}\ Indeterminado$$

Para solucionar este indeterminado se factoriza el numerador (**diferencia de cuadrados**) de la fracción (el denominador no es factorizable):

$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+4)*(x^2-4)}{x-2}$ todavía hay una diferencia de cuadrados, se factoriza nuevamente:

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2+4)*(x+2)*(x-2)}{x-2}$ simplificando $x-2$ **se elimina el cero** en el numerador y en el denominador, por lo tanto:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+4)*(x+2)=(2^2+4)*(2+2)=$$

$$(4+4)*(4)=8*4=32, \text{con } x\neq 2$$

4. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$, reemplazando:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\frac{4-4}{\sqrt{4}-2}=\frac{0}{0}$$

Para eliminar el indeterminado se debe **racionalizar** el denominador de la fracción:

PISTA DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta: racionalizar es eliminar las raíces bien sea del numerador o del denominador de una fracción, para hacerlo se multiplica tanto el numerador como el denominador por la respectiva conjugada, esto es:

- Si se racionaliza el denominador:
  - $\frac{x\pm y}{\sqrt{x}+c}*\frac{\sqrt{x}-c}{\sqrt{x}-c}$, la conjugada de $\sqrt{x}+c$ es $\sqrt{x}-c$
  - $\frac{x\pm y}{\sqrt{x}-c}*\frac{\sqrt{x}+c}{\sqrt{x}+c}$ la conjugada de $\sqrt{x}-c$ es $\sqrt{x}+c$
- Si se racionaliza el numerador:
  - $\frac{\sqrt{x}+c}{x\pm y}*\frac{\sqrt{x}-c}{\sqrt{x}-c}$, la conjugada de $\sqrt{x}+c$ es $\sqrt{x}-c$

- $\frac{\sqrt{x}-c}{x\pm y} * \frac{\sqrt{x}+c}{\sqrt{x}+c}$ la conjugada de $\sqrt{x}-c$ **es** $\sqrt{x}+c$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}*\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\frac{\lim_{x\to 4}\left(\sqrt{x}+2\right)*\sqrt{x}+2}{\sqrt{x^2}-(2)^2}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)*(\sqrt{x}+2)}{(x-4)}$$

Simplificando $x-4$ en el numerador y en el denominador, se tiene:

$$\lim_{x\to 4}\left(\sqrt{x}+2\right)=\sqrt{4}+2=2+2=4$$

5. $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$, reemplazando:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}=\frac{3-3}{\sqrt{3+6}-3}=\frac{3-3}{\sqrt{9}-3}=\frac{0}{0}\ \boldsymbol{Indeterminado}$$

Procedimiento

Para eliminar este indeterminado se racionaliza el denominador:

La conjugada del denominador es: $\sqrt{x+6}+3$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}*\frac{\sqrt{x+6}+3}{\sqrt{x+6}+3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)*\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{\sqrt{(x+6)^2}-(3)^2}=$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3) * \left(\sqrt{x+6}+3\right)}{x+6-9} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3) * \left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x-3)} =$$

Simplificando $x - 3$ en el numerador y en el denominador, se tiene:

$$\lim_{x \to 3}\left(\sqrt{x+6}+3\right) = \sqrt{3+6}+3 = \sqrt{9}+3 = 3+3 = 6$$

6. http://www.youtube.com/watch?v=5kyW-JJpR9o
7. http://www.youtube.com/watch?v=nAmIO3HpR54&feature=fvwrel
8. http://www.youtube.com/watch?v=PwBdwnc621g&feature=related
9. http://www.youtube.com/watch?v=k6fB0JD2bvM
10. http://www.youtube.com/watch?v=tEaYRekR9Ik
11. http://www.youtube.com/watch?v=AcSwtKOwtLU&feature=related

LÍMITES AL INFINITO

Se pretende determinar el siguiente límite:

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

Se presentan varias posibilidades:

- **Si la expresión es constante,** el límite es la misma constante.

$$\lim_{x \to \infty} c = c$$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $\lim_{x \to \infty} 20 = 20$

2. $\lim_{x \to \infty} -5 = -5$

- **Si la función es polinómica** el límite **tiende a infinito**.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$$

Siempre que $f(x)$ sea polinómica:

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $\lim_{x \to \infty} x^2 - 7x + 8f(x) = \infty$

2. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{4x - 7} = \infty$

- **Si la función es racional**

  Para obtener este límite se procede de la siguiente manera:
  Se dividen todos los términos de la fracción por la x de **mayor exponente**.
  Se simplifica y se aplican las siguientes propiedades (llamados, también, límites especiales):

> - $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$
> - $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{c}{x^n} = 0$, **c** es una constante

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^3-4x^2+7}{3x^2-10x^3+x-7}$ reemplazando, se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-4x^2+7}{3x^2-10x^3+x-7} = \frac{\infty}{\infty}\ \textit{Indeterminado}$$

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga presente: para eliminar el indeterminado de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, se dividen todos y cada uno de los términos del numerador y del denominador por la x *de mayor exponente* que haya en la fracción.

Procedimiento

De acuerdo a la norma se dividen cada uno de los términos del numerador y del denominador por x^3:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-4x^2+7}{3x^2-10x^3+x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^3}{x^3}-\frac{4x^2}{x^3}+\frac{7}{x^3}}{\frac{3x^2}{x^3}-\frac{10x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}-\frac{7}{x^3}}$$

Simplificando:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5-\frac{4}{x}+\frac{7}{x^3}}{\frac{3}{x}-10+\frac{1}{x^2}-\frac{7}{x^3}}, aplicando\ \textbf{límites especiales}:$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5-\frac{4}{x}+\frac{7}{x^3}}{\frac{3}{x}-10+\frac{1}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = \frac{5-0+0}{0-10+0-0} = \frac{5}{-10} = -\frac{1}{2}$$

2. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3x^2}{1-x^4}-20\right)$

Procedimiento

Recuerde que. El límite de una suma (diferencia) es igual a la suma (diferencia) de los límites, por lo tanto:

3. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3x^2}{1-x^4}-20\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3x^2}{1-x^4}\right) - \lim_{x\to\infty} 20) =$

Recuerde que: en el primer límite se dividen todos los términos de la fracción por x^2, en el segundo el límite de una constante es la misma constante.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^4}+\frac{3x^2}{x^4}}{\frac{1}{x^4}-\frac{x^4}{x^4}} - \lim_{x\to\infty} 20 = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x^4}-1} - \lim_{x\to\infty} 20$$

Utilizando las propiedades de los límites, se tiene:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x^4}-1}-\lim_{x\to\infty}20=\frac{0+0}{0-1}-20=0-20=-20$$

3. http://www.youtube.com/watch?v=kydUxS3-rc0&feature=related

LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

- $\lim_{x\to a}\sin x=\sin a,\quad a\,\epsilon\; R_e$
- $\lim_{x\to a}\cos x=\cos a,\quad a\,\epsilon\; R_e$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=1,\quad kx\neq 0,\quad k\epsilon\; R_e$
- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos kx}{kx}=0,\quad kx\neq 0,\quad k\epsilon\; R_e$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Hallar $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$, se multiplica por **2** tanto el numerador como el denominador:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}*2$$

Recuerde que: el límite de un producto es igual al producto de los límites, entonces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} * 2 = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} * \lim_{x\to 0} 2 = 1 * 2 = 2$$

2. Halle: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{5x} = 0$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{senx}$, se divide el numerador y el denominador por x se tiene entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{senx} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-cosx}{x}}{\frac{senx}{x}},$$ de acuerdo a los límites trigonométricos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-cosx}{x}}{\frac{senx}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

4. http://www.youtube.com/watch?v=PgOU6hYfk4s

5. http://www.youtube.com/watch?v=ZTqCxPaiMTI&feature=related

6. http://www.youtube.com/watch?v=81lK5WVdUV0&feature=related

LÍMITES LATERALES

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Este límite se lee: "límite cuando x se aproxima a un valor a **por la izquierda** de $f(x)$ es igual a **L**". Quiere decir, la x se está acercando al valor **a** por valores **menores** que **a**.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Este límite se lee: "límite cuando x se aproxima a un valor a **por la derecha** de $f(x)$ es igual a **L**". Quiere decir, la x se está acercando al valor **a** por valores **mayores** que **a**.

Se tiene que:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L \ \text{ sí sólo sí } \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)}$$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $\lim_{x \to 2^+} \frac{5}{x-2} = +\infty$

2. $\lim_{x \to 3^+} \frac{20}{3-x} = -\infty$

PISTA DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta:

- **Si** $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, la recta $x = a$, se llama **asíntota vertical.**
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$, la recta $y = L$, se llama **asíntota horizontal.**

Ejercicio de Entrenamiento

Estime los siguientes límites:

Recuerde que: un indeterminado no es solución para el límite, por lo tanto, tiene que proceder a eliminarlo con alguno de los procedimientos vistos.

1. $\lim_{x\to 7} \dfrac{5x^2-32x-21}{2x^2-9x-35}$
2. $\lim_{x\to 2} \dfrac{5x^2-6x-8}{4x^2-7x-2}$
3. $\lim_{x\to -1} \dfrac{6x^2+11x+5}{7x^2+6x-1}$
4. $\lim_{x\to -11} \dfrac{3x^2+35x+22}{5x^2+54x-11}$
5. $\lim_{x\to 6} \dfrac{10x^2-61x+6}{9x^2-52x-12}$

6. $\lim_{x \to 5} \dfrac{8x^2 - 37x - 15}{x^2 - 25}$

7. $\lim_{x \to -1} \dfrac{5x^2 + 5x}{3x^2 - 4x - 7}$

8. $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 3x}{6x^2 + 23x + 15}$

9. $\lim_{x \to -4} \dfrac{x^2 + 4x}{7x^2 + 26x - 8}$

10. $\lim_{x \to 5} \dfrac{6x^2 - 23x - 35}{x^2 - 5x}$

11. $\lim_{x \to 6} \dfrac{x^2 - 6x}{x^2 + 2x - 48}$

12. $\lim_{x \to 0} \dfrac{(x-4)^2 - 16}{8x}$

13. $\lim_{x \to 0} \dfrac{(2x+5)^2 - 25}{10x}$

14. $\lim_{x \to 0} \dfrac{(4x+1)^2 - 1}{4x}$

15. $\lim_{x \to 0} \dfrac{(3x-8)^2 - 64}{4x}$

16. $$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{5x^2 - 11x - 12}$$

17. $$\lim_{x \to -2} \frac{7x^2 + 19x + 10}{x^3 + 8}$$

18. $$\lim_{x \to 5} \frac{8x^2 - 37x - 15}{x^3 - 125}$$

19. $$\lim_{x \to -5} \frac{x^3 + 125}{x^2 + 5x}$$

20. $$\lim_{x \to 8} \frac{x^2 - 64}{x^3 - 512}$$

21. $$\lim_{x \to -7} \frac{x^2 + 7x}{x^3 - 343}$$

22. $$\lim_{x \to 0} \frac{49 - (2x + 7)^2}{5x + 4x^2}$$

23. $$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}$$

24. $$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - 2}$$

25. $$\lim_{x \to 0} \frac{5x}{\sqrt{x + 9} - 3}$$

26. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{x-1}$

27. $\lim_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{2x-1}-3}{x^2-25}$

28. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3-3x^2+4x-3}{x^2+5x+4}$

29. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{3x-4}+5}{x^2-3x-14}$

30. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1-x-x^3}{x^4-2x+1}$

4.4. Límite y continuidad

http://www.youtube.com/watch?v=wuAdn84VSoc&feature=related

CONTINUIDAD EN UN PUNTO:

Una función $\boldsymbol{f}$ es continua en $\boldsymbol{x = a}$, si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. $f(\boldsymbol{a})$ ***Existe***
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ ***Existe***
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Si $\boldsymbol{f}$ no es continua en **a**, se dice que existe una discontinuidad en $\boldsymbol{x = a}$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Analice si $\boldsymbol{f(x) = 5x + 1}$ es continua en $\boldsymbol{x = 2}$

a. Se halla $\boldsymbol{f(a)}$ *en este caso es* $\boldsymbol{f(2)}$:

$$\boldsymbol{f(2) = 5(2) + 1 = 10 + 1 = 11\ se\ define\ en\ x = 2}$$

b. Se calcula el límite de $\boldsymbol{f(x)}$**,** cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a 2
$\boldsymbol{lim_{x\to 2}(5x + 1) = 5(2) + 1 = 11}$

c. $\boldsymbol{lim_{x\to 2} f(x) = f(2)}$

Esta verificación de la tres condiciones de continuidad en esta función permite asegurar que esa función es **continua**, en $\boldsymbol{x = 2}$.
Más aun, por ser una **función polinómica** es **continua** en todo su **dominio**.

2. Determine si $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x-2}}$ es continua en $\boldsymbol{x = 1}$

a. $\boldsymbol{f(1) = \frac{1^2+2(1)-2}{1-2} = -1}$

b. $\boldsymbol{lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-2}{x-2} = \frac{1^2+2(1)-2}{1-2} = \frac{1+2-2}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1}$

c. $\boldsymbol{lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = -1}$ se puede observar claramente que se están cumpliendo las tres condiciones que son propuestas por la teoría de la continuidad en límites, por lo tanto, esta función es continua en $\boldsymbol{x = 1}$

3. ¿Por qué? $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x-2}}$ es discontinua en $\boldsymbol{x = 2}$, realice el proceso de demostración.

4. Determine si $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x+4}}$ es continua en $\boldsymbol{x = -2}$

a. $\boldsymbol{f(-2) = \sqrt{-2+4} = \sqrt{2}}$.

b. $\boldsymbol{lim_{x\to -2}\sqrt{x+4}}$=$\boldsymbol{\sqrt{-2+4} = \sqrt{2}}$

c. $\boldsymbol{lim_{x\to -2} f(x) = f(-2) = \sqrt{2}}$

Como se puede observar se están dando las tres condiciones de continuidad, lo que asegura que su trazado es continuo y no tiene saltos.

5. Determine si $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}}$ es continua en $\boldsymbol{x = 2}$

a. $\boldsymbol{f(4) = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}}$ $\boldsymbol{f(x)}$ no se define en $x = 2$

$\boldsymbol{b.\ lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}}$ **==** $\boldsymbol{\frac{0}{0}}$ se factoriza para eliminar el indeterminado:

$\boldsymbol{lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = lim_{x\to 2}\frac{(x+2)*(x-2)}{x-2}}$ se simplifica $\boldsymbol{x-2}$, se tiene:

$$\boldsymbol{lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = lim_{x\to 2}x+2 = 2+2 = 4}$$

$\boldsymbol{c.\ \ lim_{x\to 2}f(x) \neq f(2)}$

Lo que quiere decir: que por no cumplir todas las condiciones de continuidad, la función es discontinua en $\boldsymbol{x=2}$, por lo tanto su trazado tiene discontinuidad en dicho punto.

6. http://www.youtube.com/watch?v=oA32Ze8pJTk&feature=related

7. http://www.youtube.com/watch?v=VvILwqxWG8g&feature=related

CONTINUIDAD EN UN *INTERVALO*

Se dice que una función $\boldsymbol{f(x)}$ es **continua** en un **intervalo abierto** $\boldsymbol{(a,b)}$**,** si es continua en cada $\boldsymbol{x}$ del intervalo.

Se dice que $\boldsymbol{f(x)}$ es continua en un **intervalo cerrado [a, b]**, si:

1. $\boldsymbol{f(x)}$ es continua en el intervalo abierto $\boldsymbol{(a,b)}$

2. Sí:
   $\boldsymbol{\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)}$

3. Si:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Nota:

Las funciones vistas hasta el momento son continuas en todo su dominio, es decir: También se puede tener en cuenta algunas propiedades de la continuidad, las cuales se cumplen para todo número $x \in R_e$.

1. Todas las funciones polinómicas son continuas.
2. Todas las funciones racionales son continuas en su dominio.
3. Las funciones racionales son continuas en todo su dominio.
4. Las funciones algebraicas son continuas en todo se dominio
5. Las funciones exponenciales son continuas en todo su dominio.
6. Las funciones logarítmicas son continuas en todo su dominio.
7. Las funciones trigonométricas son continuas en todo su dominio.
8. Las funciones trigonométricas inversas son continuas en todo su dominio.
9. Las funciones hiperbólicas son continuas en todo su dominio.
10. Toda función es continua en su dominio.
11. Todas las funciones racionales son continuas, excepto en aquellos puntos donde la función no está definida, es decir en aquellos puntos donde su denominador se hace cero.
12. La sumatoria f(x) $\pm$ g(x), es continua
13. f(x)*g(x) es continua
14. $\frac{f(x)}{g(x)}$ es continua, siempre que g(x)$\neq 0$
15. $\sqrt[m]{f(x)}$ es continua siempre y cuando $\sqrt[m]{f(x)}$ este definida.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Analice la continuidad de la función $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$, en el intervalo [-2, 3]

Procedimiento

Esta función es **racional**, por lo tanto es continua en todos los reales excepto en $\boldsymbol{x = 3}$ porque acá el denominador se hace **cero**, por lo tanto $\boldsymbol{x = 3}$ es una **asíntota vertical**.

Se pude afirmar que $\boldsymbol{f(x)}$ es continua en el **intervalo abierto** $(-2,3)$**,** pero no es continua en el **intervalo cerrado [-2,3]**, puesto que es discontinua en $\boldsymbol{x = 3}$, que es uno de los extremos de dicho intervalo.

2. Determine si la función $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 9x + 5}$ es continua en $\boldsymbol{x = 3}$.

Procedimiento

Por ser una función polinómica, esta función **es continua** en **todo su dominio**, por lo tanto también es continua en $\boldsymbol{x = 3}$

3. Determine si $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2+7x+5}{x-2}}$ $f(x) = \dfrac{x^2 + 7x + 5}{x - 2}$ es continua en $\boldsymbol{x = 10}$. Determine donde es discontinua $f(x)$.

Procedimiento

Se puede ver que $f(x)$ es una función racional, por lo tanto sólo es discontinua en $\boldsymbol{x = 2}$ y se puede afirmar que $f(x)$ es continua en $\boldsymbol{x = 10}$.

Ejercicio de Entrenamiento

1. **Para cada una de las siguientes funciones analice su continuidad indicando los intervalos en los cuales cada una de ellas es continua, indique además los puntos de discontinuidad si los hay.**

a. $f(x) = 5x^2 - 3x - 9$

b. $f(x) = \sqrt{7x-3}$

c. $f(x) = \dfrac{4x+1}{2x^2+3x-9}$

d. $f(x) = \dfrac{x^2+10}{\sqrt{7x^2-14x}}$

e. $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1}$

2. **Evalúe la continuidad de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1, & para\ x \le -3 \\ x^2+1, & para\ x > -3 \end{cases}$$

En el punto $x = -3$

3. **Evalúe la continuidad de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2+4, & para\ x \le 0 \\ x^2-3, & para\ x > 0 \end{cases}$$

En el punto x = - 0

4. **Evalúe la continuidad de la función:**

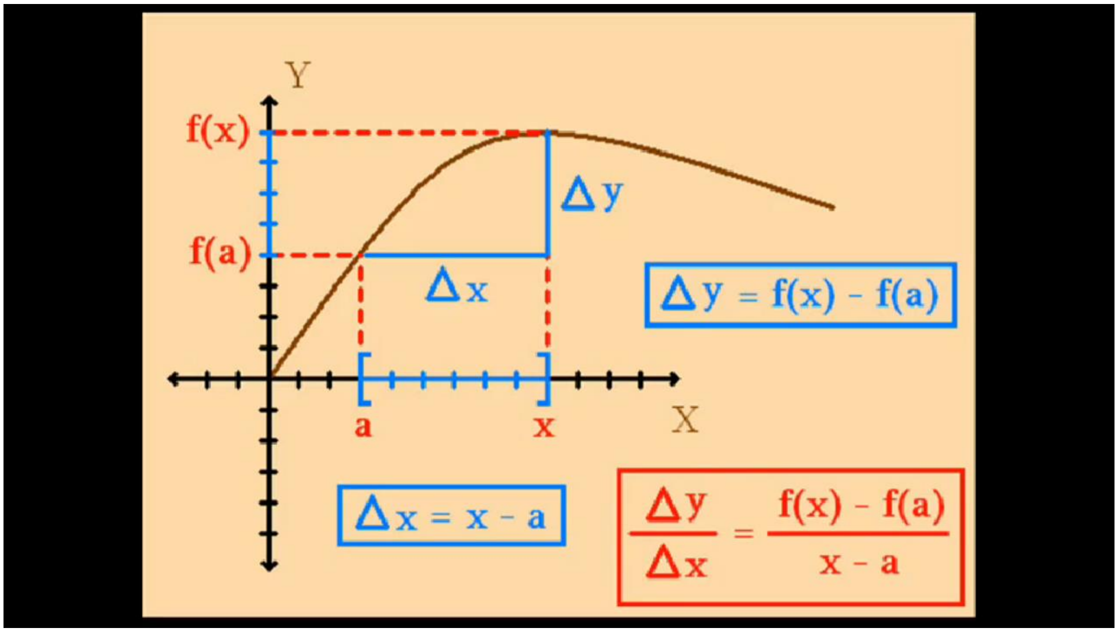
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{5x+2}{x^2-4}, & para\ \ x<-2\\ 5x+1, & para\ -2\le x\le 3\\ \dfrac{10}{x^2-9}, & para\ x>3\end{cases}$$

En el punto $x=-3$

Applets Para límites

http://www.solvemymath.com/online_math_calculator/calculus/limit_calculator/index.php

5. UNIDAD 3 DERIVADA



http://www.youtube.com/watch?v=KHuO1CK5fhs
http://www.youtube.com/watch?v=A6Vp18ctfWc&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=yW-jtRgmrC8&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=lA_eVbQH4No&feature=related

OBJETIVO GENERAL

Analizar los conceptos básicos de la derivada, así como las diversas reglas para su cálculo y algunas aplicaciones de la misma.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Explorar conceptos y procedimientos asociados con el tema de las derivadas.
- Describir procedimientos asociados con las técnicas para el cálculo de derivadas.
- Comparar mediante la ejemplificación resultados de cálculos de derivadas optimizando así los distintos procedimientos empleados.

5.1. Prueba inicial

1. Para la función $\boldsymbol{f(x) = 4x^2 - 5x + 3}$ halle:

a) $\boldsymbol{f(a)}$

b) $\boldsymbol{f(h)}$

c) $\boldsymbol{f(x+h)}$

d) $\boldsymbol{f(x+h) - f(x)}$

e) $\boldsymbol{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$

2. Para la función $f(x) = \frac{4x-3}{5x-2}$ halle:

f) (a)

g) $f(h)$

h) $f(x+h)$

i) $f(x+h) - f(x)$

j) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

5.2. Conceptos y definiciones asociados con la derivada

RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO Y RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEO

Dados dos puntos de coordenadas (x_0, y_0) y (x, y)

Se define el cambio en y como:

$\Delta y = y_0 - y$

Se define el cambio en x como:

$\Delta x = x_0 - x$

Nota: se acostumbra cambiar $\boldsymbol{\Delta x}$ por $\boldsymbol{h}$

Entonces el cambio en $\boldsymbol{x}$ se define como:

$$\mathbf{h} = \boldsymbol{x_0 - x}$$

Se define la razón de cambio promedio como:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \sigma \quad \frac{\Delta y}{\mathbf{h}}$$

Adicionalmente se define la razón de cambio instantánea como:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\mathbf{h}}$$

Como:

$$\Delta y = y_0 - y$$

Reemplazando se tiene que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{y_0 - y}{\mathbf{h}}$$

Pero $\quad y_0 = f(x_0) \quad y \quad y = f(x)$

La expresión queda:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x)}{\mathbf{h}}$$

Pero:

$\mathbf{h} = x_0 - x$

Despejando x_0 , queda: $x_0 = x + h$

Reemplazando se tiene que la **razón de cambio instantánea** es:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{\mathbf{h}}$$

DEFINICIÓN DE DERIVADA:

La derivada de una función $f(x)$ es otra función que se obtiene o se deriva de la función anterior.

Para indicar que se está derivando una función $f(x)$ se utiliza cualquiera de las siguientes notaciones:

Si se tiene la función: $y = f(x)$

ORDEN DERIVADA	FORMAS DE REPRESENTACIÓN			
La primera derivada	$y' = f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d[f(x)]}{dx}$	$D_x[f(x)]$
La segunda derivada	$y'' = f''(x)$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2[f(x)]}{dx^2}$	Derivadas de orden superior
La tercera derivada	$y''' = f'''(x)$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^3[f(x)]}{dx^3}$	
La cuarta derivada	$y^4 = f^4(x)$	$\frac{d^4y}{dx^4}$	$\frac{d^4[f(x)]}{dx^4}$	

La derivada de orden n	$y^n = f^n(x)$	$\frac{d^n y}{dx^n}$	$\frac{d^n[f(x)]}{dx^n}$	

La derivada es la **razón de cambio instantáneo**, es decir:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{\text{h}}$$

Desde esta expresión, se puede explicar **el concepto de derivada** como un cambio en la función $f(x)$ cuando se produce un **pequeño cambio** en la **variable independiente** (en este caso la variable independiente es x), por lo tanto:

Se entiende la derivada de una función como un cambio en dicha función.

Diferenciación: es el proceso mediante el cual obtenemos la derivada de una función.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. **Para** $y = f(x) = 3x^2 + 5$ determine **la primera derivada** de esta función con respecto a la variable x.

Se pide determinar: $f'(x)$

Procedimiento

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{\mathrm{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2 + 5 - (3x^2+5)}{\mathrm{h}}$$

Se resuelven las potencias indicadas:

$$\lim_{h\to 0} \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) + 5 - 3x^2 - 5}{\mathrm{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 + 5 - 3x^2 - 5}{h}$$

Reduciendo términos semejantes queda:

$$\lim_{h\to 0} \frac{6xh + 3h^2}{h}$$

Evaluando el límite en este punto, se tendría:

$$\lim_{h\to 0} \frac{6xh + 3h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6x(0) + 3(0)^2}{0} = \frac{0}{0}, \textit{Indeterminado}$$

Se utiliza la factorización para eliminar dicho indeterminado:

Se tiene un factor común:

$$\lim_{h\to 0} \frac{3h(2x+h)}{h}$$

Eliminando h en el numerador y en el denominador, se elimina la indeterminación:

$$\lim_{h\to 0} 3 * (2x+h) = \lim_{h\to 0} 6x + 3h$$

Evaluando el límite:

$$\lim_{h\to 0} 6x + 3h = 6x + 3(0) = 6x$$

Por lo tanto:

$$f'(x) = 6x$$

Para $f(x) = \frac{3x}{x+2}$ halle $f'(x)$

Procedimiento

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3(x+h)}{(x+h)+2} - \frac{3x}{x+2}}{h}, \textit{se determina el minimo común múltiplo}:$$

m.c.m: $[(x+h)+2] * (x+2)$, entonces:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3(x+h)}{(x+h)+2} - \frac{3x}{x+2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3(x+h)(x+2) - 3x[(x+h)+2]}{[(x+h)+2]*(x+2)}}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{3(x^2+2x+hx+2h) - 3x[x+h+2]}{[(x+h)+2]*(x+2)}}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{3x^2+6x+3hx+6h-3x^2-3xh-6x}{[(x+h)+2]*(x+2)}}{h} =$$

Reduciendo términos semejantes:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{6h}{(x+h+2)*(x+2)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6h}{h(x+h+2)*(x+2)}$$

Simplificando **h** y evaluando el límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{6h}{h(x+h+2)*(x+2)}=\lim_{h\to 0}\frac{6}{(x+h+2)*(x+2)}=\frac{6}{(x+0+2)*(x+2)}=$$

$$\frac{6}{(x+2)*(x+2)}\to f'(x)=\frac{6}{(x+2)^2}$$

Los ejercicios de entrenamiento los encuentras en:

2. http://www.youtube.com/watch?v=A66wZnq5PE0&feature=related

3. http://www.youtube.com/watch?v=ZmOTH6emM2E&feature=related

4. http://www.youtube.com/watch?v=5FqTmF5rJQ4&feature=fvwrel

5. http://www.youtube.com/watch?v=wQ8PoGXLyJ4&feature=relmfu

Ejercicios de Entrenamiento

Obtenga la primera derivada de cada una de las siguientes funciones utilizando la fórmula:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

1. $f(x)=6x^2-7x+3$
2. $f(x)=\dfrac{3x-1}{4x+7}$
3. $f(x)=\dfrac{9x}{2x^2-3}$
4. $f(x)=\sqrt{8x+3}$
5. $f(x)=\sqrt{x^2+4x+3}$

5.3. Leyes para derivar

Este tema también recibe el nombre de **Leyes de Diferenciación.**

- **Derivada de una constante:**

La derivada de una constante es igual a cero:

$$y = f(x) = c, \text{donde } c \text{ es una constante} \rightarrow f'(x) = 0$$

Ejercicios de Aprendizaje

1. $y = f(x) = 25$

   $y' = f'(x) = 0$

2. $y = g(x) = -350$

$y' = g'(x) = 0$

- **Derivada de una potencia de** x

$$y = f(x) = x^n \rightarrow y' = f'(x) = nx^{n-1}$$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Si $\boldsymbol{f(x) = x^5}$, hallar $\boldsymbol{f'(x)}$

Procedimiento

Aplicando la propiedad, se tiene:

$$\boldsymbol{f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4}$$

2. Si $\boldsymbol{h(x) = x^{\frac{7}{3}}}$, hallar $\boldsymbol{h'(x)}$

Procedimiento

Aplicando la propiedad, se tiene:

$$\boldsymbol{h'(x) = \frac{7}{3}x^{\frac{7}{3}-1} = \frac{7}{3}\,x^{\frac{7-3}{3}} = \frac{7}{3}\,x^{\frac{4}{3}} = \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}}$$

- **Derivada de una constante por una función potencia:**

$$\boldsymbol{y = f(x) = cx^n \rightarrow y' = f'(x) = c * nx^{n-1}}$$

Nota 1: para aplicar esta ley la variable debe estar en el numerador.

Nota 2: si hay radicales, para aplicar esta ley se deben llevar a potencia con exponente fraccionario, aplicar la ley y luego volver a convertir a radical.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Si $\boldsymbol{y = h(x) = 5x^{-3}}$, hallar $\boldsymbol{h'(x)}$

Procedimiento

Aplicando la propiedad, se tiene:

$$\boldsymbol{h'(x) = 5 * (-3)\, x^{-3-1} = -15x^{-4} = -\frac{15}{x^4}}$$

2. Si $\boldsymbol{y = f(x) = \sqrt[5]{x^2}}$, hallar $\boldsymbol{f'(x)}$

Procedimiento

Para aplicar la propiedad el radical se expresa en forma de potencia:

$$\boldsymbol{y = f(x) = \sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}}$$

Aplicando la propiedad, se tiene:

$$\mathbf{f'(x) = \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5}x^{\frac{2-5}{5}} = \frac{2}{5}x^{\frac{-3}{5}}}$$

Expresando con exponente positivo y en forma de raíz:

$$\frac{2}{5x^{\frac{3}{5}}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$$

3. $Si\ y = f(x) = \frac{7}{x}$, hallar $f'(x)$

Procedimiento

Para aplicar la propiedad se expresa x en forma de potencia negativa (se pasa al numerador de la fracción):

$y = f(x) = \frac{7}{x} = 7x^{-1}$

Aplicando la propiedad, se tiene:

$y' = f'(x) = 7 * (-1)x^{-1-1} = -7x^{-2}$

Expresando con exponente positivo:

$-7x^{-2} = -\frac{7}{x^2}$

4. http://www.youtube.com/watch?v=4E0_L08y_r0&feature=related

5. http://www.youtube.com/watch?v=A-xrIDIHVlI&feature=related

6. http://www.youtube.com/watch?v=HM1XCOXaQuA&feature=related

Enlaces para las leyes anteriores

http://www.youtube.com/watch?v=4E0_L08y_r0&feature=related

http://www.youtube.com/watch?v=RiqwT_xoDSw&feature=related

http://www.youtube.com/watch?v=dmi1gk9RwME&feature=related

- **Derivada de una suma (diferencia):**

Si $y = f(x) \pm g(x) \pm k(x)$ ..., entonces:

$$y' = f'(x) \pm g'(x) \pm k'(x) \ldots,$$

Esta ley dice que la derivada de una suma (diferencia) de funciones es igual a la suma (diferencia) de las derivadas de cada función; es decir cuando hay una suma, se deriva cada función por separado y luego se juntan los resultados con el signo correspondiente.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $y = f(x) = 3x^2 + 5$

Procedimiento

Se deriva cada uno de los sumandos:

$$f'(x) = 3 * 2x^{2-1} + 0$$

$$f'(x) = 3 * 2x^{2-1} + 0 \rightarrow f'(x) = 6x$$

2. $y = g(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x - 10$, **hallar** $g'''(x)$

Procedimiento

Para hallar la tercera derivada hay que partir siempre de la primera derivada y luego de la segunda.

y	$=$	$g(x)$	$4x^3 - 5x^2 + 3x - 10$	
y'	$=$	$g'(x)$	$4 * 3x^{3-1} - 5 * 2x^{2-1} + 3x^{1-1} - 0 = 12x^2 - 10x + 3$	Primera derivada
y''	$=$	$g''(x)$	$12x^2 - 10x + 3 = 2 * 12x^{2-1} - 10x^{1-1} + 0 = 24x - 10$	Segunda derivada
y'''	$=$	$g'''(x)$	$24x - 10 = 24x^{1-1} - 0 = 24$	Tercera derivada

3. $y = f(x) = 6x^4 - 9x^3 + 5x^2 + 3x + 2$

Procedimiento

Se deriva cada uno de los sumandos:

$$f'(x) = 6 * 4x^{4-1} - 9 * 3x^{3-1} + 5 * 2x^{2-1} + 3x^{1-1} + 0$$

$$f'(x) = 24x^3 - 27x^2 + 10x + 3$$

4. http://www.youtube.com/watch?v=8XDLFQ5qLz0&feature=related

- **Derivada de un producto:**

Si $y = f(x) = g(x) * h(x)$**,** entonces:

$$y' = f'(x) = g'(x) * h(x) + h'(x) * g(x)$$

- **Derivada de un cociente:**

$y = f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ con $h(x) \neq 0$, entonces:

$$y'(x) = f'(x) = \frac{g'(x) * h(x) - g(x) * h'(x)}{[h(x)]^2}$$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Si

$y = f(x) = (5x - 7) * (2x + 9)$, hallar $f'(x)$

PROCEDIMIENTO

Se aplica la regla del producto:

FUNCIÓN	DERIVADA	FUNCIÓN	DERIVADA
$g(x)$	$g'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$5x-7$	5	$2x+9$	2

Entonces:

$y'(x) = 5 * (2x+9) + 2 * (5x-7),$ realizando los productos indicados, se tiene:

$$y'(x) = 10x + 45 + 10x - 14$$

Reduciendo términos semejantes:

$$y'(x) = 20x + 31$$

2. **Si $y = f(x) = \frac{4x-5}{x^2-3x+2}$, hallar $f'(x)$**

Procedimiento

Se aplica la regla del cociente:

$$y = f(x) = \frac{4x-5}{x^2-3x+2}$$

- $g(x) = 4x - 5 \rightarrow g'(x) = 4$

- $h(x) = x^2 - 3x + 2 \rightarrow h'(x) = 2x - 3$

Entonces:

$$y'(x) = f'(x) = \frac{4 * (x^2 - 3x + 2) - (2x - 3) * (4x - 5)}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

Realizando los productos indicados:

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 12x + 8 - 8x^2 + 10x + 12x - 15}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

Reduciendo términos semejantes en el numerador de la fracción:

$$f'(x) = \frac{-4x^2 + 10x - 7}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

3. Si $f(x) = \frac{5}{2x-7}$ hallar $f'(x)$

- $g(x) = 5 \rightarrow g'(x) = 0$

- $h(x) = 2x - 7 \rightarrow h'(x) = 2$

Entonces:

$$f'(x) = \frac{0 * (2x - 7) - 2 * (5)}{(2x - 7)^2},$$

Realizando los productos indicados en el numerador:

$$f'(x) = \frac{-10}{(2x-7)^2} \to f'(x) = -\frac{10}{(2x-7)^2}$$

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga presente: no siempre es necesario utilizar la regla del cociente:

Si $f(x) = c * g(x) \to f'(x) = c * g'(x)$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. $y = f(x) = \frac{4x^2-5x+1}{3}$, se puede expresar de la forma:

$$y = f(x) = \frac{1}{3}(4x^2 - 5x + 1)$$

Aplicando la propiedad:

$$f'(x) = \frac{1}{3} * \frac{d}{dx}(4x^2 - 5x + 1) \to f'(x) = \frac{1}{3}(8x - 5)$$

2. $f(x) = 9(x^2 - 6x + 15)$, derivando:

$f'(x) = 9 * (2x - 6)$, sacando el **2** como factor común**:**

$$f'(x) = 9 * 2 * (x - 3) = 18 * (x - 3)$$

3. $f(x) = \frac{5x^4 - 7x^3 + 5}{8}$, se puede expresar de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{8} * (5x^4 - 7x^3 + 5)$$

Aplicando la propiedad:

$$f'(x) = \frac{1}{8} * \frac{d}{dx}(5x^4 - 7x^3 + 5) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{8}(20x^3 - 21x^2)$$

Factorizando el polinomio del paréntesis **(**Factor común: x^2**):**

$$\frac{x^2}{8}(20x - 21)$$

4. http://www.youtube.com/watch?v=f8RyNOKteAE&feature=related

- **REGLA DE LA CADENA (O REGLA DE LA POTENCIA)**

Si $y = f(x) = u^n$, donde u es una función escrita en términos de x, entonces:

$$y' = f'(x) = nu^{n-1} * u'$$

Otra forma de escribir lo mismo es:

$$\boldsymbol{f(x) = [g(x)]^n \to f'(x) = n[g(x)]^{n-1} * g'(x)}$$

Esta ley dice que si se tiene una expresión elevada a cualquier exponente, la derivada es igual al exponente multiplicado por la misma expresión elevada al exponente menos uno y multiplicada por la derivada de lo que está dentro del paréntesis.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. **Si $\boldsymbol{y = f(x) = (3x^2 - 5x + 4)^7}$,** hallar $\boldsymbol{f'(x)}$

Procedimiento

Se hace $\boldsymbol{u}$ igual a todo lo que está dentro del paréntesis:

$$\boldsymbol{u = 3x^2 - 5x + 4}$$

Derivando $\boldsymbol{u}$: $\to$

En términos de u queda: $\boldsymbol{u' = 6x - 5}$

Se tiene: $\boldsymbol{y = f(x) = (u)^7 \to y = f(x) = u^7}$

Derivando en función de $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{y = f(x) = u^7 \to f'^{(x)} = 7u^{7-1} * u' = 7u^6 * u'}$$

Recuperando la variable inicial (reemplazando):

$$\boldsymbol{f'^{(x)} = 7(3x^2 - 5x + 4)^6 * (6x - 5)}$$

2. $\boldsymbol{Si\ y = h(x) = \sqrt[3]{6x^3 - 8x + 7}}$**,** hallar la primera derivada.

Procedimiento

$$y = h(x) = \sqrt[3]{6x^3 - 8x + 7} = (6x^3 - 8x + 7)^{\frac{1}{3}}$$

Sea:

$$u = 6x^3 - 8x + 7$$

Derivando u:

$$u' = 18x^2 - 8$$

Reemplazando en función de u:

$$y = u^{\frac{1}{3}} \rightarrow y' = \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}-1} * u' \rightarrow y' = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} * u' \rightarrow y' = \frac{1}{3u^{\frac{2}{3}}} * u'$$

Reemplazando en función de x:

$$y' = h'(x) = \frac{1}{3(6x^3 - 8x + 7)^{\frac{2}{3}}} * 18x^2 - 8$$

Factorizando el numerador y expresando el denominador en forma de raíz:

$$y' = h'(x) = \frac{2*(9x^2-4)}{3\sqrt[3]{(6x^3-8x+7)^2}}$$ → efectuando la diferencia de cuadrados

$$y' = h'(x) = \frac{2*(3x+2)*(3x-2)}{3\sqrt[3]{(6x^3 - 8x + 7)^2}}$$

3. http://www.youtube.com/watch?v=P0Bq3CsvMkc&feature=related,

4. **Si $y = (2x+1)^5 * (x^3 - x + 1)^4$,** hallar la primera derivada.

Procedimiento

Sea:

$u = 2x + 1 \rightarrow u' = 2$

$v = x^3 - x + 1 \rightarrow v' = 3x^2 - 1$

- Reemplazando en función de u y v, se tiene:

$y = u^5 * v^4$

- Derivando como un producto:

PISTA DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria: si $y = U * V \rightarrow y' = U * V' + U * V'$

U y V:son funciones de X.

$y' = 5u^4 * u' * v^4 + 4v^3 * v' * u^5$

- Reemplazando en función de **x:**

$y' = 5(2x+1)^4 * 2 * (x^3 - x + 1)^4 + 4(x^3 - x + 1)^3 * 3x^2 - 1 * (2x+1)^5$

- Factorizando (factor común):

$$2(2x+1)^4 * (x^3-x+1)^3 * [5 * (x^3-x+1) + 2 * (3x^2-1) * (2x+1)]$$

- ✓ Efectuando las operaciones indicadas en el corchete:

$$2(2x+1)^4 * (x^3-x+1)^3 * [5x^3-5x+5+2 * (6x^3+3x^2-2x-1)]$$

- ✓ Eliminando el paréntesis dentro del corchete:

$$2(2x+1)^4 * (x^3-x+1)^3 * [5x^3-5x+5+12x^3+6x^2-4x-2]$$

- ✓ Reduciendo términos semejantes en el corchete:

$$2(2x+1)^4 * (x^3-x+1)^3 * (17x^3+6x^2-9x+3)$$

5. http://www.youtube.com/watch?v=iXbz7uvjc8I&feature=related,
6. http://www.youtube.com/watch?v=nBiVLxtzM5w&feature=related
7. http://www.youtube.com/watch?v=RiqwT_xoDSw&feature=related
8. http://www.youtube.com/watch?v=FPUPE1D9G84&feature=related
9. http://www.youtube.com/watch?v=777494gvxg4&feature=related
10. http://www.youtube.com/watch?v=8upWMuvw_Sw&feature=related

- **Derivada de funciones exponenciales**

Sea $u = f(x)$, $a > 0 \; y \; a \neq 1$

Entonces: $\boldsymbol{y = a^u \rightarrow y' = a^u * u' * \ln a}$

Esta ley dice que la derivada de una función exponencial es igual a la misma función exponencial multiplicada por la derivada del exponente y multiplicada por el logaritmo natural de la base. El logaritmo natural del número **e** es igual a uno $(\boldsymbol{\ln e = 1})$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Si $\boldsymbol{y = f(x) = 5^{3x-10}}$, Hallar la primera derivada

Procedimiento

$$\boldsymbol{y = f(x) = 5^{3x-10} \rightarrow y' = f'(x) = 5^{3x-10} * 3 * \ln 5}$$

2. Si $\boldsymbol{y = f(x) = e^{7x^2-5x-4}}$**,** hallar $\boldsymbol{y'}$

Procedimiento

$$\boldsymbol{y = e^{7x^2-5x-4} \rightarrow y' = e^{7x^2-5x-4} * (14x - 5) * \ln e}$$

Pero $\boldsymbol{\ln e = 1}$**,** entonces

$$\boldsymbol{y = e^{7x^2-5x-4} \rightarrow y' = e^{7x^2-5x-4} * (14x - 5)}$$

3. Si $\boldsymbol{y = f(x) = x^2 * e^{4x^2-5x-3}}$, hallar la primera derivada

Procedimiento

- ✓ Se deriva como un producto:

$$\boldsymbol{y' = \frac{d}{dx}(x^2) * e^{4x^2-5x-3} + \frac{d}{dx}\left(e^{4x^2-5x-3}\right) * x^2}$$

$$\boldsymbol{y' = 2x * e^{4x^2-5x-3} + e^{4x^2-5x-3} * \frac{d}{dx}(4x^2 - 5x - 3) * x^2}$$

$$\boldsymbol{y' = 2x * e^{4x^2-5x-3} + e^{4x^2-5x-3} * (8x + 5) * x^2}$$

- ✓ Factorizando (factor común):

$$\boldsymbol{y' = x * e^{4x^2-5x-3}[2 + (8x + 5) * x]}$$

4. http://www.youtube.com/watch?v=SgETNp-GsXs

5. http://www.youtube.com/watch?v=k8w8P03VqNA&feature=related

- **Derivada de la función logarítmica**

Si $\boldsymbol{y = f(x) = \log_b u \to y' = f'(x) = \frac{u'}{u * \ln b}}$

Ejercicios de aprendizaje

1. Si $\boldsymbol{y = f(x) = \ln(3x - 10)}$, hallar $\boldsymbol{f'(x)}$

Procedimiento

$$\boldsymbol{y = f(x) = \ln(3x - 10) \to f'(x) = \frac{D_x(3x - 10)}{(3x - 10)\ln e}}$$

$\boldsymbol{y' = \frac{3}{3x - 10}}$, recuerde que $\boldsymbol{\ln e = 1}$

2. Si $\boldsymbol{y = \ln(5x^4 + 8x - 12)}$, hallar $\boldsymbol{y'}$

Procedimiento

$$\boldsymbol{y' = \frac{D_x(5x^4 + 8x - 12)}{(5x^4 + 8x - 12) * \ln e} \to y' = \frac{20x^3 + 8}{5x^4 + 8x - 12}}$$

3. http://www.youtube.com/watch?v=N5BsXgg6xxU

4. http://www.youtube.com/watch?v=ijvgbTBA8jA&feature=related

5. http://www.youtube.com/watch?v=6GBLkGLkRJY&feature=related

Nota: en algunos casos para derivar funciones logarítmicas es necesario aplicar previamente una o varias de las propiedades de los logaritmos. Dichas propiedades se enuncian a continuación:

- **Logaritmo de una potencia:**

$$\boxed{\log_b a^n = n * \log_b a}$$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. **Ejemplo 1:** Obtenga la primera derivada de:

$$y = \ln(3x-4)^4$$

Procedimiento

- Se aplica la propiedad del logaritmo de una potencia:

$$y = \ln(3x-4)^4 = 4\ln(3x-4)$$

- Se procede a derivar aplicando la derivada de un logaritmo natural:

$$y' = 4 * \frac{D_x(3x-4)}{(3x-4) * \ln e} \to y' = 4\frac{3}{(3x-4)} = \frac{12}{3x-4}$$

2. Obtenga la primera derivada de:

$$y = f(x) = \log_7 \sqrt[5]{5x^3+6x-9}$$

- Se expresa la raíz en forma de potencia:

$$y = f(x) = \log_7 (5x^3+6x-9)^{\frac{1}{5}}$$

- Se aplica la propiedad del logaritmo de una potencia:

$$y = f(x) = \log_7 (5x^3+6x-9)^{\frac{1}{5}} \to y = f(x) = \frac{1}{5} * \log_7 (\,5x^3+6x-9)$$

- Se procede a derivar aplicando la derivada de un logaritmo:

$$y' = \frac{1}{5 * \ln 7} * \frac{15x^2+6x}{5x^3+6x-9} = \frac{3x * (5x+2)}{5 * \ln 7 * (5x^3+6x-9)}$$

➢ **Logaritmo de un producto:**

$$\boxed{\log_b(a * c) = \log_b a + \log_b c}$$

➢ **Logaritmo de un cociente:**

$$\boxed{\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c}$$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Hallar la primera derivada de:

$$y = f(x) = \ln[(7x^2 + 4x - 1)^3 * \sqrt{5x - 3}]$$

- Se aplica la propiedad del logaritmo de un producto:

$$y = f(x) = \ln[(7x^2 + 4x - 1)^3 * \sqrt{5x - 3}] = \ln(7x^2 + 4x - 1)^3 + \ln(5x - 3)^{\frac{1}{2}}$$

- Se aplica la propiedad del logaritmo de una potencia:

$$y = 3\ln(7x^2 + 4x - 1) + \frac{1}{2}\ln(5x - 3)$$

- Derivando, se obtiene:

$$y' = 3 * \frac{14x + 4}{7x^2 + 4x - 1} + \frac{1}{2} * \frac{5}{5x - 3} = \frac{3(14x + 4)}{7x^2 + 4x - 1} * \frac{5}{2 * 5x - 3}$$

2. Halle la derivada de:

$$y = h(x) = \log_2[\frac{10x + 3}{5x + 1}]$$

- Aplicando la propiedad del logaritmo de un cociente:

$$y = \log_2[\frac{10x + 3}{5x + 1}] = \log_2(10x + 3) - \log_2(5x + 1)$$

- Derivando, se obtiene:

$$\boldsymbol{y' = \frac{1}{\ln 2} * \frac{10}{10x+3} - \frac{1}{\ln 2} * \frac{5}{5x+1}}$$

3. http://www.youtube.com/watch?v=le1cUxAZJBw&feature=related

- **Derivada de las funciones trigonométricas:**

$\boldsymbol{y = f(x)}$	$\boldsymbol{y' = f'(x)}$
$\boldsymbol{\sin u}$	$\boldsymbol{\cos u * u'}$
$\boldsymbol{\cos u}$	$\boldsymbol{-\sin u * u'}$
$\boldsymbol{\tan u}$	$\boldsymbol{sec^2 u * u'}$
$\boldsymbol{\cot u}$	$\boldsymbol{-csc^2 u * \cot u * u'}$
$\boldsymbol{\sec u}$	$\boldsymbol{\sec u * \tan u * u'}$
$\boldsymbol{\csc u}$	$\boldsymbol{-\csc u * \cot u * u'}$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Halle la primera derivada de:

$$y = f(x) = \sin(3x^2 + 5x - 1)$$

Procedimiento

- Se aplica la propiedad para derivar la función seno:

$\boldsymbol{y = \sin u}$	$\boldsymbol{y' = \cos u * u'}$

Sea $\boldsymbol{u = 3x^2 + 5x - 1 \rightarrow u' = 6x + 5}$

- Derivando se tiene:

$$\boldsymbol{y' = \cos(\,3x^2 + 5x - 1) * \ 6x + 5}$$

- Ordenando la derivada:

$$\boldsymbol{y' = (6x + 5) * \cos(\,3x^2 + 5x - 1) *}$$

2. Hallar la primera derivada de:

$$\mathbf{y = \sin\left(\frac{3x+1}{2x-3}\right)}$$

Procedimiento

- Se aplica la propiedad para derivar la función seno:

$\mathbf{y = \sin \boldsymbol{u}}$	$\boldsymbol{y' = \cos u * u'}$

Sea $\boldsymbol{u = \frac{3x+1}{2x-3} \rightarrow u' = \frac{3(2x-3)-2(3x+1)}{(2x-3)^2} = \frac{6x-9-6x-2}{(2x-3)^2} = -\frac{11}{(2x-3)^2}}$

$$\boldsymbol{y' = \cos\left(\frac{3x+1}{2x-3}\right) * -\frac{11}{(2x-3)^2}}$$

- Ordenando la derivada:

$$\boldsymbol{y' = -\frac{11}{(2x-3)^2} * \cos\left(\frac{3x+1}{2x-3}\right)}$$

3. Hallar la primera derivada de:

$$y = f(x) = sen^5(8x^2 + 3)$$

Procedimiento

- Se tiene la siguiente igualdad:

$$y = f(x) = sen^5(8x^2 + 3) = [sen(8x^2 + 3]^5$$

- Para derivar esta expresión se debe aplicar primero la regla de la potencia o regla de la cadena (se deriva la potencia primero, luego se deriva la función seno y por último la derivada de u):

$$y' = 5[sen(8x^2 + 3]^4 * cos(8x^2 + 3) * 16x$$

$$y' = 80x[sen(8x^2 + 3]^4 * cos(8x^2 + 3)$$

$$y' = 80x * sen^4(8x^2 + 3) * cos(8x^2 + 3)$$

4. Hallar la primera derivada de:

$$y = f(x) = \tan(4x - 7)$$

Procedimiento

- **Aplicando la propiedad:**

$\mathbf{y = \tan u}$	$\boldsymbol{y' = sec^2 u * u'}$

$$\boldsymbol{y' = sec^2(4x-7)*4}$$

- Ordenando la derivada:

$$\boldsymbol{y' = 4*sec^2(4x-7)}$$

5. Hallar la primera derivada de:

$$\boldsymbol{y = csc^3(5x^2-8x+3)}$$

Procedimiento

- Para derivar esta expresión se debe aplicar primero la regla de la potencia o regla de la cadena (se deriva la potencia primero, luego se deriva la función cosecante y por último la derivada de u):

$$\boldsymbol{y' = 3csc^2(5x^2-8x+3)*[-csc(5x^2-8x+3)*cot(5x^2-8x+3)*(10x-8)]}$$

- Realizando el producto indicado y ordenando la derivada:

$$\boldsymbol{y' = -3*(10x-8)csc^3(5x^2-8x+3)*cot(5x^2-8x+3)}$$

6. Hallar la primera derivada de:

$$y = \cos(2x+1) * x$$

Procedimiento

- Como es un producto se aplica la propiedad correspondiente:

PISTA DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta: si $y = U * V \rightarrow y' = U * V' + U * V'$
U y V:son funciones de X.

$$y = [-sen(2x+1) * 2 * x] + [1 * \cos(2x+1)]$$

- Ordenando la derivada:

$$y = -2x * sen(2x+1) + \cos(2x+1)$$

7. Obtenga la primera derivad de:

$$y = f(x) = sen[\ln(3x-2)]$$

Procedimiento

- Se deriva la función seno y luego la derivada interna (la función logaritmo natural):

$$y' = cos[\ln(3x-2)] * \frac{3}{3x-2}$$

- Ordenando la derivada:

$$y' = \frac{3}{3x-2} * cos[\ln(3x-2)]$$

8. http://www.youtube.com/watch?v=lu1H_ljGF44
9. http://www.youtube.com/watch?v=_Fq9vROMCnQ&feature=related
10. http://www.youtube.com/watch?v=DchcMA739MQ&feature=related
11. http://www.youtube.com/watch?v=eAlRGsCR_nY&feature=related

Ejercicio de Entrenamiento

Halle la primera derivada para cada una de las siguientes funciones.

1. $f(x) = 9x^3 - \frac{3}{5x^2} + 4\sqrt{3x-1} + x$
2. $f(x) = (4x-3)\cdot(7-3x^2)$
3. $f(x) = (5x-3)^3(7-2x)$
4. $f(x) = (6x^2 - 7x + 4)^4$
5. $y = \frac{7x-2}{5x+3}$
6. $y = \frac{4x+2}{(3-2x)^3}$
7. $h(x) = \sqrt[3]{\frac{5x+2}{3x-4}}$
8. $g(x) = sen\left(\sqrt{7x+1}\right)$
9. $f(x) = \tan\left(\frac{10+3}{x-2}\right)$
10. $f(x) = \sec\left(5x - 2^{3x+5}\right)$
11. $h(x) = \ln\left(\frac{11x+3}{7x^2+2x-9}\right)$
12. $g(x) = \sqrt{3^{2x} - e^x}$

13. $f(x) = senx \cdot \ln x$

14. $f(x) = \dfrac{\cos 3x - 1}{\sqrt{8 - 3x}}$

15. $f(x) = \dfrac{senx}{\cos x}$

Direcciones de applets para derivar.

http://www.cidse.itcr.ac.cr/webMathematica/NewScript/derivar.jsp
http://math.uprag.edu/derivadas.html

5.4. Aplicación e interpretación de la derivada

APLICACIONES EN GEOMETRÍA:

La derivada como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto conocido.
http://www.geogebra.org/en/upload/files/inma_gijon_cardos/Derivadas/derivada.html

Recta tangente es una recta que toca una curva en un punto; como lo muestra la figura. 56

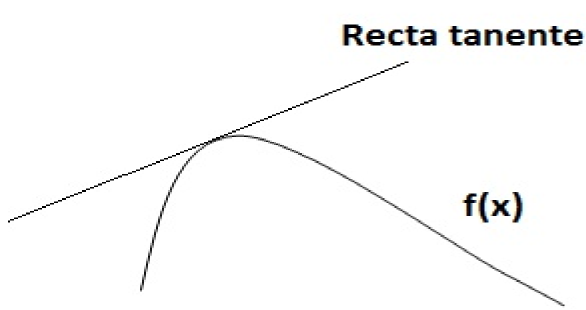


FIGURA. 56. Recta tangente.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 15 de 2011)

Es demostrable que la pendiente de la recta tangente en cualquier punto se obtiene derivando la curva: $\boldsymbol{y = f(x)}$

Lo que se afirma es lo siguiente:

La pendiente en cualquier punto se obtiene derivando la función: $\boldsymbol{f(x)}$**,** esto es: $$\boldsymbol{m = f'(x)}$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. **Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva:**

$\boldsymbol{y = 3x^2 - 5x - 4}$ en el punto donde $\boldsymbol{x = 2}$

Procedimiento

1. Se debe conocer la ordenada $\boldsymbol{y}$ del punto; para ello se reemplaza la $\boldsymbol{x}$ en la función dada, esto es:
   Para $\boldsymbol{x = 2 \rightarrow y = f(2) = 3(2)^2 - 5(2) - 4 = 12 - 10 - 4 = -2}$

El punto tiene coordenadas: $\boldsymbol{(2, -2)}$

2. Para hallar la pendiente se deriva la función y se reemplaza el valor de $\boldsymbol{x}$ en la derivada:

$$\boldsymbol{f'(x) = 6x - 5}$$

Determinación de la pendiente de la recta tangente en $\boldsymbol{x = 2}$

$$\boldsymbol{m = f'(2) = 6(2) - 5}$$

$$\boldsymbol{m = 7}$$

3. Con el punto $\boldsymbol{(2, -2)}$ y la pendiente $\boldsymbol{m = 7}$ se encuentra la ecuación de la recta tangente utilizando la ecuación punto pendiente de la línea recta:

$$\boldsymbol{y - y_{conocida} = m\,(x - x_{conocida})}$$

Reemplazando estos valores, se tiene:

$$\boldsymbol{y - (-2) = 7\,(x - 2) \rightarrow y + 2 = 7x - 14}$$

Despejando **y**:

$\boldsymbol{y = 7x - 14 - 2 \rightarrow y = 7x - 16}$

Esta es la ecuación de la recta tangente a la curva, $\boldsymbol{y = 3x^2 - 5x - 4}$, en el punto donde $\boldsymbol{x = 2}$.

$=$

Actividad: realizar las dos gráficas sobre un mismo plano cartesiano.

2. Encuentre la ecuación de las rectas **tangente** y **normal** a la curva :

$\boldsymbol{y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}}$**,** en el punto donde $\boldsymbol{x = -4}$

Procedimiento

1. Se halla la $\boldsymbol{y}$ del punto:

Para $\boldsymbol{x = -4 \rightarrow y = \sqrt{25 - (-4)^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3}$

Cuando: $\boldsymbol{x = -4 \rightarrow y = 3}$, corresponde al punto de coordenadas: $\boldsymbol{(-4, 3)}$

2. Para hallar la pendiente $\boldsymbol{m}$, se deriva la función y se reemplaza el valor de $\boldsymbol{x}$ en la derivada:

- Para derivar se expresa la raíz en forma de potencia:

$$y = f(x) = \sqrt{25 - x^2} = (25 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

- Derivando la potencia:

$$y' = \frac{1}{2} * (25 - x^2)^{\frac{1}{2}-1} * (-2x) \rightarrow \ y' = \frac{1}{2} * (25 - x^2)^{-\frac{1}{2}} * (-2x) \rightarrow$$

- Simplificando por **2** y expresando con exponente positivo:

$y' = (25 - x^2)^{-\frac{1}{2}} * (-x) \rightarrow y' = -\frac{x}{(25-x^2)^{\frac{1}{2}}}$, expresando en forma de raíz:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

- Reemplazando $\boldsymbol{x = -4}$ en la derivada para hallar $\boldsymbol{m}$:

$$m = f'(-4) = -\frac{(-4)}{\sqrt{25 - (-4)^2}} = \frac{4}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$$

$$m = \frac{4}{3}$$

3. La ecuación de la **recta tangente**: reemplazando el punto conocido y la pendiente:

$$y-3=\frac{4}{3}m\,(x-(-4)) \rightarrow y=\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}+3 \rightarrow$$

$y=\frac{4}{3}x+\frac{25}{3}$ ecuación de la recta tangente a la curva.

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga presente: para hallar la pendiente de la recta normal cuando dos ecuaciones son **normales** o **perpendiculares**, el producto de sus pendientes es igual a menos uno, es decir:

m1 * m2 = -1

4. Se puede decir que la pendiente de la recta normal es **m1**, la ecuación queda:

$$\frac{4}{3}*m_2=-1$$

Despejando m_2 que es la pendiente de la **recta perpendicular:**

$$m_2=-1*\frac{3}{4} \rightarrow m_2=-\frac{3}{4}$$

- Para hallar la ecuación de la **recta normal** (**o perpendicular**) se tiene la siguiente información:

$m=-\frac{3}{4}, x=-4,\ \ y=3$

- Reemplazando estos valores en la ecuación punto pendiente de la línea recta:

$$y-3=-\frac{3}{4}\,(x-(-4)) \rightarrow y-3=-\frac{3}{4}\,x-3+3 \rightarrow$$

$y=-\frac{3}{4}x$, ecuación de la recta normal o perpendicular a la curva.

Entonces:

- La ecuación de la **recta tangente** es: $\boldsymbol{y = \frac{4}{3}x + \frac{25}{3}}$
- La ecuación de la **recta normal** es: $\boldsymbol{y = -\frac{3}{4}x}$

3. Encuentre la ecuación de las rectas **tangente** y **normal** a la curva:

$\boldsymbol{y = x^2 - 2x - 6}$, en el punto donde $\boldsymbol{x = 3}$.

Procedimiento

a. Primero se halla la $\boldsymbol{y}$ del punto:

Para $\boldsymbol{x = 3 \rightarrow\ y = (3)^2 - 2(3) - 6 \rightarrow y = 9 - 6 - 6 = -3}$

Cuando $\boldsymbol{x = 3, y = -3}$ se obtiene el punto de coordenadas**:**$\boldsymbol{(3, -3)}$

- Se deriva para hallar la pendiente:

$\boldsymbol{f'(x) = 2x - 2 \rightarrow m = f'(3) = 2(3) - 2 = 6 - 2 = 4}$

$$\boldsymbol{m = 4}$$

b. Se halla la ecuación de la recta tangente:
$\boldsymbol{y - (-3) = 4\ (x - 3) \rightarrow y = 4x - 12 - 3}$

$$\boldsymbol{y = 4x - 15}$$

c. Para hallar la ecuación de la recta normal, primero se halla la pendiente de dicha recta. Cuando dos rectas son normales o perpendiculares el producto de sus pendientes es igual a -1: m1 * m2 = -1

- Despejando, se tiene:

$$\boldsymbol{m_2 = -\frac{1}{m_1}}$$

- Reemplazando:

$$\boldsymbol{m_2 = -\frac{1}{m_1} \rightarrow m_2 = -\frac{1}{4}}$$

- Con esta pendiente $\left(\boldsymbol{m_2 = -\frac{1}{4}}\right)$ y el punto **(3,- 3)**, se encuentra la ecuación de la recta normal:
- $\boldsymbol{y-(-3) = -\frac{1}{4}\,(x-3) \rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} - 3 \rightarrow}$
  $\boldsymbol{y = -\frac{1}{4}x - \frac{9}{4}}$

  - La ecuación de la recta tangente es: $\boldsymbol{y = 4x - 15}$

  - La ecuación de la recta normal es: $\boldsymbol{y = -\frac{1}{4}x - \frac{9}{4}}$

4. http://www.youtube.com/watch?v=sefneheJGY4

5. http://www.youtube.com/watch?v=81CGqmle-jE&feature=fvsr

6. http://www.youtube.com/watch?v=H3Ydr96kbUA&feature=related

APLICACIONES EN ECONOMÍA (RAZÓN DE CAMBIO)

En esta sección analizaremos la derivada como el modelo matemático para el **ingreso marginal** y la derivada como el modelo matemático para el **costo marginal**.

- **Costo marginal**: se define en economía como el incremento que se presenta en el costo cuando se fabrica **una unidad adicional** del producto, es decir, el valor que cuesta producir una unidad adicional a las unidades que se tenía planeado producir.

Si $\boldsymbol{c(q)}$ es la función para el costo total o simplemente la función de costo cuando se producen $\boldsymbol{q}$ unidades de cierto artículo; la **función para el costo marginal** se obtiene derivando la función de costo.

$$\boldsymbol{Función\ de\ costo\ Marginal = c'(q)}$$

Analizando un poco más este concepto, desde la derivada, se puede decir que **el costo marginal** es el costo que resulta de **cambiar en una unidad el número de unidades a producir**.
Muchas veces se conoce como la función para el **costo promedio** denotado por $\boldsymbol{\overline{c}(q)}$. En este caso la función de costo se obtiene como:

$$\boldsymbol{c(q) = q * \overline{c}(q).}$$

- **Ingreso marginal**: si se tiene que $\boldsymbol{r(q)}$ es la función para el **ingreso**, en este caso cuando se venden $\boldsymbol{q}$ unidades de cierto artículo; la función para el ingreso marginal se obtiene derivando la función de ingreso.

$$\boldsymbol{Función\ del\ Ingreso\ Marginal = r'(q)}$$

El ingreso marginal, en economía, se define como el ingreso que se obtiene cuando **se vende una unidad adicional.**

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. La función para el costo promedio en la producción de $\boldsymbol{q}$ unidades de un artículo está dada por:

$\bar{c}(q) = 550q + 4000 + \frac{15}{q}$ **en pesos ($).** Determinar la función para el costo marginal.

Procedimiento

1. Para hallar la **función de costo marginal** primero se debe hallar la **función de costo**. La función de costo promedio y la función de costo están relacionadas por la siguiente fórmula:

$$\bar{c}(q) = \frac{c(q)}{q}$$

- Despejando $c(q)$, queda:

$c(q) = \bar{c}(q) * q$, reemplazando por sus valores, se tiene:

$$c(q) = \bar{c}(q) * q = \left(550q + 4000 + \frac{15}{q}\right) * q = 550q^2 + 4000q + \frac{15}{q} * q$$

- Simplificando:

$c(q) = (550q^2 + 4000q + 15)$ **función costo**

- Se halla la **función de costo marginal** derivando la **función de costo**:

$$c(q) = (550q^2 + 4000q + 15) \rightarrow$$

$c'(q) = 1000q + 4000$ **función de costo marginal**

.

2. La función para la demanda o precio $p(q)$ en la venta de q unidades de cierto artículo está dado por:

$$p(q) = 5200 - 0.3q \text{ (en miles de pesos)}$$

Determinar el **ingreso marginal** cuando se **venden 100 unidades** del producto.

Procedimiento

Para hallar el **ingreso marginal** se debe partir del **ingreso** que no se conoce.

- El ingreso y el precio se relacionan por la siguiente ecuación:

$$r(q) = p(q) * q$$

- Determinación de la función de ingreso:

$r(q) = (\ 5200 - 0.3q) * q = 5220q - 0.3q^2$**,** en miles de pesos**.**

- Determinación de la función de ingreso marginal:

$$r(q) = 5220q - 0.3q^2 \rightarrow r'(q) = 5200 - 0.6q$$

- Determinación del ingreso marginal para la venta de 100 unidades

$\boldsymbol{r'(100) = 5200 - 0.6(100) = 52000 - 60 = 5140}$

Nota: como es en miles de pesos: **$5.140.000**

Conclusión: cuando se vende **una unidad adicional** a las 100 se obtiene un ingreso de **$5'140.000**.

3. El modelo de costo en cierta fábrica está dado por:

$\boldsymbol{c(q) = 920q^2 + 2q + 700}$ (en pesos).

Determinar el **costo marginal** en la producción de **20 unidades** del producto.

Procedimiento

El problema pide hallar $\boldsymbol{c'\ (20)}$

$$\boldsymbol{c(q) = 920q^2 + 2q + 700 \to c'(q) = 1.840q + 2}$$

Entonces: $\boldsymbol{c'(20) = 1.840(20) + 2 = 36.802}$

Conclusión: producir la unidad adicional número veintiuno le cuesta a la fábrica $\$\ \boldsymbol{36.802.}$

4. http://www.youtube.com/watch?v=oyRNxD7axUQ

5. http://www.youtube.com/watch?v=8nFOVbNqAE4&feature=related

6. http://www.youtube.com/watch?v=0sJ5IYlCTe4

APLICACIÓN EN FÍSICA (RAZÓN DE CAMBIO)

http://www.youtube.com/watch?v=K2RTLTlUdFE

Para que un objeto cambie de posición debe estar en movimiento, implica esto tener una velocidad determinada. Por esto se define la **velocidad** como un **cambio en la posición del objeto en un tiempo determinado.** En cálculo siempre que se hable de cambio, se está refiriendo o hablando de derivada. El cambio en la posición (que es lo que se llama velocidad) se obtiene derivando la **función de posición.**

Si se conoce la función de posición $s(t)$ de un objeto que se mueve a lo largo de un eje coordenado; la velocidad se obtiene derivando esta función de posición.

$\boldsymbol{v(t) = s'(t)}$ **Función velocidad**

Así mismo, cuando se **cambia la velocidad** se está produciendo **una aceleración**.

$\boldsymbol{a(t) = v'(t) = s''(t)}$ **Función aceleración**

Donde $\boldsymbol{t}$ es el tiempo (segundos, horas, minutos). El tiempo se dará en segundos, a no ser que haya otra indicación al respecto.

$\boldsymbol{s(t)}$ Tiene unidades de **distancia** (metros, kilómetros, centímetros)
$\boldsymbol{v(t)}$ Tiene unidades de **distancia dividido unidades de tiempo** (segundos, minutos, horas).
$\boldsymbol{a(t)}$ Tiene unidades de **distancia dividido unidades de tiempo al cuadrado**.

Ejercicios de aprendizaje

1. La función de posición de un objeto que se mueve a lo largo de un eje coordenado esta dada por:

$\boldsymbol{s(t) = 6t^3 + 3t^2 + 5}$, en metros.

a. Determine la función de velocidad.

Procedimiento

Como: $\boldsymbol{v(t) = s'(t)}$ Función velocidad, entonces:

$$\boldsymbol{v(t) = s'(t) = 18t^2 + 6t \ en\ \frac{m}{seg}}$$

b. Determine la función de aceleración.

Procedimiento

Como: $\boldsymbol{a(t) = v'(t) = s''(t)}$ función aceleración, entonces:

$$\boldsymbol{a(t) = v'(t) = 36t + 6\ en\ \frac{m}{seg^2}}$$

c. Determine posición de reposo.

Procedimiento

Esta posición de reposo se obtiene con $\boldsymbol{s(0)}$:

$$\boldsymbol{s(0) = 6(0)^3 + 3(0)^2 + 5 = 5\, metros}$$

d. Determine velocidad inicial.

Procedimiento

Esta se obtiene hallando $\boldsymbol{v(0)}$:
Reemplazando en la función $\boldsymbol{v(t)}$

$$\boldsymbol{v(t) = 18t^2 + 6t\ en\ \frac{m}{seg} \rightarrow v(0) = 18(0)^2 + 6(0) = 0\frac{m}{seg}}$$

2. Un objeto se mueve de acuerdo a la función:

$\boldsymbol{y = s(t) = 16t^3 - 2t + 1}$ en metros

Calcule: Posición, velocidad y aceleración después de **1** segundo.

Procedimiento

Se reemplaza $\boldsymbol{t = 1}$ en cada una de las funciones:
$\boldsymbol{s(t) = 16t^3 - 2t + 1 \rightarrow s(1) = 16(1)^3 - 2(1) + 1 = 15\, m}$

$$v(t) = s'(t) = 48t^2 - 2 \rightarrow \ v(1) = 48(1)^2 - 2 = 46\ \frac{m}{seg}$$

$$a(t) = v'(t) = 96t \rightarrow a(1) = 96(1) = 96\ \frac{m}{seg^2}$$

3. Un camión recorre una distancia en kilómetros en t horas dada por la función:

$$w(t) = 3t^2 + 5t + 20$$

Calcule: Posición, velocidad y aceleración después de **3** horas.

Procedimiento

- Posición para $t = 3$

$$w(3) = 3(3)^2 + 5(3) + 20 = 27 + 15 + 20 = 62\ km$$

- Velocidad para $t = 3$

$$v(t) = u'(t) = 6t + 5\ \frac{km}{h}$$

$$v(3) = 6(3) + 5 = 18 + 5 = 23\ \frac{km}{h}$$

- Aceleración para $t = 3$

$$a(t) = v'(t) = 6\ \frac{km}{h^2}$$

4. Un objeto se mueve de acuerdo a la función:

$$y = s(t) = -2t^3 - 3t^2 + 36t + 120\ m.$$

a. Determine en que tiempo la velocidad es igual a cero.

Procedimiento

- Se determina la función velocidad:

$$v(t) = s'(t) = -6t^2 - 6t + 36$$

- Se hace $v(t) = 0 \rightarrow -6t^2 - 6t + 36 = 0$

- Se divide la ecuación por -6:

$$\frac{-6t^2}{-6} - \frac{6t}{-6} + \frac{36}{-6} = \frac{0}{-6} \rightarrow t^2 - t - 6 = 0$$

- Se factoriza y se iguala cada factor a cero:

$$t^2 + t - 6 = 0 \rightarrow (t+3) * (t-2) = 0$$

$\boldsymbol{t+3=0 \rightarrow t=-3}$ (se descarta, no hay tiempos negativos).

$\boldsymbol{t-2=0 \rightarrow t=2}$

La velocidad se hace cero en t = 2 segundos

( )

b. ¿Qué distancia ha recorrido el objeto desde que se empezó a mover hasta que se detiene?

Procedimiento

Para calcular esta distancia se debe conocer $\boldsymbol{s(2)\ y\ s(0),}$ estableciendo la diferencia entre los dos (en física se conoce como posición final menos la posición inicial), entonces:

- Se calcula: $\boldsymbol{s(2)-s(0)}$**:**

Para $\boldsymbol{t=2 \rightarrow y=s(t)=-2(2)^3-3(2)^2+36(2)+120=164\ m}$

Para $\boldsymbol{t=0 \rightarrow y=s(0)=-2(0)^3-3(0)^2+36(0)+120=120\ m}$

Por lo tanto, la distancia recorrida es : $\boldsymbol{s(2)-s(0)=164m-120m=44m}$

c. ¿Cuál es la posición del objeto en el momento en que se detiene?

Procedimiento

Del numeral a se sabe que el objeto se detiene en **t = 2 s**.

$\boldsymbol{s(2) = 164\ m}$

5. http://www.youtube.com/watch?v=LqvXvnyYiYg

Máximos y mínimos relativos

- http://www.youtube.com/watch?v=0HEgk9mqp40&feature=related
- http://www.youtube.com/watch?v=B1mJbvTwhm4

Nota: para la explicación de este tema tenga en cuenta la **gráfica de la figura 57**.

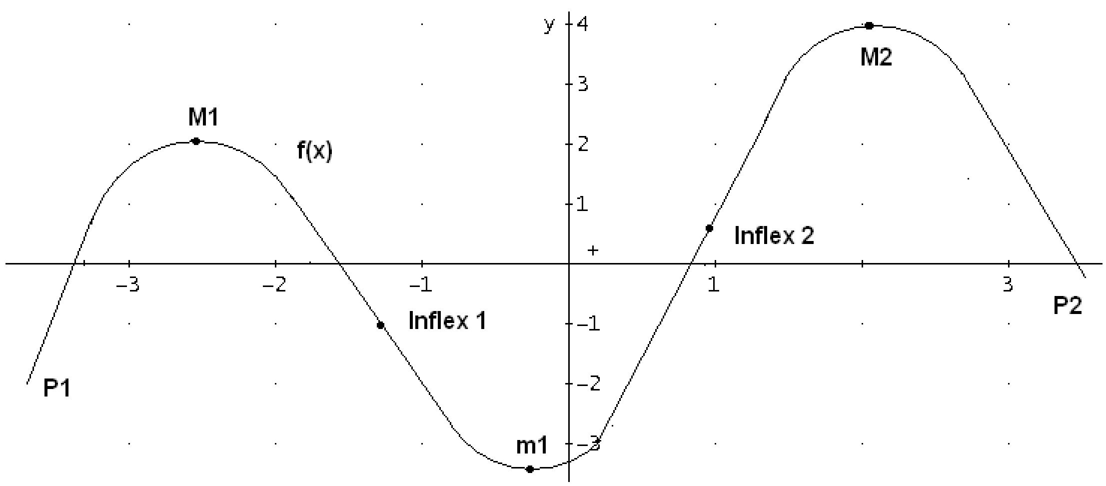


Figura 57. Puntos críticos de una función
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

La figura 57 muestra la gráfica de una función $\boldsymbol{y = f(x)}$ cualquiera.

Los puntos $\boldsymbol{M_1\ y\ M_2}$ son los máximos relativos de la función $\boldsymbol{y = f(x)}$. Posiblemente no sean los únicos valores máximos de la función.

El punto $\boldsymbol{m_1}$ es el mínimo relativo de la función. No necesariamente es el único.

Los puntos $\boldsymbol{M_1, M_2, m_1, p_1, p_2}$ ... Se llaman los puntos críticos de la función $\boldsymbol{y = f(x)}$.

Se puede ver que en los puntos críticos $\boldsymbol{M_1, M_2, m_1}$ la **recta tangente es horizontal**; lo que es lo mismo en algunos puntos críticos la pendiente tiene como valor cero **($\boldsymbol{m = 0}$).**

NOTA: los puntos $\boldsymbol{M_1, M_2, m_1}$ ... También reciben el nombre de **extremos locales**.

Punto crítico:

Es un punto donde sucede algo en una función, como por ejemplo:

- La derivada no existe, o
- La derivada es igual a cero.

Hay puntos donde también existe un corte en la gráfica de la función, hay un cambio de concavidad.

Donde hay cambio de concavidad son los puntos **Inflex1** e **Inflex2** o **puntos de inflexión**, puede haber más.

Interesan los puntos críticos donde **la derivada vale cero**, ya que en estos puntos se determina si hay **puntos máximos o mínimos**.

También interesan los puntos donde hay **cambio de concavidad**, es decir los **puntos de inflexión**.
Además se puede ver de la gráfica de la **figura 57** que en **un máximo** la función **abre hacia abajo**, es decir, es **cóncava hacia abajo**.

Nota: la concavidad tiene que ver con **el signo de la segunda derivada**, es decir **la segunda derivada evaluada en un máximo es negativa.**

Los puntos críticos $\boldsymbol{M_1, M_2, m_1,}$ son los puntos que interesa determinar.

Así mismo en **un mínimo la función abre hacia arriba**, la función en un mínimo es **cóncavo hacia arriba. La segunda derivada evaluada en un mínimo** tiene como resultado **signo positivo**.

En la figura 57, también se puede observar que:

A la izquierda de un máximo la función es creciente.	A la derecha del máximo la función es decreciente.
A la izquierda de un mínimo la función es decreciente	A la derecha de un mínimo la función es creciente.
También que: Entre un **máximo y un mínimo** la función **es decreciente**, y Entre un **mínimo y un máximo** la función es **creciente**.	

- **Procedimiento para determinar los máximos y mínimos de una función.**

1. Se determina la primera derivada de la función $y = f(x)$
2. Se Iguala la derivada a cero ($y' = f'(x) = 0$) y resuelva la ecuación resultante. Los valores obtenidos **son los puntos críticos** de la función.

Nota: si la ecuación resultante **no tiene solución** o se llega **a una afirmación falsa** quiere decir que **no tiene puntos críticos**.

3. Se obtiene la segunda derivada de la función $y = f(x)$ o sea $y'' = f''(x)$.
4. Se reemplaza cada punto crítico en la segunda derivada. Se pueden presentar cuatro opciones:

$$a.\quad f''(x_{crítico}) < 0 \rightarrow x_{crítico}\ es\ Máximo\ relativo$$

La segunda derivada evaluada en el punto crítico **sea negativa**; en este caso el punto crítico corresponde a un **máximo relativo**.

$$b.\quad f''(x_{crítico}) > 0 \rightarrow x_{crítico}\ es\ Mínimo\ relativo$$

La segunda derivada evaluada en un punto crítico **sea positiva**; en este caso el punto crítico corresponde a un **mínimo relativo**.

---

c. $f''(x_{crítico}) = 0$

La segunda derivada evaluada en el punto crítico **sea igual a cero**; en este caso **no se puede afirmar nada.**

---

d. $f''(x_{crítico})$ ***no exista***

La segunda derivada evaluada en el punto crítico **no exista**; El punto crítico **no corresponde ni a un máximo ni a un mínimo**; en este caso **es posible** que el punto crítico **corresponda a una asíntota vertical.**

---

5. Si se desea obtener **máximos y mínimos absolutos**, se debe indicar **un intervalo**; para determinar cuál es el **máximo absoluto** y el **mínimo absoluto** en dicho intervalo, se debe **evaluar** en la función **los puntos críticos** y **los extremos del intervalo**. El **mayor valor** será el **máximo absoluto**, el **menor valor** será el **mínimo absoluto**.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Para la función: $\boldsymbol{y = h(x) = 2x^3 - 24x^2 + 72x - 15}$

a. Hallar los máximos y mínimos relativos.
b. Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto en el intervalo $[-3, 5]$

Procedimiento

a. Se determina la primera derivada:

$$h'(x) = 6x^2 - 48x + 72$$

- Se iguala la primera derivada a cero:
  $h'(x) = 0$

$6x^2 - 48x + 72 = 0$, dividiendo toda la ecuación por **6, se tiene:**

$$\frac{6x^2}{6} - \frac{48x}{6} + \frac{72}{6} = \frac{0}{6} \rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$$

- Se factoriza y se iguala cada factor a cero:

$$x^2 - 8x + 12 = 0 \rightarrow (x-6) * (x-2) = 0$$

$$x - 6 = 0 \rightarrow x = 6$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

b. Se determina la segunda derivada y se reemplazan los puntos críticos en la misma:

$$h''(x) = 12x - 48$$

$$h''(6) = 12(6) - 48 = 72 - 48 = +24 \; \textit{Es un mínimo relativo.}$$

$$h''(2) = 12(2) - 48 = 24 - 48 = -24 \; \textit{Es un máximo relativo.}$$

c. Para determinar el máximo y el mínimo absoluto en el intervalo $[-3,5]$

Se debe determinar el valor de la función en los puntos **extremos del intervalo** y en **los puntos críticos** que están dentro del intervalo, es decir, en:

- $\boldsymbol{x=-3}$
- $\boldsymbol{x=5}$
- $\boldsymbol{x=2}$
- $\boldsymbol{x=6}$ **(**no se evalúa porque no pertenece al intervalo $[-3,5]$**).**

Reemplazando en $h(x)$, se tiene:

$$\boldsymbol{h(-3)=2(-3)^3-24(-2)^2+72(-2)-15=-501}$$

$$\boldsymbol{h(5)=2(5)^3-24(5)^2+72(5)-15=-5}$$

$$\boldsymbol{h(2)=2(2)^3-24(2)^2+72(2)-15=49}$$

Después de reemplazar se concluye que:

- El **mayor valor** de todos es **49** que corresponde a $\boldsymbol{x=2}$

- El **menor valor** de todos es − 501 que corresponde a $\boldsymbol{x=-3}$

Por lo tanto:

Máximo absoluto en el intervalo $[-3,5]$**) es en** $\boldsymbol{x=2}$
El **mínimo absoluto** en el intervalo $[-3,5]$ **es en** $\boldsymbol{x=-3}$

2. Para la función: $y = g(x) = x^4 - 72x^2 + 1000$ hallar los máximos y mínimos relativos.

Procedimiento

a. Se halla la primera derivada:

$$g'(x) = 4x^3 - 144x$$

b. Se iguala la primera derivada a cero

$$4x^3 - 144x = 0$$

c. Se factoriza y se iguala cada factor a cero**:**

$$4x^3 - 144x = 0 \rightarrow 4x * (\ x^2 - 36) = 0$$

$$4x = 0 \rightarrow x = \frac{0}{4} \rightarrow x = 0$$

$$x^2 - 36 = 0 \rightarrow (x+6) * (x-6) = 0 \rightarrow x = -6\ \ y\ \ x = 6$$

d. Se reemplazan estos valores en la segunda derivada:

$$g'(x) = 4x^3 - 144x \rightarrow g''(x) = 12x^2 - 144$$

Reemplazando los valores, se tiene:

$$g''(0) = 12x(o)^2 - 144 = -144 \rightarrow x = 0\ Máximo$$

$$g''(6) = 12(6)^2 - 144 = 432 - 144 = +288 \rightarrow x = 6\ Mínimo$$

$$g''(-6) = 12(-6)^2 - 144 = 432 - 144 = +288 \rightarrow x = -6\ Mínimo$$

Intervalos de crecimiento y de decrecimiento e intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo.

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga en cuenta que:

A LA IZQUIERDA DE...	A LA DERECHA DE...
Un **máximo** y hasta el **máximo** una función es **creciente**.	Un **máximo** una función es **decreciente**.
Un **mínimo** y hasta el **mínimo** una función es **decreciente**.	Un **mínimo** una función es **creciente**.
ENTRE	
Entre un **máximo** y un **mínimo** una función es **decreciente**.	
Entre un **mínimo** y un **máximo** una función es **creciente.**	
CONCAVIDAD	
En un **máximo** una función es **cóncava hacia abajo** y cambia de concavidad en los puntos de inflexión.	
En un **mínimo** una función es **cóncava hacia arriba** y cambia de concavidad en los puntos de inflexión.	

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Para la función: $\boldsymbol{y = f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x + 8}$

Determine intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento, intervalos donde la función es cóncava hacia arriba e intervalos donde la función es cóncava hacia abajo.

Procedimiento

a. Se deben encontrar primero los **máximos** y los **mínimos** de la función:

$\boldsymbol{f'(x) = -\frac{3x^2}{3} + \frac{2x}{2} + 6}$, simplificando:

$\boldsymbol{f'(x) = -x^2 + x - 6}$

- Se hace $\boldsymbol{f'(x) = 0 \rightarrow -x^2 + x + 6 = 0}$

- Se factoriza, se iguala cada factor a cero y se obtienen los puntos críticos:

$\boldsymbol{-x^2 + x + 6 = 0}$ al multiplicar por – $\boldsymbol{1,}$ se tiene:

$\boldsymbol{x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow (x - 3) * (x + 2) = 0}$

$\boldsymbol{x - 3 = 0 \rightarrow x = 3}$

$\boldsymbol{x + 2 = 0 \rightarrow x = -2}$

Los puntos críticos son: $\boldsymbol{x = 3 \;\; y \; x = -2}$

- Se determina la segunda derivada y se reemplazan los puntos críticos:

$\boldsymbol{Si \; f'(x) = -x^2 + x - 6 \rightarrow f''(x) = -2x + 1}$

Reemplazando los puntos críticos en $\boldsymbol{f''(x),}$ se tiene que:

$\boldsymbol{f''(3) = -2(3) + 1 = -6 + 1 = -5 \rightarrow en \; x = 3 \;\; hay \; un \; máximo}$

$\boldsymbol{f''(-2) = -2(-2) + 1 = 4 + 1 = 5 \rightarrow en \; x = -2 \;\; hay \; un \; mínimo}$

Escribiéndolos en orden quedarían:

$\boldsymbol{x = -2 \ \ mínimo\, relativo.}$

$\boldsymbol{x = 3 \ \ máximo\, relativo.}$

- Se sabe que entre **mínimo** y un **máximo** una función es **creciente.**
  La función es creciente en el intervalo: $\boldsymbol{x\epsilon\ [-2, 3]}$

- También se sabe que a la izquierda de un **mínimo** la función es **decreciente**.
  La función es decreciente en el intervalo: $\boldsymbol{x\epsilon\ [-\infty, -2]}$

- Por último, a la derecha de un **máximo** la función es **decreciente**.
  La función es decreciente en el intervalo: $\boldsymbol{x\epsilon\ [3, +\infty]}$

- Determinación de los puntos de inflexión:

Para determinar donde hay cambio de concavidad, se deben conocer los puntos de inflexión.

PISTA DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria: los puntos de inflexión se obtienen solucionando la ecuación: $\boldsymbol{f''(x) = 0}$

Se tiene que:

$$\boldsymbol{f''(x) = -2x + 1 \rightarrow -2x + 1 = 0 \rightarrow -2x = -1 \rightarrow x = \frac{1}{2}}$$

El punto de inflexión corresponde a: $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$

Se sabe que:

- En un mínimo y en todos los puntos vecinos al mínimo la función es cóncava hacia arriba y cambia de concavidad en el punto de inflexión, por lo tanto:
  Cóncava hacia arriba en el intervalo: $\boldsymbol{x \in (-\infty, \frac{1}{2}]}$

- En un máximo y en todos los puntos vecinos al máximo la función es con
  Concavidad hacia abajo en el intervalo: $\boldsymbol{x \in [\frac{1}{2}, +\infty)}$

2. Para la función: $\boldsymbol{y = f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x - 2}$

Determine intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento, intervalos donde la función es cóncava hacia arriba e intervalos donde la función es cóncava hacia abajo.

Procedimiento

a. Se encuentran los máximos y los mínimos de la función**:**

- Se obtiene la primera derivada $\boldsymbol{f'(x) = 6x^2 - \frac{2*5x}{2} + 1}$, simplificando**:**

$$\boldsymbol{f'(x) = 6x^2 - 5x + 1}$$

- Se iguala la primera derivada a cero: $\boldsymbol{6x^2 - 5x + 1 = 0}$

- Se soluciona la ecuación: factorizando,

$$\frac{6}{6}(6x^2-5x+1=0 \rightarrow \frac{36x^2-5(6x)+6}{6}=0 \rightarrow \frac{(6x-3)*(6x-2)}{6}=0$$

$$\frac{(6x-3)*(6x-2)}{6}=0 \rightarrow \frac{3(2x-1)*2(3x-1)}{3*2}=0 \rightarrow (2x-1)*(3x-1)=0$$

- Se iguala cada factor a cero para obtener los puntos críticos:

$$2x-1=0 \rightarrow 2x=1 \rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$3x-1=0 \rightarrow 3x=1 \rightarrow x=\frac{1}{3}$$

- Reemplazando cada punto crítico en la segunda derivada:

$$Si\ f'(x)=6x^2-5x+1 \rightarrow f''(x)=12x-5$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right)=12\left(\frac{1}{2}\right)-5=6-5=1 \rightarrow \ x=\frac{1}{2}\ es\ un\ mínimo$$

$$f''\left(\frac{1}{3}\right)=12\left(\frac{1}{3}\right)-5=4-5=-1 \rightarrow \ x=\frac{1}{3}\ es\ un\ máximo$$

Escribiéndolos en orden quedarían:

$$x=\frac{1}{3}\ es\ un\ máximo\ relativo$$

$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$ ***es un mínimo relativo***

- Se sabe que: **a la izquierda de un máximo la función es creciente**:

La función es creciente en el intervalo: $\boldsymbol{x \in (-\infty, \frac{1}{3}]}$

- También se sabe que: **entre un máximo y un mínimo** la función **es decreciente.**

La función es decreciente en el intervalo: $\boldsymbol{x \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]}$

- A **la derecha de un mínimo** la función **es creciente**.

La función es creciente en el intervalo: $\boldsymbol{x \in [\frac{1}{3}, +\infty)}$

b. Determinación de los puntos de inflexión.

- Para determinar donde hay cambio de concavidad, se deben conocer los puntos de inflexión y, recuerde, que estos se obtienen solucionando la ecuación: $\boldsymbol{f''(x) = 0}$

  Se tiene que:

$$\boldsymbol{f''(x) = 12x - 5 \to \ 12x - 5 = 0 \to x = \frac{5}{12}}$$

El punto de inflexión corresponde a: $\boldsymbol{x = \frac{5}{12}}$

- Se sabe que en un mínimo y en todos los puntos vecinos al mínimo la función es cóncava hacia arriba y cambia de concavidad en el punto de inflexión, por lo tanto:
  - **Cóncava hacia arriba** en el intervalo: $\boldsymbol{x} \,\boldsymbol{\epsilon}\, [\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}, +\infty)$

- En un máximo y en todos los puntos vecinos al máximo la función es cóncava hacia abajo

  - **Concavidad hacia abajo** en el intervalo: $\boldsymbol{x} \,\boldsymbol{\epsilon}\, [-\infty, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}})$

La gráfica de las funciones anteriores, puede ser realizada con el applet de la siguiente página.

http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/NUMERICO/index.htm

3. http://www.youtube.com/watch?v=OoKdlZkDGQk&feature=related

4. http://www.youtube.com/watch?v=yklL_7e41kU&feature=fvwrel

OPTIMIZACIÓN

Consiste en problemas de aplicación, donde el objetivo es encontrar los máximos o los mínimos de una función o un modelo matemático.

En este tema, se parte de una función y posteriormente, por medio de las técnicas de la primera y de la segunda derivada, se deben encontrar los valores máximos o los valores mínimos de dicha función.

Se sugiere el siguiente procedimiento:

1. Identifique cual es la función objetivo. (Función que se desea maximizar o minimizar).
2. Por lo general la función no es conocida, constrúyala de acuerdo a las condiciones del problema.
3. Obtenga los máximos o los mínimos de dicha función. Cuando el enunciado del problema incluya un intervalo, para hallar los máximos o los mínimos, se deben tener en cuenta los extremos del intervalo.
4. Conteste las preguntas del problema.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Problema planteado por los autores (Haeussler & Richard, 1997):

La función de costo total de un fabricante está dado por:

$$\boldsymbol{c(q) = \frac{q^2}{4} + 3q + 400\ en\ US\ \$}$$

¿Para qué nivel de producción el costo promedio por unidad será mínimo? ¿Cuál es el costo promedio mínimo?

Procedimiento

a. La función objetivo es el de **costo promedio** y se desea **minimizar**. Se debe encontrar dicha función, ya que no es dada.

- Determinación de la función de costo promedio:

$$\bar{c}(q) = \frac{c(q)}{q} = \frac{\frac{q^2}{4} + 3q + 400}{q} = \frac{q}{4} + 3 + \frac{400}{q}$$

- Para determinar los mínimos de la función de costo promedio, se debe derivar la función:

Nota: para derivar la función de costo promedio, una posibilidad es escribir dicha función de la siguiente manera:

$$\bar{c}(q) = \frac{1}{4}q + 3 + 400q^{-1}$$

Derivando la expresión anterior:

$$\bar{c}'(q) = \frac{1}{4} + 0 + 400(-1)q^{-1-1} \rightarrow \bar{c}'(q) = \frac{1}{4} - \frac{400}{q^2}$$

- Se iguala a cero y se soluciona la ecuación resultante, se iguala cada factor a cero:

$$\bar{c}'(q) = 0$$

$$\frac{1}{4} - \frac{400}{q^2} = 0 \rightarrow \frac{q^2 - 1600}{4q^2} = 0 \rightarrow q^2 - 1600 = 0$$

$$(q + 40) * (q - 40) = 0$$

$q + 40 = 0 \rightarrow q = -40$ **(No sirve)**

$q - 40 = 0 \rightarrow q = 40$ **(Punto crítico)**

El valor negativo $(q - 40)$ no sirve porque no podemos hablar de producción negativa.

- Se obtiene la segunda derivada:

$$\bar{c}'(q) = \frac{1}{4} - \frac{400}{q^2} \rightarrow c''(q) = 0 - 400(-2)q^{-3} \rightarrow c''(q) = \frac{800}{q^3}$$

- Se reemplaza el punto crítico en la segunda derivada:

$$c''(q) = \frac{800}{q^3}$$
$$c''(q) = \frac{800}{40^3} = \frac{800}{64000} = +0.0125 \rightarrow q = 40 \; es\ un\ mínimo$$

Por lo tanto, con una producción de **40 unidades** se garantiza que el **costo promedio es mínimo.**

- Para hallar el costo promedio mínimo se reemplaza **40** en la **función de costo promedio**:

$$\bar{c}(40) = \frac{40}{4} + 3 + \frac{400}{40} = 10 + 3 + 10 = 23\ US\ \$$$

2. Un monopolista vende un artículo por un precio de \$ 30.000 y le ofrece a uno de sus clientes un descuento de diez pesos por cada unidad comprada.

Determine:

1. La función de ingreso.
2. El ingreso máximo.

Procedimiento

a. Sea q el número de unidades vendidas, entonces el **precio de cada unidad** será: \$ 30.000 menos 10 pesos por cada unidad vendida, esto es:

$$\boldsymbol{p(q) = 30.000 - 10q}\ \$$$

Nota: se debe tener en cuenta que **el precio no puede ser negativo**, entonces la condición para el precio es:

$$\boldsymbol{30.000 - 10q \geq 0}$$

Resolviendo la inecuación:

$\boldsymbol{-10q \geq -30.000}$ Multiplicando por $\boldsymbol{-\frac{1}{10}1}$ en ambos lados de la inecuación se tiene:

$$\boldsymbol{-10q * \left(-\frac{1}{10}\right) \geq -30.000 * \left(-\frac{1}{10}\right)}$$

$$\boldsymbol{q \leq 3.000}$$

PISTA DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta: al multiplicar ambos miembros de una desigualdad por un número real negativo, la desigualdad cambia de sentido.

Nota: q es menor-igual que **3000**, pero tiene que ser **mayor-igual que cero,** por lo tanto el intervalo solución es:

$$\boldsymbol{q \in [0, 3.000]}$$

b. $\boldsymbol{Ingreso: r(q) = Precio: p(q) por\ número\ de\ unidades\ vendidas: (q)}$

$$\boldsymbol{r(q) = p(q) * q = (30.000 - 10q) * q}$$

La función de ingreso queda:

$$r(q) = 30.000q - 10q^2 \ \$$$

Con $q \in [0, 3.000]$

- Se deben encontrar los máximos de la función de ingreso, por lo tanto, se deriva la función ingreso:

$$r(q) = 30.000q - 10q^2 \rightarrow r'(q) = 30.000 - 20q$$

- Se hace $r'(q) = 0$,se halla el valor de q:

$$30.000 - 20q = 0 \rightarrow -20q = -30.000 \rightarrow q = \frac{30.000}{20} \rightarrow q = 1.500$$

- Se calcula la segunda derivada y se reemplaza el valor de q:

Si $r'(q) = 30.000 - 20q \rightarrow r''(q) = -20$

$$r''(1.500) = -20 \rightarrow q = 1.500\ Máximo$$

Pero para encontrar el máximo absoluto en el intervalo:

$q \in [0, 3.000]$, se debe hallar: $r(0)$, $r(3.000)$, $r(1.500)$
en $r(q) = 30.000q - 10q^2$

$$r(0) = 30.000(0) - 10(0)^2 = 0$$

$$r(3.000) = 30.000(3.000) - 10(3.000)^2 = 90.000.000 - 90.000.000 = 0$$

$\boldsymbol{r(1.500) = 30.000(1.500) - 10(1.500)^2 = \$\,22.500.000}$

El **máximo absoluto** en el intervalo $\boldsymbol{q \in [0, 3.000]\ es\ q = 1.500}$

- **El ingreso máximo se obtiene con la venta de 1.500 unidades**

El ingreso máximo es:

$$\boldsymbol{r(q1.500) = 30.000 * (1.500) - 10(1.500)^2 = \$\,22.500.000}$$

El **máximo ingreso** que puede obtener es de **$ 22'500.000**

3. Un mayorista tiene la siguiente promoción del día:

Vende piñas a 2000 pesos la unidad y ofrece un descuento de 10 pesos por piña comprada.

a. Encuentre una función que represente el ingreso del mayorista.

Procedimiento

Para construir la función de ingreso en la venta de las $\boldsymbol{q}$ piñas, tenga en cuenta que:

Ingreso = precio de venta multiplicado por la cantidad vendida.

En la siguiente tabla se observa mejor la construcción de la función de ingreso para la venta de q piñas.

Cantidad de piñas vendidas	Precio de venta	Ingreso
1	2000 – 10(1)	**[2000 – 10(1)]*1**
2	2000 – 10(2)	**[2000 – 10(2)]*2**
3	2000 – 10(3)	**[2000 – 10(3)]*3**
4	2000 – 10(4)	**[2000 – 10(4)]*4**
⋮	⋮	⋮
Q	2000 – 10q	**(2000 – 10q)*q**

Como $\boldsymbol{y = r(q)}$ es el ingreso obtenido al vender $\boldsymbol{q}$ piñas:

$\boldsymbol{r(q) = (2.000 - 10q) * q \rightarrow r(q) = 2.000q - 10q^2}$(función representativa del ingreso del mayorista).

b. ¿Bajo qué condiciones el mayorista obtendrá el máximo ingreso?

Procedimiento

- Se halla la primera derivada:

Si $\boldsymbol{r(q) = 2.000q - 10q^2 \rightarrow r'(q) = 2.000 - 20q}$

- Se hace: $\boldsymbol{r'(q) = 0}$ **y se despeja el valor de** $\boldsymbol{q}$:

$$\boldsymbol{2.000 - 20q = 0 \rightarrow -20q = -2.000 \rightarrow q = \frac{-2.000}{-20} \rightarrow q = 100}$$

- Se halla la segunda derivada:

Si $\boldsymbol{r'(q) = 2.000 - 20q \rightarrow r''(q) = -20 \rightarrow}$

$\boldsymbol{r''(q100) = -20 \rightarrow q = 100\ es\ un\ máximo\ relativo}$

Por lo tanto, con la **venta de 100 piñas** se obtiene **el ingreso máximo**.

- El **ingreso máximo** es:

$$r(q) = 2.000q - 10q^2 \rightarrow r(100) = 2.000 * (100) - 10 * (100)^2$$
$$= \$100.000$$

4. Ejemplo propuesto como ejercicio por los autores (Haeussler & Richard, 1997)

Una empresa dispone de US$ 3000 para cercar una porción rectangular de terreno adyacente a un río usando este como un lado del área cercada. El costo de la cerca paralela al río es de US$ 5 por metro instalado y el de la cerca para los otros dos lados es de US$ 6 por metro instalado. Encuentre las dimensiones del área máxima cercada. Véase la figura 58.

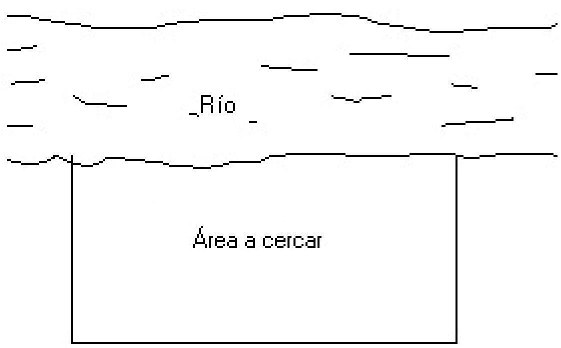


Figura 58. Área a cercar.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 18 de 2011)

Procedimiento

De acuerdo con la figura 58:

a. Sea x la longitud de la cerca paralela al río, sea y la longitud de cada uno de los lados del terreno adyacente al río.

- Se debe encontrar una relación entre $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ por los datos que dan, se sabe que el costo total del área es de **US$ 3.000**, por tanto:

$\mathbf{5x + 6y = 3.000,}$ se despeja $\boldsymbol{y}$**:**

$$6y = 3.000 - 6x \rightarrow y = \frac{3.000 - 5x}{6}$$

PISTA DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria: el área de un rectángulo es igual al producto de la base por la altura

$$A_{rectángulo} = base * altura$$

Al reemplazar en esta ecuación en función de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$**,** se tiene**:**

$A_{rectángulo} = x * y$**,** reemplazando $\boldsymbol{y}$:

$a(x) = \ x * (\frac{3.000-5x}{6})$**,** realizando el producto indicado y separando denominadores:

$a(x) = \frac{3.000x}{6} - \frac{5x^2}{6}$**,** simplificando**:**

$$a(x) = 500x - \frac{5x^2}{6}$$

- Determinación del dominio de esta función:

  $a(x) = 500x - \frac{5x^2}{6}$**,** como el área no puede ser **negativa,** entonces:

$500x - \frac{5x^2}{6} > 0$**,** factorizando:

$x\ (500 - \frac{5x}{6}) > 0$**,** igualando a cero cada factor:

$x = 0 \quad \sigma \quad 500 - \frac{5x}{6} = 0$**,** queda:

$500 - \frac{5x}{6} = 0$**,** multiplicando toda la ecuación por $\mathbf{6}$

$$\mathbf{3.000 - 5x = 0 \rightarrow -5x = -3.000 \rightarrow x = \frac{-3.000}{-5} \rightarrow x = 600}$$

Por lo tanto, el dominio de la función es**:**

$$\boldsymbol{D_f = x \in (0, 600)}$$

b. Se obtiene la primera derivada de la función:

Si $\boldsymbol{a(x) = 500x - \frac{5x^2}{6} \rightarrow a'(x) = 500 - \frac{10x}{6}}$

Se hace $\boldsymbol{a'(x) = 0 \rightarrow\ 500 - \frac{10x}{6} = 0 \rightarrow 3.000 - 10x = 0 \rightarrow}$

$\boldsymbol{-10x = -3.000 \rightarrow x = \frac{-3.000}{-10} \rightarrow x = 300}$

a. Se obtiene la segunda derivada de la función:

Si $\boldsymbol{a'(x) = 500 - \frac{10x}{6} \rightarrow a''(x) = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}}$

- Reemplazando en la segunda derivada, se tiene:
  $\boldsymbol{a''(300) = -\frac{5}{3}}$, esto implica que:

$$\boldsymbol{x = 300\ es\ un\ máximo\ relativo}$$

- Se reemplaza el valor de $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{y = \frac{3.000 - 5x}{6}}$ y se encuentra el valor de la otra dimensión $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{y = \frac{3.000 - 5(300)}{6} = \frac{3.000 - 1.500}{6} = \frac{1.500}{6} \rightarrow y = 250}$$

- Por lo tanto, las dimensiones son:

$x = 300 \; metros$
$y = 250 \; metros$

5. http://www.youtube.com/watch?v=TSVK1vFifQ0&feature=relmfu
6. http://www.youtube.com/watch?v=x9oQOz95kyA&feature=related

7. http://www.youtube.com/watch?v=1QckQJcpcKo&feature=related
8. http://www.youtube.com/watch?v=LulyYqlfdoQ&feature=related
9. http://www.youtube.com/watch?v=pcr4ikpQlLo&feature=related

Ejercicio de Entrenamiento

1. **Encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva:**

$$y = f(x) = \frac{7x-1}{3x-2}$$

En el punto x = 1

2. **Encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva:**

$$y = \sqrt{5x-1}$$

En el punto x = 2

3. **La función de costo en la fabricación de q unidades de cierto artículo es:**

$$c(q) = 0{,}03q^2 + 50q + 3\$$$

Determine el costo marginal y el costo promedio en la producción de 25 unidades del producto.

4. **La función de demanda en la venta de q unidades de cierto artículo es:**

$$p(q) = 7000 - 0{,}2q \; \$$$

Determine el ingreso marginal en la venta de 10 unidades del producto.

5. **La función de posición de un objeto está dada por:**

$$s(t) = 4t^3 - 5t^2 + 3t + 50 \; m$$

Determine la velocidad y la aceleración para un tiempo de 10 segundos.

6. **La función de posición de un objeto está dada por:**

$$s(t)=\frac{5}{3}t^3-3t^2+8t+20\ km$$

Determine la velocidad y la aceleración para un tiempo de 3 horas.

Determine el instante en el cual el objeto se detiene.

7. Para la función

$$f(x)=x^5-80x+20$$

Determine:

Máximos y mínimos relativos.

Puntos de inflexión.

Intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.

Intervalos de concavidad arriba e intervalos de concavidad abajo.

8. Para la función

$$f(x)=x^3+\frac{11}{2}x^2-4x+10$$

Determine:

Máximos y mínimos relativos.

Puntos de inflexión.

Intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.

Intervalos de concavidad arriba e intervalos de concavidad abajo.

9. Un monopolista ofrece a uno de sus clientes vender un producto de la siguiente manera: Un precio de $8000 y un descuento de 0,02 pesos por cada unidad comprada. Determine el máximo ingreso que puede obtener el monopolista bajo estas condiciones.

10. Se desea construir una caja rectangular sin tapa con una lámina de cartón de 80 cm por 35 cm, para ello se quita en cada esquina un cuadrado de x cm de longitud. Determine las dimensiones de la caja de tal manera que permita almacenar el máximo volumen. Determine el volumen máximo.

6. PISTAS DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta: para determinar intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento de una función, se debe recorrer la gráfica de la función de izquierda a derecha, si la sensación es que se sube por la gráfica, en este tramo la función es creciente y si la sensación es que se baja por la gráfica, en este tramo la función es decreciente.

Tenga presente: que a los números reales no pertenecen expresiones de la forma: cero dividido cero, un número diferente de cero dividido cero, la raíz par de los números negativos, el logaritmo de cero, el logaritmo de los números negativos, entre otros.

Traer a la memoria: para hallar los interceptos de una función con el eje x, se hace y = 0. Para encontrar los interceptos con el eje y, se hace x = 0.

Tener en cuenta: para determinar si una expresión cuya gráfica es dada, es función, se traza una recta vertical, si corta la gráfica en un solo punto corresponde a una función; si corta la gráfica en dos o más puntos no es una función.

Tenga presente: una función racional es discontinua en todos aquellos valores de x en los cuales el denominador es igual a cero.

Traer a la memoria: toda función es continua en su dominio.

Tener en cuenta: si al evaluar un límite da como resultado una expresión de la forma $\frac{0}{0}$, este no es un resultado válido que se llama una indeterminación de la "forma cero sobre cero". Las indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ se pueden eliminar factorizando y/o racionalizando.

Tenga presente: para determinar los puntos críticos de una función, se debe solucionar la ecuación: primera derivada igual a cero.

Traer a la memoria: para determinar si un punto crítico corresponde a un máximo o a un mínimo relativo, debe reemplazar cada punto crítico en la segunda derivada. Si la segunda derivada evaluada en el punto crítico es positiva, el punto crítico corresponde a un mínimo relativo y si el resultado es negativo, el punto crítico corresponde a un máximo.

Tener en cuenta: para determinar los puntos de inflexión de una función, se debe solucionar la ecuación: segunda derivada igual a cero.

Tenga presente: que los cambios de concavidad de una función se presentan en los puntos de inflexión de la misma.

Traer a la memoria: que el costo marginal se interpreta como: el dinero que cuesta producir una unidad adicional a las unidades planeadas.

7. GLOSARIO

Función: "Una función es una regla que describe la forma en que una cantidad depende de otra; por ejemplo, al estudiar el movimiento, la distancia recorrida es una función del tiempo." (Stewar, Lothar, & Watson, 2001, p.130).

Dominio: el dominio para cualquier función está constituido por todos los valores que puede tomar la variable independiente (la **x**). Todos los valores tomados de los números reales.

Rango: el rango para cualquier función está constituido por todos los números que puede tomar la variable dependiente (la **y**). Al rango también se le conoce como la imagen de la función

Interceptos: *u*n intercepto es un punto en el cual la gráfica de la función corta un eje.

Crecimiento: se dice que una función es creciente cuando al aumentar la x, la y también aumenta o viceversa.

Decrecimiento: se dice que una función es decreciente cuando al aumentar la x, la y disminuye o viceversa.

Continuidad: conceptualmente, se dice que una función es continua, cuando al observar su gráfica, esta se puede recorrer sin necesidad de levantar el lápiz.

Discontinuidad: conceptualmente, se dice que una función es discontinua, cuando al observar su gráfica, es necesario levantar el lápiz para recorrerla.

Punto crítico*:* es un valor de x en el cual la primera derivada de una función es igual a cero o no existe.

Punto de inflexión: es un valor de x en el cual la segunda derivada de una función es igual a cero.

Asíntota vertical: es una línea recta vertical que presenta la característica que la gráfica de la función tiende a tocarla; pero nunca la toca, ni la corta, ni la cruza.

8. BIBLIOGRAFÍA

Dávila, A., Navarro, P., & Carvajal, J. (1996). INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO. Caracas: McGraw-Hill.

Edwar, T. D. (1996). Cálculo Para Administración, Economía y Ciencias Sociales. SANTAFE DE BOGOTA.: McGraw Hill.

emagister.com. (27 de septiembre de 2007). Wikilearning. Recuperado el 18 de Mayo de 2011, de http://www.wikilearning.com/apuntes/funciones_matematicas-funciones/3503-1

especificado, N. (s.f.). monografías.com. Recuperado el 18 de Mayo de 2011, de Matemática.: http://www.monografias.com/trabajos7/mafu/mafu.shtml#fun

Fernández, A. S. (s.f.). *web social*. Recuperado el 18 de mayo de 2011, de Solución problemas de Matemáticas y Física Vía Email: http://www.jfinternational.com/funciones-matematicas.html

Haeussler, E., & Richard, P. S. (1997). Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. México: Prentice hall.

Hoffmann, L. D., & Bradley, G. L. (1995). CÁLCULO Aplicado a Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales. Santafé de Bogotá: McGRAW-HILL.

Norma, G. e. (2010). eleducador.com. Recuperado el 18 de Mayo de 2011, de http://www.eleducador.com/col/contenido/contenido.aspx?catID=110&conID=307

Purcell, E., & Varberg, D. (1993). Cálculo con geometría analítica. México: Prentice Hall.

S.T.Tan. (1998). Matemáticas para administración y economía. México: International Thompson editores, S.A.
Soler, F. F., Núñez, R., & Aranda, S. M. (2002). Fundamentos de Cálculo con aplicaciones a ciencias Económicas y Administrativas. Bogotá: ECOE EDICIONES.

Stewar, J. (1999). CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL*.* México: International Thomson Editores, S. A. De C. V.

Stewar, J., Lothar, R., & Watson, S. (2001). Precálculo*.* Madrid: International Thomson Editores, S.A.

Stewart, J. (1999). Cálculo conceptos y contexto*.* México: International Thomso Editore.

Uribe, C. J. (1990). Matemáticas una propuesta curricular. Un décimo grado educación media vocacional. Medellín: Bedout editores S.A.

Uribe, C. J., & Ortíz, D. M. (No especificado). Matemática Experimental *8.* Medellín: Uros editores.