



## **FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA**

Ingeniería de Sistemas

Asignatura: Matemáticas III

Vicerrectoría de Educación a Distancia y Virtual

Este material es propiedad de Uniremington Corporación Universitaria,  
para los estudiantes de Uniremington en todo el país.

2014

## CRÉDITOS

---



El módulo de estudio de la asignaturatrasversal Matemáticas III (Cálculo Integral) es propiedad de la Corporación Universitaria Remington. Las imágenes fueron tomadas de diferentes fuentes que se relacionan en los derechos de autor y las citas en la bibliografía. El contenido del módulo está protegido por las leyes de derechos de autor que rigen al país.

Este material tiene fines educativos y no puede usarse con propósitos económicos o comerciales.

### AUTOR

---

Pablo Emilio Botero Tobón  
[pbotero@remington.edu.co](mailto:pbotero@remington.edu.co)

**Nota:** el autor certificó (de manera verbal o escrita) No haber incurrido en fraude científico, plagio o vicios de autoría; en caso contrario eximió de toda responsabilidad a La Corporación Universitaria Remington, y se declaró como el único responsable.

**Actualizaciones:** fueron creadas a través de talleres didácticos de entrenamiento, ejercicios de aprendizaje, pistas de aprendizaje, mapa conceptual y pruebas iniciales

### RESPONSABLES

---

**Jorge Mauricio Sepúlveda Castaño**  
Decano facultad de ciencias básicas e ingeniería  
[jsepulveda@uniremington.edu.co](mailto:jsepulveda@uniremington.edu.co)

**Eduardo Alfredo Castillo Builes**  
Vicerrector modalidad distancia y virtual  
[ecastillo@uniremington.edu.co](mailto:ecastillo@uniremington.edu.co)

**Carlos Alberto Ocampo Quintero**

Coordinador CUR-Virtual

[cocampo@uniremington.edu.co](mailto:cocampo@uniremington.edu.co)

## **GRUPO DE APOYO**

---

**Personal de la Unidad CUR-Virtual**

EDICIÓN Y MONTAJE

Primera versión. Febrero de 2011. Segunda versión Marzo 2012

Derechos Reservados



Esta obra es publicada bajo la licencia Creative Commons. Reconocimiento-No Comercial-Compartir Igual 2.5 Colombia.

## TABLA DE CONTENIDO

<b>1.</b>	<b>MAPA DE LA ASIGNATURA.....</b>	<b>6</b>
<b>2.</b>	<b>MAPA CONCEPTUAL DE LA ASIGNATURA .....</b>	<b>7</b>
<b>3.</b>	<b>UNIDAD I INTEGRAL INDEFINIDA E INTEGRACIÓN.....</b>	<b>8</b>
3.1.	Prueba inicial.....	8
3.2.	Tema 1 integración.....	10
3.3.	Tema 2 Técnicas de Integración.....	51
<b>4.</b>	<b>UNIDAD 2 INTEGRAL DEFINIDA.....</b>	<b>95</b>
4.1.	Prueba Inicial.....	95
4.2.	Tema 1 Integral Definida.....	96
4.3.	Tema 2 Área bajo una curva y área entre curvas.....	101
4.4.	Tema 3 Sólidos de Revolución.....	124
<b>5.</b>	<b>UNIDAD 3 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN.....</b>	<b>141</b>
5.1.	Prueba inicial.....	141
5.2.	Tema 1 Integración por partes.....	142
5.3.	Tema 2 Integración por Fracciones Parciales.....	159
5.4.	Relación con otros Temas.....	185
<b>6.</b>	<b>GLOSARIO.....</b>	<b>186</b>
<b>7.</b>	<b>PISTAS DE APRENDIZAJE.....</b>	<b>192</b>
<b>8.</b>	<b>BIBLIOGRAFÍAS.....</b>	<b>194</b>
8.1.	Fuentes digitales o electrónicas.....	195

## 1. MAPA DE LA ASIGNATURA

### MATEMÁTICAS III

#### PROPÓSITO GENERAL DEL MÓDULO

El cálculo es una herramienta de uso cotidiano en la elaboración de diseños y la implementación y desarrollo de proyectos. El manejo de la conceptualización y aplicación de este modelo permitirá un ejercicio versátil de la acción en las diferentes áreas del conocimiento.

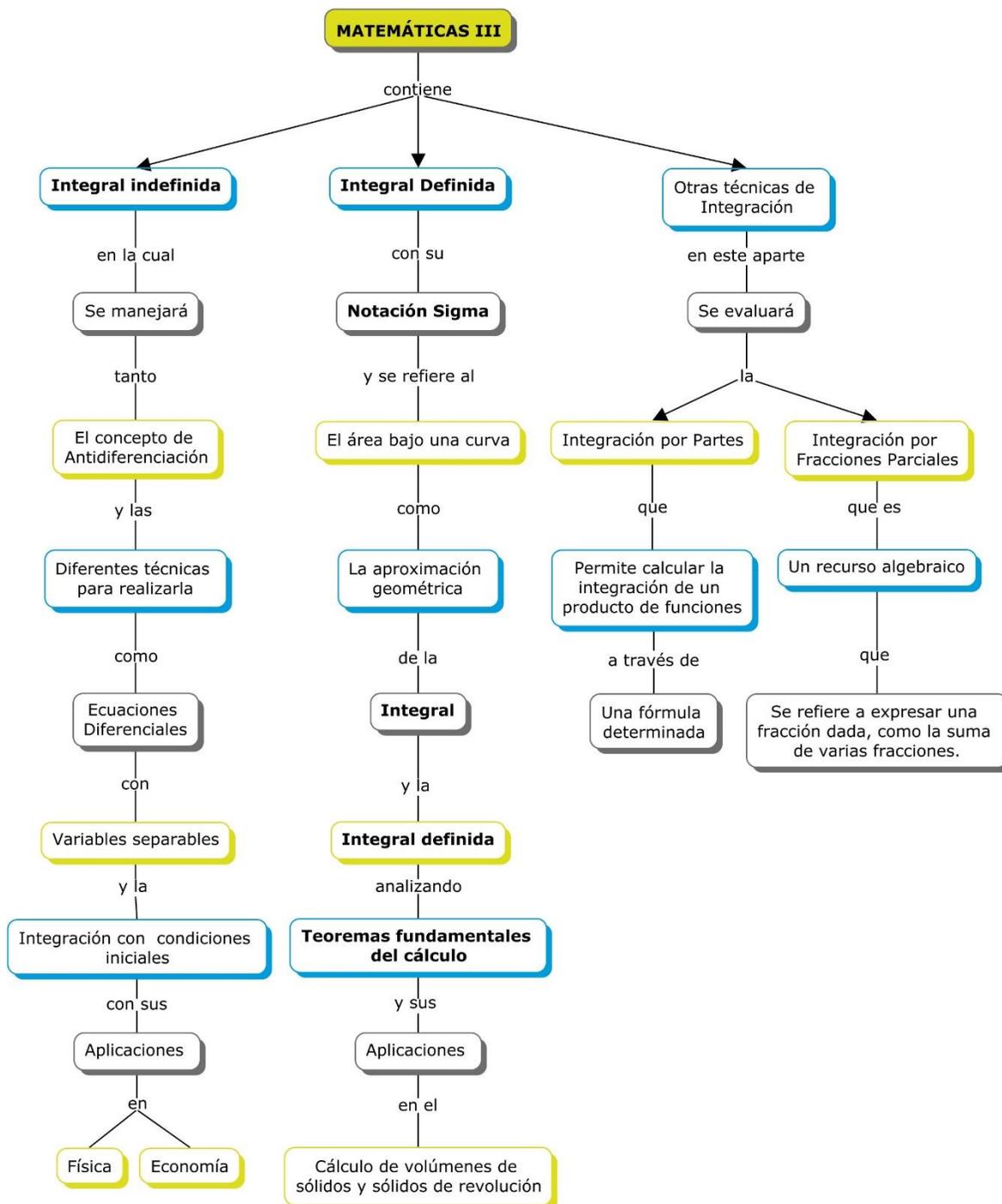
#### OBJETIVO GENERAL

Analizar comprensivamente los elementos geométricos, algebraicos y analíticos asociados al modelo de representación de situaciones problemáticas propuesto por el cálculo en su aproximación integral, identificando las características de este modelo de representación con una claridad suficiente que permitan el desarrollo de habilidades y destrezas para la discretización de situaciones problemáticas de su cotidianidad y puedan ser simuladas con este esquema de pensamiento, brindando, además, elementos del modelo que permitan la representación de otro grado de libertad del sistema dinámico no lineal conformado por la interacción de la persona y su entorno de objetos cotidianos.

#### OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Definir la anti derivada y la integral indefinida, explicando y aplicando las fórmulas básicas de integración.
- Entender el concepto de la integral definida partiendo del cálculo del área bajo una curva.
- Calcular integrales indefinidas y definidas, usando los métodos de integración por partes e integración por fracciones parciales.

## 2. MAPA CONCEPTUAL DE LA ASIGNATURA



### 3. UNIDAD I INTEGRAL INDEFINIDA E INTEGRACIÓN

#### OBJETIVO GENERAL.

Definir la anti derivada y la integral indefinida, explicando y aplicando las fórmulas básicas de integración.

#### OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Utilizar las leyes básicas de integración para encontrar un conjunto de funciones primitivas.
- Integración de funciones por el método de sustitución o cambio de variable.
- Efectuar integrales realizando división previa a la integral.

#### 3.1. Prueba inicial.

1. Escriba cinco notaciones diferentes para indicar la primera derivada de una función o modelo matemático.

Obtenga la derivada indicada (si existe) para cada una de las siguientes funciones:

**Nota:** Realice las operaciones en hoja adjunta (socialice con su tutor) y coloque el resultado en su respectivo cuadro.

<b>FUNCIONES</b>	<b>PRIMERA DERIVADA</b> $y'(x) = f'(x)$	<b>SEGUNDA DERIVADA</b> $y''(x) = f''(x)$	<b>TERCERA DERIVADA</b> $y'''(x) = f'''(x)$
$f(x) = 8x^3 - 9x^2 - 5x + 7$			
$f(x) = \frac{3x^5}{2} + \frac{7x^3}{3} - \frac{3x}{2}$			
$f(x) = \frac{6}{2x - 3}$			
$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^5} + 7$			
$f(x) = (3 - 5x^2) * (4x - 15)$			
$f(x) = e^{5x^3 - 6x + 4}$			
$f(x) = \ln(5x^3 - 2x^2 + 7)$			
$f(x) =$			

2. Encuentre la función de costo marginal y la función de costo promedio para cada función de costo dada:

- $c(q) = 3.5q^2 + 2q - 4$  en \$
- $c(q) = 6q^3 + 8.5q^2 - 3q + 7$  en \$ US

3. Dada la función para la posición instantánea de cierto objeto, donde  $t$  es el tiempo en segundos, encuentre la función para la velocidad instantánea y la función para la aceleración instantánea:

- $s(t) = 8t^2 + 5t - 60$  en  $km$ .
- $s(t) = 50t + 3$  en  $m$ .
- $s(t) = 17t^3 + 28t^2 - 9t + 5$  en  $cm$ .

4. Dada la función para la demanda de un producto:

- $p(q) = 15q + 9$  en \$. Determine la función para el ingreso marginal.

### 3.2. Tema 1 integración

- **Reseña histórica.**

Los cimientos del Cálculo Infinitesimal fueron colocados por matemáticos como: Cavalieri, Torriceli, Fermat, Pascal y Barrow, entre otros. Y luego el cálculo fue desarrollado en forma independiente por Isaac Newton en Inglaterra y por Gottfried Leibniz en Alemania hacia el final de los años 1600 y comienzos de los años 1700 (entre 1660 y 1720). Y fue George Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) quien proporcionó la definición moderna de la Integral definida.

Uno de los problemas que originó el desarrollo del Cálculo fue el **problema del área**. El concepto de área se tuvo desde muy temprano, prácticamente desde el desarrollo de la agricultura y la propiedad privada que hizo necesario idear métodos para medir los terrenos. Antes de los griegos se conocían fórmulas para calcular con bastante precisión el área de superficies poligonales de cualquier forma. Lo que no existía era una fórmula o un método para encontrar el área de una superficie cuyo borde exterior fuera una curva, la de un círculo por ejemplo.

**Arquímedes (287-212 AC)** resolvió el problema parcialmente, deduciendo la fórmula para hallar el área del círculo. El método de Arquímedes fue un avance importante, pero no satisfacía totalmente la necesidad de encontrar el área de una curva, problema que si resolvió el Cálculo.

Esta fue un de las necesidades por las cuales surgió el Cálculo. Hoy en día el Cálculo no solo se aplica para determinar áreas, sino también para el diseño de puentes, caminos, velocidad exacta que debe alcanzarse para colocar un satélite en una órbita alrededor de la tierra, para determinar modelos matemáticos bajo ciertas condiciones, entre otras aplicaciones. Tiene aplicación en todas las ramas del conocimiento, en Economía, Administración, Física y demás ciencias.

- **Definición de integral o Antiderivada.**

La **integral** es una operación contraria a la derivada.

**DEFINICIÓN:** La integral de una función  $f(x)$ , es otra función que  $F(x)$ , siempre que se cumpla que:

$$F'(x) = f(x)$$

Para indicar que  $F(x)$  es una integral de  $f(x)$  utilizamos el siguiente símbolo:

$$F(x) = \int f(x)dx: \text{ se llama Integral indefinida}$$

**DEMOSTRACIÓN:**

➤ Para hacer la demostración se parte de la condición:

$$F'(x) = f(x) \text{ Ecuación (1)}$$

➤ Otra notación para  $F'(x)$  puede ser:

$$F'(x) = \frac{d[F(x)]}{dx} \text{ Ecuación (2)}$$

➤ Reemplazando **2** en **1** se tiene:

$$\frac{d[F(x)]}{dx} = f(x)$$

➤ Multiplicando a ambos lados por **dx** queda:

$$\frac{d[F(x)]}{dx} * dx = f(x) * dx, \text{ Simplificando } dx \text{ en el primer miembro de la igualdad:}$$

$$d[F(x)] = f(x) * dx$$

➤ Para quitar el diferencial **d[F(x)]**, se integra en ambos lados:

$$\int d[F(x)] = \int f(x) dx$$

$$F(x) = \int f(x) dx, \text{ lo que se quería demostrar.}$$

## EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Si  $F(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6x$

➤ Derivando se tiene que:

$$F'(x) = 12x^2 + 10x + 6 = f(x)$$

➤ Aplicando la fórmula:

$$F(x) = \int f(x) dx$$

- Se tiene que:

$$F(x) = \int (12x^2 + 10x + 6)dx = 4x^3 + 5x^2 + 6x$$

- Es decir, una integral de  $12x^2 + 10x + 6$ , es:

$$F(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6x$$

---

2. Si  $F(x) = 5x^4$

- Derivando se tiene que:

$$F'(x) = 20x^3 = f(x)$$

- Aplicando la fórmula:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

- Se tiene que:

➤  $F(x) = \int 20x^3 dx = 5x^4$

- Es decir, una integral de  $20x^3$ , es:

$$F(x) = 5x^4$$

---

**NOTA:**

Siempre que se integre debe **sumarse** al resultado una **constante de integración C** que representa las cantidades que no tienen variable.

Revisando la nota anterior se tiene:

$F(x)$	$F'(x)$	$\int f(x)dx$
1. $x^4$	$4x^3$	$x^4$
2. $x^4 + 10$	$4x^3$	Debería ser $x^4 + 10$ *
3. $x^4 - 5$	$4x^3$	Debería ser $x^4 - 5$ **

Revisando el cuadro:

Sí

1.  $F(x) = x^4$ , su derivada

$F'(x) = 4x^3$ , esto es:

$$F'(x) = 4x^3$$

Entonces, se tiene que una integral de  $4x^3$  es  $F(x) = x^4$ . Representando esta situación matemáticamente:

$$\int 4x^3 dx = x^4$$

2. Pero que pasa si  $F(x) = x^4 + 10$ , derivando podemos ver que:

$$F'(x) = 4x^3$$

Se obtiene la misma derivada del ejercicio 1, por lo tanto:

$\int 4x^3 dx$ , también debe ser igual a  $F(x) = x^4 + 10$

3. Lo mismo sucede si  $F(x) = x^4 - 5$

Su derivada es igual a:

$$F'(x) = 4x^3$$

Entonces,  $\int 4x^3 dx$  debe ser igual a  $F(x) = x^4 - 5$

Tenemos entonces que:  $\int 4x^3 dx$ , debe ser igual a:

1.  $F(x) = x^4$

---

2.  $F(x) = x^4 + 10$  \*\*

---

3.  $F(x) = x^4 - 5$ \*

---

Como conclusión tenemos que estas tres funciones solo **difieren en una constante**, como no sabemos cuál número escribir, **siempre que se integre**, al resultado le escribimos una **constante C**.

- **LEYES BÁSICAS DE INTEGRACIÓN.**

- **Integral de una potencia**

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \text{ con } n \neq -1$$

### EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1.  $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{x^4}{4} + c$

---

2.  $\int \sqrt[5]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{5}} dx = \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + c = \frac{5}{7} * \sqrt[5]{x^7} + c =$

$$\frac{5}{7}x * \sqrt[5]{x^2} + c$$

---

$$3. \int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3-1}}{-3-1} + c = \frac{x^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{4x^4} + c$$

---

➤  $\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln x + c$

➤  $\int dx = x + c$

### EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1.  $\int dz = z + c$

---

2.  $\int dy = y + c$

---

3.  $\int e^x dx = e^x + c$

---

➤  $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c, a \in R_e \text{ y } a \neq 0$

### EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1.  $\int 5^x dx = \frac{1}{\ln 5} 5^x + c$

---

2.  $\int 7^x dx = \frac{1}{\ln 7} 7^x + c$

---

$$\triangleright \int k * f(x)dx = k \int f(x)dx = kF(x) + c$$

Donde **k** es una constante.

Podemos ver que se efectúa la integral de la función, el resultado se multiplica por la constante **k** y al final sólo se escribe una sola constante de integración.

### EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

$$1. \int 10 dx = 10 \int dx = 10x + c$$

---

$$2. \int \frac{11}{x} dx = 11 \ln x + c$$

---

$$3. \int \frac{-4}{y} dy = -4 \ln y + c$$

---

$$4. \int \frac{8}{x} dx = 8 \int \frac{1}{x} dx = 8 \ln x + c$$

---

$$5. \int \sqrt{3} dx = \sqrt{3} \int dx = \sqrt{3} x + c$$

---

$$6. \int 9x^{1.3} dx = 9 \int x^{1.3} dx = \frac{9x^{1.3+1}}{1.3+1} + c = \frac{9x^{2.3}}{2.3} + c$$

---

$$7. \int 6x^2 dx = 6 \int x^2 dx = \frac{6x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{6x^3}{3} + c = 2x^3 + c$$

---

$$8. \int \frac{8}{x^5} dx = 8 \int \frac{1}{x^5} dx = 8 \int x^{-5} dx = \frac{8x^{-5+1}}{-5+1} + c = \frac{8x^{-4}}{-4} + c =$$
$$-\frac{2}{x^4} + c$$

---

$$9. \int 11e^x dx = 11 \int e^x dx = 11e^x + c$$

---

$$10. \int \frac{3}{5} e^x dx = \frac{3}{5} \int e^x dx = \frac{3}{5} e^x + c$$

$$11. \int -8e^z dz = -8 \int e^z dz = -8e^z + c$$

$$12. \int e dx = ex + c \text{ (Recuerde que } e \text{ es una constante)}$$

$$13. \int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + c$$

➤ **INTEGRAL DE UNA SUMA (DIFERENCIA)**

La integral de una **suma (diferencia)** es igual a la suma (diferencia) de las integrales, esto es:

$$\int [f(x) \pm g(x) \pm h(x) \pm \dots] = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \pm \int h(x) dx \pm \dots$$

**Nota:** Para aplicar la ley, se efectúa cada integral independientemente y al final escribimos una sola constante de integración C.

**EJERCICIOS DE APRENDIZAJE**

$$1. \int (5x^2 + 6x - 10) dx = \int 5x^2 dx + \int 6x dx - \int 10 dx =$$

$$5 \int x^2 dx + 6 \int x dx - 10 \int dx = 5 \frac{x^{2+1}}{2+1} + 6 \frac{x^{1+1}}{1+1} - 10x + c$$

Realizando las operaciones indicadas y simplificando:

$$\frac{5x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 10x + c = \frac{5x^3}{3} + 3x^2 - 10x + c$$

---

$$2. \int (7x^4 - 3x^2 + 8x - 9)dx = \int 7x^4 dx - \int 3x^2 dx + \int 8x dx - \int 9 dx =$$

$$7 \int x^4 dx - 3 \int x^2 dx + 8 \int x dx - 9 \int dx = 7 \frac{x^{4+1}}{4+1} - 3 \frac{x^{2+1}}{2+1} + 8 \frac{x^{1+1}}{1+1} - 9x + c$$

Realizando las operaciones indicadas y simplificando:

$$\frac{7x^5}{5} - \frac{3x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 9x + c = \frac{7x^5}{5} - x^3 + 4x^2 - 9x + c$$

---

$$3. \int \frac{4x^5 - 6x^3 + 8x}{2x} dx \text{ Separando denominadores y aplicando la propiedad correspondiente, se tiene:}$$
$$\int \frac{4x^5}{2x} dx - \int \frac{6x^3}{2x} dx + \int \frac{8x}{2x} dx$$

Simplificando, se tiene:

$$\int 2x^4 dx - \int 3x^2 dx + \int 4 dx = 2 \int x^4 dx - 3 \int x^2 dx + 4 \int dx =$$

$$\frac{2x^{4+1}}{4+1} - \frac{3x^{3+1}}{3+1} + 4x + c = \frac{2x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + 4x + c$$

---

$$4. \int 5z^3 dx = 5z^3 \int dx = 5z^3 x + c$$

**Nota:** Se debe esto a que se está integrando  $x$  y no  $z$ , por lo tanto  $z$  es una constante.

---

$$5. \int \left( 3q^2 - \frac{2}{3}q + 5 \right) dq$$

$$\int \left( 3q^2 - \frac{2}{3}q + 5 \right) dq = \int 3q^2 dq - \int \frac{2}{3}q dq + \int 5 dq =$$

$$3 \int q^2 dq - \frac{2}{3} \int q dq + 5 \int dq = \frac{3q^{2+1}}{2+1} - \frac{2}{3} * \frac{q^{1+1}}{1+1} + 5q + c$$

Realizando las operaciones indicadas y simplificando, se tiene:

$$\frac{3q^3}{3} - \frac{2}{3} * \frac{q^2}{2} + 5q + c = q^3 - \frac{1}{3}q^2 + 5q + c$$

---

$$6. \int y^2 \left( y + \frac{3}{2} \right) dy$$

$\int y^2 \left( y + \frac{3}{2} \right) dy$ , Se realiza el producto indicado:

$\int \left( y^3 + \frac{3}{2}y^2 \right) dy$ , se aplica la propiedad correspondiente:

$$\int y^3 dy + \int \frac{3}{2}y^2 dy = \frac{y^{3+1}}{3+1} + \frac{3}{2} * \frac{y^{2+1}}{2+1} + c$$

Realizando las operaciones indicadas y simplificando, se tiene:

$$\frac{y^4}{4} + \frac{3}{2} * \frac{y^3}{3} + c = \frac{y^4}{4} + \frac{3}{2} * \frac{y^3}{3} + c = \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^3 + c$$

---

$$7. \int 3 * 2^x dx = 3 \int 2^x dx = 3 * \frac{2^x}{\ln 2} + c$$

---

$$8. \int \frac{5^x}{7} dx = \frac{1}{7} \int 5^x dx = \frac{1}{7} * \frac{5^x}{\ln 5} + c$$

---

➤ **Integración con condiciones iniciales**

Las condiciones iniciales nos permiten determinar el valor de la constante **C**. Es decir entre muchas funciones, nos permite determinar una única función.

### EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Sí.  $f'(x) = 5x$  y  $f(1) = 4$ . Determine:  $f(x)$

El procedimiento a seguir para resolver este tipo de integrales es el siguiente:

- a. Se escribe una notación para la derivada que permita visualizar las dos variables.

$$f'(x) \text{ o } \frac{d[f(x)]}{dx} \text{ o } \frac{dy}{dx} \text{ Esto es:}$$

$$f'(x) = \frac{d[f(x)]}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

Se utilizará la notación:  $\frac{dy}{dx}$

- La ecuación que nos dan se llama una **ecuación diferencial** (porque es una ecuación que incluye derivadas).

$$\frac{dy}{dx} = 5x \text{ De acuerdo a las condiciones dadas inicialmente}$$

- Debemos independizar las dos variables. Todo lo que tenga  $x$  a un lado (incluyendo el  $dx$ ) y todo lo que tenga  $y = f(x)$  al lado contrario.

Separando variables queda:  $dy = 5x dx$

- Integrando en ambos lados (no es necesario colocar dos constantes de integración)

$$\int dy = \int 5x dx.$$

Se resuelve la integral:

$$y = \frac{5x^2}{2} + c *$$

Recuerde que:  $y$  es lo mismo  $f(x)$  y  $y = f(x)$

- Luego utilizamos la condición inicial o valor en la frontera para hallar  $C$ .

Para este caso la condición inicial es  $f(1) = 4$ . Esta condición quiere decir:

Para  $x = 1, y = 4$

Se reemplazan estos valores en la ecuación:

$$y = \frac{5x^2}{2} + c *$$

$$y = \frac{5x^2}{2} + c \text{ (Se reemplazan } x, y \text{ en el modelo):}$$

$$4 = \frac{5(1)^2}{2} + c \rightarrow c = 4 - \frac{5}{2} \rightarrow c = \frac{8 - 5}{2} \rightarrow c = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto, la función  $y = \frac{5x^2}{2} + c$  queda:

$$y = \frac{5x^2}{2} + \frac{3}{2}$$

b. Con la función obtenida podemos encontrar valores de  $x$  o de  $y$  según se necesite.

$$f(x) = y = \frac{5x^2}{2} + \frac{3}{2}$$

Por ejemplo, hallar:

- $f(-3) = \frac{5(-3)^2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{45}{2} + \frac{3}{2} = \frac{48}{2} = 24$
- $f(2) = \frac{5(2)^2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{20}{2} + \frac{3}{2} = \frac{23}{2}$
- ¿Qué valor tiene  $x$  cuando  $y = 7$

- Se reemplaza en la ecuación:

$$y = \frac{5x^2}{2} + \frac{3}{2} \rightarrow 7 = \frac{5x^2}{2} + \frac{3}{2}$$

- Se multiplica toda la ecuación por 2, para eliminar los denominadores:

$$2 * 7 = 2 * \frac{5x^2}{2} + 2 * \frac{3}{2}$$

- Simplificando:

$$5x^2 + 3 = 14$$

- Resolviendo para  $x$ :

$$5x^2 = 14 - 3 \rightarrow 5x^2 = 11 \rightarrow x^2 = \frac{11}{5} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{11}{5}}$$

- 
2. Si  $y$  es una función de  $x$  tal que  $y' = 8x - 4$  y  $y(2) = 5$ , encontrar el valor de  $y$ , encontrar, también  $y(4)$ .

#### PISTA DE APRENDIZAJE

**Tener en cuenta:** Cuando se dice  $y(2) = 5$  significa que  
 $y = 5$  cuando  $x = 2$

#### Procedimiento

- $y(2) = 5$  Es la condición inicial.

- $y' = 8x - 4$
- $y$  Es una antiderivada de  $8x - 4$ :

Entonces:

$$y = \int (8x - 4)dx = 8 \int xdx - 4 \int dx = 8 * \frac{x^2}{2} - 4x + c$$

➤ Simplificando:

$$y = 4x^2 - 4x + c^*$$

➤ Podemos determinar el valor de  $C$  por medio de la condición inicial:

$$y = 5 \text{ cuando } x = 2$$

➤ Reemplazando en \*:

$$y = 4x^2 - 4x + c \rightarrow 5 = 4(2)^2 - 4(2) + c$$

➤ Despejando  $c$ :

$$c = 5 - 16 + 8 \rightarrow c = -3$$

➤ Reemplazando  $c$  por  $-3$  en la ecuación (\*) se obtiene la función que buscamos:

$$y = 4x^2 - 4x + c \text{ pero } c = -3 \quad (3)$$

- Entonces la ecuación queda:

$$y = 4x^2 - 4x - 3$$

- Para encontrar  $y(4)$ , hacemos  $x = 4$  en la ecuación (3):

$$y(4) = (4)^2 - 4(4) - 3 = 64 - 16 - 3 = 45$$

- 
3. Si  $f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$  con  $f'(3) = 8$ , hallar  $f(x)$

### Procedimiento

- Se deben independizar las dos variables. Todo lo que tenga  $x$  a un lado (incluyendo el  $dx$ ) y todo lo que tenga  $y = f(x)$  al lado contrario.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x + 3 \rightarrow dy = (3x^2 + 4x + 3)dx$$

- Integrando a ambos lados:

$$\int dy = \int 3x^2 + 4x + 3 \rightarrow y = 3 \int x^2 dx + 4 \int x dx + 3 \int dx \rightarrow$$

$$y = \frac{3x^{2+1}}{2+1} + \frac{4x^{1+1}}{1+1} + 3x + c, \text{ Efectuando las operaciones indicadas y simplificando:}$$

$$y = \frac{3x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 3x + c \rightarrow y = x^3 + 2x^2 + 3x + c *$$

➤ La condición inicial es:  $x = 3, y = 8$

○ Reemplazando en \* tenemos:

$$y = x^3 + 2x^2 + 3x + c$$

$$8 = (3)^3 + 2(3)^2 + 3(3) + c$$

○ Despejando  $c$ :

$$c = 8 - 27 - 18 - 9 \rightarrow c = -46$$

➤ La función o modelo queda:

$$y = x^3 + 2x^2 + 3x - 46$$

---

➤ **Aplicaciones de la integral indefinida.**

**APLICACIONES EN ECONOMÍA:** Costo marginal, ingreso marginal y otras aplicaciones serán analizadas a través de ejemplos.

**Costo marginal:** Tenemos los siguientes tres modelos matemáticos (o funciones):

○  $c(q)$ : **Modelo o función para los costos.**

- $c'(q)$ : **Modelo o función de costo marginal**. El costo marginal resulta al derivar la función o modelo de costo. El costo marginal es lo que cuesta producir una unidad adicional a las unidades que se tenía planeado producir inicialmente.
- $\bar{c}(q) = \frac{c(q)}{q}$ : Es el modelo o **función de costo promedio**. Es lo que cuesta en promedio producir una sola unidad.
- $q$ : **Número de unidades producidas**.

Como se está integrando el dato, en este tipo de problemas, será el **modelo de costo marginal**; adicionalmente la **condición inicial** será **casi siempre la misma**, nos darán un valor para los costos fijos, los costos fijos quieren decir  $q = 0$  (Producción igual a cero).

## EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. En la manufactura de un producto se tiene: Costos fijos mensuales de \$ 2'000000 (\$ 2000 miles) y el modelo o función para el costo marginal es:

$$c'(q) = 10q + 8 \text{ En miles de } \$.$$

Donde  $q$  es el número de unidades producidas mensualmente.

Determinar:

- a. **Función o modelo para el costo.**

## Procedimiento

$$c'(q) = \frac{d[c(q)]}{dq} \rightarrow \frac{d[c(q)]}{dq} = 10q + 8$$

➤ Se deben independizar las dos variables:

$$d[c(q)] = (10q + 8)dq$$

➤ Se integra a ambos lados:

$$\int d[c(q)] = \int (10q + 8)dq \rightarrow 10 \int qdq + 8 \int dq$$

$$c(q) = 10 \frac{q^{1+1}}{1+1} + 8q + c \rightarrow c(q) = 10 \frac{q^2}{2} + 8q + c$$

➤ Simplificando:

$$c(q) = 5q^2 + 8q + c *$$

b. La condición inicial dice que los costos fijos son de **\$2000 miles**, esto quiere decir que para  $q = 0 \rightarrow c = 2000$

➤ Reemplazando estos valores en:  $c(q) = 5q^2 + 8q + c$ , se tiene:

$$2000 = 5(0)^2 + 8(0) + c$$

➤ Despejando  $c$ :

$$c = 2000$$

➤ El modelo de costos queda:  $c(q) = 5q^2 + 8q + 2000$  en miles de \$.

c. Función o modelo para el costo promedio.

### Procedimiento

$$\bar{c}(q) = \frac{c(q)}{q} = \frac{5q^2 + 8q + 2000}{q}$$

➤ Separando denominadores y simplificando:

$$\bar{c}(q) = 5q + 8 + \frac{2000}{q} \text{ En miles de \$}.$$

d. Hallar el **costo**, **costo promedio** y **costo marginal** cuando se producen **50 unidades** en el mes; interprete los resultados obtenidos.

### Procedimiento

Se pide determinar:  $c(50)$ ,  $\bar{c}(50)$ ,  $c'(50)$

Se reemplaza en:

➤  $c(q) = 5q^2 + 8q + 2000$

$$c(50) = 5(50)^2 + 8(50) + 2000 = 14900 \text{ en miles de \$}.$$

Se concluye que producir **50 unidades** en **un mes** le cuesta a la empresa **\$ 14'900.000**.

$$\rightarrow \bar{c}(q) = \frac{c(q)}{q}$$

$$\bar{c}(50) = \frac{14900}{50} \rightarrow \bar{c}(q) = 298 \text{ En miles de \$}$$

Cuando se producen **50 unidades** en **un mes** cada unidad le cuesta a la empresa **\$298.000**.

$$\rightarrow c'(q) = 10q + 8$$

$$c'(50) = 10(50) + 8 \rightarrow c'(q) = 500 + 8 = 508 \text{ En miles de \$}$$

Cuando se producen **50 unidades**, producir **una unidad adicional** a las 50 le cuesta a la empresa **\$ 508.000** (esa sola unidad adicional cuesta \$ 508.000).

---

2. La **función o modelo** para el **costo marginal** es:

$$c' = 4q + 7 \text{ En \$}$$

Determinar el **costo promedio** cuando la producción es de **200 unidades**. Se sabe que los **costos fijos** son de **\$350.000**

### Procedimiento

➤  $c(q) = \int c'(q) dq = \int (4q + 7) dq$  en \$

$$c(q) = 4 \int q dq + 7 \int dq \rightarrow c(q) = 4 \frac{q^{1+1}}{1+1} + 7q + c \rightarrow c(q) = 4 \frac{q^2}{2} + 7q + c$$

Simplificando:  $c(q) = 2q^2 + 7q + c$

➤ La condición inicial dice que: Costos fijos son de \$**350.000**

Cuando  $q = 0 \rightarrow c(q) = 350.000$

Reemplazando en  $c(q) = 2q^2 + 7q + c$ :

$$350.000 = 2(0)^2 + 7(0) + c$$

Despejando  $c$ :

$$c = 350.000$$

La función de **costo total** queda:

$$c(q) = 2q^2 + 7q + 350.000$$

➤ La función de **costo promedio** se obtiene como:

$$\bar{c}(q) = \frac{2q^2 + 7q + 350.000}{q} \text{ Separando denominadores y simplificando:}$$

$$\bar{c}(q) = 2q + 7 + \frac{350.000}{q} \text{ en } \$.$$

➤ Se pide hallar el costo promedio para una producción de **200 unidades**, es decir para

$$q = 200$$

Se reemplaza en:  $\bar{c}(q) = 2q + 7 + \frac{350.000}{q}$

$$\bar{c}(q) = 2(200) + 7 + \frac{350.000}{200} = \$ 2.157$$

- 
3. El siguiente ejemplo fue tomado del libro Fundamentos de Cálculo del autor Francisco Soler Fajardo<sup>1</sup> y otros.

Una compañía actualmente produce **150 unidades** por semana de un producto. Por experiencia, saben que producir la unidad número  $x$  en una semana (**costo marginal**) está dado por:

$$c'(x) = 25 - 0.02x \text{ en } \$$$

Determinar el **costo extra** por semana que debería considerar al elevar la producción de **150 a 200** unidades por semana.

### Procedimiento

- a. Se debe hallar la función de costo:

---

<sup>1</sup> SOLER FAJARDO, Francisco; NUÑEZ, Reinaldo; ARANDA SILVA, Moisés. Fundamentos de Cálculo con aplicaciones a ciencias Económicas y Administrativas. 2 ed. Bogotá: Ecoe ediciones, 2002. p. 370.

$$c(x) = \int c'(x)dx = \int (25 - 0.02x)dx = 25 \int dx - 0.02 \int xdx \rightarrow$$

$$c(x) = 25x - 0.02 \frac{x^2}{2} + c \rightarrow c(x) = 25x - 0.01x^2 + c \text{ en \$}$$

- b. No se tienen la información suficiente para determinar la constante de integración  $C$ , pero no es necesario saberlo, ya que se desea calcular el incremento en el costo que resulta al elevar  $x$  de **150 a 200** unidades por semana, es decir, se desea hallar:

$c(200) - c(150)$ : se reemplaza cada uno en la ecuación  $c(x) = 25x - 0.01x^2 + c$

$$c(200) = 25(200) - 0.01(200)^2 + c$$

$$c(150) = 25(150) - 0.01(150)^2 + c$$

➤ Se efectúa la diferencia:

$$c(200) - c(150) = 25(200) - 0.01(200)^2 + c - [25(150) - 0.01(150)^2 + c]$$

$$c(200) - c(150) = 5.000 - 400 + c - 3750 + 225 - c$$

➤ Efectuando las operaciones indicadas:

$$c(200) - c(150) = 1.075$$

➤ Por lo tanto: El incremento en el costo semanal sería de **\$ 1075**.

- c. **INGRESO MARGINAL:** Tenemos las siguientes tres funciones:
- $r(q)$ : **Función para los ingresos.**
  - $r'(q)$ : **Función de ingreso marginal.** El ingreso marginal resulta al derivar la función o modelo de ingreso. El ingreso marginal es el ingreso que resulta cuando se vende una unidad adicional a las presupuestadas.
  - $r(q) = p(q) * q$
  - $p(q)$ : **Función de precio o demanda.**
  - $q$ : **Número de unidades vendidas.**

Como se está integrando, el dato en este tipo de problemas será el **modelo de ingreso marginal**; adicionalmente la condición inicial será casi siempre la misma, si no hay ventas no habrá ingresos, esto es: Para  $q = 0$ ,  $r = 0$

### EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

- a. Si la función para el ingreso marginal es:

$$r'(q) = 1.000 - 12q - 6q^2 \text{ en } \$$$

Encontrar la función para la demanda o precio

### Procedimiento

$$r'(q) = \frac{d[r(q)]}{dq} \rightarrow \frac{dr}{dq} = 1.000 - 12q - 6q^2$$

$$dr = (1.000 - 12q - 6q^2) dq$$

Integrando a ambos lados:

$$\int dr = \int (1.000 - 12q - 6q^2) dq$$

$$r = 1000 \int dq - 12 \int q dq - 6 \int q^2 dq \rightarrow$$

$$r = 1000 - 12 * \frac{q^{1+1}}{1+1} - 6 * \frac{q^{2+1}}{2+1} + c = 1000 - 12 \frac{q^2}{2} - 6 \frac{q^3}{3} + c$$

Simplificando:

$$y = r(q) = 1000q - 6q^2 - 2q^3 + c \text{ *Función Ingreso*}$$

Cuando no se vende  $q = 0$  no hay ingreso  $r = 0$ .

Reemplazando estos valores en:  $r(q) = 1000q - 6q^2 - 2q^3 + c$

$$0 = 1000(0) - 6(0)^2 - 2(0)^3 + c \text{ Por lo tanto:}$$

$$c = 0$$

b. Si la función de ingreso es:

$$y = r(q) = 1000q - 6q^2 - 2q^3 \text{ en } \$$$

Entonces la **función demanda** se obtiene dividiendo la función de ingreso entre  $q$  :

$$p = \frac{r(q)}{q} = \frac{1000q - 6q^2 - 2q^3}{q} \text{ Separando denominadores:}$$

$$p = \frac{r(q)}{q} = \frac{1000q}{q} - \frac{6q^2}{q} - \frac{2q^3}{q} \text{ Simplificando:}$$

$$p = \frac{r(q)}{q} = 1000 - 6q - 2q^2 \text{ en } \$$$


---

1. La función o modelo para el ingreso marginal es:

$$r'(q) = 5q + 3000 \text{ en } \$ \text{ Determine el modelo para el ingreso.}$$

### Procedimiento

$$r(q) = \int r'(q) dq = \int (5q + 3000) dq \rightarrow$$

$$r(q) = 5 \int q dq + 3000 \int dq = 5 \frac{q^{1+1}}{1+1} + 3000q + c$$

$$r(q) = \frac{5}{2} q^2 + 3000q + c$$

Ahora, la condición inicial es:  $q = 0, r = 0$

Reemplazando en:  $r(q) = \frac{5}{2} q^2 + 3000q + c$ , se tiene que:

$$0 = \frac{5}{2}(0)^2 + 3000(0) + c \rightarrow c = 0$$

La función de ingreso es:

$$r(q) = \frac{5}{2}q^2 + 3000q \text{ en } \$$$

---

### APLICACIONES EN FÍSICA:

La aplicación se da en el movimiento en un eje coordenado y Caída libre.

- Para un objeto que se mueve a lo largo de un eje, tenemos las siguientes funciones:
  - **s(t): Función o modelo de posición.** Esta dado en unidades de espacio (metros, kilómetros, centímetros).
  - **v(t): Función o modelo de velocidad instantánea.** Está dada en unidades de espacio divididas entre unidades de tiempo. Las unidades más utilizadas son: m/s (Se lee metro por segundo; cm/s (centímetro por segundo); km./h (kilómetro por hora); Km./s (kilómetro por segundo); entre otras.
  - **a(t): Función o modelo de aceleración.** Esta dado en unidades de espacio divididas entre unidades de tiempo al cuadrado. Las más utilizadas son: m/s<sup>2</sup>, Km./s<sup>2</sup>.
  - **t: Tiempo.**

Además se tienen las siguientes relaciones entre ellas:

- $s(t) = \int v(t)dt$
- $v(t) = \int a(t)dt$

**NOTA:**

- Las condiciones iniciales, por lo general, se dan para un tiempo  $t = 0$ , a no ser que se de una condición diferente.
- El dato en este caso es la aceleración.

**EJERCICIOS DE APRENDIZAJE**

1. La aceleración de un cuerpo que se mueve a lo largo de un eje coordenado está dada por:  
 $a(t) = 2t + 3$  en  $\frac{m}{seg^2}$  El objeto parte con una velocidad de **12 m/s** desde una posición de **10 m**. Determine: La función de velocidad instantánea.

**PROCEDIMIENTO**

- a. **Función velocidad:** Se sabe que:

$$v(t) = \int a(t) dt = \int (2t + 3) dt = 2 \int t dt + 3 \int dt \rightarrow$$

$$v(t) = 2 \frac{t^{1+1}}{1+1} + 3t + c = 2 \frac{t^2}{2} + 3t + c \text{ Simplificando:}$$

$$v(t) = t^2 + 3t + c$$

Se determina el valor de la constante **C**. Se sabe que el objeto parte con una velocidad de **12 m/s**. Esta condición inicial quiere decir que:

$t = 0, v = 12$  Reemplazando en  $v(t) = t^2 + 3t + c$  se tiene:

$$12 = (0)^2 + 3(0) + c \rightarrow c = 12 \text{ por lo tanto:}$$

La función de velocidad es:  $v(t) = t^2 + 3t + 12$

b. **Función de posición:** Se sabe que:

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (t^2 + 3t + 12) dt \rightarrow$$

$$s(t) = \int t^2 dt + 3 \int t dt + 12 \int dt \rightarrow$$

$$s(t) = \frac{t^{2+1}}{2+1} + 3 \frac{t^{1+1}}{1+1} + 12t + c \rightarrow$$

$$s(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 12t + c \text{ en metros} \rightarrow$$

Para hallar **C** tenemos que el objeto parte de una posición de **10 m**, quiere decir esta condición:

Para  $t(0)$ ,  $s(10)$ , reemplazando estos valores en  $s(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 12t + c$ ,

$$10 = \frac{(0)^3}{3} + \frac{3(0)^2}{2} + 12(0) + c \rightarrow c = 10$$

La función de posición es:  $s(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 12t + c \text{ en metros}$

**Actividad:** Realice el mismo ejemplo cuando el objeto parte desde el reposo, es decir, cuando  $v = 0$ .

2. Un cuerpo se mueve a lo largo de un eje coordenado con aceleración dada por la función:

$$a(t) = 3t^2 + 6 \frac{m}{s^2}$$

Si el móvil parte del **reposo** a **20 metros del origen**, determine función de velocidad instantánea y función de posición instantánea.

### Procedimiento

- a. Se tiene que:

$$v(t) = \int a(t) dt = \int (3t^2 + 6) dt = 3 \int t^2 dt + 6 \int dt \rightarrow$$

$$v(t) = 3 \frac{t^{2+1}}{2+1} + 6t + c \rightarrow v(t) = 3 \frac{t^3}{3} + 6t + c \text{ Simplificando:}$$

$$v(t) = t^3 + 6t + c$$

Como el cuerpo parte del reposo, quiere decir que:  $t = 0, v = 0$

Reemplazando en  $v(t) = t^3 + 6t + c$  se tiene:

$$0 = (0)^3 + 6(0) + c \rightarrow c = 0$$

La función de velocidad es:  $v(t) = t^3 + 6t \frac{m}{s}$

- b. Para hallar la función de posición sabemos que:

$$s(t) = \int v(t) dt \rightarrow s(t) = \int (t^3 + 6t) dt \rightarrow$$

$$s(t) = \int t^3 dt + 6 \int t dt = \frac{t^{3+1}}{3+1} + 6 * \frac{t^{1+1}}{1+1} + c \rightarrow$$

$$s(t) = \frac{t^4}{4} + 6 * \frac{t^2}{2} + c \text{ Simplificando: } s(t) = \frac{t^4}{4} + 3t^2 + c$$

- A 20 metros del origen quiere decir que:  $t = 0, s = 20$

Reemplazando se tiene:  $20 = \frac{(0)^4}{4} + 3(0)^2 + c \rightarrow c = 20$

La función de posición es:  $s(t) = \frac{t^4}{4} + 3t^2 + 20 m$

- 
- **Caída libre.** En caída libre la aceleración es la gravedad y se asume como negativa.
    - Si el objeto **va cayendo** la velocidad se asume **negativa** (por lo general).
    - Si el objeto **va subiendo** la velocidad se asume **positiva** (Por lo general).

#### PISTA DE APRENDIZAJE

**Tenga presente:** la gravedad es de  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Quiere decir  $a(t) = -9.8 \text{ m/s}^2$ .

## EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Se arroja un objeto desde una altura inicial de 310 m, con una velocidad de 15 m/s. Determine la función de velocidad instantánea:

### Procedimiento

- a. **Función para la velocidad instantánea:** Se sabe que:  $a(t) = -9.8 \text{ m/s}^2$ .  
Entonces:

$$v(t) = \int -9.8 dt = -9.8t + c$$

➤ Para determinar el valor de  $C$  se utiliza la condición inicial:

$$t = 0, v = 15$$

Por lo tanto:

$$15 = -9.8(0) + c \rightarrow c = 15$$

La función de velocidad queda:  $v(t) = -9.8t + 15 \frac{m}{s}$

- b. **Función para la posición:**

### Procedimiento

Se tiene que:

$$s(t) = \int (-9.8t + 15) dt \rightarrow s(t) = -9.8 \int t dt + 15 \int dt \rightarrow$$

$$s(t) = -9.8 * \frac{t^{1+1}}{1+1} + 15t + c \rightarrow s(t) = -9.8 * \frac{t^2}{2} + 15t + c \rightarrow$$

$$s(t) = -4.9t^2 + 15t + c$$

➤ La condición inicial es:  $t = 0, s = 310$

Reemplazando en:

$$s(t) = -4.9t^2 + 15t + c \text{ se tiene:}$$

$$310 = -4.9(0) + 15(0) + c \rightarrow c = 310$$

➤ La función de posición es:  $s(t) = -4.9t^2 + 15t + 310$

c. **Altura máxima** que alcanza el cuerpo:

### Procedimiento

La **altura máxima** se da en el momento en que **la velocidad es cero**  $v = 0$ .

Por lo tanto se hace la velocidad igual a cero y se despeja  $t$ :

$$v(t) = 0 \rightarrow -9.8t + 15 = 0 \rightarrow t = \frac{-15}{-9.8} \rightarrow t = 1.53 \text{ s}$$

Este es el tiempo que se demora el objeto para alcanzar la altura máxima. Para determinar la altura máxima se reemplaza este valor en el modelo de posición.

$$s_{max} = s(1.53) = -4.9(1.53)^2 + 15(1.53) + 310$$

$$s_{max} = 321,479 \text{ m}$$

### PISTA DE APRENDIZAJE

**Traer a la memoria:** Otra forma de determinar la altura máxima sería determinando los máximos y mínimos de la función  $s(t) = -4.9t^2 + 15t + 310$  utilizando los conceptos de primera y segunda derivada.

d. La máxima velocidad que alcanza el cuerpo.

- **Velocidad Máxima:** La máxima velocidad se da un momento antes de que el objeto toque el piso, es decir, para  $s = 0$ .

$$s(t) = 0 \rightarrow -4.9t^2 + 15t + 310 = 0, \text{ multiplicando por } -1 \rightarrow 4.9t^2 - 15t - 310 = 0$$

### PISTA DE APRENDIZAJE

**Tener en cuenta:** Para solucionar la ecuación de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , se utiliza la fórmula general:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

➤ Solucionando esta ecuación por fórmula general:

$$t = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4(4.9)(-310)}}{2(4.9)} \rightarrow$$

$$t = \frac{15 \pm \sqrt{225 + 6076}}{9.8} \rightarrow t = \frac{15 \pm \sqrt{6301}}{9.8} \rightarrow t = \frac{15 \pm 79.38}{9.8}$$

$$t_1 = \frac{15 + 79.38}{9.8} \rightarrow t_1 = 9.63$$

$$t_2 = \frac{15 - 79.38}{9.8} \rightarrow t_2 = -6.57$$

El valor negativo:  $t_2 = -6.57$  se descarta.

➤ **La máxima velocidad** se presenta en:  $t_1 = 9.63$

$$v_{m\acute{a}x} = -9.8(9.63) + 15 = -79.37 \frac{m}{s}$$

e. Determine si después de 2,5 segundos el objeto sube o baja.

Una forma de determinar esta situación es reemplazando este tiempo en el **modelo de velocidad** y dependiendo del **signo** del resultado sabemos si sube o si baja.

$$v(2.5) = -9.8(2.5) + 15 = -9.5 \frac{m}{s}$$

Como la **velocidad es negativa**, el objeto **cae** en ese momento.

---

2. Un objeto se deja caer desde una altura de 500 m. Determine: Función de velocidad instantánea.

### Procedimiento

a. **Función velocidad:** El valor de la gravedad  $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$

**Nota:** La velocidad está dada por la integración de la aceleración, en este caso la aceleración de la gravedad, como el objeto cae, ésta se considera **negativa**.

$$v(t) = \int -9.8 dt \rightarrow v(t) = -9.8t + C \frac{m}{s}$$

➤ Como el objeto se deja caer, quiere decir que para:  
 $t = 0, v = 0$

➤ Reemplazando esta condición inicial en la función de velocidad, tenemos:

$$v(t) = -9.8 + C \rightarrow -9.8(0) + C = 0 \rightarrow c = 0$$

➤ Por lo tanto la función velocidad es:  $v(t) = -9.8t \frac{m}{s}$

#### f. Función de posición o altura instantánea.

##### Procedimiento

a. La posición está dada por la integración de velocidad:

$$s(t) = \int v(t) dt = \int -9.8 t dt = -9.8 \int t dt = -9.8 \frac{t^{1+1}}{1+1} + C \rightarrow$$

$$s(t) = -9.8 \frac{t^2}{2} + C \text{ Simplificando: } s(t) = -4.9t^2 + C \text{ en m (posición o altura instantánea).}$$

- Como el objeto cae de una altura de **500 m**, esto quiere decir, que:

$$t = 0, s(t) = 500$$

- Reemplazando en la función de posición:

$$s(t) = -4.9t^2 + C \rightarrow 500 = -4.9(0)^2 + C \rightarrow C = 500$$

Reemplazando, se tiene que:  $s(t) = -4.9t^2 + 500 \text{ m}$

- b. **Velocidad máxima** que alcanza el cuerpo:

### Procedimiento

- La velocidad máxima se alcanza cuando:  $s(t) = 0$

$$s(t) = 0 \rightarrow -4.9t^2 + 500 = 0 \rightarrow -4.9t^2 = -500$$

$$t^2 = \frac{-500}{-4.9} \rightarrow t = \pm \sqrt{\frac{500}{4.9}} \rightarrow t = 10.1 \text{ s}$$

Se descarta el número negativo.

- Para obtener la velocidad máxima, reemplazamos este valor en la función de velocidad:

$$v_{m\acute{a}x}(10.1) \Rightarrow -9.8 * (10.1) =$$

$$v_{m\acute{a}x} = 98.98 \frac{m}{s}$$

- c. Velocidad, posición y aceleración después de 5 segundos.

### Procedimiento

Se pide hallar:

a.  $s(t) = -4.9t^2 + 500 \text{ m} \rightarrow s(5) = -4.9(5)^2 + 500 = 377.5 \text{ m.}$

b.  $v(t) = -9.8t \rightarrow v(5) = -9.8(5) = -49 \frac{m}{s}$

c.  $a(t) = -9.8 \frac{m}{s^2}$  Corresponde a la aceleración de la gravedad.

- 
3. El siguiente ejemplo fue tomado del libro Cálculo con geometría analítica de los autores Purcell y Varberg <sup>2</sup>

Cerca de la superficie de la tierra, la aceleración debida a la gravedad es de 32 pies por segundo cuadrado. Si se arroja un objeto hacia arriba desde una altura inicial de 1000 pies, con una velocidad de 50 pies por segundo, encuentre su velocidad y su altura 4 segundos más tarde.

---

<sup>2</sup> PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 228.

## Procedimiento

a. Se tiene que:

$$v(t) = \int -32 dt = -32t + C$$

➤ Cuando  $t = 0, v = 50$

$$50 = -32(0) + c \rightarrow c = 50$$

➤ La función de velocidad queda:

$$v(t) = -32t + 50 \frac{\text{pies}}{\text{s}}$$

b. Se tiene que:

$$s(t) = \int (-32t + 50) dt = -32 \int t dt + 50 \int dt = -32 \frac{t^{1+1}}{1+1} + 50t + C \rightarrow$$

$$s(t) = -32 \frac{t^2}{2} + 50t + C \rightarrow s(t) = -16t^2 + 50t + C$$

➤ Para  $t = 0, s = 1000$

Se reemplaza en:  $s(t) = -16t^2 + 50t + c$

$$s(t) = -16t^2 + 50t + c \rightarrow 1000 = -16(0)^2 + 50(0) + c \rightarrow$$
$$c = 1000$$

Por lo tanto la función de posición es:

$$s(t) = -16t^2 + 50t + 1000$$

➤ Cuando  $t = 4$ :

$$v(t) = -32t + 50 \frac{\text{piés}}{s} \rightarrow v(4) = -32(4) + 50 \frac{\text{piés}}{s} = -78 \frac{\text{piés}}{s}$$

$$s(t) = -16t^2 + 50t + 1000 \rightarrow s(4) = -16(4)^2 + 50(4) + 1000$$

$$s(t) = 944 \text{ piés}$$

### 3.3. Tema 2 Técnicas de Integración

- **Integración por sustitución o integración por cambio de variable.**

Esta técnica es la más general y la más utilizada.

Antes de explicar en qué consiste la técnica, veamos necesidad de utilizarla:

Determinar:  $\int (x + 2)^2 dx$

#### Procedimiento

Para poderla realizar por los métodos o propiedades conocidas, se debe expandir primero el binomio:

$$\int (x + 2)^2 dx = \int (x^2 + 4x + 4) dx = \int x^2 dx + 4 \int x dx + \int 4 dx =$$

$$= \frac{x^{2+1}}{2+1} + 4 \frac{x^{1+1}}{1+1} + 4x + C = \frac{x^3}{3} + 4 \frac{x^2}{2} + 4x + C$$
 Simplificando, se tiene:

$$\int (x + 2)^2 dx = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x + C$$

Para este ejemplo fue fácil y práctico expandir el binomio, ya que se encontraba elevado a la potencia 2, pero que sucede si la potencia es 100, o 1'235400, o es un fraccionario como 5/3 se haría tedioso expandir el binomio o sería imposible en el caso del exponente fraccionario.

Es por esto que es necesario utilizar una integración que nos permita realizar todo este tipo de ejercicios en una forma más simple y menos tediosa: **integrar por sustitución o cambio de variable**.

- La fórmula de integración por **cambio de variable** es la siguiente:

$$\int u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, \text{ para } n \neq -1, \text{ donde } u = f(x)$$

- Si se tiene:

$$\int \frac{1}{u} du = \int u^{-1} du = \ln u + C$$

## EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

**Nota:** A través de un ejemplo se explicará, paso a paso, la manera de aplicar la técnica **de integración por sustitución**.

1. Resolver por sustitución o cambio de variable la siguiente integral:

$$\int (x - 10)^{30} dx$$

### Procedimiento

- a. Se asigna, a la expresión principal, una variable que puede ser:  $u, v, w \dots$  o cualquier otra variable diferente a la variable inicial. (Esto es lo que se denomina cambio de variable).

Para el ejemplo se hace:  $u = x - 10$

**Nota:** Lo importante al asignar la nueva variable es que, la expresión que quede, debe contener la derivada de la variable asignada.

- b. Se deriva la expresión asignada a la nueva variable con respecto a la variable inicial, esto es:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d(x - 10)}{dx} = 1 \rightarrow \frac{du}{dx} = 1$$

- c. Se despeja el diferencial de la variable inicial, esto es:  $dx$

$$\frac{du}{dx} = 1 \rightarrow dx = du$$

- d. Se reemplaza en la integral inicial la **variable asignada** y el **diferencial despejado** y luego simplifique.

$$\int (x - 10)^{30} dx = \int u^{30} du$$

**Nota:** Si al hacer los reemplazos correspondientes y simplificar, aparece la variable inicial, es porque:

- La integral no se puede efectuar por este método, o
- Porque hay que hacer un cambio de variable diferente.

e. Se resuelve la integral.

$$\int (x - 10)^{30} dx = \int u^{30} du = \frac{u^{30+1}}{30+1} + C = \frac{u^{31}}{31} + C$$

f. Se reemplaza la variable original:  $x - 10$

$$\int (x - 10)^{30} dx = \int u^{30} du = \frac{u^{30+1}}{30+1} + C = \frac{u^{31}}{31} + C = \frac{(x-10)^{31}}{31} + C$$

---

2. El siguiente ejemplo fue propuesto por el autor Haeussler<sup>3</sup> en uno de sus libros.

Resolver la siguiente integral:

$$\int 3x^2(x^3 + 7)^3 dx$$

### Procedimiento

- a. Se hace:  $v = x^3 + 7$
- b. Se halla la derivada de  $v$  en función de  $x$ :

$$\text{Si } v = x^3 + 7 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 3x^2 \rightarrow dx = \frac{dv}{3x^2}$$

---

<sup>3</sup> HAEUSSLER. Ernest. F. Jr; RICHARD S. Paul. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. 8 ed. México: Prentice Hall, 1997. p. 735.

$$\int 3x^2(x^3 + 7)^3 dx = \int 3x^2 v^3 \frac{dv}{3x^2}, \text{ simplificando } 3x^2:$$

$$\int 3x^2(x^3 + 7)^3 dx = \int v^3 dv = \frac{v^{3+1}}{3+1} + C = \frac{v^4}{4} + C,$$

c. Reemplazando  $v$  por  $x^3 + 7$

$$\int 3x^2(x^3 + 7)^3 dx = \frac{(x^3 + 7)^4}{4} + C$$

3. Integrar:  $\int 4x^2(2x^3 + 20)^8 dx$

a. Se hace  $u = 2x^3 + 20$

b. Se halla la derivada de  $u$  en función de  $x$ :

$$\frac{du}{dx} = 6x^2 \rightarrow dx = \frac{du}{6x^2}$$

c. Reemplazando  $dx$  en  $\int 4x^2(2x^3 + 20)^8 dx$  se tiene:

$$\int 4x^2(2x^3 + 20)^8 dx = \int 4x^2(u)^8 \frac{du}{6x^2}$$

d. Simplificando:

$$\int 4x^2(u)^8 \frac{du}{6x^2} = \frac{2}{3} \int u^8 du = \frac{2}{3} * \frac{u^{8+1}}{8+1} + C = \frac{2}{3} * \frac{u^9}{9} + C$$

e. Recuperando la variable inicial:

$$\int 4x^2(2x^3 + 20)^8 dx = \frac{2(2x^3 + 20)^9}{27} + C$$

4. El siguiente ejemplo fue tomado del autor Haeussler<sup>4</sup>, propuesto en uno de sus libros.

Resolver la siguiente integral:  $\int x\sqrt{x^2 + 5} dx$

### Procedimiento

- Se hace  $w = x^2 + 5$
- Se halla la derivada de  $w$  en función de  $x$ :

$$\frac{dw}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{dw}{2x}$$

- Reemplazando  $dx$  en  $\int x\sqrt{x^2 + 5} dx$  se tiene:

$$\int x\sqrt{x^2 + 5} dx = \int x\sqrt{w} * \frac{1}{2x} dw = \frac{1}{2} \int w^{\frac{1}{2}} dw =$$

$$\frac{w^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2} * \frac{w^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{2} * \frac{w^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C, \text{ simplificando por } 2 \text{ y expresando en forma de raíz:}$$

$$\int x\sqrt{x^2 + 5} dx = \frac{1}{3} * \sqrt{w^3} + C$$

- Recuperando la variable inicial:

$$\int x\sqrt{x^2 + 5} dx = \frac{1}{3} * \sqrt{(x^2 + 5)^3} + C$$

- Sacando raíz:  $\frac{x^2+5}{3} * \sqrt{x^2 + 5} + C$

---

4. Resolver la siguiente integral:  $\int 2x\sqrt{4x^2 + 1} dx$

<sup>4</sup> HAEUSSLER. Ernest. F. Jr.; RICHARD S. Paul. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. 8 ed. México: Prentice Hall, 1997. p. 735.

## Procedimiento

- Se hace  $u = 4x^2 + 1$
- Se halla la derivada de  $u$  en función de  $x$ :

$$\frac{du}{dx} = 8x \rightarrow dx = \frac{du}{8x}$$

- Reemplazando  $dx$  en  $\int x\sqrt{4x^2 + 1} dx$  se tiene:

$$\int x\sqrt{4x^2 + 1} dx = \int 2x\sqrt{u} \frac{du}{8x} = \int 2x u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{8x} \rightarrow$$

- Simplificando, integrando y recuperando la variable inicial :

$$\int 2x\sqrt{4x^2 + 1} dx = \frac{1}{4} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{4} * \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int 2x\sqrt{4x^2 + 1} dx = \frac{1}{6} \sqrt{(4x^2 + 1)^3}, \text{ Sacando raíz:}$$

$$\int 2x\sqrt{4x^2 + 1} dx = \frac{4x^2 + 1}{6} * \sqrt{4x^2 + 1}$$

---

6. Integrar:  $\int 16x(2x^2 - 31)^5 dx$

### Procedimiento

a. Se hace  $u = 2x^2 - 31$

b. Se halla la derivada de  $u$  en función de  $x$ :

$$\text{Si } u = 2x^2 - 31 \rightarrow \frac{du}{dx} = 4x \rightarrow dx = \frac{du}{4x}$$

c. Se reemplaza en:  $\int 16x (2x^2 - 31)^5 dx = \int 16x u^5 \frac{du}{4x}$

d. Integrando:

$$\int 16x (2x^2 - 31)^5 dx = \int 4u^5 du = 4 * \frac{u^{5+1}}{5+1} + c = 4 * \frac{u^6}{6} + C$$

e. Reemplazando  $u = 2x^2 - 31$ :

$$\int 16x (2x^2 - 31)^5 dx = 4 * \frac{u^6}{6} + C = \frac{2(2x^2 - 31)^6}{3} + C$$

---

7.  $\int \frac{8}{(6x+5)^5} dx$

### Procedimiento:

a. Se hace  $u = 6x + 5$

b. Se halla la derivada de  $u$  en función de  $x$ :

$$\text{Si } u = 6x + 5 \rightarrow \frac{du}{dx} = 6 \rightarrow dx = \frac{du}{6}$$

c. Se reemplaza en:

$$\int \frac{8}{(6x+5)^5} dx = \int \frac{8}{(u)^5} \frac{du}{6} = \frac{4}{3} u^{-5} du$$

d. Integrando:

$$\int \frac{8}{(6x+5)^5} dx = \frac{4}{3} \frac{u^{-5+1}}{-5+1} + c = \frac{4}{3} \frac{u^{-4}}{-4} + c$$

e. Simplificando y reemplazando  $u = 6x + 5$ :

$$\int \frac{8}{(6x+5)^5} dx = \frac{4}{3} \frac{u^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{3u^4} + c = -\frac{1}{3(6x+5)^4} + C$$

8. Integrar:  $\int \frac{6x+5}{6x^2+10x+100} dx$

a. Se hace  $u = 6x^2 + 10x + 100$

b. Se halla la derivada de  $u$  en función de  $x$ :

$$\text{Si } u = 6x^2 + 10x + 100 \rightarrow \frac{du}{dx} = 12x + 10 \rightarrow dx = \frac{du}{12x + 10}$$

c. Se reemplaza en:

$$\int \frac{6x+5}{6x^2+10x+100} dx = \int \frac{6x+5}{u} * \frac{du}{12x+10}$$

d. Factorizando y simplificando:

$$\int \frac{6x+5}{u} * \frac{du}{12x+10} = \int \frac{6x+5}{u} * \frac{du}{2(6x+5)}$$
$$\int \frac{6x+5}{6x^2+10x+100} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln u + c$$

e. Reemplazando  $u = 6x^2 + 10x + 100$

$$\int \frac{6x+5}{6x^2+10x+100} dx = \frac{1}{2} \ln(6x^2+10x+100) + c$$

---

**Actividad:** Teniendo como modelo el ejemplo anterior realice la siguiente integral:

$$\int \frac{5x}{x^2-23} dx \text{ La respuesta es: } \frac{5}{2} \ln(x^2-23) + C$$

Realizar el procedimiento en hoja aparte y socializar con el tutor.

---

9. Integrar:  $\int 5^{3x-2} dx$

Procedimiento:

a. Se hace  $u = 3x - 2$

b. Se halla la derivada de  $u$  en función de  $x$ :

$$\text{Si } u = 3x - 2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 3 \rightarrow dx = \frac{du}{3}$$

c. Se reemplaza en:

$$\int 5^{3x-2} dx = \int 5^u * \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int 5^u du$$

d. Integrando:

$$\int 5^{3x-2} dx = \frac{1}{3} \int 5^u du = \frac{1}{3} * \frac{5^u}{\ln 5} + C$$

e. Reemplazando  $u = 3x - 2$ :

$$\int 5^{3x-2} dx = \frac{1}{3} * \frac{5^u}{\ln 5} + C = \frac{5^{3x-2}}{3 \ln 5} + C$$

---

10. Integrar:  $\int 10x^2 e^{6x^3+20} dx$

### Procedimiento

a. Se hace  $u = 6x^3 + 20$

b. Se halla la derivada de  $u$  en función de  $x$ :

$$\text{Si } u = 6x^3 + 20 \rightarrow \frac{du}{dx} = 18x^2 \rightarrow dx = \frac{du}{18x^2}$$

c. Se reemplaza en:

$$\int 10x^2 e^{6x^3+20} dx = \int 10x^2 e^u * \frac{du}{18x^2}$$

d. Simplificando:

$$\int 5e^u * \frac{du}{9} = \frac{5}{9} \int e^u du$$

e. Integrando:

$$\int 10x^2 e^{6x^3+20} dx = \frac{5}{9} \int e^u du = \frac{5}{9} e^u + c$$

f. Recuperando la variable inicial  $u = 6x^3 + 20$

$$\int 10x^2 e^{6x^3+20} dx = \frac{5}{9} e^{6x^3+20} + c$$

---

- **INTEGRALES QUE SE RESUELVEN CON DIVISIÓN PREVIA A LA INTEGRAL**

Se desea encontrar la integral de una **expresión racional**, que es una expresión de la forma:

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

La idea es obtener la siguiente integral:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Cuando se efectúa una integral de este tipo, se pueden presentar tres casos:

- A. Que la integral se pueda efectuar directamente por el método de **sustitución o cambio de variable** (esta forma ya se ha realizado anteriormente):

### EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Integrar:  $\int \frac{2x+1}{x^2+x-7} dx$

#### Procedimiento

a. Se hace  $u = x^2 + x - 7$

- b. Se halla la derivada de  $u$  en función de  $x$ :

$$\text{Si } u = x^2 + x - 7 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x + 1 \rightarrow dx = \frac{du}{2x + 1}$$

- c. Se reemplaza en:

d.  $\int \frac{2x+1}{x^2+x-7} dx = \int \frac{2x+1}{u} \frac{du}{2x+1}$ , Simplificando  $2x + 1$ :

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 + x - 7} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|x^2 + x - 7| + C$$

Recuerde que:  $|x|$  indica el valor absoluto de  $x$ .

2. Integrar:  $\int \frac{2x}{(x^2+10)^5} dx$

## Procedimiento

a. Se hace  $u = x^2 + 10$

b. Se halla la derivada de  $u$  en función de  $x$ :

$$\text{Si } u = x^2 + 10 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

c. Se reemplaza en:

$$\int \frac{2x}{(x^2+10)^5} dx = \int \frac{2x}{(u)^5} \frac{du}{2x} \text{ simplificando } 2x:$$

$$\int \frac{2x}{(x^2 + 10)^5} dx = \int \frac{du}{(u)^5} = \int u^{-5} du = \frac{u^{-5+1}}{-5+1} + c$$

$$\int \frac{2x}{(x^2 + 10)^5} dx = \frac{u^{-4}}{-4} + c$$

d. Expresando con exponente positivo y reemplazando  $u = x^2 + 10$

$$\int \frac{2x}{(x^2 + 10)^5} dx = \frac{u^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{4u^4} + c = -\frac{1}{4(x^2 + 10)^4} + c$$

B. Puede suceder también que haya que **efectuar primero la división**.  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ .

**Nota:** Esta división es posible **si la fracción es impropia**, es decir, **el grado** del polinomio  $P(x)$  es mayor que el **grado** del polinomio  $Q(x)$ .

## EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1.  $\int \frac{2x^3+3x^2+1}{2x+1} dx$

### Procedimiento

- a. Para efectuar esta integral se debe realizar primero la división:

$$\frac{2x^3+3x^2+1}{2x+1}$$

**Nota:** Esta división se puede efectuar utilizando la división polinómica o la división sintética.

En este ejemplo, se utilizará división polinómica:

$2x^3 + 3x^2 + 1$	$2x + 1$
$-2x^3 - x^2$	$x^2 + x - \frac{1}{2}$
$+2x^2 + 0x + 1$	
$-2x^2 - x$	
$-x + 1$	
$x + \frac{1}{2}$	
$\frac{3}{2}$	

Se tiene que:

- $C(x) = x^2 + x - \frac{1}{2}$  **Cociente**

- $R(x) = \frac{3}{2}$  **Residuo**

- $Q(x) = 2x + 1$  Divisor

Por lo tanto:

$$\frac{2x^3+3x^2+1}{2x+1} = x^2 + x - \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}}{2x+1}$$

b. Integrando:

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{2x + 1} dx = \int \left( x^2 + x - \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}}{2x + 1} \right) dx$$

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{2x + 1} dx = \int \left( x^2 + x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2x + 1} \right) dx$$

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{2x + 1} dx = \int x^2 dx + \int x dx - \frac{1}{2} \int dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{2x + 1}$$

➤ Resolviendo cada una de las cuatro integrales individualmente:

$\int x^2 dx$	$\int \frac{x^{2+1}}{2+1} dx$	$\frac{x^3}{3} + C$
$\int x dx$	$\int \frac{x^{1+1}}{1+1} dx$	$\frac{x^2}{2} + C$
$-\frac{1}{2} \int dx$	$-\frac{1}{2} x + c$	$-\frac{1}{2} x + c$

➤ Para efectuar la cuarta integral se debe hacer cambio de variable, esto es:

$$\frac{3}{2} \int \frac{1}{2x + 1} dx \rightarrow u = 2x + 1, \rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\frac{3}{2} \int \frac{1}{2x+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{u} \frac{du}{2} = \frac{3}{2} * \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{3}{4} \ln|u|$$

➤ Reemplazando  $u = 2x + 1$

$$\frac{3}{2} \int \frac{1}{2x+1} dx = \frac{3}{4} \ln|2x+1| + C$$

c. Reuniendo la 4 integrales se tiene:

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{2x+1} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \ln|2x+1| + C$$

2. Integrar

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 3}{x-3} dx$$

### Procedimiento

a. Se realiza la división indicada:

$\frac{3x^2 - 5x + 3}{x - 3}$			
$3x^2$	$-5x$	$+3$	$x - 3$
$-3x^2$	$+9x$		$3x + 4 = C(x)$
<hr/>	<hr/>	<hr/>	
$0$	$+4x$	$+3$	
	$-4x$	$+12$	
	<hr/>	<hr/>	
	$0$	$15 = R(x)$	

Se tiene:

- $C(x) = 3x + 4$

- $R(x) = 15$

- $Q(x) = x - 3$

Por lo tanto:

$$\frac{3x^2 - 5x + 3}{x - 3} = 3x + 4 + \frac{15}{x - 3}$$

b. Integrando:

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 3}{x - 3} = \int \left( 3x + 4 + \frac{15}{x - 3} \right) dx$$

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 3}{x - 3} = \int 3x \, dx + \int 4 \, dx + \int \frac{15}{x - 3} \, dx$$

➤ Resolviendo cada una de las tres integrales individualmente:

$\int 3x \, dx$	$3 \frac{x^{1+1}}{1+1} + C$	$\frac{3x^2}{2} + C$
$\int 4 \, dx$	$4x$	$4x$

➤ Para efectuar la tercera integral se debe hacer cambio de variable, esto es:

$$15 \int \frac{1}{x-3} dx \rightarrow u = x - 3, \rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \rightarrow dx = du$$

$$15 \int \frac{1}{u} du = 15 \ln|u| + C$$

➤ Reemplazando  $u = x - 3$

$$\int \frac{1}{x-3} dx = \int \frac{1}{u} du = 15 \ln|u| + C = 15 \ln|x-3| + C =$$

c. Reuniendo la 4 integrales se tiene:

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 3}{x-3} dx = \frac{3x^2}{2} + 4x + 15 \ln|x-3| + C$$

C. \* La otra posibilidad sería descomponer,  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  En una **suma de fracciones simples** llamada **fracciones parciales**. Esto es posible cuando la **fracción es propia**, es decir, el grado del polinomio **P(x)** es **menor** que el grado del polinomio **Q(x)**.

\*Este método se evaluará más adelante en la **UNIDAD 3**.

- **SUSTITUCIONES PARA RACIONALIZACIÓN**

Integrales que contienen  $\sqrt[n]{ax+b}$  y  $\sqrt[n]{(ax+b)^m}$

1. Si aparece  $\sqrt[n]{ax+b}$  en una integral, la sustitución de:  
 $u = \sqrt[n]{ax+b}$  eliminará el radical.

Para resolver este tipo de integrales tenga en cuenta que:

- La  $x$  tiene como exponente **1** (sí, fuera exponente 2 o superior, no se puede utilizar el método que vamos a describir).
- Tanto  $a$  como  $b$  son números cualesquiera, pero  $a$  no puede ser cero; porque sí  $a$  fuera cero, entonces todo lo del radical sería constante y se utilizaría otro método más sencillo para su solución.

Nota: Para analizar esta forma de integrar, los ejercicios se realizarán paso a paso indicando el debido procedimiento en cada uno de ellos.

### EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Resolver la integral:  $\int 6x \sqrt[3]{3x+8} dx$

- a. Para eliminar el radical: se hace  $u$  igual al radical, esto es:

$$u = \sqrt[3]{3x+8}$$

**Nota:** Para eliminar la raíz elevamos ambos lados de la igualdad a un **exponente equivalente** al **índice de la raíz**, en este caso elevamos a ambos lados a un **exponente tres**, ya que la raíz es cúbica.

$$u = \sqrt[3]{3x+8} \rightarrow u^3 = (\sqrt[3]{3x+8})^3 \rightarrow$$

$$u^3 = 3x + 8$$

- b. Se deriva la igualdad anterior con respecto a  $u \left(\frac{du}{dx}\right)$  y se despeja  $dx$ :

**Nota:** Para realizar esta derivada, se recomienda que siempre que se derive  $u$ , se escriba, luego de la derivada,  $du$  y cuando se derive  $x$ , se escribe, luego de la derivada,  $dx$ .

➤ Derivando a ambos lados se tiene:

$$3u^2 du = 3 dx \rightarrow dx = \frac{3u^2 du}{3} \rightarrow dx = u^2 du$$

c. Se reemplaza  $u$  y  $dx$  en la integral original. Sí hay que realizar otro reemplazo se hace; la idea es que en la integral resultante no aparezca nada que tenga que ver con la variable inicial o sea con la  $x$ . Se tiene entonces:

$$\int 6x \sqrt[3]{3x+8} dx = \int 6x * u * u^2 du$$

➤ Como todavía existe  $x$  en la integral, se debe encontrar una expresión, en función de  $u$  para reemplazarla, se sabe que:

$$u^3 = 3x + 8 \rightarrow u^3 - 8 = 3x \rightarrow x = \frac{u^3 - 8}{3}$$

➤ Reemplazando en la integral:

$$\int 6x * u * u^2 du = \int 6 \left( \frac{u^3 - 8}{3} \right) * u * u^2 du, \text{ Simplificando y realizando los productos indicados}$$

$$\int 6 \left( \frac{u^3 - 8}{3} \right) * u * u^2 du = 2 \int (u^6 - 8u^3) du$$

$$2 \int (u^6 - 8u^3) du = 2 \left[ \int u^6 du - 8 \int u^3 du \right] \rightarrow$$

$$2 \int (u^6 - 8u^3) du = 2 \left[ \frac{u^{6+1}}{6+1} - 8 \frac{u^{3+1}}{3+1} \right] + C \rightarrow$$

➤ Multiplicando por 2 y simplificando:

$$2 \left[ \frac{u^{6+1}}{6+1} - 8 \frac{u^{3+1}}{3+1} \right] + C = 2 \frac{u^7}{7} - 16 \frac{u^4}{4} + C = \frac{2u^7}{7} - 4u^4 + c^{**}$$

d. Se recupera la variable inicial:  $u = \sqrt[3]{3x+8}$ , se reemplaza en \*\*

$$\int 6x \sqrt[3]{3x+8} dx = \frac{2u^7}{7} - 4u^4 + c = \frac{2(\sqrt[3]{3x+8})^7}{7} + 4(\sqrt[3]{3x+8})^4 + C$$

2. Resolver la integral:  $\int x \sqrt[3]{x-4} dx$

**Nota:** El ejemplo fue tomado de uno de los libros del autor Purcell.<sup>5</sup>

### Procedimiento

$u$

a. Se hace  $u$  igual al radical:

$$u = \sqrt[3]{x-4}$$

**Nota:** Para eliminar la raíz elevamos ambos lados de la igualdad a un **exponente equivalente al índice de la raíz**, en este caso elevamos a ambos lados a un **exponente tres**, ya que la raíz es cúbica.

$$u = \sqrt[3]{x-4} \rightarrow u^3 = (\sqrt[3]{x-4})^3 \rightarrow$$

$$u^3 = x - 4$$

<sup>5</sup> PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 396.

- b. Se deriva la igualdad anterior con respecto a  $u$  ( $\frac{du}{dx}$ ) y se despeja  $dx$ :

**Nota:** Para realizar esta derivada, se recomienda que siempre que se derive  $u$ , se escriba, luego de la derivada,  $du$  y cuando se derive  $x$ , se escribe, luego de la derivada,  $dx$ .

➤ Derivando a ambos lados se tiene:

$$3u^2 du = dx \rightarrow dx = 3u^2 du$$

➤ Si  $u^3 = x - 4 \rightarrow x = u^3 + 4$

- c. Se reemplaza  $u, x$  y  $dx$  en la integral original. Si hay que realizar otro reemplazo se hace; la idea es que en la integral resultante no aparezca nada que tenga que ver con la variable inicial o sea con la  $x$ . Se tiene entonces:

$$\int x^3 \sqrt{x-4} dx = \int (u^3 + 4) * u * 3u^2 du = \int (3u^6 + 12u^3) du \rightarrow$$

$$\int x^3 \sqrt{x-4} dx = \int 3u^6 du + \int 12u^3 du = 3 \frac{u^{6+1}}{6+1} + 12 \frac{u^{3+1}}{3+1} + C \rightarrow$$

$$\int x^3 \sqrt{x-4} dx = \frac{3u^7}{7} + \frac{12u^4}{4} + C = \frac{3u^7}{7} + 3u^4 + C$$

- d. Se recupera la variable inicial:

$$\int x^3 \sqrt{x-4} dx = \int (3u^6 + 12u^3) du = \frac{3u^7}{7} + 3u^4 + C$$

$$= \frac{3(\sqrt[3]{x-4})^7}{7} + 3(\sqrt[3]{x-4})^4 + C$$

3. Resolver:

$$\int \sqrt[7]{2x - 103} dx$$

### Procedimiento

a. Se hace  $u$  igual al radical:

$$u = \sqrt[7]{2x - 103}$$

**Nota:** Para eliminar la raíz elevamos ambos lados de la igualdad a un **exponente equivalente al índice de la raíz**, en este caso elevamos a ambos lados a un **exponente siete**, ya que la raíz es séptima.

➤ Elevando a la séptima ambos lados de la ecuación:

$$u^7 = (\sqrt[7]{2x - 103})^7 \rightarrow u^7 = 2x - 103$$

b. Derivando a ambos lados se tiene:

$$u^7 = 2x - 103 \rightarrow 7u^6 du = 2 dx \rightarrow dx = \frac{7u^6 du}{2}$$

c. Reemplazando en la integral e integrando:

$$\int \sqrt[7]{2x - 103} dx = \int u * \frac{7u^6}{2} du = \frac{7}{2} \int \frac{u^7}{2} du \rightarrow$$

$$\int \sqrt[7]{2x - 103} dx = \frac{7}{2} \int \frac{u^7}{2} du = \frac{7}{2} * \frac{u^{7+1}}{7+1} + C = \frac{7}{2} * \frac{u^8}{8} + C$$

d. Se recupera la variable inicial:

$$\int \sqrt[7]{2x - 103} \, dx = \frac{7}{16} * \sqrt[7]{(2x - 103)^8} + C$$

**NOTA:**

Esta integral también se puede resolver por sustitución.

4. Resolver:  $\int \sqrt[7]{(5x + 3)^2} \, dx$

**Procedimiento**

a. Se hace  $u$  igual al radical:

Recuerde que:  $\int \sqrt[7]{(5x + 3)^2} \, dx = \int (\sqrt[7]{5x + 3})^2 \, dx$

Entonces:  $u = \sqrt[7]{5x + 3} \rightarrow u^7 = 5x + 3$

b. Derivando a ambos lados se tiene:

$$7u^6 \, du = 5 \, dx \rightarrow dx = \frac{7u^6 \, du}{5}$$

c. Reemplazando en la integral e integrando:

$$\int (\sqrt[7]{5x + 3})^2 \, dx = \int (u)^2 * \frac{7u^6 \, du}{5} = \frac{7}{5} \int u^8 \, du = \frac{7}{5} * \frac{u^{8+1}}{8+1} \rightarrow$$

$$\int (\sqrt[7]{5x + 3})^2 \, dx = \frac{7}{5} * \frac{u^9}{9} + C \text{ Pero } u = \sqrt[7]{5x + 3} \rightarrow$$

$$\int (\sqrt[7]{5x+3})^2 dx = \frac{7}{45} \int (\sqrt[7]{5x+3})^9 + C$$

- INTEGRACIÓN DE EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS

➤ FÓRMULAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN

FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA	INTEGRAL	VALOR INTEGRAL
$\text{Sen } u$	$\int \text{Sen } u \, du$	$-\text{Cos } u + C$
$\text{Cos } u$	$\int \text{Cos } u \, du$	$\text{Sen } u + C$
$\text{Sec}^2 u$	$\int \text{Sec}^2 u \, du$	$\text{Tan } u + C$
$\text{Csc}^2 u$	$\int \text{Csc}^2 u \, du$	$-\text{Cot } u + C$
$\text{Sec } u \text{ tan } u$	$\int \text{Sec } u \text{ tan } u \, du$	$\text{Sec } u + C$
$\text{Csc } u \text{ Cot } u$	$\int \text{Csc } u \text{ Cot } u \, du$	$-\text{Csc } u + C$
$\text{Tan } u$	$\int \text{Tan } u \, du$	$\ln \text{sec } u  + C$
$\text{Cot } u$	$\int \text{Cot } u \, du$	$\ln \text{sen } u  + C$
$\text{Sec } u$	$\int \text{Sec } u \, du$	$\ln \text{sec } u + \text{tan } u  + C$
$\text{Csc } u$	$\int \text{Csc } u \, du$	$\ln \text{csc } u - \text{cot } u  + C$

**NOTA:** Para realizar la integración con expresiones trigonométricas, se presenta a continuación un cuadro con algunas identidades trigonométricas:

<b>IDENTIDADES FUNDAMENTALES</b>	<b>IDENTIDADES ÁNGULOS DOBLES</b>
$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$	$\text{Cos}^2 x = \frac{1 + \text{cos}(2x)}{2}$
$1 + \text{cot}^2 x = \text{csc}^2 x$	$\text{Cos}(2x) = \text{cos}^2 x - \text{sen}^2 x$
$\text{tan}^2 x + 1 = \text{sec}^2 x$	$\text{Sen}^2 x = \frac{1 - \text{cos}(2x)}{2}$
$\text{Tan } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$	$\text{Sen}(2x) = 2\text{sen } x \text{ cos } x$
$\text{Cot } x = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x}$	<b>IDENTIDADES PRODUCTO</b>
$\text{Tan } x = \frac{1}{\text{cot } x}$	$\text{Sen}(mx) * \text{Cos}(nx) =$ $\frac{1}{2} [\text{sen}(m+n)x + \text{sen}(m-n)x]$
$\text{Cot } x = \frac{1}{\text{tan } x}$	$\text{Sen}(mx) * \text{Sen}(nx) =$ $\frac{1}{2} [\text{cos}(m+n)x - \text{cos}(m-n)x]$
$\text{Csc } x = \frac{1}{\text{sen } x}$	$\text{Cos}(mx) * \text{Cos}(nx) =$ $\frac{1}{2} [\text{cos}(m+n)x + \text{cos}(m-n)x]$
$\text{Sen } X = \frac{1}{\text{csc } x}$	<b>IDENTIDADES SUMA (DIFERENCIA) DE ÁNGULOS</b>
$\text{Sec } x = \frac{1}{\text{cos } x}$	$\text{Sen}(A + B) = \text{sen}A\text{cos}B + \text{cos}A\text{sen}B$
$\text{Cos } x = \frac{1}{\text{sec } x}$	$\text{Sen}(A - B) = \text{sen}A\text{cos}B - \text{cos}A\text{sen}B$
<b>IDENTIDADES ÁNGULOS NEGATIVOS</b>	$\text{Cos}(A + B) = \text{cos}A\text{cos}B - \text{sen}A\text{sen}B$
$\text{Sen}(-x) = -\text{Sen } x$	$\text{Cos}(A - B) = \text{cos}A\text{cos}B + \text{sen}A\text{sen}B$
$\text{Cos}(-x) = \text{Cos } x$	$\text{Tan}(A + B) = \frac{\text{tan}A + \text{Tan}B}{1 - \text{tan}A * \text{tan}B}$
	$\text{Tan}(A - B) = \frac{\text{tan}A - \text{Tan}B}{1 + \text{tan}A * \text{tan}B}$

## ➤ PASOS PARA LA INTEGRACIÓN DE EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para la integración de expresiones trigonométricas, se deben tener en cuenta los siguientes aspectos.

**Nota:** No necesariamente este es el orden a seguir:

1. Determine, inicialmente, si la integral presenta la forma de alguna de las fórmulas básicas; Si es así efectúe la integral.
2. Cuando hay **una sola expresión trigonométrica**, para hacer el cambio de variable se toma lo que está **dentro de la expresión trigonométrica**, es decir **el ángulo**.
3. Cuando hay **dos o más expresiones trigonométricas** en la misma integral, el cambio de variable se hace tomando **una de las expresiones trigonométricas**.
4. Lleve las expresiones trigonométricas a expresiones equivalentes en términos del **seno** y del **coseno** (a veces facilita el trabajo pero no es indispensable).
5. Si es necesario utilice una o varias de las identidades trigonométricas.

## EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Resolver  $\int 3x^2 \cos x^3 dx$

### Procedimiento

- a. Se hace:  $u = x^3$

### PISTA DE APRENDIZAJE

**Tenga presente:** Cuando hay una sola expresión trigonométrica, para hacer el cambio de variable se toma lo que está dentro de la expresión trigonométrica, es decir el ángulo.

b. Se encuentra la derivada:

$$\text{Si } u = x^3 \rightarrow du = 3x^2 dx \rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

c. Reemplazando en la integral:

$$\int 3x^2 \cos x^3 dx = \int 3x^2 \cos u \frac{du}{3x^2} \text{ Simplificando } 3x^2:$$

$$\int 3x^2 \cos x^3 dx = \int \cos u du = \text{Sen } u + C$$

d. Reemplazando:  $u = x^3$

$$\int 3x^2 \cos x^3 dx = \text{Sen } x^3 + C$$

---

2. Resolver  $\int \frac{x}{\text{sen}^2(3x^2+2)} dx$

#### Procedimiento

a. Se hace:  $u = 3x^2 + 2$

$$\text{Si } u = 3x^2 + 2 \rightarrow du = 6x dx \rightarrow dx = \frac{du}{6x}$$

b. Reemplazando en la integral:

$$\int \frac{x}{\text{sen}^2(3x^2+2)} dx = \int \frac{x}{\text{sen}^2 u} * \frac{du}{6x} \text{ Simplificando } x:$$

$$\int \frac{x}{\text{sen}^2(3x^2 + 2)} dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{\text{sen}^2 u} du$$

➤ Utilizando la identidad: (Ver cuadro de identidades)

$$\text{Csc } u = \frac{1}{\text{sen } u} \rightarrow \text{Csc}^2 u = \frac{1}{\text{sen}^2 u}$$

c. La integral queda:

$$\int \frac{x}{\text{sen}^2(3x^2 + 2)} dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{\text{sen}^2 u} du = \frac{1}{6} \int \text{csc}^2 u du \rightarrow$$

$$\int \frac{x}{\text{sen}^2(3x^2 + 2)} dx = \frac{1}{6} (-\cot u) + C = -\frac{1}{6} \cot(3x^2 + 2) + C$$

3. Resolver:

$$\int \frac{\text{sen } x}{\cos^5 x} dx$$

### Procedimiento

a. El cambio de variable se debe hacer por una de las dos funciones trigonométricas, en este caso se realizará por coseno.

### PISTA DE APRENDIZAJE

**Traer a la memoria:** Cuando hay **dos o más expresiones trigonométricas** en la misma integral, el cambio de variable se hace tomando **una de las expresiones trigonométricas**.

Entonces, si  $u = \cos x \rightarrow du = -\text{sen } x \, dx \rightarrow dx = -\frac{du}{\text{sen } x}$

b. Reemplazando en la integral:

$\int \frac{\text{sen } x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{\text{sen } x}{u^5} * -\frac{du}{\text{sen } x}$  Simplificando  $\text{sen } x$ , se tiene:

$$\int \frac{\text{sen } x}{\cos^5 x} dx = - \int \frac{1}{u^5} du = - \int u^{-5} du = -\frac{u^{-5+1}}{-5+1} + C \rightarrow$$

$$\int \frac{\text{sen } x}{\cos^5 x} dx = -\frac{u^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{4u^4} + C$$

c. Reemplazando  $u = \cos x$

$$\int \frac{\text{sen } x}{\cos^5 x} dx = \frac{1}{4\cos^4 x} + C \text{ Pero: } \text{Sec } x = \frac{1}{\cos x} \rightarrow$$

$$\int \frac{\text{sen } x}{\cos^5 x} dx = \frac{1}{4\cos^4 x} + C = \frac{1}{4} \text{sec}^4 x + C$$

4. Resolver:  $\int \tan(5x - 7) dx$

### Procedimiento

a. Sea  $u = 5x - 7 \rightarrow du = 5 dx \rightarrow dx = \frac{du}{5}$

b. Reemplazando en la integral:

$$\int \tan(5x - 7) dx = \int \tan u * \frac{du}{5} \rightarrow$$

$$\int \tan(5x - 7) dx = \frac{1}{5} \ln|\sec(u)| + C$$

c. Reemplazando  $u = 5x - 7$

$$\int \tan(5x - 7) dx = \frac{1}{5} \ln|\sec(u)| + C = \frac{1}{5} \ln|\sec(5x - 7)| + C$$

5. El siguiente ejemplo fue tomado del libro de Purcell<sup>6</sup>, resolver:

$$\int \frac{\sen x - \cos x}{\sen x} dx$$

### Procedimiento

a. Separando denominadores:

$$\int \frac{\sen x - \cos x}{\sen x} dx = \int \left( \frac{\sen x}{\sen x} - \frac{\cos x}{\sen x} \right) dx = \int \frac{\sen x}{\sen x} dx - \int \frac{\cos x}{\sen x} dx \rightarrow$$

<sup>6</sup> PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 389.

**PISTA DE APRENDIZAJE**

**Tener en cuenta:**  $\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

Entonces:

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x} dx = \int dx - \int \cot x dx$$

**PISTA DE APRENDIZAJE**

**Traer a la memoria**

$$\int \cot u du = \ln|\sin u| + C$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x} dx = \int dx - \int \cot x dx = x - \ln|\sin x| + c$$

**EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO**

1. Resuelva las siguientes integrales indefinidas, utilizando las leyes básicas de integración.

a)  $\int 7x^5 dx$

b)  $\int \frac{4}{x^3} dx$

c)  $\int (5x - 3)^3 dx$

d)  $\int \left( \sqrt[6]{x^5} - 3e^{4x} - \frac{8}{x} + \sqrt{x} \right) dx$

e)  $\int \frac{6x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 18x - 300}{3x^2} dx$

2. Resuelva los siguientes problemas.

a) Desde un edificio de 32 metros se tira hacia arriba una piedra con una velocidad de  $30 m/s$ . Determine la función de velocidad instantánea y la función de altura ó posición instantánea. Determine la altura máxima y la velocidad máxima que alcanza el objeto.

b) La función de costo marginal para cierto producto de una empresa es:

a.  $c'(q) = 5q^2 + 7q + 800$  \$

c) Los costos fijos son de 400.000 \$

d) Encuentre la función de costo promedio del producto.

e) La función de ingreso marginal en la venta de  $q$  unidades de un producto es:

a.  $r'(q) = 50000 - 6q$  \$

Encuentre la función de demanda ó precio.

3. Resuelva las siguientes integrales utilizando las técnicas de integración vistas.

a)  $\int \frac{5x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 9x + 10}{x + 2} dx$

b)  $\int x^2 \sqrt[4]{3x+1} dx$

c)  $\int 7x \operatorname{sen}(x^2 + 35) dx$

d)  $\int \tan^3 x \cot^2 x dx$

e)  $\int \frac{3x+1}{\sqrt[3]{3x^2+2x+3}} dx$

4. La función de ingreso marginal para cierto producto es:

$$r'(q) = \frac{300}{(1000 - 2q)^2} \$$$

Halle la función de precio o demanda del producto

5. Un objeto se mueve a lo largo del eje coordenado: Encuentre la función o modelo de posición y la función o modelo de velocidad bajo las condiciones indicadas.

- La aceleración está dada por la función.  $a(t) = t \text{ cm/s}^2$ . El objeto parte del origen con una velocidad de 50 cm/s.
- $a(t) = 2t + 1 \text{ cm/s}^2$ . Parte desde el reposo a una distancia de 250 cm del origen.
- $a(t) = -3t^2 + 8t + 50 \text{ m/s}^2$ . Parte desde el origen con una velocidad de 6 m/s.
- $a(t) = 6 \text{ m/s}^2$ . El objeto parte del reposo a 100 m del origen. Determine además la posición después de un minuto.

6. En los siguientes problemas encuentre la integral indefinida:

a)  $\int \frac{8}{x^9} dx$

b)  $\int \left( \frac{3}{x} + \frac{5}{3x^6} + \frac{2}{3} \right) dx$

c)  $\int \frac{10}{\sqrt[6]{x^5}} dx$

d)  $\int \frac{(5x+7)^3}{3x^3} dx$

e)  $\int (8x-1)(3x+4) dx$

f)  $\int 3^{4x} dx$

g)  $\int \frac{1}{e^{6x}} dx$

h)  $\int x 7^{x^2} dx$

i)  $\int \sqrt[3]{x^2} (3x+5) dx$

j)  $\int \frac{e^{4x} - e^{5x}}{e^{4x}} dx$

7. Resuelva las siguientes integrales por sustitución

a)  $\int (9x+5)^{12} dx$

b)  $\int \frac{4x}{\sqrt[8]{4x+11}} dx$

c)  $\int 6x^2(2x^3 - e)^{10} dx$

d)  $\int \frac{8x-5}{4x^2-5x+13} dx$

e)  $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x-39} dx$

f)  $\int 8xe^{4x^2-100} dx$

g)  $\int \sqrt{11x} dx$

h)  $\int \frac{100}{e^{50x-99}} dx$

i)  $\int x\sqrt{(5x^2-3)^5} dx$

j)  $\int \frac{5}{x \ln x^4} dx$

8. Integrales que se resuelven utilizando división previa

a)  $\int \frac{9x^3 - 7x + 5}{x+2} dx$

b)  $\int \frac{(5x-7)^2}{x+6} dx$

c)  $\int \frac{x^4 - 16}{x + 2} dx$

d)  $\int \frac{4x^2 - 9x - 7}{2x - 3} dx$

e)  $\int \frac{x^4 - 3x^3 - 8x^2 - 1x + 4}{x + 3} dx$

f)  $\int \frac{5x^2 + x - 1}{3x + 2} dx$

g)  $\int \frac{7x^3 + 5x - 9}{9x + 7} dx$

h)  $\int \frac{25x^2 + 20x + 4}{5x + 4} dx$

i)  $\int \frac{x^3 - 125}{x^2 + 5x + 25} dx$

j)  $\int \frac{8x^3 + 27}{2x + 3} dx$

### 9. Integral indefinida aplicaciones en economía

El ejercicio número 31 ha sido tomado de uno de los libros de matemáticas del autor Haeussler<sup>7</sup>

- a. Un fabricante ha determinado que la función de costo marginal es:

$$c'(q) = 0.003q^2 - 0.4q + 40 \$$$

Donde **q** es el número de unidades producidas. Si el costo marginal es de \$ 27.50 cuando  $q = 50$ , y los costos fijos son de \$ 5 000, ¿Cuál es el costo promedio de producir 100 unidades?

<sup>7</sup> HAEUSSLER. Ernest. F. Jr; RICHARD S. Paul. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. 8 ed. México: Prentice Hall, 1997. p. 734.

b. El costo marginal de un artículo cuando se producen  $q$  unidades es:

$$c'(q) = -3q^2 + 60q + 4000 \text{ \$}$$

El costo de producir 10 unidades es 90000 \$. ¿Cuál es el costo de producir 50 unidades?

c. La función de ingreso marginal para cierto producto es:

$$r'(q) = \frac{350}{(q+3)^2} \text{ \$}$$

Encuentre la función de demanda.

d. La función de ingreso marginal para cierto producto es:

$$r'(q) = \frac{405}{(5q+7)^3} \text{ \$}$$

Encuentre la función de **demanda**.

El ejercicio número 35 fue tomado de uno de los libros del autor STEWART<sup>8</sup>

e. El costo marginal para fabricar  $x$  unidades de un producto es:

$$C'(x) = 0.006x^2 - 1.5x + 8 \text{ dólares}$$

El costo fijo es de 1 500 000 dólares, encuentre el costo de producir 2000 unidades.

f. La función de costo marginal para cierto artículo es:

<sup>8</sup> STEWART, James. Cálculo conceptos y contexto. 1 ed. México: International Thomson Editores, 1999. p. 488.

$$C'(q) = \frac{35}{q+10} \$$$

Encuentre la función de costo, si los costos fijos son de 300000 \$.

- g. La función de costo marginal para cierto artículo es:

$$C'(q) = 3e^{0.004q} \$$$

Si los costos fijos son de \$ 3 000, determine la función de costo.

#### 10. Integral indefinida aplicaciones en física

- a) Una bola es lanzada desde la superficie de la tierra con una velocidad de 43.5 m/s. ¿Cuál es la máxima altura que alcanza? Recomendación. Encuentre primero las funciones de velocidad y de posición.
- b) La función de aceleración de un objeto está dada por:

$$a(t) = 3.5t^2 - 4t + 30 \text{ m/s}^2$$

El objeto parte desde una posición de -153 m con una velocidad de 3.5 m/s. Determine: Posición, velocidad y aceleración del objeto, cuando han transcurrido 12.5 segundos.

- c) La función de aceleración de cierto objeto es:

$$a(t) = \frac{5}{(4t+5)^4} \text{ m/s}^2$$

El objeto parte desde el origen con una velocidad de 8 m/s. Determine:

- Función de velocidad instantánea.

- Función de posición instantánea.

d. Un objeto se mueve desde el origen con una velocidad dada por la función:

$$v(t) = \frac{3t}{3t^2 + 10} \text{ m/s}$$

Encuentre:

- Función de aceleración instantánea.
  - Función de posición instantánea.
  - Posición, velocidad y aceleración cuando han transcurrido 20 segundos.
- e. Un objeto se deja caer desde una altura de 253 m. Determine la función o modelo de posición para cualquier instante t. Determine además la velocidad del objeto en el momento en que toca el suelo.
- f. Un objeto se lanza hacia arriba desde una altura de 250 m, con una velocidad de 100 m/s. Determine si el objeto va subiendo o va cayendo después de 5s. Justifique su respuesta. ¿El objeto irá cayendo o subiendo después de 15 s?
- g. Un objeto se lanza hacia arriba desde la azotea de un edificio de 245 m con una velocidad de 83 m/s. determine:
- La altura máxima que alcanza el objeto.
  - La velocidad máxima del objeto.

11. Integrales que contienen  $\sqrt[n]{ax+b} \wedge \sqrt[n]{(ax+b)^m}$

a)  $\int 2x\sqrt{7x-2} dx$

b)  $\int \frac{x}{\sqrt{3-11x}} dx$

c)  $\int \frac{10x}{\sqrt{x+100}} dx$

d)  $\int x \sqrt[4]{7x+8} dx$

e)  $\int x\sqrt{x+3} dx$

f)  $\int 4x^3\sqrt{x^2+6x+9} dx$

g)  $\int 7x^2\sqrt{6x-13} dx$

## 12. Integración de funciones trigonométricas

a)  $\int \text{sen}6x dx$

b)  $\int \frac{2}{3} \cos\left(\frac{5}{9}x\right) dx$

c)  $\int 5x^3 \text{sen}x^4 dx$

d)  $\int \frac{3}{2} x \text{sen}(4x-3) dx$

e)  $\int \sec^2(7x) dx$

f)  $\int \csc^2(8x+5) dx$

g)  $\int \text{sen}x(3-\cos x)^6 dx$

h)  $\int \frac{5 \cos x dx}{(10 + \operatorname{sen} x)^6}$

i)  $\int \frac{\cot 3x}{\operatorname{sen} 3x} dx$

j)  $\int 5^{\cos x} \operatorname{sen} x dx$

k)  $\int \frac{\cos x}{1 - \cos^2 x} dx$

l)  $\int e^{3x} \operatorname{sen}(e^{3x}) dx$

m)  $\int \frac{1}{x \operatorname{sen}(\ln x)} dx$

n)  $\int \cos^3 x dx$

o)  $\int \operatorname{sen}(4x) \cos(8x) dx$

p)  $\int \cos(10x) \cos(12x) dx$

q)  $\int \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{4}{5}x\right) dx$

13. Demuestre las siguientes fórmulas de integración

a)  $\int \tan u du = \ln|\sec u| + c$

b)  $\int \cot u du = \ln|\operatorname{sen} u| + c$

$$c) \int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u| + c$$

$$d) \int \csc u \, du = \ln|\csc u - \cot u| + c$$

## 4. UNIDAD 2 INTEGRAL DEFINIDA

### OBJETIVO GENERAL.

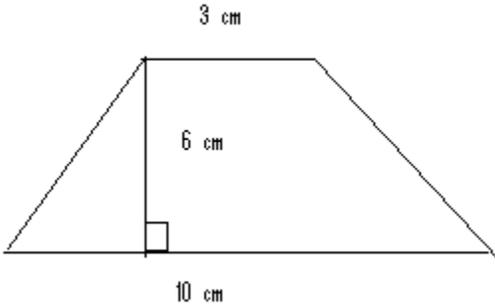
Entender el concepto de la integral definida, partiendo del cálculo del área bajo una curva.

### OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Aplicar la integral definida al cálculo del área bajo una curva y el área entre curvas.
- Aplicar la integral definida para el cálculo del volumen de sólidos de revolución utilizando diferentes métodos.

#### 4.1. Prueba Inicial

PREGUNTA	OPCIÓN DE RESPUESTA
1. ¿Cuál es el área de un triángulo rectángulo en el cual un cateto es igual a 3 cm y la hipotenusa es igual a 5 cm?	a) 16 cm b) 15 cm c) 8 cm <sup>2</sup> d) 15 cm <sup>2</sup> e) 16 cm <sup>2</sup>
2. ¿Cuál es el área de un triángulo rectángulo en el cual un cateto es igual a 3 cm y la hipotenusa es igual a 5 cm?	a. 12 cm b. 4 cm c. 8 cm <sup>2</sup> d. 12 cm <sup>2</sup>

	<p>e. <math>4 \text{ cm}^2</math></p>
<p>3. ¿Cuál es el área de un rectángulo en el cual un lado es igual a 4 cm y el otro lado es igual a 8 cm?</p>	<p>a. <math>24 \text{ cm}</math></p> <p>b. <math>16 \text{ cm}</math></p> <p>c. <math>32 \text{ cm}^2</math></p> <p>d. <math>12 \text{ cm}^2</math></p> <p>e. <math>16 \text{ cm}^2</math></p>
<p>4. Para la función <math>f(x) = 2x^2 - 5</math>, halle:</p>	<p><math>f(5) - f(3) =</math></p>
<p>4. Para la función: <math>f(x) = \frac{5}{3}x^3 - 8x^2 + x - 9</math>, halle:</p>	<p><math>f(5) - f(3) =</math></p>
<p>6.Cuál es el área del trapecio mostrado en la figura:</p> 	<p>a) <math>= 38 \text{ cm}^2</math></p> <p>b) <math>= 90 \text{ cm}^2</math></p> <p>c) <math>= 39 \text{ cm}^2</math></p> <p>d) <math>= 14 \text{ cm}^2</math></p> <p>e) <math>= 78 \text{ cm}^2</math></p>

## 4.2. Tema 1 Integral Definida

**Definición de integral definida.** La integral definida es una expresión de la forma:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Dónde: **a y b** se llaman **límites de integración**, y

**a**: Límite inferior.

**b**: Límite superior.

**Nota:** La integral definida es **un número**; para calcular este número, se utiliza el **teorema fundamental del cálculo**.

### El teorema fundamental del cálculo.

El teorema fundamental del cálculo recibe de manera apropiada este nombre porque establece una conexión entre las dos ramas del cálculo: **el cálculo diferencial** y el **cálculo integral**. El primero surgió del **problema de la tangente**, el cálculo integral lo hizo de un problema en apariencia no relacionado, **el problema del área**. El profesor de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630 –

1667), descubrió que estos dos problemas en realidad estaban íntimamente relacionados. De hecho, se dio cuenta que la derivación y la integración son procesos inversos. **El teorema fundamental del cálculo da la relación inversa precisa entre la derivada y la integral**. Newton y Leibniz explotaron esta relación y la usaron para desarrollar el cálculo en un método matemático sistemático.<sup>9</sup>

### Teorema fundamental del cálculo.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

**Nota 1:** En la integral definida no es necesario colocar la constante de integración.

**Nota 2:** El teorema fundamental del cálculo se puede demostrar a partir del área bajo una curva.

### EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Calcular:  $\int_0^2 6 - 3x^2 dx$

### PROCEDIMIENTO

<sup>9</sup> STEWART, James. Cálculo conceptos y contexto. 1 ed. México: International Thomson Editores, 1999. p. 383.

Se aplica el teorema fundamental del cálculo:

$$\int_0^2 6 - 3x^2 dx = 6x - 3 \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = 6x - x \Big|_0^2 = [6(2) - (2)^3] - [6(0) - (0)^3] \rightarrow$$

$$\int_0^2 6 - 3x^2 dx = 12 - 8 = 4$$

2. Calcular:  $\int_{-1}^3 (6x^2 - 2x + 6) dx$

### Procedimiento

a. Integrando:

$$\int_{-1}^3 (6x^2 - 2x + 6) dx = \frac{6x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 6x \Big|_{-1}^3 \rightarrow$$

b. Aplicando el teorema fundamental del cálculo:

$$\int_{-1}^3 (6x^2 - 2x + 6) dx = 2x^3 - x^2 + 6x \Big|_{-1}^3 \rightarrow$$

$$\int_{-1}^3 (6x^2 - 2x + 6) dx = [2(3)^3 - (3)^2 + 6(3)] - [2(-1)^3 - (-1)^2 + 6(-1)] \rightarrow$$

$$\int_{-1}^3 (6x^2 - 2x + 6) dx = (54 - 9 + 18) - (-2 - 1 - 6) = 72$$

3. Calcular:

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$$

### Procedimiento

a. Integrando: Utilizando el método sustitución se tiene:

$$\text{Si } u = 1 + x^3 \rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

b. Reemplazando en la integral:

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx = \int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{u}} * \frac{du}{3x^2} = \int_0^1 \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} du = \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} du \rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx = \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{u} \Big|_0^1 \rightarrow$$

c. Aplicando el teorema fundamental del cálculo:

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx = 2\sqrt{u} \Big|_0^1 \rightarrow 2\sqrt{1+x^3} \Big|_0^1 = 2\sqrt{1+(1)^3} - 2\sqrt{1+(0)^3} = 2\sqrt{2} - 2$$

## PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

INTEGRAL	PROPIEDAD	RESULTADO
1. $\int_a^b f(x)dx$	Al intercambiar los límites de integración, se cambia el signo de la integral.	$-\int_b^a f(x)dx$
2. $\int_a^a f(x)dx$	Sí los límites de integración son iguales, el resultado de la integral es igual a cero.	<b>0</b>
3. $\int_a^c f(x)dx$	<b><i>Si <math>a &lt; b &lt; c</math></i></b>	$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
EJEMPLOS		
1. $\int_3^5 (4x + 3)dx$	=	1. $-\int_5^3 (4x + 3)dx$
2. $\int_{10}^{10} 50x^4 dx$	=	<b>0</b>
3. $\int_0^6 (2x - 3)dx$	=	$\int_0^2 (2x - 3)dx$ $+ \int_2^6 (2x - 3)dx$
<p><b>NOTA:</b> La variable de integración es una “<b>variable muda</b>” en el sentido de que cualquier otra variable produce el mismo resultado, el mismo número, es decir:</p> $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$ <p>Ejemplo: <math>\int_5^{10} 3x dx = \int_5^{10} 3z dz</math></p>		

### 4.3. Tema 2 Área bajo una curva y área entre curvas.

#### ÁREA BAJO UNA CURVA

Para describir **un método** para determinar el área bajo una curva, se parte de un **ejemplo** en particular:

**Ejemplo:** Encuentre el área de la región R limitada por la curva:  $y = f(x) = \sqrt{x}$  y el eje  $x$ , entre  $x = 0$  y  $x = 9$ .

#### PROCEDIMIENTO

a. Lo primero que se debe hacer es realizar la gráfica del modelo:

➤ Los valores para la gráfica se muestran en la siguiente tabla:

$x$	$f(x) = \sqrt{x}$	$y$
0	$\sqrt{0}$	0
1	$\sqrt{1}$	1
2	$\sqrt{2}$	1.41
3	$\sqrt{3}$	1.73
4	$\sqrt{4}$	2
5	$\sqrt{5}$	2.23
6	$\sqrt{6}$	2.44
7	$\sqrt{7}$	2.64
8	$\sqrt{8}$	2.82
9	$\sqrt{9}$	3

La gráfica de la función se puede ver en la figura 1

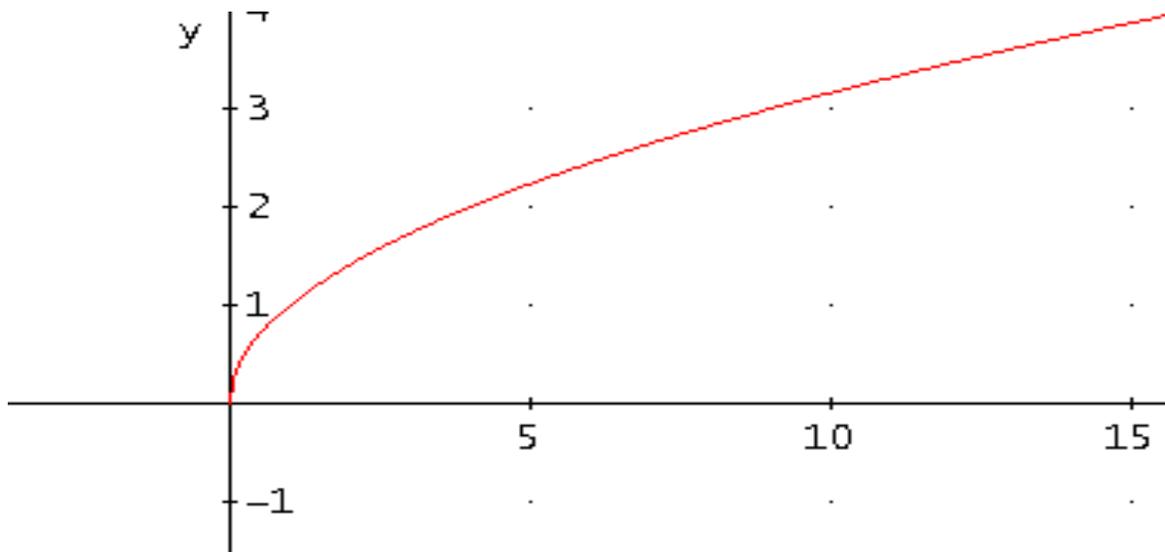


Figura 1. Gráfica de la función  $y = f(x) = \sqrt{x}$

- c. Se obtiene el **área total** como una **suma de áreas**, dividiendo la figura en rectángulos de igual base y alturas determinadas por la función.

Por facilidad se toma la **base** para cada rectángulo **igual a 1**. Si llamamos la **base**  $\Delta x$ , tenemos que  $\Delta x = 1$  (ver figura 2).

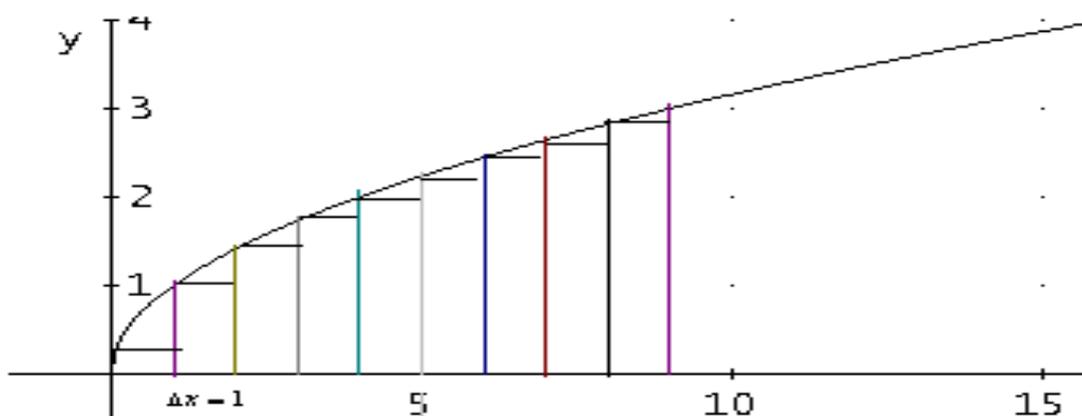


Figura 2

### PISTA DE APRENDIZAJE

**Tener en cuenta:** El área de un rectángulo es igual a base por altura.

- El área total será igual a la suma de cada área, es decir:

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \dots + A_9$$

Se tiene entonces:

ÁREA	$\Delta x * f(x)$	VALOR ÁREA
$A_1$	$1 * f(1)$	$\sqrt{1} = 1$
$A_2$	$1 * f(2)$	$\sqrt{2} = 1,41$
$A_3$	$1 * f(3)$	$\sqrt{3} = 1,73$
$A_4$	$1 * f(4)$	$\sqrt{4} = 2$
$A_5$	$1 * f(5)$	$\sqrt{5} = 2,23$
$A_6$	$1 * f(6)$	$\sqrt{6} = 2,44$
$A_7$	$1 * f(7)$	$\sqrt{7} = 2,64$
$A_8$	$1 * f(8)$	$\sqrt{8} = 2,82$
$A_9$	$1 * f(9)$	$\sqrt{9} = 3$
$A_T = \sum_{i=1}^9 A_i * \Delta x$	=	<b>19,306</b>

Una manera fácil para determinar  $\Delta x$  sería:

$$\Delta x = \frac{\text{Extremo mayor} - \text{extremo menor}}{\text{Número de rectangulos}}$$

**Nota:** Mientras más pequeña sea la base de cada rectángulo, más precisa será el área obtenida, esto es, mientras **más rectángulos, más exacto** será el valor obtenido.

Se realizará el análisis para una función cualquiera y en forma general:

Sea la función  $y = f(x)$ , se determina el área de la región **R** en el primer cuadrante, entre

$$x = a \text{ y } x = b$$

Para ello utilicemos el mayor número de rectángulos posible, esto quiere decir que la base de cada rectángulo será lo más pequeña posible, esto se puede observar en la figura 3

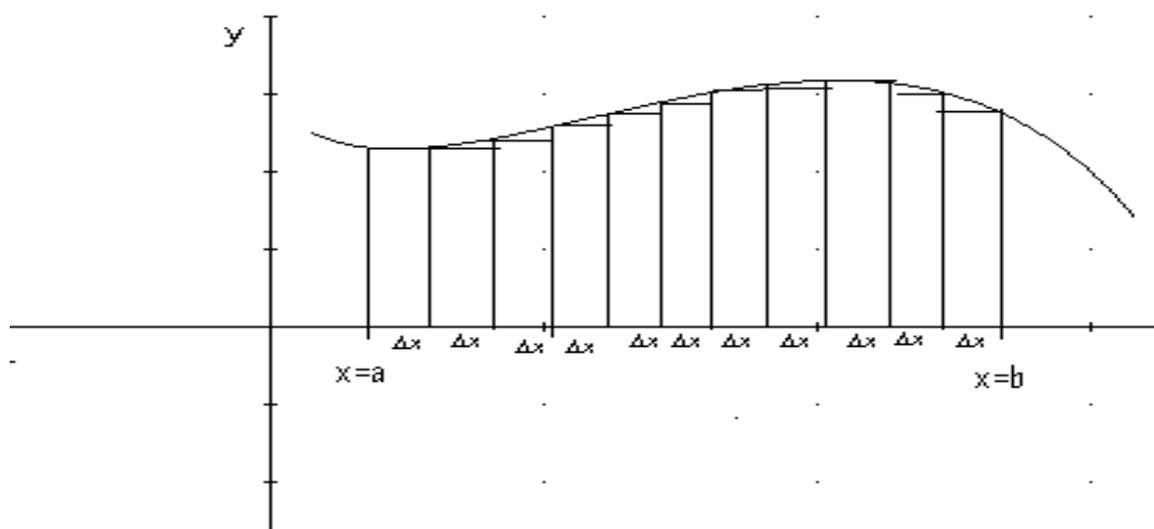


FIGURA3

➤ De la figura 3 se tiene que:

$$A_T \approx \Delta x * f(x_1) + \Delta x * f(x_2) + \Delta x * f(x_3) + \Delta x * f(x_4) + \dots + \Delta x * f(x_n)$$

➤ Expresándolo en forma de sumatoria:

$$\sum_{i=1}^n \approx f(x_i) * \Delta x, \text{ si } n \rightarrow \infty \text{ y } \Delta x \rightarrow 0$$

➤ Esto es:

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_i) * \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

## EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Determine el área exacta de:  $\int_0^9 \sqrt{x} dx$

Procedimiento

$$\int_0^9 \sqrt{x} dx = \int_0^9 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^9 = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_0^9 = \frac{2}{3} \sqrt{9^3} - \frac{2}{3} \sqrt{0^3} \rightarrow$$

$$\int_0^9 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} * 27 - \frac{2}{3} * 0 = 2 * 9 - 0 = 18$$

Recuerde que:  $\sqrt{729} = 27$

---

## ÁREA BAJO UNA CURVA

Cuando se determina el área bajo una curva se pueden presentar **tres alternativas**:

1. Sí, la región está **por encima del eje  $x$**  como lo muestra la **figura 4**:

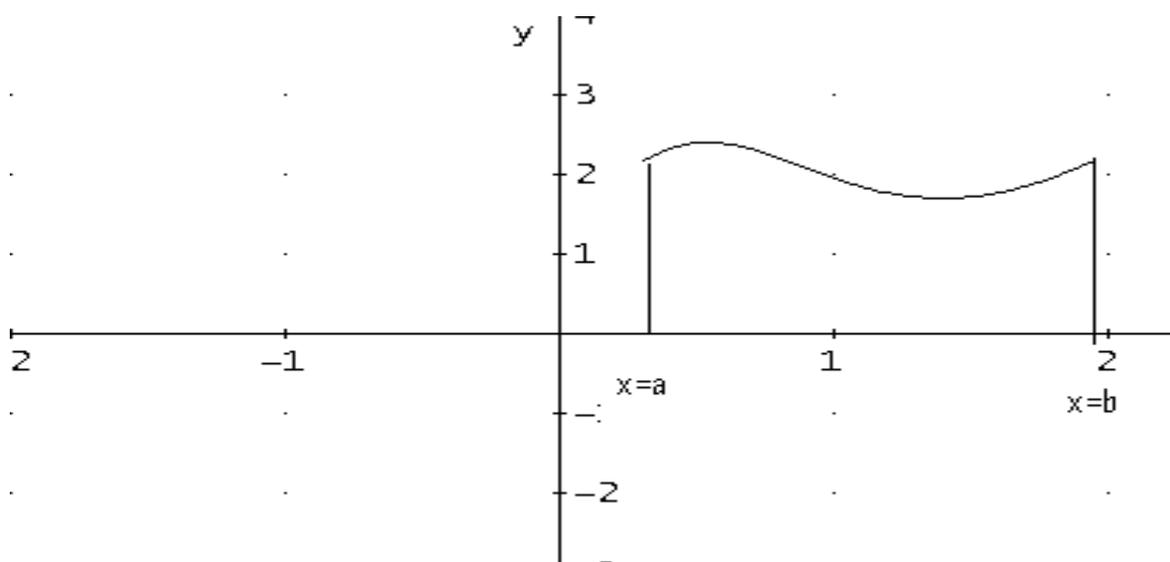


Figura 4

Entonces:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

2. Sí, La región está **por debajo del eje  $x$**  como lo muestra la **figura 5**:

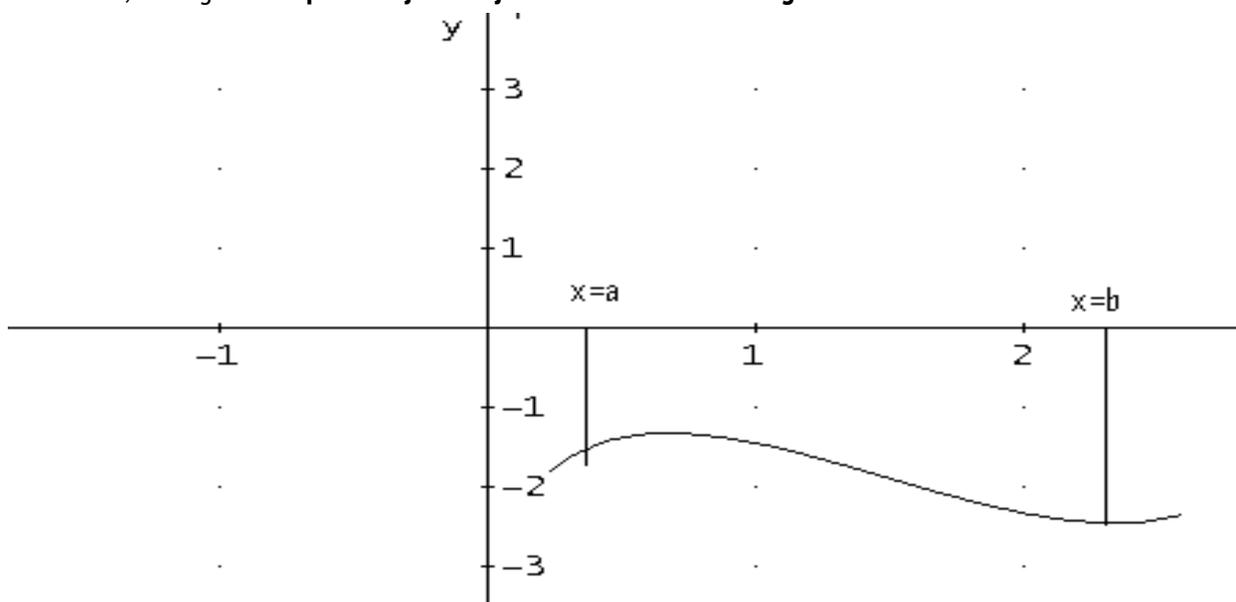


Figura 5

Entonces:

$$A = - \int_a^b f(x) dx$$

### Ejercicios de aprendizaje

1. El siguiente ejemplo fue tomado de uno de los libros del autor Purcell.<sup>10</sup>

Encontrar el área de la región **R** limitada por:

$$y = \frac{x^2}{3} - 4 \text{ y el eje } x, \text{ entre } x = -2 \text{ y } x = 3$$

<sup>10</sup> PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 282.

## Procedimiento

- a. La gráfica de la figura se puede hacer dándole valores a  $x$  entre -2 y 3, reemplazando cada valor en la función  $y = f(x) = \frac{x^2}{3} - 4$ . Efectuando este proceso, obtenemos los valores mostrados en la tabla:

$x$	$y = f(x) = \frac{x^2}{3} - 4$	$y$
-2	$\frac{(-2)^2}{3} - 4$	-2.6
-1	$\frac{(-1)^2}{3} - 4$	-3.6
0	$\frac{(0)^2}{3} - 4$	-4
1	$\frac{(1)^2}{3} - 4$	-3.6
2	$\frac{(2)^2}{3} - 4$	-2.6
3	$\frac{(3)^2}{3} - 4$	-1

➤ La gráfica de la función y el área que se pide hallar la podemos observar en la figura 6.

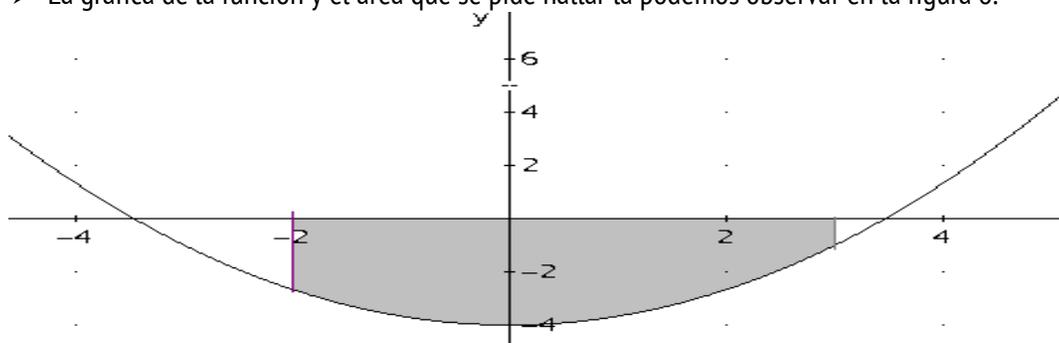


Figura 6

b. Como la región está **por debajo del eje x**, se debe plantear la integral:

$$A = - \int_a^b f(x) dx$$

➤ Solución de la integral:

$$A = - \int_{-2}^3 \left( \frac{x^2}{3} - 4 \right) dx = - \int_{-2}^3 \left( \frac{1}{3} * \frac{x^3}{3} - 4x \right) dx = - \left( \frac{1}{3} * \frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_{-2}^3$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo:

$$A = - \left\{ \frac{1}{3} * \frac{3^3}{3} - 4(3) - \left[ \frac{1}{3} * \frac{(-2)^3}{3} - 4(-2) \right] \right\} = \left\{ \frac{1}{3} * \frac{27}{3} - 12 - \left[ \frac{1}{3} * \frac{(-8)}{3} + 8 \right] \right\}$$

$$A = - \left\{ 3 - 12 - \left[ -\frac{8}{9} + 8 \right] \right\} = - \left\{ -9 + \frac{8}{9} - 8 \right\} = - \left( \frac{-145}{9} \right)$$

$$= \frac{145}{9} \text{ Unidades cuadradas}$$

3. Sí la región tiene **parte por encima y parte por debajo del eje  $x$** , El área se debe calcular utilizando varias integrales.

### EJEMPLOS DE APRENDIZAJE

1. El siguiente ejemplo fue tomado de uno de los libros del autor Purcell<sup>11</sup>

Encontrar el área de la región limitada por:

$$y = f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 \text{ y el eje } x, \text{ entre } x = -1 \text{ y } x = 2.$$

### Procedimiento

- a. Para determinar la región cuya área deseamos hallar, podemos dar valores a  $x$  entre  $x = -1$  y  $x = 2$ , reemplazar en la función para obtener los respectivos valores de  $y$ .

Realizando este proceso, obtenemos los valores de la siguiente tabla.

$x$	$y = f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$	$y$
<b>-1</b>	$(-1)^3 - 3(-1)^2 - (-1) + 3$	<b>0</b>
<b>0</b>	$(0)^3 - 3(0)^2 - 0 + 3$	<b>3</b>
<b>1</b>	$(1)^3 - 3(1)^2 - 1 + 3$	<b>0</b>
<b>2</b>	$(2)^3 - 3(2)^2 - 2 + 3$	<b>-3</b>

La gráfica de la función y la región cuya área se quiere obtener, está dada en la figura 7:

<sup>11</sup> PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 282.

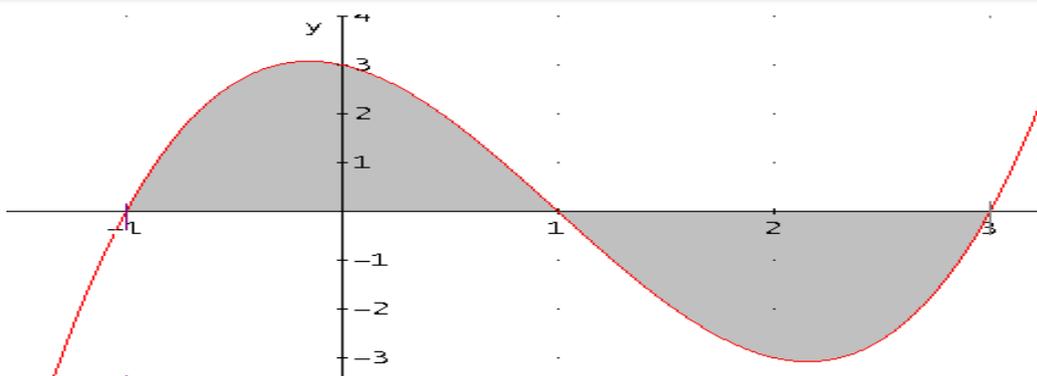


Figura 7

En la figura se puede ver que la gráfica corta el eje  $x$  en los puntos:

$$x = -1, \quad x = 1, \quad x = 3$$

**Nota:** Si estos puntos no se pueden leer en la gráfica, se debe proceder como sigue:

- Se deben hallar los puntos donde la función corta el eje  $x$ , para ello se soluciona la ecuación  $f(x) = 0$ .

La solución de  $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$  es:

$$x = -1, \quad x = 1, \quad x = 3$$

**Actividad:** Verificar el resultado efectuando la respectiva división.

b. Planteamiento de la integral a calcular:

ENTRE	POSICIÓN	INTEGRAL
-1 y 1	La función está <b>por encima</b> del eje $x$	$\int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx$
1 y 2	La función está <b>por debajo</b> del eje $x$	$-\int_1^2 (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx$

c. Para determinar el área:

$$A = \int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx$$

d. Solución de la integral:

$$A = \int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx$$

$$A = \left. \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x \right|_{-1}^1 - \left. \left( \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x \right) \right|_1^2 \rightarrow$$

➤ Simplificando y reemplazando:

$$A = \left[ \frac{(1)^4}{4} - (1)^3 - \frac{(1)^2}{2} + 3(1) \right] - \left[ \left( \frac{(-1)^4}{4} - (-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2} + 3(-1) \right) \right] -$$

$$A = \left[ \left( \frac{(2)^4}{4} - (2)^3 - \frac{(2)^2}{2} + 3(2) \right) - \left( \frac{(1)^4}{4} - (1)^3 - \frac{(1)^2}{2} + 3(1) \right) \right] - \left[ \left( \frac{(16)}{4} - 8 - \frac{4}{2} + 6 \right) - \left( \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3 \right) \right]$$

$$A = \left[ \frac{7}{4} - \left[ \frac{-9}{4} \right] \right] - \left[ (4 - 8 - 2 + 6) - \left( \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3 \right) \right]$$

$$A = \frac{7}{4} - \left[ \frac{-9}{4} \right] - \left[ (0) - \left( \frac{7}{4} \right) \right] = \frac{16}{4} - \left[ \frac{-7}{4} \right] = 4 + \frac{7}{4} \rightarrow A = \frac{23}{4} \text{ unidades cuadradas}$$

3. Encontrar el área de la región limitada por  $y = 3x^2 + 7x - 6$  y el eje  $x$   
 Entre  $x = -4$  y  $x = 2$

## Procedimiento

- a. La gráfica de la función y de la región cuya área se desea hallar la podemos ver en la figura 8.

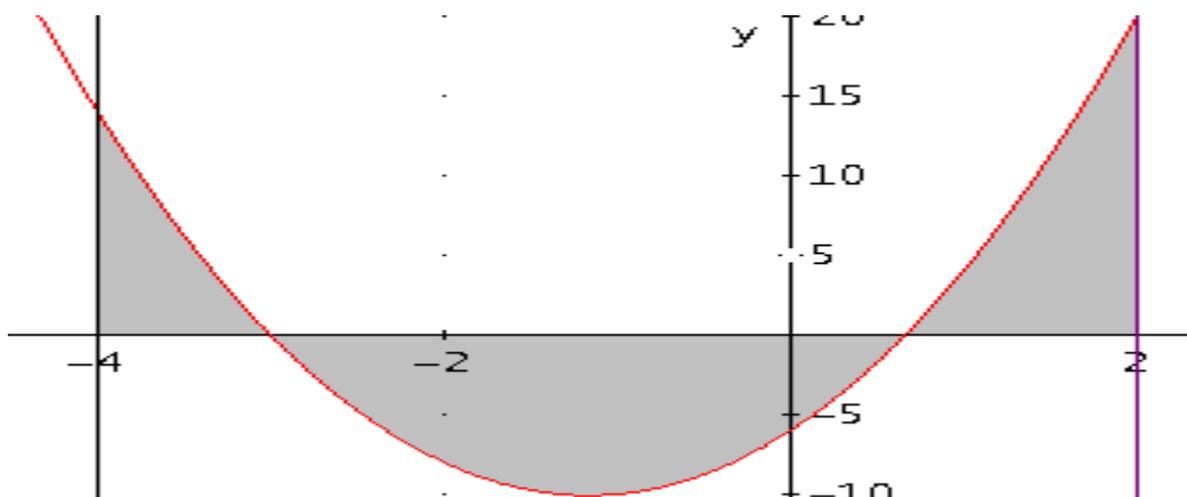


Figura 8

- b. Como los puntos donde la función corta el eje  $x$  no se pueden leer con exactitud en la gráfica, para determinarlos se debe solucionar la ecuación:

$$3x^2 + 7x - 6 = 0$$

### PISTA DE APRENDIZAJE

**Tener en cuenta:** Un polinomio de la forma  $ax^2 + bx + c$ , se factoriza multiplicando y dividiendo por el coeficiente de  $x^2$  (o sea *por a*).

Esto es:

$$\frac{3}{3}(3x^2 + 7x - 6) = 0 \rightarrow \frac{9x^2 + 7(3x) - 18}{3} = 0 \rightarrow \frac{(3x+9)*(3x-2)}{3} = 0 \rightarrow$$

$$(x + 3) * (3x - 2) = 0 \rightarrow$$

$$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$$

$$3x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Para hallar el área de la región, se debe plantear:

ENTRE	POSICIÓN	INTEGRAL
$-4$ y $-3$	La función está <b>por encima</b> del eje $x$	$\int_{-4}^{-3} (3x^2 + 7x - 6) dx$
$-3$ y $\frac{2}{3}$	La función está <b>por debajo</b> del eje $x$	$-\int_{-3}^{\frac{2}{3}} (3x^2 + 7x - 6) dx$
$\frac{2}{3}$ y $2$	La función está <b>por encima</b> del eje $x$	$+\int_{\frac{2}{3}}^2 (3x^2 + 7x - 6) dx$

$$A = \int_{-4}^{-3} (3x^2 + 7x - 6) dx - \int_{-3}^{\frac{2}{3}} (3x^2 + 7x - 6) dx + \int_{\frac{2}{3}}^2 (3x^2 + 7x - 6) dx$$

**Actividad:** Se deja como ejercicio resolver estas integrales, la respuesta para cada una de las integrales del ejercicio:

$$\int_{-4}^{-3} (3x^2 + 7x - 6) dx = \frac{13}{2}$$

$$\int_{-3}^{\frac{2}{3}} (3x^2 + 7x - 6) dx = \frac{1331}{54}$$

$$\int_{\frac{2}{3}}^2 (3x^2 + 7x - 6) dx = \frac{328}{27}$$

$$A = \frac{13}{2} - \left(-\frac{1331}{54}\right) + \frac{328}{27} = \frac{13}{2} + \frac{1331}{54} + \frac{328}{27} \rightarrow A$$

$$= \frac{1169}{27} \text{ unidades cuadradas}$$

- **Área entre curvas.**

Para determinar el área entre curvas se debe tener en cuenta cuál de las curvas está por encima y cuál está por debajo (o cuál curva está más alejada del eje  $x$  y cuál curva está más cerca del eje).

El área se calcula como:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Dónde:  $f(x)$  está **por encima** de  $g(x)$ .

Donde  $f(x)$  está por encima de  $g(x)$ .

**Procedimiento para hallar el área entre curvas:**

1. Determine los puntos de corte de ambas curvas, si los hay, para ello resuelva la ecuación:

$$f(x) = g(x).$$

2. Bosqueje la gráfica de ambas funciones.

**RECOMENDACIÓN:**

Grafique solo el tramo necesario, de valores entre el área a obtener o entre los puntos de corte.

3. Plantear el área como una integral o como varias integrales, según sea el caso y resolver.

## EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Encuentre el área de la región **R** limitada por las curvas:

$$y = g(x) = 8 - x^2, \quad y = f(x) = x^2, \quad \text{entre } x = 0 \text{ y } x = 3$$

### Procedimiento

- a. Hay que determinar los puntos donde se cortan estas curvas. Para ello se igualan las funciones y se despeja la variable:

$$f(x) = g(x) \rightarrow x^2 = 8 - x^2 \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = \frac{8}{2} \rightarrow$$

$$x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow x = 2, \quad x = -2$$

- b. Los puntos para hacer ambas gráficas se observan en la siguiente tabla:

$x$	$f(x) = x^2$	$g(x) = 8 - x^2$
0	$0^2 = 0$	$8 - 0^2 = 8 - 0 = 8$
1	$1^2 = 1$	$8 - 1^2 = 8 - 1 = 7$
2	$2^2 = 4$	$8 - 2^2 = 8 - 4 = 4$
3	$3^2 = 9$	$8 - 3^2 = 8 - 9 = -1$

**Nota:** La gráfica de la región se observa en la figura 9.

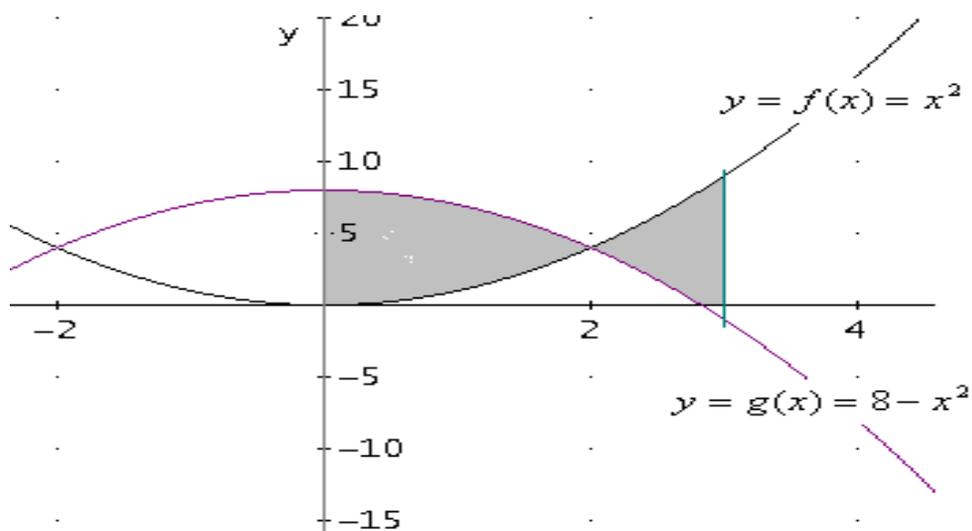


Figura 9

De acuerdo a la figura 9:

ENTRE	POSICIÓN	INTEGRAL
$x = 0$ y $x = 2$	La función $g(x)$ está <b>por encima</b> de $f(x)$	$\int_0^2 (8 - x^2 - x^2) dx$
$x = 2$ y $x = 3$	La función $f(x)$ está <b>por encima</b> de $g(x)$ .	$\int_2^3 [x^2 - (8 - x^2)] dx$

c. El área de la región se obtiene como:

$$A = \int_0^2 (8 - 2x^2) dx + \int_2^3 (2x^2 - 8) dx$$

➤ Resolviendo cada integral se tiene:

$$\bullet \int_0^2 (8 - 2x^2) dx = 8x - \frac{2x^3}{3} \Big|_0^2 = 8(2) - \frac{2(2)^3}{3} - \left[ 8(0) - \frac{2(0)^3}{3} \right] = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

$$\bullet \int_2^3 (2x^2 - 8) dx = \frac{2x^3}{3} - 8x \Big|_2^3 = \frac{2(3)^3}{3} - 8(3) - \left[ \frac{2(2)^3}{3} - 8(2) \right] = 18 - 24 - \left[ \frac{16}{3} - 16 \right]$$

$$\int_2^3 (2x^2 - 8) dx = -6 - \left[ -\frac{32}{3} \right] = -6 + \frac{32}{3} = \frac{14}{3}$$

Por lo tanto el área es:

$$A = \frac{32}{3} + \frac{14}{3} = \frac{46}{3} \text{ unidades cuadradas}$$

2. Determine el área de la región R limitada por las curvas:

$$y = f(x) = x^2 - 6x + 8, \quad y = g(x) = x + 2, \quad \text{entre } x = 0 \text{ y } x = 7$$

### Procedimiento

a. La región cuya área se desea hallar se puede ver en la figura 10:

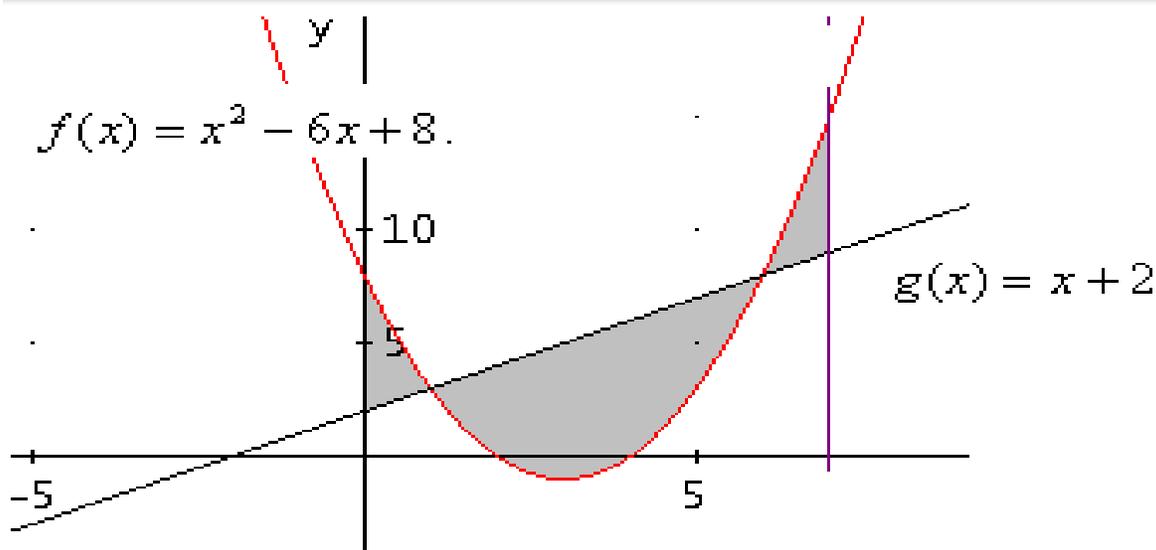


Figura 10

b. Los puntos donde se cortan estas dos funciones se obtienen solucionando la ecuación:

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 - 6x + 8 = x + 2$$

➤ Igualando a cero, simplificando y factorizando:

$$x^2 - 6x + 8 - x - 2 = 0 \rightarrow x^2 - 7x + 6 \rightarrow (x - 6) * (x - 1) = 0$$

$$x - 6 = 0 \rightarrow x = 6$$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

c. De acuerdo a la figura 10, para hallar el área de la región sombreada, se debe plantear:

ENTRE	POSICIÓN	INTEGRAL
$x = 0$ y $x = 1$	La función está <b>por encima</b> del eje $x$	$\int_0^1 [x^2 - 6x + 8 - (x + 2)] dx$
$x = 1$ y $x = 6$	La función está <b>por encima</b> del eje $x$	$+ \int_1^6 [x + 2 - (x^2 - 6x + 8)] dx$
$x = 6$ y $x = 7$	La función está <b>por encima</b> del eje $x$	$+ \int_6^7 [x^2 - 6x + 8 - (x + 2)] dx$

$$A = \int_0^1 [x^2 - 6x + 8 - (x + 2)] dx + \int_1^6 [x + 2 - (x^2 - 6x + 8)] dx + \int_6^7 [x^2 - 6x + 8 - (x + 2)] dx$$

**Actividad:** Realiza las integrales y encuentra el valor del área bajo la curva.

3. Encuentre el área de la región limitada por la curva:

$$y = f(x) = 3x^2 + 10x - 8, \text{ Entre } x = -3 \text{ y } x = 2$$

### Procedimiento

a. La gráfica de esta función es **una parábola que abre hacia arriba** como lo muestra la figura 11.

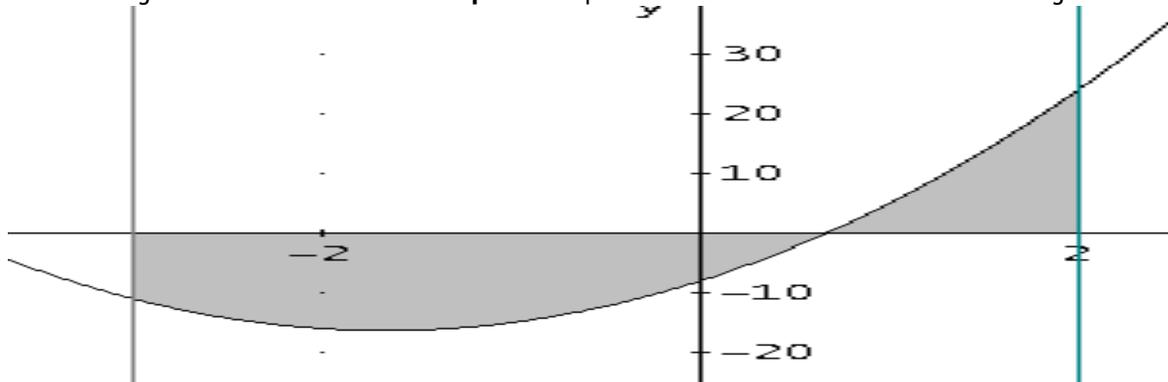


Figura 11.

b. Se encuentran los puntos donde la gráfica corta el eje  $x$ ; se hace  $f(x) = 0$ :

$$f(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 10x - 8 = 0$$

➤ Factorizando e igualando cada factor a cero:

$$\frac{3}{3}(3x^2 + 10x - 8) = 0 \rightarrow \frac{9x^2 + 10(3x) - 24}{3} = 0 \rightarrow \frac{(3x+12)*(3x-2)}{3} = 0 \rightarrow$$

➤  $(x + 4) * (3x - 2) = 0 \rightarrow$

➤  $x + 4 = 0 \rightarrow x = -4$

➤  $3x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3}$

c. Para hallar el área se debe plantear y solucionar:

ENTRE	POSICIÓN	INTEGRAL
$x = -3$ y $x = \frac{2}{3}$	La función está <b>por debajo</b> del eje $x$	$-\int_0^1 (3x^2 + 10x - 8)dx$
$x = \frac{2}{3}$ y $x = 2$	La función está <b>por encima</b> del eje $x$	$+\int_1^6 (3x^2 + 10x - 8)dx$

$$A = -\int_{-3}^{\frac{2}{3}} (3x^2 + 10x - 8)dx + \int_{\frac{2}{3}}^2 (3x^2 + 10x - 8)dx$$

$$A = -\int_{-3}^{\frac{2}{3}} (3x^2 + 10x - 8)dx + \int_{\frac{2}{3}}^2 (3x^2 + 10x - 8)dx$$

**Actividad:** solucionar las integrales definidas que quedan indicadas. (La respuesta del ejercicio es  $A = \frac{1610}{27}$  *unidades cuadradas*)

4. Encuentre el área de la región encerrada por las parábolas (El ejemplo fue tomado de uno de los libros del autor STEWART<sup>12</sup>):

$$y = f(x) = x^2, \quad y = g(x) = 2x - x^2$$

### Procedimiento

- a. La grafica de ambas funciones se puede ver en la figura 12:

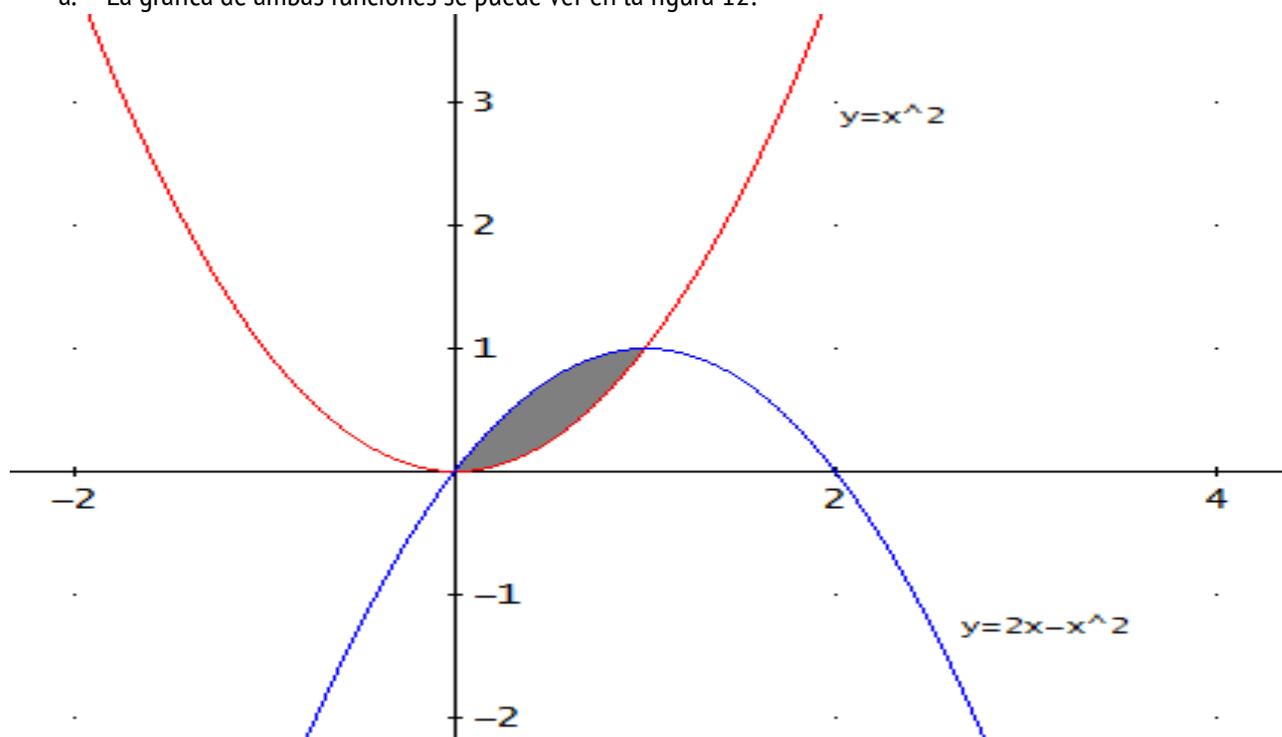


Figura 12.

- b. Se deben encontrar los puntos de corte, para ello se hace:

<sup>12</sup> STEWART, James. Cálculo conceptos y contexto. 1 ed. México: International Thomson Editores, 1999. p. 449.

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 = 2x - x^2$$

- Se iguala a cero, se simplifica, se factoriza y se iguala cada factor a cero:

$$x^2 - 2x + x^2 = 0 \rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \rightarrow 2x * (x - 1) = 0$$

$$2x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

- c. Como la función  $g(x) = 2x - x^2$  está **por encima** de la función  $f(x) = x^2$ , para calcular el área de la región se debe plantear:

$$A = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2) dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx$$

- Resolviendo la integral:

$$A = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \frac{2x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \Big|_0^1 = x^2 - \frac{2x^3}{3} \Big|_0^1$$

$$A = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = (1)^2 - \frac{2(1)^3}{3} - \left[ (0)^2 - \frac{2(0)^3}{3} \right]$$

$$A = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ unidades cuadradas}$$

#### 4.4. Tema 3 Sólidos de Revolución

Un **sólido de revolución** o **volumen de revolución** (es una figura en el espacio, por lo tanto tiene tres dimensiones), es un sólido obtenido al rotar una región del plano (una figura plana) alrededor de una recta ubicada en el mismo plano, las cuales pueden o no cruzarse. Dicha recta se denomina **eje del sólido de revolución**.

- **Volumen del sólido de revolución**
  - Se sabe que el volumen de un sólido es igual a:

$$v = \text{Base} * \text{Ancho} * \text{alto}$$

- El volumen de un cilindro es:

$$v = \pi * r^2 * h \text{ En este caso el radio está determinado por la función.}$$

**Nota:** Existen varios métodos para determinar el volumen de un sólido de revolución. Sólo se analizarán dos de ellos.

- **Método del disco para determinar el volumen de un sólido de revolución.**

Este método se utiliza cuando se hace **girar el área** bajo **una curva** alrededor de **un eje**.<sup>13</sup>

En este caso se obtiene un cilindro, el volumen de un cilindro es:

$$v = \pi * r^2 * h$$

### 1. Quando el eje del sólido es el eje $x$ :

- a. Dada una función  $y = f(x)$ , cuya grafica se puede observar en la en la figura 13

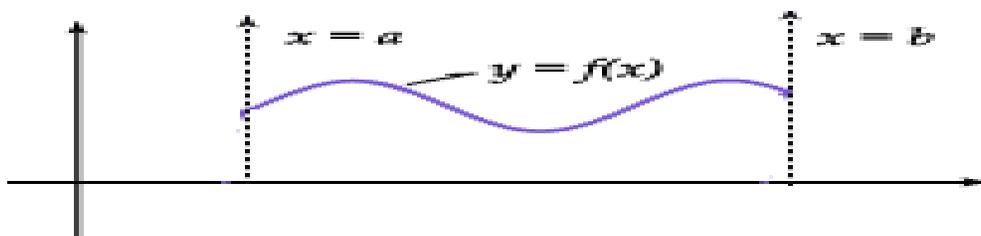


Figura 13 gráfica de la función  $y = f(x)$

- b. Si se hace **girar** la región plana **R** comprendida entre la función  $y = f(x)$  y el eje  $x$  entre  $x = a$  y  $x = b$  Se obtiene **el sólido de revolución** mostrado en la figura 14.

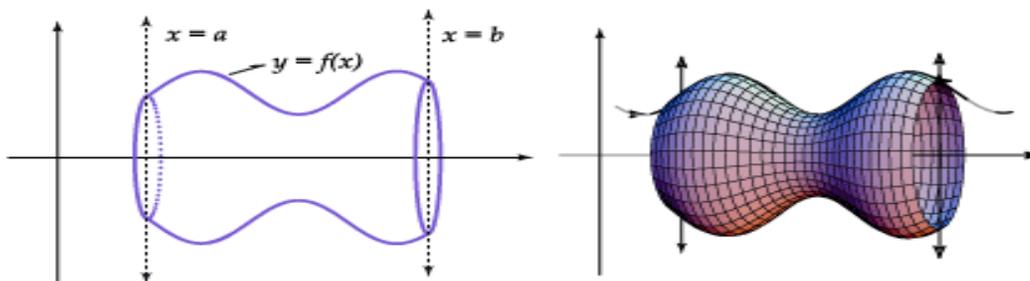


Figura 14.

<sup>13</sup>HERNÁNDEZ, Elsie. Aplicaciones de la integral definida: Volumen de sólidos de revolución. En: Cálculo Diferencial e Integral. [en línea]. [consultado 2 feb. 2010]. Disponible en <<http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/CALCULODIFERENCIAL/curso-elsie/aplicacionesintegral/html/node6.html>>

Sólido de revolución formado al hacer girar la región **R** alrededor del eje  $x$ .

- c. Dividiendo el sólido en  $n$  sólidos iguales de altura  $\Delta x$  como lo muestra la figura 15:

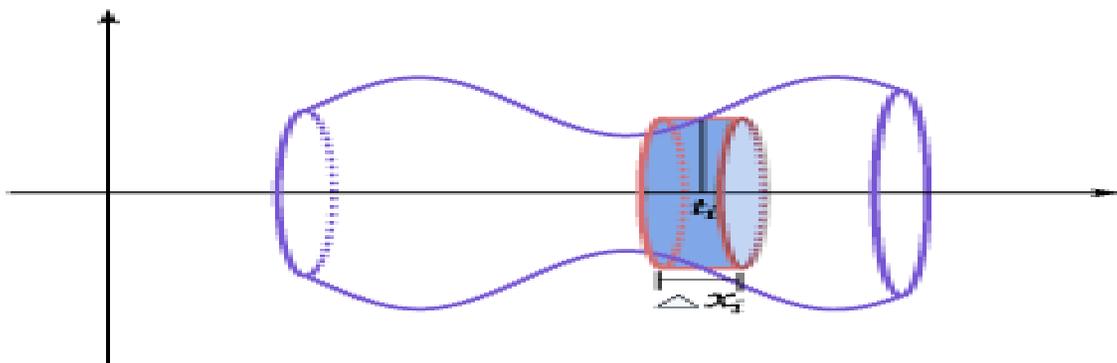


Figura 15

- d. Luego, calculando el volumen de cada sólido y obteniendo el volumen del sólido como la suma de los  $n$  volúmenes, se llega a la expresión que nos determina el Volumen del sólido:

$$v \approx \sum_{i=1}^{\infty} \pi [f(x_i)]^2 \Delta x_i$$

Si se hace que el número de sólidos más pequeños **tienda a infinito** se obtiene **el volumen exacto del sólido**, esto es:

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \pi [f(x_i)]^2 \Delta x_i = \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \sum_a^b \pi [f(x_i)]^2 \Delta x_i$$

La expresión anterior se convierte en:

$$v = \pi \int_a^b [f(x_i)]^2 dx$$

2. Cuando el eje del sólido es el eje  $y$ :

$$v = \pi \int_c^d [f(y_i)]^2 dy$$

**EJERCICIOS DE APRENDIZAJE**

1. Halle el volumen del sólido generado al hacer girar alrededor del eje  $x$  la región **R** formada por la función  $y = x^2$  y el eje  $x$ , entre  $x = 0 \wedge x = 1$ .

**Procedimiento**

a. La figura 16 muestra la región plana y el sólido generado.

**Nota:** Para hacer la gráfica de la región basta con graficar la función  $y = x^2$  entre  $x = 0 \wedge x = 1$

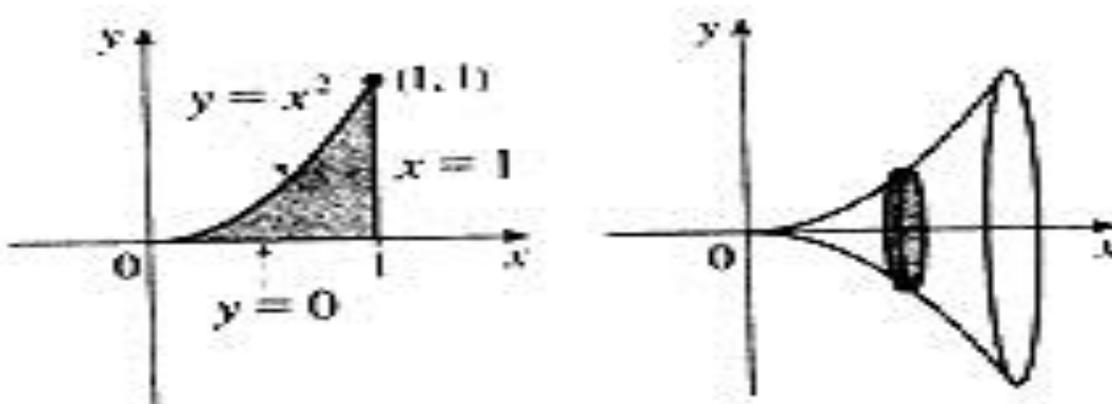


Figura 16

b. Para hallar el volumen se debe plantear:

$$v = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

➤ Reemplazando los valores dados:

$$v = \pi \int_0^1 [x^2]^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi * \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \pi \left( \frac{(1)^5}{5} - \frac{(0)^5}{5} \right) = \frac{\pi}{5}$$

Por lo tanto:

$$v = \frac{\pi}{5} \text{ unidades cúbicas}$$

2. Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje **y** la región **R** limitada por la función

$$x = \sqrt{y} \text{ y el eje } y \text{ entre } y = 0 \wedge y = 4$$

### Procedimiento

a. La figura 17 muestra la gráfica de la región **R** y la gráfica del sólido generado

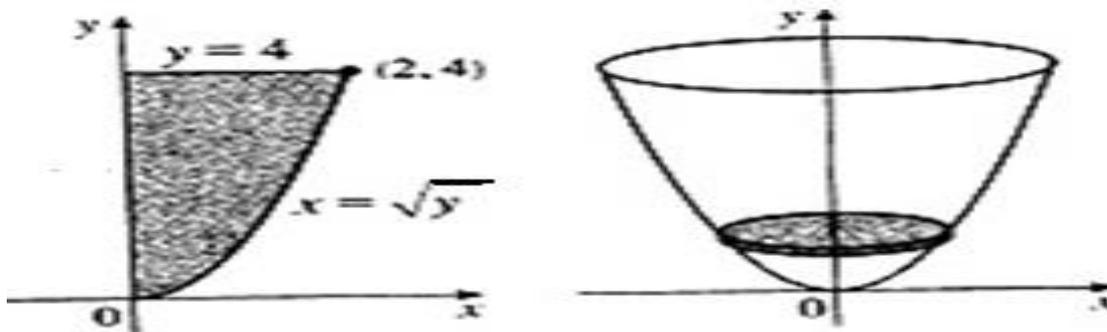


Figura 17

b. Como la región gira en torno al eje **y**, para hallar el volumen se debe plantear:

$$v = \pi \int_c^d [f(y_i)]^2 dy$$

➤ Reemplazando los valores dados:

$$v = \pi \int_c^d [f(y_i)]^2 dy = \pi \int_0^4 [\sqrt{y}]^2 dy = \pi \int_0^4 y dy \rightarrow$$

$$v = \pi * \frac{y^2}{2} \Big|_0^4 = \pi \left[ \frac{(4)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \right] = 8\pi$$

Por lo tanto:

$$v = 8\pi \text{ unidades cúbicas}$$

3. El siguiente ejemplo fue tomado de uno de los libros del autor Purcell<sup>14</sup>

Encuentre el volumen del sólido de revolución obtenido mediante la rotación alrededor del eje  $x$ , de la región limitada por la curva  $y = \sqrt{x}$  y el eje  $x$  entre  $x = 0$  y  $x = 4$ .

**ACTIVIDAD:** Realizar el ejercicio, teniendo en cuenta que el resultado a obtener es:

$$v = \pi \int_0^4 \left[ \sqrt{x} \right]^2 dx = 8\pi$$

**Nota:** Resolverlo y confrontar el proceso realizado con el tutor.

<sup>14</sup> PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 290.

4. El siguiente ejemplo fue tomado de uno de los libros del autor Purcell.<sup>15</sup>

Encuentre el volumen del sólido de revolución que se genera por la rotación alrededor del eje  $y$  de la región limitada por la curva  $y = x^3$  y el eje  $y$  entre  $y = 0$  y  $y = 3$

**ACTIVIDAD:** Realizar el ejercicio, teniendo en cuenta que el resultado a obtener es:

$$v = \pi \int_0^3 \left[ y^{\frac{1}{3}} \right]^2 dy = \frac{3\pi}{5} * 3^{\frac{5}{3}} = 11,7625969 ...$$

- **Método de la arandela para determinar el volumen de un sólido de revolución.**

Este método se utiliza cuando se hace **girar el área** entre **dos curvas** alrededor de **un eje**.

**1. Si la región gira alrededor del eje  $x$ :**

$$v = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx - \pi \int_a^b [g(x)]^2 dx \rightarrow$$

$$v = \pi \left[ \int_a^b \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx \right]$$

Donde la función  $f(x)$  está **por encima** de la función  $g(x)$ .

**2. Si la región gira alrededor del eje  $y$ :**

<sup>15</sup> PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 291.

$$v = \pi \int_a^b [f(y)]^2 dy - \pi \int_a^b [g(y)]^2 dy \rightarrow$$

$$v = \pi \left[ \int_a^b \{ [f(y)]^2 - [g(y)]^2 \} dx \right]$$

Donde la función  $f(y)$  está **más alejada** del eje  $y$  que la función  $g(y)$

## EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Encuentre el volumen del sólido que se genera al girar alrededor del eje  $x$  la región  $R$ , formada por las curvas:  $x = y^2 \wedge y = x^2$

### PROCEDIMIENTO

a. Es conveniente escribir la función  $x = y^2$  despejando la  $y$ , esto es:

$$x = y^2 \rightarrow y^2 = x \rightarrow y = \pm\sqrt{x} \rightarrow \mathbf{y = f(x) = \pm\sqrt{x}}$$

b. La otra función es:

$$\mathbf{y = g(x) = x^2}$$

c. Para determinar **los límites** de la región  $R$ , es necesario encontrar los puntos de corte de ambas funciones, para ello se debe plantear y solucionar la ecuación:

$$f(x) = g(x) \rightarrow \pm\sqrt{x} = x^2$$

- Para eliminar la raíz elevamos en ambos lados al cuadrado, esto es:

$$(\pm\sqrt{x})^2 = (x^2)^2 \rightarrow x = x^4$$

- Igualando a cero, factorizando y haciendo cada factor igual a cero se tiene:

$$x^4 - x = 0 \rightarrow x * (x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0$$

$$x^3 - 1 = 0 \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{1} \rightarrow x = 1$$

- d. La región y el sólido generado se pueden observar en la figura 18 donde solamente se debe graficar la **parte positiva** de la función  $f(x)$ , es decir:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

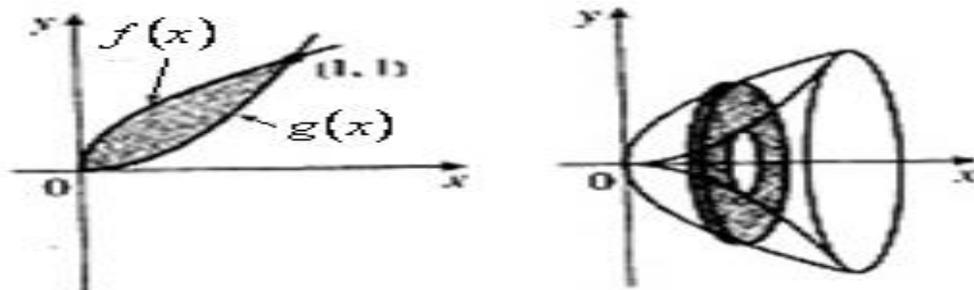


Figura 18

Se observa que la función  $f(x)$  está por encima de la función  $g(x)$ , por lo tanto para hallar el volumen se debe plantear y solucionar:

$$v = \pi \left[ \int_a^b \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx \right]$$

$$v = \pi \left[ \int_a^b \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx \right] \rightarrow \pi \int_0^1 (x - x^4) dx \rightarrow$$

$$v = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \pi \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \pi \left\{ \frac{(1)^2}{2} - \frac{(1)^5}{5} - \left[ \frac{(0)^2}{2} - \frac{(0)^5}{5} \right] \right\}$$

$$v = \pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \pi \left( \frac{5 - 2}{10} \right) = \frac{3}{10} \pi$$

Por lo tanto:

$$v = \frac{3}{10} \pi \text{ unidades cúbicas}$$

2. Determine el volumen del sólido de revolución que se genera al girar alrededor del eje  $x$ , la región limitada por la parábola  $y = x^2 + 1$  y la recta  $y = x + 3$

### Procedimiento

- a. Primero se deben determinar los puntos de corte de estas figuras y para ello se igualan ambas funciones:

$$x^2 + 1 = x + 3$$

➤ Igualando a cero, factorizando y haciendo cada factor igual a cero se tiene:

$$x^2 + 1 = x + 3 \rightarrow x^2 + 1 - x - 3 = 0 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow (x - 2) * (x + 1) = 0$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$$

b. La región y el sólido generado los podemos ver en la figura 19:

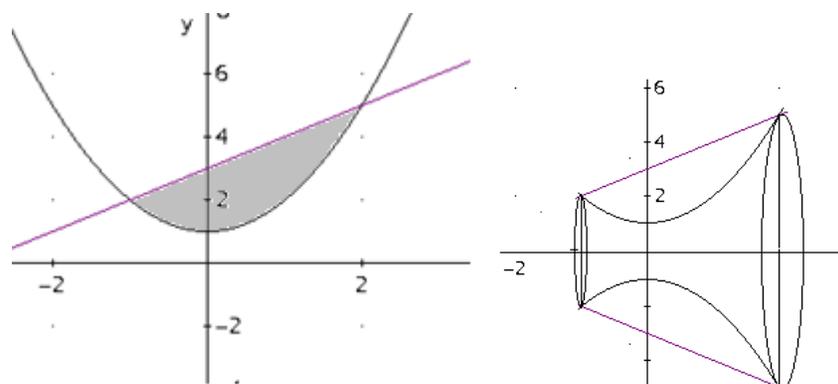


Figura 19

➤ Analizando la gráfica se tiene que:

GRÁFICA	FUNCIÓN	CARACTERÍSTICA
Línea recta	$y = x + 3$	Está <b>más alejada</b> del eje $x$ (o está <b>por encima</b> )
Parábola	$y = x^2 + 1$	Está <b>más cerca</b> del eje $x$ (o está <b>por debajo</b> ).

c. Para hallar el volumen se debe plantear:

$$v = \pi \left[ \int_{-1}^2 \{[x + 3]^2 - [x^2 + 1]^2\} dx \right]$$

➤ **Nota:** Es práctico resolver aparte la expresión:  $[x + 3]^2 - [x^2 + 1]^2$

$$[x + 3]^2 - [x^2 + 1]^2 = x^2 + 6x + 9 - (x^4 + 2x^2 + 1) =$$

$$x^2 + 6x + 9 - x^4 - 2x^2 - 1 = -x^4 - x^2 + 6x + 8$$

Reemplazando:

$$v = \pi \left[ \int_{-1}^2 \{[x + 3]^2 - [x^2 + 1]^2\} dx \right] = \pi \left[ \int_{-1}^2 (-x^4 - x^2 + 6x + 8) dx \right]$$

$$v = \pi \left[ \int_{-1}^2 (-x^4 - x^2 + 6x + 8) dx \right] = \pi \left( -\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x \right) \Big|_{-1}^2$$

$$v = \pi \left[ \left( -\frac{(2)^5}{5} - \frac{(2)^3}{3} + 3(2)^2 + 8(2) \right) - \left( -\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3} + 3(-1)^2 + 8(-1) \right) \right]$$

$$v = \pi \left[ \left( -\frac{32}{5} - \frac{8}{3} + 12 + 16 \right) - \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 3 - 8 \right) \right] \rightarrow v = \frac{117}{5} \text{ unidades cúbicas}$$

3. El siguiente ejemplo fue tomado de uno de los libros del autor Purcell.<sup>16</sup>

<sup>16</sup> PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 291.

Encuentre el volumen del sólido de revolución que se genera por la rotación alrededor del eje  $x$  de la región limitada por las parábolas:  $y = x^2$ ,  $y^2 = 8x$

### Procedimiento

- a. Se encuentran los puntos donde se cortan ambas funciones:

$$y^2 = 8x \rightarrow y = \pm\sqrt{8x}$$

- b. Se determinan los puntos de corte (se igualan las funciones):

$$x^2 = \pm\sqrt{8x}, \text{ elevando al cuadrado: } (x^2)^2 = (\pm\sqrt{8x})^2 \rightarrow x^4 = 8x$$

- Igualando a cero, factorizando y haciendo cada factor igual a cero se tiene:

$$x^4 - 8x = 0 \rightarrow x * (x^3 - 8) = 0$$

$$x = 0$$

$$x^3 - 8 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{8} \rightarrow x = 2$$

**ACTIVIDAD 1:** Realizar la gráfica de la región y el sólido de revolución.

**Nota:** Resolverlo y confrontar el proceso realizado con el tutor.

- c. Para hallar el volumen se debe plantear:

$$v = \pi \left[ \int_0^2 \{ [\pm\sqrt{8x}]^2 - [x^2]^2 \} dx \right]$$

$$V = \pi \int_0^2 \left[ (\pm \sqrt{8x})^2 - (x^2)^2 \right] dx$$

**ACTIVIDAD 2** solucionar la integral, justificando cada uno de los procesos realizados.

La respuesta es:  $v \approx 30,16$  ... **Unidades cúbicas**

5. Realice el ejemplo 3, pero la región gira alrededor del eje  $y$ .

**ACTIVIDAD:** Efectuar el ejercicio justificando cada uno de los procesos realizados.

Respuesta:  $v = \pi \left[ \int_0^4 \left\{ [\pm \sqrt{y}]^2 - \left[ \frac{y^2}{8} \right]^2 \right\} dy \right] = 4,8 \pi \approx 15,07964474 \dots$

R:

### EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. **Integral definida.** Resuelva las siguientes integrales definidas.

- $\int_0^{10} 3x^2 dx$
- $\int_{-2}^5 \frac{x}{x^2 + 4} dx$
- $\int_1^6 \frac{x}{x+4} dx$
- $\int_0^3 e^{3x+1} dx$

## 2. Área bajo una curva y área entre curvas.

- Encuentre el área de la región formada por la curva  $y = 4x^2 - 5x - 6$  y el eje  $x$ , entre  $x = -3$  y  $x = 5$ .
- Encuentre el área de la región  $R$  formada por la curva  $f(x) = 10x^2 - x - 3$  y el eje  $x$  entre  $x = 0$  y  $x = 2$ .
- Encuentre el área de la región formada por la curva  $f(x) = \frac{5x}{x^2 - 16}$  y el eje  $x$ , entre  $x = -2$  y  $x = 3$ .
- Encuentre el área de la región formada por las funciones  $y = 4x^2 \wedge y = 3x$
- Encuentre el área de la región formada por las curvas  $y = 3x^2 - 5x \wedge y = 2x^2 - 6$  entre  $x = -3$  y  $x = 5$ .

## 3. Sólidos de revolución.

- Determine el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer rotar alrededor del eje  $x$  la función  $y = \sqrt{16 - x}$  entre  $x = -4$  y  $x = 4$ .
- Determine el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer rotar alrededor del eje  $x$  la función  $y = e^x$  entre  $x = -1$  y  $x = 3$ .
- Determine el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer rotar alrededor del eje  $x$  la función  $y = x^2 + 4$  entre  $x = -4$  y  $x = 5$ .
- Determine el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer rotar alrededor del eje  $x$  la función  $y = x^2 \wedge y = 3x$  entre  $x = 0$  y  $x = 3$ .
- Determine el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer rotar alrededor del eje  $x$  la función  $y = x + 1 \wedge y = 2x$  entre  $x = 2$  y  $x = 10$ .

4. Use una integral definida para encontrar el área de la región limitada por la curva, el eje  $x$  y los valores de  $x$  dados. En cada caso primero bosqueje la región.

- $y = 2x - 3$ , entre,  $x = 0 \wedge 5$
- $y = x^3 + 2x$ , entre  $x = -2 \wedge x = 2$
- $y = x^2 - 5x - 24$ , entre  $x = -3 \wedge x = 5$

- $y = 5x^2 + 8x - 4$ , entre  $x = -1 \wedge x = 6$
6. Determine el **volumen del sólido de revolución** generado al hacer girar la región dada alrededor del eje indicado.
- $y = \frac{5}{4}x$ , entre  $x = 0 \wedge x = 10$  Gira alrededor del eje  $x$
  - $y = 3x^2$  entre  $x = 2 \wedge x = 3$  Gira alrededor del eje  $x$
  - $y = 5x + 4$  entre  $x = 0 \wedge x = 3$  Gira eje  $x$
7. **Determine el área de la región limitada por la curva o curvas**, el eje  $x$  y los valores de  $x$  dados. En cada caso primero bosqueje la región.
- $y = 7x^2 - 12x - 4$  entre  $x = -2 \wedge x = 8$
  - $y = \sqrt{25 - x}$  entre  $x = -5 \wedge x = 5$
  - $y = \frac{100}{x + 4}$  entre  $x = 1 \wedge x = 6$
  - $y = 5x^2 - 3x \wedge y = x^2 + 6$  entre  $x = -1 \wedge x = 7$
  - $y = 4x^2 \wedge y = 3x^2 + 9$  entre  $x = -2 \wedge x = 5$
8. **Determine el volumen del sólido de revolución** generado al hacer girar la región dada alrededor del eje indicado.
- $y = 2x + 1$  entre  $x = 0 \wedge x = 6$  gira eje  $x$
  - $y = x^2 + 4x$  entre  $x = 0 \wedge x = 3$  gira eje  $x$
  - $y = e^x$  entre  $x = -2 \wedge x = 2$  gira eje  $x$
  - $y = 5x^2 + 1$  entre  $x = -1 \wedge x = 1$  gira eje  $x$
  - $y = \frac{5}{x + 3}$  entre  $x = -1 \wedge x = 2$  gira eje  $x$
  - $y = \sqrt{x^2 + 16}$  entre  $x = -4 \wedge x = 4$  gira eje  $x$
  - $y = \sqrt{25 - x^2} \wedge y = 2$  entre  $x = -3 \wedge x = 4$  gira eje  $x$
  - $y = x \wedge y = x^3$  entre  $x = 0 \wedge x = 1$  gira eje  $x$
  - $y = 2x + 1 \wedge y = 1 - x^2$  entre  $x = 0 \wedge x =$  gira eje  $x$

- $y = x + 4 \wedge y = \sqrt{x^2 - 4}$  entre  $x = 4 \wedge x = 6$  gira eje  $x$

## 5. UNIDAD 3 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

### OBJETIVO GENERAL.

Calcular integrales indefinidas y definidas, usando los métodos de integración por partes e integración por fracciones parciales.

### OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Resolver integrales utilizando integración por partes
- Resolver integrales utilizando fracciones parciales.

#### 5.1. Prueba inicial

1. Efectué la suma (diferencia) de las siguientes fracciones	
OPERACIONES CON FRACCIONARIOS	RESULTADOS (coloque en el paréntesis la letra correspondiente)
a. $\frac{5}{x-3} - \frac{8}{x+4}$	( ) $\frac{4x^2 + 11x - 8}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$
b. $\frac{4x}{x^2+1} - \frac{7}{x}$	( ) $\frac{16x^2 - 83x - 35}{x^3 - 6x^2 - 7x}$
c. $\frac{4}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{8}{(x+1)^3}$	( ) $\frac{-3x + 44}{x^2 + x - 12}$
d. $\frac{5}{x} + \frac{3}{x-7} + \frac{8}{x+1}$	( ) $\frac{45x^2 - 89x + 31}{14x^3 - 41x^2 + 29x - 6}$

$e. \frac{3}{2x-1} + \frac{5}{7x-3} + \frac{1}{x-2}$	$( ) \frac{-(3x^2+7)}{x^3+x}$
2. Halle la <b>primera derivada</b> de las siguientes funciones	
FUNCIONES	PRIMERA DERIVADA (Realizar el proceso en hojas anexas y confrontar con el tutor)
$a. f(x) = (5x-3)^4 * e^{2x-3}$	$f'(x) =$
$b. f(x) = \sqrt{3x^2-6x+5} * (6x-1)$	$f'(x) =$
$c. y = \sin x * \ln x$	$f'(x) =$
$d. f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2+4}\right)$	$f'(x) =$
$e. f(x) = \cos^3(4x-3) * x^2$	$f'(x) =$

## 5.2. Tema 1 Integración por partes

El método de integración por partes permite utilizar la siguiente fórmula:

La siguiente idea de la definición de integración por partes fue tomada del autor LEITHOLD<sup>17</sup>

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Donde tanto  $u$  como  $v$  son expresiones en  $x$ .

- **Demostración de la fórmula para integración por partes**

a. Para demostrar esta fórmula se parte de la **derivada de un producto**:

$$D_x(u * v) = (u * v)' = \frac{du}{dx} * v + \frac{dv}{dx} u \rightarrow d(u * v) = dx * \left( \frac{du}{dx} * v + \frac{dv}{dx} u \right) \rightarrow$$

<sup>17</sup> LEITHOLD, Louis. El Cálculo con Geometría Analítica. 6 ed. México: Harla, 1992. p. 689.

$$d(u * v) = v * du + u * dv$$

b. Se integra a ambos lados de la igualdad:

$$\int d(u * v) = \int (v * du + u * dv) \rightarrow uv = \int v du + \int u dv$$

➤ Despejando  $\int u dv$ , se tiene:

$$\int u dv = uv - \int v du +$$

La fórmula de integración por partes es:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

**Nota:** En la utilización de esta fórmula se busca

1. Que  $u$  sea un **factor simple**, que nos permita una derivada “sencilla”.
2. Que  $dv$  sea un **factor** que permita una integral “sencilla”.

- **Pasos para aplicar la fórmula de integración por partes**

1. A una de las expresiones se le asigna la letra  $u$ .
2. Derivando se obtiene  $\frac{du}{dx}$ ; se despeja  $dx$ .
3. A la expresión restante se le asigna el  $dv$ .
4. Integrando la expresión anterior se obtiene  $v$ .
5. Se reemplaza en la fórmula de integración por partes a:  $uv$  y la  $\int v du$

6. Se efectúa la integral:  $\int v \, du$
7. La constante de integración se coloca después de realizar todas las integrales.

### NOTAS:

1. Este método se utiliza principalmente para integrar expresiones que contengan  $e^u$ ,  $\ln|u|$ , o expresiones trigonométricas, combinadas entre sí o con expresiones polinómicas.
2.  $e^x$  por lo general nunca es  $u$ .
3.  $\ln|x|$  por lo general es  $u$ .

### EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor SOLER FAJARDO.<sup>18</sup> Resolver:  
 $\int \ln|x| \, dx$

#### Procedimiento

- a. Sea  $u = \ln|x| \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$
- b. Sea  $dv = dx \rightarrow \int dv = \int dx \rightarrow v = x$
- c. Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

<sup>18</sup>SOLER FAJARDO, Francisco; NUÑEZ, Reinaldo; ARANDA SILVA, Moisés. Fundamentos de Cálculo con aplicaciones a ciencias Económicas y Administrativas. 2 ed. Bogotá: Ecoe ediciones, 2002. p. 335.

$$\int \ln|x| dx = x * \ln|x| - \int x \frac{1}{x} dx$$

$$\int \ln|x| dx = x * \ln|x| - \int dx = x * \ln|x| - x + C$$

2. El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor LEITHOLD<sup>19</sup>

Encuentre:  $\int x \ln|x| dx$

### Procedimiento

a. Sea  $u = \ln|x| \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

b. Sea  $dv = x dx \rightarrow \int dv = \int x dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

c. Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x \ln|x| dx = \frac{x^2}{2} * \ln|x| - \int \frac{x^2}{2} * \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} * \ln|x| - \int \frac{x}{2} * dx$$

$$\int x \ln|x| dx = \frac{x^2}{2} * \ln|x| - \int \frac{x}{2} * dx = \frac{x^2}{2} * \ln|x| - \frac{1}{2} * \frac{x^{1+1}}{1+1} + C \rightarrow$$

$$\int x \ln|x| dx = \frac{x^2}{2} * \ln|x| - \frac{x^2}{4} + C$$

<sup>19</sup> LEITHOLD, Louis. El Cálculo con Geometría Analítica. 6 ed. México: Harla, 1992. p. 691

3. El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor SOLER FAJARDO<sup>20</sup> Resolver

$$\int x e^x dx$$

**Procedimiento**

- Sea  $u = x \rightarrow du = dx$
- $dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx \rightarrow v = e^x$
- Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C$$

4. El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor LEITHOLD<sup>21</sup>

Resolver:  $\int x^3 e^{x^2} dx$

**Procedimiento**

- Sea:  $u = x^2 \rightarrow du = 2x dx$
- Sea:  $dv = x e^{x^2} \rightarrow v = \int x e^{x^2} dx$

<sup>20</sup> SOLER FAJARDO, Francisco; NUÑEZ, Reinaldo; ARANDA SILVA, Moisés. Fundamentos de Cálculo con aplicaciones a ciencias Económicas y Administrativas. 2 ed. Bogotá: Ecoe ediciones, 2002. p. 335.

<sup>21</sup> LEITHOLD, Louis. El Cálculo con Geometría Analítica. 6 ed. México: Harla, 1992. p. 691

➤ Esta integral se debe resolver por sustitución

$$v = \int x e^{x^2} dx$$

✓ Sea:

$$z = x^2 \rightarrow dz = 2x dx \rightarrow dx = \frac{dz}{2x}$$

✓ La integral queda:

$$v = \int x e^z \frac{dz}{2x} = \frac{1}{2} e^z = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

$$v = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

c. Reemplazando en la fórmula de integración por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \int \frac{1}{2} e^{x^2} dx$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

5. El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor LEITHOLD<sup>22</sup>

Resolver:  $\int x^2 e^x dx$

### Procedimiento

a. Sea  $u = x^2 \rightarrow du = 2x dx$

b.  $dv = e^x dx$ , Integrando a ambos lados se tiene:

$$\int dv = \int e^x dx \rightarrow v = e^x$$

c.  $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$

•  $\int 2x e^x dx$ , se efectúa por partes:

➤ Sea  $u = 2x \rightarrow du = 2 dx$

Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int 2x e^x dx = 2x e^x - \int e^x 2 dx = 2x e^x - 2 e^x + C$$

---

<sup>22</sup> LEITHOLD, Louis. El Cálculo con Geometría Analítica. 6 ed. México: Harla, 1992. p. 691

6. El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor PURCELL<sup>23</sup>, resolver:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$$

### Procedimiento

a. Sea  $u = x^2 \rightarrow du = 2x \, dx$

b.  $dv = \operatorname{sen} x \, dx \rightarrow v = -\operatorname{cos} x$

c.  $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = x^2(-\operatorname{cos} x) - \int(-\operatorname{cos} x) 2x \, dx \rightarrow$

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \operatorname{cos} x + 2 \int x \operatorname{cos} x \, dx **$$

➤  $\int x \operatorname{cos} x \, dx$  Hay que efectuarla por partes:

➤ Sea  $u = x \rightarrow du = dx$  y  $dv = \operatorname{cos} x \, dx \rightarrow v = \operatorname{sen} x$

➤ Reemplazando en la fórmula de integración por partes:  $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$$\int x \operatorname{cos} x \, dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx = x \operatorname{sen} x - (-\operatorname{cos} x)$$

$$\int x \operatorname{cos} x \, dx = x \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x$$

<sup>23</sup> PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 404.

d. Reemplazando en:\*\* se tiene:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx **$$

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + 2(x \operatorname{sen} x + \cos x) + C$$

➤ Efectuando las operaciones indicadas:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C$$

7. El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor HAEUSSLER<sup>24</sup>

Resolver:  $\int \frac{\ln|x|}{\sqrt{x}} \, dx$

### Procedimiento

a. Sea  $u = \ln|x| \rightarrow du = \frac{1}{x} \, dx$

b.  $dv = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \, dx \rightarrow v = 2x^{\frac{1}{2}}$

c.  $\int \frac{\ln|x|}{\sqrt{x}} \, dx = \ln|x| * 2x^{\frac{1}{2}} - \int 2x^{\frac{1}{2}} * \frac{1}{x} \, dx \rightarrow$  Efectuando las operaciones indicadas:

Recuerde que:  $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} = x^{\frac{1}{2}-1} = x^{-\frac{1}{2}}$ , entonces

<sup>24</sup> HAEUSSLER. Ernest. F. Jr; RICHARD S. Paul. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. 8 ed. México: Prentice Hall, 1997. p. 798.

$$\int \frac{\ln|x|}{\sqrt{x}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} * \ln|x| - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} * \ln|x| - 2 - 4x^{\frac{1}{2}} + c$$

$$\int \frac{\ln|x|}{\sqrt{x}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} * \ln|x| - 2 - 4\sqrt{x} + c$$

8. El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor PURCELL<sup>25</sup>  
Resolver:

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx$$

### Procedimiento

a. Sea  $u = \operatorname{sen} x \rightarrow du = \operatorname{cos} x dx$

b.  $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

c.  $\int e^x \operatorname{sen} x dx = \operatorname{sen} x * e^x - \int e^x \operatorname{cos} x dx^{**}$

➤  $\int e^x \operatorname{cos} x dx$  Hay que efectuarla por partes:

➤ Sea  $u = \operatorname{cos} x \rightarrow du = -\operatorname{sen} x dx$  y  $dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$

➤ Reemplazando en la fórmula de integración por partes:  $\int u dv = uv - \int v du$

$$\int e^x \operatorname{cos} x dx = \operatorname{cos} x * e^x - \int e^x (-\operatorname{sen} x) dx$$

<sup>25</sup> PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 404.

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x * \cos x + \int e^x \sen x \, dx$$

a. Reemplazando en:\*\* se tiene:

$$\int e^x \sen x \, dx = \sen x * e^x - [e^x * \cos x + \int e^x \sen x \, dx]$$

$$\int e^x \sen x \, dx = e^x * \sen x - e^x * \cos x - \int e^x \sen x \, dx$$

**Nota:** Para solucionar este ejercicio, hay que despejar la integral  $\int e^x \sen x \, dx$

$$\int e^x \sen x \, dx + \int e^x \sen x \, dx = e^x * \sen x - e^x * \cos x \rightarrow$$

$$2 \int e^x \sen x \, dx = e^x * \sen x - e^x * \cos x \rightarrow$$

$$\int e^x \sen x \, dx = \frac{1}{2} (e^x * \sen x - e^x * \cos x) \rightarrow$$

$$\int e^x \sen x \, dx = \frac{1}{2} e^x * \sen x - \frac{1}{2} e^x * \cos x + C$$

9. El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor HAEUSSLER<sup>26</sup>

Resolver:  $\int x^2 e^{2x+1} \, dx$ \*\*

<sup>26</sup> HAEUSSLER. Ernest. F. Jr; RICHARD S. Paul. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. 8 ed. México: Prentice Hall, 1997. p. 800.

## Procedimiento

a. Sea  $u = x^2 \rightarrow du = 2x dx$

b.  $dv = e^{2x+1} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x+1}$

c.  $\int x^2 e^{2x+1} dx = x^2 * \frac{1}{2} e^{2x+1} - \int \frac{1}{2} e^{2x+1} 2x dx$  Simplificando el 2, se tiene:

$$\int x^2 e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x+1} - \int e^{2x+1} x dx$$

➤  $\int e^{2x+1} x dx$  Hay que efectuarla por partes:

➤ Sea  $u = x \rightarrow du = dx$  y  $dv = e^{2x+1} dx \rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x+1}$

➤ Reemplazando en la fórmula de integración por partes:  $\int u dv = uv - \int v du$

$$\int e^{2x+1} x dx = \frac{1}{2} e^{2x+1} * x - \int \frac{1}{2} e^{2x+1} dx$$

$$\int e^{2x+1} x dx = \frac{1}{2} x e^{2x+1} - \frac{1}{2} * \frac{1}{2} e^{2x+1} = \frac{1}{2} x e^{2x+1} - \frac{1}{4} e^{2x+1}$$

Reemplazando en: **\*\***  $\int x^2 e^{2x+1} dx$ , se tiene:

$$\int x^2 e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} x^2 * e^{2x+1} - \left( \frac{1}{2} x e^{2x+1} - \frac{1}{4} e^{2x+1} \right) + C$$

Eliminando el paréntesis:

$$\int x^2 e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} x^2 * e^{2x+1} - \frac{1}{2} x e^{2x+1} + \frac{1}{4} e^{2x+1} + C$$

10. Resolver:  $\int x^2 \cos(2x) dx$ \*\*

### Procedimiento

a. Sea  $u = x^2 \rightarrow du = 2x dx$

b.  $dv = \cos(2x) \rightarrow v = \frac{1}{2} \text{sen}(2x)$

c.  $\int x^2 \cos(2x) dx = x^2 * \text{sen}(2x) - \int \frac{1}{2} \text{sen}(2x) 2x dx$

➤ Simplificando el 2, se tiene:

$$\int x^2 \cos(2x) dx = x^2 * \text{sen}(2x) - \int x \text{sen}(2x) x dx$$

➤  $\int \text{sen}(2x) x dx$  Hay que efectuarla por partes:

➤ Sea  $u = x \rightarrow du = dx$  y  $dv = \text{sen}(2x) dx \rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos(2x)$

➤ Reemplazando en la fórmula de integración por partes:  $\int u dv = uv - \int v du$

$$\int x \operatorname{sen}(2x) dx = -\frac{1}{2}x \cos(2x) - \int -\frac{1}{2} \cos(2x) dx = -\frac{1}{2}x \cos(2x) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x)$$

Reemplazando en: **\*\***  $\int x^2 \cos(2x) dx$ , se tiene:

$$\int x^2 \cos(2x) dx = \frac{1}{2}x^2 * \operatorname{sen}(2x) - \left( -\frac{1}{2}x \cos(2x) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) \right) + C$$

Eliminando el paréntesis:

$$\int x^2 \cos(2x) dx = \frac{1}{2}x^2 * \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{2}x \cos(2x) - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + C$$

11. Resolver:  $\int x^3 \ln x^2 dx$

### Procedimiento

- a. Aplicando las propiedades de los logaritmos, la integral también se puede expresar:

$$\int x^3 \ln x^2 dx = \int x^3 * 2 \ln x dx = 2 \int x^3 \ln x dx$$

b. Sea  $u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

c.  $dv = x^3 \rightarrow v = \frac{x^4}{4}$

d. Reemplazando en la fórmula de integración por partes:  $\int u dv = uv - \int v du$

$$\triangleright \int x^3 \ln x^2 dx = 2 \left( \frac{x^4}{4} * \ln x - \int \frac{x^4}{4} * \frac{1}{x} dx \right), \text{ Simplificando } x:$$

$$\triangleright \int x^3 \ln x^2 dx = 2 \left( \frac{x^4}{4} * \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx \right)$$

$$\triangleright \int x^3 \ln x^2 dx = 2 \left( \frac{x^4}{4} * \ln x - \frac{1}{16} x^4 \right) + C, \text{ Simplificando por 2:}$$

$$\triangleright \int x^3 \ln x^2 dx = \frac{x^4}{2} * \ln x - \frac{1}{8} x^4 + C$$

12. Dada la región limitada por la curva:  $y = f(x) = \ln x$  y el eje  $x$  entre

$x = 1$  y  $x = e$ . Determine:

- El área de la región.
- El volumen del sólido generado al rotar la región alrededor del eje  $x$ .

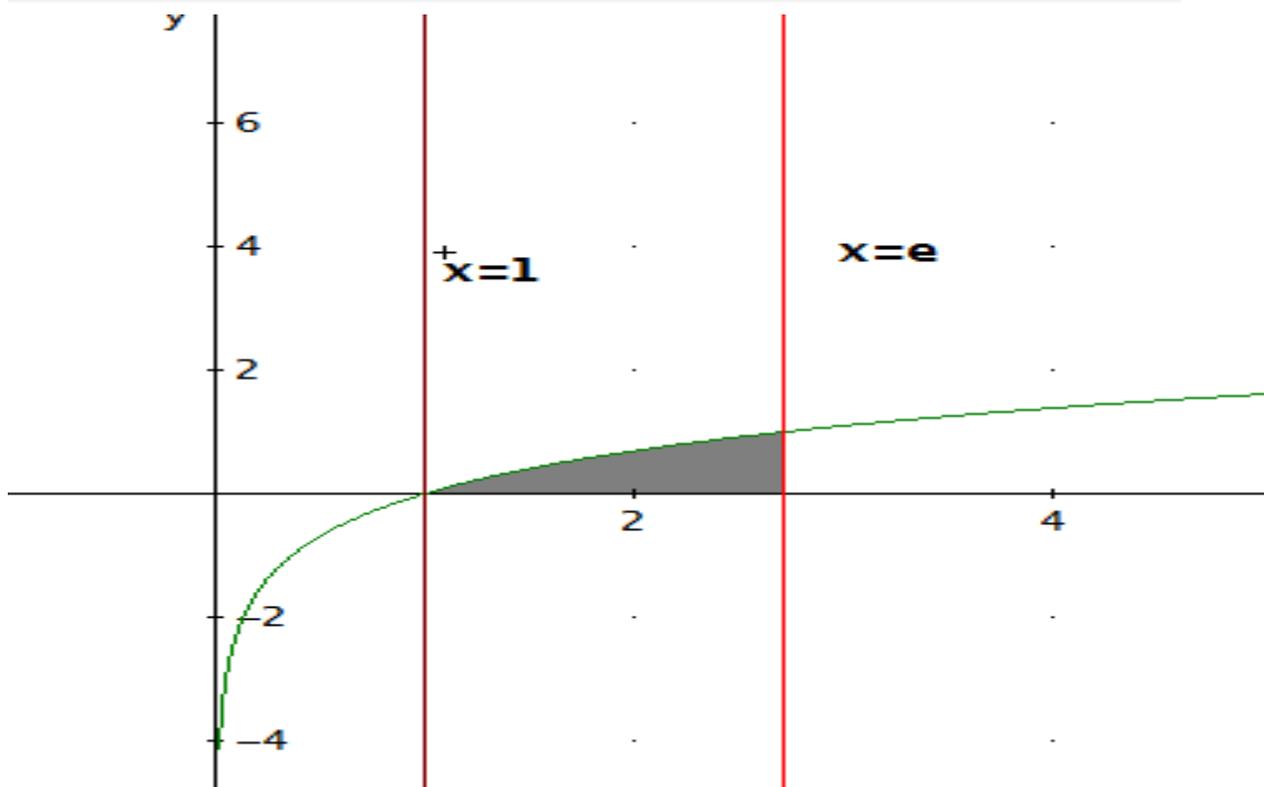
### Procedimiento

- Los puntos para la gráfica son los mostrados en la tabla.

**Nota:** Recuerde que para calcular  $\ln x$ ,  $x > 0$

$x$	$y = f(x) = \ln x$	$y$
1	$\ln 1$	0
1.5	$\ln 1.5$	0.4
2	$\ln 2$	0.7
2.5	$\ln 2.5$	0.91
$e$	$\ln e$	1

- La gráfica de la región se muestra en la siguiente figura:



Grafica de  $y = f(x) = \ln x$

b. Se calcula el área de la región:

$$A = \int_1^e \ln x \, dx$$

- Se hace  $u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$
- $dv = dx \rightarrow v = x$

c. Reemplazando en:  $\int u dv = uv - \int v du$

$$A = \int_1^e \ln x \, dx = x \ln x - \int x * \frac{1}{x} dx, \text{ Simplificando } x:$$

$$A = \int_1^e \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x \Big|_1^e \rightarrow$$

$$A = \int_1^e \ln x \, dx = e * \ln e - e - [1 * \ln 1 - 1] \rightarrow$$

$$A = \int_1^e \ln x \, dx = e - e - 1 * \ln 1 + 1 \rightarrow$$

Recuerde que:  $\ln e = 1$ ,  $\ln 1 = 0$  realizando las operaciones indicadas:

$$A = \int_1^e \ln x \, dx = 1 \text{ unidades cuadradas}$$

d. Se calcula el volumen del sólido generado al rotar la región alrededor del eje  $x$ :

$$V = \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx$$

➤ Sea  $u = (\ln x)^2 \rightarrow du = 2 \ln x * \frac{1}{x} dx$

➤  $dv = dx \rightarrow v = x$

➤ Reemplazando:

$$V = \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx = \pi \left[ x * (\ln x)^2 - \int x * 2 \ln x * \frac{1}{x} dx \right]$$

$$V = \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx = \pi [x * (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x] \Big|_1^e$$

$$V = \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx = \pi(e - 2) \text{ unidades cuadradas.}$$

**Actividad:** Realice los reemplazos y verifique la respuesta.

---

### 5.3. Tema 2 Integración por Fracciones Parciales

Una expresión racional es una expresión de la forma:

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Cuando se efectúa una integral de la forma  $\int \frac{P(x)}{Q(x)}$ , pueden suceder tres casos:

**A.** Que la integral se pueda efectuar directamente por el **método de sustitución** o **cambio de variable** (esta forma ya se ha realizado en capítulos anteriores).

## EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Resolver:  $\int \frac{2x+1}{x^2+x-7} dx$

### Procedimiento

a. Sea  $w = x^2 + x - 7 \rightarrow$

$$\frac{dw}{dx} = 2x + 1 \rightarrow dx = \frac{dw}{2x + 1}$$

b. Reemplazando en  $\int \frac{2x+1}{x^2+x-7} dx$ , se tiene:

$\int \frac{2x+1}{w} * \frac{dw}{2x+1}$ , Simplificando  $2x + 1$ , se tiene:

$$\int \frac{dw}{w} = \ln|w| + C = \ln|x^2 + x - 7| + C$$

---

2. Resolver:  $\int \frac{2x}{(x^2+10)^5} dx$

### Procedimiento

a.  $v = x^2 + 10 \rightarrow$

$$\frac{dv}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{dv}{2x}$$

b. Reemplazando en  $\int \frac{2x}{(x^2+10)^5} dx$ , se tiene:

$\int \frac{2x}{(v)^5} * \frac{dv}{2x}$ , Simplificando  $2x$ :

$$\int v^{-5} dv = \frac{v^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{v^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4v^4} + C = -\frac{1}{4(x^2 + 10)^4} + C$$

- B. Puede suceder también que haya que efectuar primero la división.  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ . Esta división es posible si **la fracción es impropia**, es decir, el grado del polinomio P(x) **es mayor** que el grado del polinomio Q(x). Este tipo de integral ya fue trabajado en unidades anteriores.

**Actividad:** Realizar un repaso del tema y de algunos ejercicios del tema.

- C. La otra posibilidad sería descomponer,  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ . En una suma de **fracciones simples** llamada **fracciones parciales**. Esto es posible **cuando la fracción es propia**, es decir, el grado del polinomio P(x) **es menor** que el grado del polinomio Q(x).

**Nota:** Puede suceder que para efectuar una integral de este tipo, sea necesario combinar con el método anterior, es decir, hacer primero la división y luego descomponer en fracciones parciales.

Antes de desarrollar el método, se analizará un ejemplo de suma de fracciones, un proceso contrario al método que se va a desarrollar.

- a. Efectuar la siguiente suma de fracciones:

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1}$$

Se halla el **mínimo común múltiplo (m.c.m.)**: está dado por  $(x-1) * (x+1)$

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{2 * (x+1) + 3 * (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x+2+3x-3}{(x-1)(x+1)} = \frac{5x-1}{x^2-1}$$

b. Ahora, se pide determinar la integral del resultado anterior, es decir hay que obtener:  $\int \frac{5x-1}{x^2-1} dx$

**Nota:** Esta integral no se puede efectuar por ninguno de los métodos conocidos hasta el momento, por lo tanto se debe descomponer la fracción en **una suma de fracciones** más simples y así poder determinar la integral de una expresión equivalente.

$$\int \frac{5x-1}{x^2-1} dx = \int \left[ \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} \right] dx = \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{3}{x+1} dx$$

$$\int \frac{5x-1}{x^2-1} dx = 2 \ln|x-1| + 3 \ln|x+1| + C$$

El ejercicio anterior se realizó directamente porque se conocía el resultado de las fracciones parciales, a continuación se explicará el método para descomponer una fracción en fracciones parciales.

➤ **MÉTODO PARA DESCOMPONER UNA FRACCIÓN EN FRACCIONES PARCIALES.**

Para descomponer una expresión  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , en **fracciones parciales**, depende de la naturaleza del polinomio  $Q(x)$  y se debe cumplir además que **el grado** del polinomio  $P(x)$  debe ser **menor** que el grado del polinomio  $Q(x)$ , se presentan cuatro casos.

**CASO1:** Cuando el polinomio  $Q(x)$  se puede factorizar como un producto de factores lineales distintos:

$$Q(x) = (x-a) * (x-b) * (x-c)$$

Entonces la fracción se puede escribir como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots$$

## EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Resolver:  $\int \frac{5x-1}{x^2-1} dx$

### Procedimiento

- a. Como no se puede efectuar esta integral directamente, se descompone la fracción en fracciones parciales:

➤ Se factoriza  $Q(x)$ , si no está factorizado:

$$Q(x) = x^2 - 1 = (x + 1) * (x - 1)$$

➤ Entonces:  $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5x-1}{(x+1)*(x-1)}$

- b. Se escribe la fracción como una suma de fracciones, utilizando todos los factores de  $Q(x)$  y asignando letras mayúsculas en el numerador (A, B, C, ... tantos factores haya en el denominador):

$$\frac{5x - 1}{(x + 1) * (x - 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1}$$

**Nota:** Se encuentran los valores A y B

- c. Se efectúa la suma indicada:

$$\frac{5x - 1}{(x + 1) * (x - 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} = \frac{A * (x - 1) + B * (x + 1)}{(x + 1) * (x - 1)}$$

- Para eliminar los denominadores se multiplica toda la expresión por el m.c.m. de los denominadores, esto es:

$$\frac{5x - 1}{(x + 1) * (x - 1)} * (x + 1) * (x - 1) = \frac{A * (x - 1) + B * (x + 1)}{(x + 1) * (x - 1)} * (x + 1) * (x - 1)$$

- Simplificando queda:

$$5x - 1 = A * (x - 1) + B * (x + 1)$$

- d. Como los denominadores son iguales, también lo son los numeradores (los denominadores desaparecen). Igualando los numeradores, resulta una identidad:

$$5x - 1 = A * (x - 1) + B * (x + 1)$$

- e. Se asignan los valores apropiados a  $x$ , se reemplazan en la identidad; de esta manera se halla el valor de cada constante:

- Si  $x = 1 \rightarrow 5(1) - 1 = A(1 - 1) + B(1 + 1) \rightarrow 4 = 2B \rightarrow B = 2$
- Si  $x = -1 \rightarrow 5(-1) - 1 = A(-1 - 1) + B(1 - 1) \rightarrow -6 = -2A \rightarrow A = 3$

- f. Reemplazando los valores obtenidos en el paso anterior en  $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$  y efectuando la integral por alguno de los métodos conocidos:

$$\int \frac{5x - 1}{(x + 1) * (x - 1)} dx = \int \frac{3}{x + 1} + \frac{2}{x - 1} dx = 3 \ln|x + 1| + 2 \ln|x - 1| + C$$

2. Resolver:  $\int \frac{3x-1}{x^2-x-6} dx$

### Procedimiento

a. Se factoriza el denominador:

$$\frac{3x-1}{x^2-x-6} = \frac{3x-1}{(x-3) * (x+2)}$$

b. Se reemplaza en función de A y B (Son dos factores en el denominador):

$$\frac{3x-1}{(x-3) * (x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} = \frac{A * (x+2) + B * (x-3)}{(x-3) * (x+2)}$$

c. Simplificando:  $(x-3) * (x+2)$ , se tiene que:

$$3x-1 = A * (x+2) + B * (x-3)$$

d. Se asignan los valores apropiados a  $x$ , se reemplazan en la identidad; de esta manera se halla el valor de cada constante:

➤ Si  $x = -2 \rightarrow 3(-2) + 1 = A(-2 + 2) + B(-2 - 3) \rightarrow -7 = -5B \rightarrow B = \frac{7}{5}$

➤ Si  $x = 3 \rightarrow 3(3) - 1 = A(3 + 2) + B(3 - 3) \rightarrow 8 = 5A \rightarrow A = \frac{8}{5}$

e. Por lo tanto, solucionar:  $\int \frac{3x-1}{x^2-x-6} dx$  es lo mismo que resolver:

$$\int \left( \frac{\frac{8}{5}}{x-3} + \frac{\frac{7}{5}}{x+2} \right) dx = \frac{8}{5} \int \frac{1}{x-3} dx + \frac{7}{5} \int \frac{1}{x+2} dx \rightarrow$$

$$\frac{8}{5} \int \frac{1}{x-3} dx + \frac{7}{5} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{8}{5} \ln|x-3| + \frac{7}{5} \ln|x+2| + C$$

3. El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor PURCELL<sup>27</sup>, resolver:

$$\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} dx$$

### Procedimiento

a. Se factoriza el denominador:

$$\frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} = \frac{5x+3}{x(x^2-2x-3)} = \frac{5x+3}{x*(x-3)*(x+1)}$$

b. Se reemplaza en función de A, B y C (Son tres factores en el denominador):

$$\frac{5x+3}{x*(x-3)*(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1} \rightarrow$$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1} = \frac{A*(x-3)*(x+1) + B*x*(x+1) + C*x*(x-3)}{x*(x-3)*(x+1)}$$

27 PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 441

c. Simplificando:  $x * (x - 3) * (x + 2)$ , se tiene que:

$$5x + 3 = A * (x - 3) * (x + 1) + B * x * (x + 1) + C * x * (x - 3)$$

d. Se asignan los valores apropiados a  $x$ , se reemplazan en la identidad; de esta manera se halla el valor de cada constante:

➤ Si  $x = 0 \rightarrow 5 * 0 + 3 = A(0 - 3) * (0 + 1) + B * 0 * (0 + 1) + C * 0 * (0 - 3) \rightarrow 3 = -3A \rightarrow$

$$A = \frac{-3}{3} \rightarrow A = -1$$

➤ Si  $x = 3 \rightarrow 5(3) + 3 = A(3 - 3) * (3 + 1) + B * 3(3 + 1) + C * 3 * (3 - 3) \rightarrow$

$$18 = 12B \rightarrow B = \frac{18}{12} \rightarrow B = \frac{3}{2}$$

➤  $x = -1 \rightarrow 5 * (-1) + 3 = A(-1 - 3) * (-1 + 1) + B * (-1) * (-1 + 1) + C * (-1) * (-1 - 3)$

$$-2 = 4C \rightarrow C = \frac{-2}{4} \rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

➤ Por lo tanto, solucionar:

$$\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} dx \text{ Es lo mismo que resolver: } \int \left( \frac{-1}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x-3} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \right)$$

$$\int \left( \frac{-1}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x-3} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} \right) dx = - \int \frac{1}{x} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-3} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx \rightarrow$$

$$- \int \frac{1}{x} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-3} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx = -\ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x-3| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$$

**CASO 2:** Cuando  $Q(x)$  se puede factorizar como un **producto de factores lineales repetidos**:

Si  $Q(x) = (x - a)^n$ ; entonces:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)^3} + \dots$$

**Nota:** El procedimiento para hallar las constantes A, B y C es similar al descrito en el caso anterior.

## EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Resolver:  $\int \frac{2x+5}{x^2+6x+9} dx$

### Procedimiento

a. Se factoriza el denominador:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3) * (x + 3) = (x + 3)^2$$

b. Se reemplaza en función de A y B (Son dos factores en el denominador):

$$\frac{2x+5}{x^2+6x+9} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2}, \text{ Efectuando la suma de fracciones indicada:}$$

$$\frac{2x + 5}{x^2 + 6x + 9} = \frac{A * (x + 3) + B}{(x + 3)^2}$$

c. Igualando los numeradores queda:

$$2x + 5 = A * (x + 3) + B$$

d. Se asignan los valores apropiados a  $x$ , se reemplazan en la identidad; de esta manera se halla el valor de cada constante:

$$\text{Si } x = -3 \rightarrow 2 * (-3) + 5 = A * (-3 + 3) + B \rightarrow B = -1$$

➤ Se reemplaza el valor de B y se da otro valor a  $x$ :

$$\text{Si } x = 0 \rightarrow 2 * (0) + 5 = A * (0 + 3) - 1 \rightarrow 5 = 3A - 1 \rightarrow 3A = 5 + 1 \rightarrow A = \frac{6}{3} \rightarrow A = 2$$

➤ Por lo tanto:

$$\frac{2x + 5}{x^2 + 6x + 9} = \frac{2}{x + 3} - \frac{1}{(x + 3)^2}$$

➤ Por lo tanto, solucionar:

$$\int \frac{2x+5}{x^2+6x+9} dx \text{ Es lo mismo que resolver: } \int \left( \frac{2}{x+3} - \frac{1}{(x+3)^2} \right)$$

$$\int \frac{2x + 5}{x^2 + 6x + 9} dx = \int \frac{2}{x + 3} dx - \int \frac{1}{(x + 3)^2} dx = 2 \ln|x + 3| + \frac{1}{x + 3} + C$$

**PISTA DE APRENDIZAJE.**

**Tenga presente:**  $\int \frac{1}{(x+3)^2} dx = \int \frac{1}{u^2} du = \int u^{-2} du = \frac{u^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{u}$

Reemplazando:  $\int \frac{1}{(x+3)^2} dx = -\frac{1}{x+3}$

2. Resolver:

$$\int \frac{3x^2 - 8x + 13}{x^3 + x^2 - 5x + 3} dx$$

**Procedimiento**

**Actividad:**

a. Se debe comprobar que:

$$\int \frac{3x^2 - 8x + 13}{x^3 + x^2 - 5x + 3} dx = \int \frac{3x^2 - 8x + 13}{(x + 3) * (x - 1)^2} dx$$

Además que: **A = 4, B = -1, C = 2**

b. Se debe terminar el ejercicio hasta resolver las integrales resultantes, justificando cada uno de los procesos realizados y confrontándolo con el tutor.

4. Resolver:  $\int \frac{x}{x^2-6x+9} dx$

Además que: **A = 1, B = 3**

**Actividad:** Se realizar el ejercicio hasta resolver las integrales resultantes, justificando cada uno de los procesos realizados y confrontándolo con el tutor.

---

5. Resolver:  $\int \frac{2x^2-11x+18}{x^2-6x+9} dx$

**Actividad:** Se realizar el ejercicio hasta resolver las integrales resultantes, justificando cada uno de los procesos realizados y confrontándolo con el tutor.

---

**CASO 3:** Cuando  $Q(x)$  se puede factorizar como un **producto de factores cuadráticos irreducibles** distintos:

$$Q(x) = (ax^2 + bx + c) * (dx^2 + ex + f) * (gx^2 + hx + i) * ...$$

Entonces  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  se puede descomponer en:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} + \frac{Cx + D}{dx^2 + ex + f} + \frac{Ex + F}{gx^2 + hx + i} + \dots$$

**CASO 4:** Cuando  $Q(x)$  se puede factorizar como un producto de factores cuadráticos repetidos:

$$Q(x) = (ax^2 + bx + c)^n$$

Entonces:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} + \frac{Cx + D}{(ax^2 + bx + c)^2} + \frac{Ex + F}{(ax^2 + bx + c)^3} + \dots$$

## EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor HEUSSLR<sup>28</sup>

Resolver:  $\int \frac{-2x-4}{x^3+x^2+x} dx$

### Procedimiento

a. Se factoriza el denominador:

$$x * (x^2 + x + 1)$$

➤ Los factores corresponden: a **un factor lineal** y a **un factor cuadrático**, entonces, la fracción queda:

$$\frac{-2x-4}{x*(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \text{ ***} \rightarrow \text{Realizando la suma de fracciones indicada:}$$

$$\frac{-2x-4}{x*(x^2+x+1)} = \frac{A*(x^2+x+1) + (Bx+C)*x}{x*(x^2+x+1)}$$

<sup>28</sup> HAEUSSLER. Ernest. F. Jr; RICHARD S. Paul. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. 8 ed. México: Prentice Hall, 1997. p. 806.

➤ Eliminando los denominadores:

$$-2x - 4 = A * (x^2 + x + 1) + (Bx + C) * x$$

b. Se asignan los valores apropiados a  $x$ , se reemplazan en la identidad; de esta manera se halla el valor de cada constante:

➤ Si  $x = 0 \rightarrow -2(0) - 4 = A[(0)^2 + (0) + 1] + [B(0) + C(0)] * 1$   
$$-4 = A \rightarrow A = -4$$

➤ Como el factor  $x^2 + x + 1$  no da **cero** en los reales, se deben dar dos valores a  $x$  y al mismo tiempo reemplazar el valor  $A = -4$  resultando un sistema de ecuaciones  $2 \times 2$ .

Si  $x = 1$  y  $A = -4 \rightarrow -2(1) - 4 = -4[(1)^2 + (1) + 1] + [B(1) + C] * 1$   
$$-6 = -12 + B + C \rightarrow B + C = 6 \text{ Ecuación 1}$$

Si  $x = 2$  y  $A = -4 \rightarrow -2(2) - 4 = -4[(2)^2 + (2) + 1] + [B(2) + C] * 2$   
$$-8 = -28 + 4B + 2C \rightarrow 4B + 2C = 20 \text{ Ecuación 2}$$

c. Queda planteado un sistema de ecuaciones  $2 \times 2$  y la forma más práctica de efectuarlo es utilizando el sistema de determinantes:

#### PISTA DE APRENDIZAJE

**Traer a la memoria:** para solucionar un sistema de ecuaciones lineales  $2 \times 2$ :

1. Se toman los coeficientes de cada una de las variables y se forma una matriz de orden 2.
2. Esta matriz se iguala al término independiente.
3. Para encontrar cada variable su lugar es ocupado por el término independiente y se coloca de denominador para cada una de ellas la matriz de orden 2 obtenida inicialmente, esto es, en forma general:

Sean:

$$ax + by = m$$

$$cx + dy = n$$

- Se toman los coeficientes de  $x$  y de  $y$ , se forma la matriz determinante de orden 2:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

- Para hallar cada una de las variables, se reemplaza el lugar de la respectiva variable por el término independiente y se divide por la matriz original, así:

$$\text{➤ } x = \frac{\begin{bmatrix} m & b \\ n & d \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{bmatrix} a & m \\ c & n \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$$

**Nota:** Para solucionar una matriz de orden 2, se multiplican los elementos de **la diagonal principal** (De izquierda a derecha, de arriba hacia abajo) y se le resta el producto de **la diagonal secundaria** (De derecha a izquierda, de arriba hacia abajo), esto es:

$$\text{➤ } x = \frac{(m*d)-(b*n)}{(a*d)-(b*c)}$$

$$\text{➤ } y = \frac{(a*n)-(m*c)}{(a*d)-(b*c)}$$

- Se toman las ecuaciones planteadas:

$$B + C = 6 \text{ Ecuación 1}$$

$$4B + 2C = 20 \text{ Ecuación 2}$$

- Se forma la matriz determinante con los respectivos coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 20 \end{bmatrix}$$

- Se plantean las matrices para cada variable

$$B = \frac{\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 20 & 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}} = \frac{(6 * 2) - (1 * 20)}{(1 * 2) - (1 * 4)} = \frac{12 - 20}{2 - 4} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$B = 4$$

$$C = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}} = \frac{(1 * 20) - (6 * 4)}{(1 * 2) - (1 * 4)} = \frac{20 - 24}{2 - 4} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$C = 2$$

- d. Reemplazando en \*\*\* e integrando a ambos lados se tiene que:

$$\int \frac{-2x - 4}{x^3 + x^2 + x} dx = \int \left[ \frac{-4}{x} + \frac{4x + 2}{x^2 + x + 1} \right] dx = \int \frac{-4}{x} dx + \int \frac{4x + 2}{x^2 + x + 1} dx$$

- $\int \frac{4x+2}{x^2+x+1} dx$  se debe resolver por sustitución:

$$\text{Sea: } u = x^2 + x + 1 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x + 1 \rightarrow dx = \frac{du}{2x+1}$$

- Reemplazando en:  $\int \frac{4x+2}{x^2+x+1} dx$ , se tiene:

$$\int \frac{4x+2}{x^2+x+1} dx = \int \frac{4x+2}{u} * \frac{du}{2x+1} = \int \frac{2*(2x+1)}{u} * \frac{du}{2x+1} \text{ Simplificando } 2x + 1:$$

$$\int \frac{4x + 2}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{2}{u} du = 2 \ln u = 2 \ln|x^2 + x + 1|$$

e. Por lo tanto:

$$\int \frac{-2x - 4}{x^3 + x^2 + x} dx = \int \frac{-4}{x} dx + \int \frac{4x + 2}{x^2 + x + 1} dx = -4 \ln|x| + 2 \ln|x^2 + x + 1| + C$$

2. Resolver:  $\int \frac{3x+1}{x^2-7x+10} dx$

### Procedimiento

a. Factorizando el denominador:

$$x^2 - 7x + 10 = (x - 5) * (x - 2)$$

➤ Como los factores son lineales y diferentes, la fracción queda:

$$\frac{3x + 1}{x^2 - 7x + 10} = \frac{3x + 1}{(x - 5) * (x - 2)} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x - 2}$$

➤ Efectuando la suma de fracciones indicada:

$$\frac{3x + 1}{(x - 5) * (x - 2)} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x - 2} = \frac{A * (x - 2) + B * (x - 5)}{(x - 5) * (x - 2)}$$

➤ Multiplicando por:  $(x - 5) * (x - 2)$ :

$$(x - 5) * (x - 2) \frac{3x + 1}{(x - 5) * (x - 2)} = [(x - 5) * (x - 2)] * \left[ \frac{A * (x - 2) + B * (x - 5)}{(x - 5) * (x - 2)} \right]$$

➤ Simplificando:

$$3x + 1 = A * (x - 2) + B * (x - 5)$$

b. Se asignan los valores apropiados a  $x$ , se reemplazan en la identidad; de esta manera se halla el valor de cada constante:

➤ Si  $x = 2 \rightarrow 3 * (2) + 1 = A * (2 - 2) + B * (2 - 5) \rightarrow$

$$7 = A * (0) - 3B \rightarrow -3B = 7 \rightarrow B = -\frac{7}{3}$$

➤ Si  $x = 5 \rightarrow 3 * (5) + 1 = A * (5 - 2) + B * (5 - 5) \rightarrow$

$$16 = A * (3) + B * (0) \rightarrow 3A = 16 \rightarrow A = \frac{16}{3}$$

c. Reemplazando estos valores en:  $\int \frac{3x+1}{x^2-7x+10} dx$ , se tiene:

$$\int \frac{3x + 1}{x^2 - 7x + 10} dx = \int \frac{\frac{16}{3}}{x - 5} dx + \int \frac{-\frac{7}{3}}{x - 2} dx = \frac{16}{3} \int \frac{1}{x - 2} dx - \frac{7}{3} \int \frac{1}{x - 5} dx$$

**Nota:** Las integrales:  $\frac{16}{3} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{7}{3} \int \frac{1}{x-5} dx$ , se deben resolver por sustitución

**Actividad:** Realice por sustitución las integrales planteadas y confronte el resultado que se dará a continuación

$$\int \frac{3x + 1}{x^2 - 7x + 10} dx = \frac{16}{3} \int \frac{1}{x - 2} dx - \frac{7}{3} \int \frac{1}{x - 5} dx$$
$$= \frac{16}{3} \ln(x - 5) - \frac{7}{3} \ln(x - 2) + C$$

---

3. Resolver:  $\int \frac{4x^3 + 2x^2 + 8x + 8}{x^4 - 16} dx$

Procedimiento

a. Se factoriza el denominador:

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4) * (x^2 - 4) = (x^2 + 4) * (x + 2) * (x - 2)$$

➤ Se obtuvieron los siguientes factores:

- $(x^2 + 4)$ : Es un factor irreducible.
- $(x + 2) * (x - 2)$ : Son factores lineales diferentes.

➤ La fracción queda entonces:

$$\frac{4x^3 + 2x^2 + 8x + 8}{x^4 - 16} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{x - 2} + \frac{D}{x + 2}$$

➤ Multiplicando por:  $(x^2 + 4) * (x + 2) * (x - 2)$  se anulan los denominadores

○ La expresión queda:

$$4x^3 + 2x^2 + 8x + 8 =$$

$$(Ax + B) * (x - 2) * (x + 2) + C * (x^2 + 4) * (x + 2) + D * (x^2 + 4) * (x - 2)$$

- a. Se asignan los valores apropiados a  $x$ , se reemplazan en la identidad; de esta manera se halla el valor de cada constante:

$$\triangleright x = 2 \rightarrow 4 * (2)^3 + 2 * (2)^2 + 8 * (2) + 8 =$$

$$(2A + B) * (2 - 2) * (2 + 2) + C * (2^2 + 4) * (2 + 2) + D * (2^2 + 4) * (2 - 2) =$$

$$(2A + B) * (0) * (2 + 2) + C * (2^2 + 4) * (2 + 2) + D * (2^2 + 4) * (0) =$$

$$4 * (2)^3 + 2 * (2)^2 + 8 * (2) + 8 = C * (2^2 + 4) * (2 + 2) =$$

$$4 * 8 + 2 * 4 + 8 * 2 + 8 = C * (4 + 4) * (2 + 2) \rightarrow 32 + 8 + 16 + 8 = 32C \rightarrow$$

$$32C = 64 \rightarrow C = \frac{64}{32} \rightarrow C = 2$$

$$\triangleright x = -2 \rightarrow 4 * (-2)^3 + 2 * (-2)^2 + 8 * (-2) + 8 =$$

$$(-2A + B) * (-2 + 2) * (-2 - 2) + C * ((-2)^2 + 4) * (-2 + 2) + D * ((-2)^2 + 4) * (-2 - 2) =$$

$$(-2A + B) * (0) * (-4) + C * (4 + 4) * (0) + D * (2^2 + 4) * (-4) =$$

$$4 * (-2)^3 + 2 * (-2)^2 + 8 * (-2) + 8 = D * (8) * (-4) \rightarrow -32 + 8 + 8 - 16 = -32D$$

$$-32 = -32D \rightarrow D = \frac{-32}{-32} \rightarrow D = 1$$

➤ Se reemplaza:  $D = 1$ ,  $C = 2$ ,  $x = 0$

$$4(0)^3 + 2(0)^2 + 8(0) + 8$$

$$= [A(0) + B](0 - 2)(0 + 2) + 2[0^2 + 4](0 + 2) + 1[0^2 + 4](0 - 2)]$$

$$8 = -4B + 16 - 8 \rightarrow 4B = 16 - 8 - 8 \rightarrow B = 0$$

➤ Se reemplaza:  $B = 0$ ,  $D = 1$ ,  $C = 2$ ,  $x = 1$

$$4(1)^3 + 2(1)^2 + 8(1) + 8$$

$$= [A(1) + 0](1 - 2)(1 + 2) + 2[1^2 + 4](1 + 2) + 1[1^2 + 4](1 - 2)]$$

$$4 + 2 + 8 + 8 = A(-1)(3) + 2(5)(3) + 1(5)(-1) \rightarrow$$

$$22 = -3A + 30 - 5 \rightarrow 3A = 30 - 22 - 5 \rightarrow 3A = 3 \rightarrow A = 1$$

c. Reemplazando en:  $\int \frac{4x^3 + 2x^2 + 8x + 8}{x^4 - 16} = \int \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{x - 2} + \frac{D}{x + 2}$  se tiene que:

$$\int \frac{4x^3 + 2x^2 + 8x + 8}{x^4 - 16} = \int \left[ \frac{(1)x + 0}{x^2 + 4} + \frac{2}{x - 2} + \frac{1}{x + 2} \right] dx \rightarrow$$

$$\int \frac{4x^3 + 2x^2 + 8x + 8}{x^4 - 16} = \int \left[ \frac{x}{x^2 + 4} + \frac{2}{x - 2} + \frac{1}{x + 2} \right] dx \rightarrow$$

$$\int \frac{4x^3 + 2x^2 + 8x + 8}{x^4 - 16} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + 2 \ln(x - 2) + \ln(x + 2) + C$$

4. Resolver:  $\int \frac{3x^3 + 6x^2 - 27}{x^4 - 9x^2} dx$

### Procedimiento

- a. Factorizando el denominador:

$$x^4 - 9x^2 = x^2 * (x^2 - 9) = x^2 * (x - 3) * (x + 3)$$

- La fracción queda:

$$\frac{3x^3 + 6x^2 - 27}{x^4 - 9x^2} = \frac{3x^3 + 6x^2 - 27}{x^2 * (x - 3) * (x + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 3} + \frac{D}{x + 3}$$

- Multiplicando por:  $x^2 * (x - 3) * (x + 3)$

- La identidad queda:

$$\begin{aligned} 3x^3 + 6x^2 - 27 &= Ax(x - 3)(x + 3) + B(x - 3)(x + 3) + Cx^2(x + 3) + Dx^2(x - 3) \end{aligned}$$

\*\*\*

- b. Se asignan los valores apropiados a  $x$ , se reemplazan en la identidad; de esta manera se halla el valor de cada constante:

- $x = 0 \rightarrow$

$$3(0)^3 + 6(0)^2 - 27 = A(0)(0 - 3)(0 + 3) + B(0 - 3)(0 + 3) + C(0)^2(0 + 3) + D(0)^2(0 - 3)$$

$$-27 = B(0 - 3)(0 + 3) \rightarrow -9B = -27 \rightarrow$$

$$B = \frac{-27}{-9} \rightarrow B = 3$$

- $x = 3$  Se anulan los términos en  $A, B, D$ , por lo tanto:

$$3(3)^3 + 6(3)^2 - 27 = C * (3)^2 * (3 + 3) = 81 + 54 - 27 = 54 C \rightarrow$$

$$C = \frac{108}{54} \rightarrow C = 2$$

- $x = -3$  Se anulan los términos en  $A, B, C$ , por lo tanto:

$$3(-3)^3 + 6(-3)^2 - 27 = D * (-3)^2(-3 - 3) \rightarrow$$

$$-81 + 54 - 27 = -54 D \rightarrow -54 D = 54 \rightarrow D = \frac{-54}{-54} \rightarrow D = 1$$

- Se reemplaza:  $B = 3, C = 2, D = 1$  con  $x = 1$  en \*\*\*

$$3(1)^3 + 6(1)^2 - 27 = A(1)(1 - 3)(1 + 3) + 3(1 - 3)(1 + 3) + 2(1)^2(1 + 3) + 1(1)^2(1 - 3) \rightarrow$$

$$3 + 6 - 27 = A(-2)(4) + 3(-2)(4) + 2(4) + 1(-2) \rightarrow$$

$$-18 = -8A - 24 + 8 - 2 \rightarrow 8A = 18 - 24 + 8 - 2 \rightarrow$$

$$8A = 0 \rightarrow A = 0$$

c. Reemplazando estos valores en:  $\int \frac{3x^3+6x^2-27}{x^4-9x^2} dx$ , se tiene:

$$\int \frac{3x^3 + 6x^2 - 27}{x^4 - 9x^2} dx = \int \left[ \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{x+3} \right] dx \rightarrow$$

$$\int \frac{3x^3 + 6x^2 - 27}{x^4 - 9x^2} dx = \int \left[ \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+3} \right] dx \rightarrow$$

$$\int \frac{3x^3 + 6x^2 - 27}{x^4 - 9x^2} dx = -\frac{3}{x} + 2 \ln(x-3) + \ln(x+3) + C$$

### EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Utilizando integración por partes resuelva:

- $\int x^4 \ln x^2 dx$
- $\int x\sqrt{3x+8} dx$

2. Utilizando fracciones parciales resuelva las siguientes integrales:

- $\int \frac{5}{2x^2 - x - 10} dx$

$$\int \frac{5x-1}{25x^2 + 70x + 49} dx$$

3. Utilizando integración por partes resuelva:

- $\int (x + e^{2x})^2 dx$

- $\int x^4 \cos x dx$

4. Utilizando fracciones parciales resuelva:

- $\int \frac{8x^2 + 8x + 9}{2x^3 - 5x^2 - 3x} dx$

- $\int \frac{47x^3 - 268x^2 + 51x - 102}{5x^4 - 26x^3 + 20x^2 - 78x + 15} dx$

5. Sea la región limitada por la curva:  $y = 3xe^{x/3}$  entre  $x = 0 \wedge x = 9$

- a. Determine su área.
- b. Determine el volumen cuando la región gira en torno al eje x.

6. Resuelva Las siguientes integrales

- $\int (x^3 - 2x)e^x dx$

- $\int 7x^2 \cos x dx$

- $\int \frac{19x^2 + 48}{x^3 + 16x} dx$

- $\int \cot^3(5x) dx$

- $\int \frac{7x - 1}{25x^2 + 30x + 9} dx$

- $\int \frac{\ln x}{x} dx$
- $\int \frac{1}{9x^3 - 4x} dx$
- $\int \frac{2x-7}{x^2 + x - 20} dx$
- $\int \frac{3x-1}{x^3 + x} dx$
- $\int x^6 \ln x^2 dx$
- $\int x^4 \text{sen}(9x) dx$
- $\int \frac{x^3}{\sqrt{49-x^2}} dx$

#### 5.4. Relación con otros Temas

Con los conceptos de antiderivada ó integración y las técnicas básicas de integración, se alcanza una interrelación con otras áreas del conocimiento, que permiten abordar temáticas generales del saber específico en el campo profesional.

## 6. GLOSARIO

- **Integral:** La integral es una operación contraria a la derivada.

**DEFINICIÓN:** La integral de una función  $f(x)$ , es otra función que  $F(x)$ , siempre que se cumpla que:

$$F'(x) = f(x)$$

Para indicar que  $F(x)$  es una integral de  $f(x)$  utilizamos el siguiente símbolo:

$$F(x) = \int f(x)dx: \text{ se llama Integral indefinida}$$

- **Integración:**

La **integración** es un [concepto fundamental](#) del [cálculo](#) y del [análisis matemático](#). Básicamente, una **integral** es una generalización de la [suma](#) de [infinitos](#) sumandos, infinitamente pequeños.

El **cálculo integral**, encuadrado en el [cálculo infinitesimal](#), es una rama de las [matemáticas](#) en el proceso de integración o antiderivación, es muy común en la ingeniería y en la ciencia también; se utiliza principalmente para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución.

Tomado de: [Integración - Wikipedia, la enciclopedia libre](#)

[es.wikipedia.org/wiki/Integración](https://es.wikipedia.org/wiki/Integración)

- **FUNCIONES:**

En [matemáticas](#), se dice que una [magnitud](#) o [cantidad](#) es **función** de otra si el valor de la primera depende exclusivamente del valor de la segunda. Por ejemplo el [área](#)  $A$  de un [círculo](#) es función de su [radio](#)  $r$ : el valor del área es [proporcional](#) al [cuadrado](#) del radio,  $A = \pi r^2$ . Del mismo modo, la duración  $T$  de un viaje de tren entre dos ciudades separadas por una distancia  $d$  de 150 km depende de la velocidad  $v$  a la que este se desplace: la duración es inversamente proporcional a la velocidad,  $d/v$ . A la primera magnitud (el área, la duración) se la denomina [variable dependiente](#), y la cantidad de la que depende (el radio, la velocidad) es la [variable independiente](#).

Tomado de: [Función matemática - Wikipedia, la enciclopedia libre](#)

[es.wikipedia.org/wiki/Función\\_matemática](https://es.wikipedia.org/wiki/Función_matemática)

**Antiderivada:**

La antiderivada es la función que resulta del proceso inverso de la derivación, es decir, consiste en encontrar una función que, al ser derivada produce la función dada.

Por ejemplo:

Si  $f(x) = 3x^2$ , entonces,  $F(x) = x^3$ , es una antiderivada de  $f(x)$ . Observe que no existe una derivada única para cada función. Por ejemplo, si  $G(x) = x^3 + 5$ , entonces es otra antiderivada de  $f(x)$ .

La antiderivada también se conoce como la primitiva o la integral indefinida se expresa de la siguiente manera: en donde:  $f(x)$  es el integrando;  $dx$ , la variable de integración o diferencial de  $x$  y  $C$  es la constante de integración.

### Notación

La notación que emplearemos para referirnos a una antiderivada es la siguiente:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Leer más: <http://www.monografias.com/trabajos73/antiderivadas/antiderivadas.shtml#ixzz3RelweJ07>

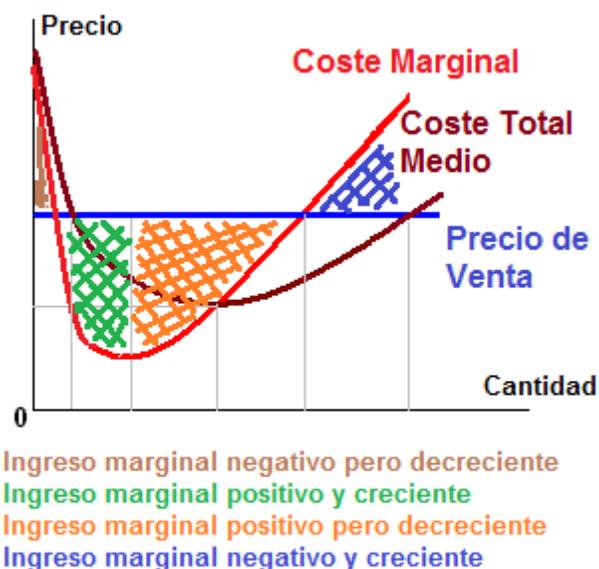
Tomado de: [Antiderivadas - Monografias.com](http://www.monografias.com)

[www.monografias.com](http://www.monografias.com) › *Matemáticas*

- **Constante de integración C:** que representa las cantidades que no tienen variable.
- **INGRESO MARGINAL:** En microeconomía, el ingreso marginal es el ingreso adicional que se generará mediante el aumento de las ventas de productos en 1 unidad. También se puede describir como el ingreso unitario generado por el último elemento vendido de la empresa.

El ingreso marginal está íntimamente relacionado con el [costo marginal](#) y su función. Así el ingreso marginal será la inversa a la anterior.

Si el precio de venta es fijo, el ingreso marginal será creciente mientras el [costo marginal](#) sea decreciente y será decreciente cuando el anterior sea creciente ya que el ingreso marginal se calcula restando al precio el [costo marginal](#) de esa nueva unidad vendida. Estos cálculos son válidos siempre que el precio sea constante en un mercado de [competencia perfecta](#), regulado por la [teoría de la oferta y la demanda](#), para aumentar la cantidad vendida debe reducirse el precio de toda la producción por lo que el dato de ingreso marginal es anecdótico.



Tomado de: [Ingreso marginal - Enciclopedia Financiera](#)

[www.encyclopediainanciera.com/definicion-ingreso-marginal](http://www.encyclopediainanciera.com/definicion-ingreso-marginal).

- **Demanda:** Disposición de un agente económico para pagar, pudiendo hacerlo, el precio de una determinada mercancía. Cantidad que se está dispuesto a comprar de un cierto producto a un precio determinado. La cantidad demandada de un determinado bien o servicio depende de diversos factores, siendo los más importantes: el precio de ese bien o servicio, los precios de los demás bienes o servicios, el nivel de renta y la riqueza del sujeto demandante, así como los gustos y preferencias de los consumidores. El precio es la variable que influye en la cantidad demandada de manera más relevante. La curva de demanda describe la relación decreciente entre cantidad demandada y precio(en el caso de bienes de demanda normal), esto es, las cantidades que los consumidores estarían dispuestos a adquirir de un producto concreto en función del precio que al mismo le fije el vendedor. Se puede hablar de demanda de un consumidor o agente económico individual y de demanda de un determinado grupo de consumidores o de la totalidad del mercado, obtenida por agregación de las correspondientes demandas individuales.

Tomado de: [DEMANDA - Enciclopedia de Economía](#)

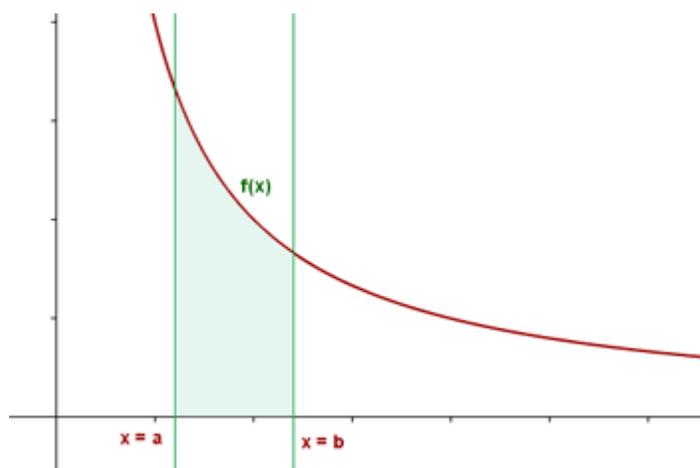
[www.economia48.com/spa/d/demanda/demanda](http://www.economia48.com/spa/d/demanda/demanda)

- **RACIONALIZACIÓN:** La racionalización de radicales consiste en quitar los radicales del denominador, lo que permite facilitar el cálculo de operaciones como la suma de fracciones.

Tomado de: [Racionalización de radicales - Vitutor](#)

[www.vitutor.com/di/re/r17.html](http://www.vitutor.com/di/re/r17.html)

- **Integral definida:** Cada una función  $f(x)$  y un intervalo  $[a,b]$ , la **integral definida** es igual al área limitada entre la gráfica de  $f(x)$ , el eje de abscisas, y las rectas verticales  $x = a$  y  $x = b$ .



La **integral definida** se representa por  $\int_a^b f(x) dx$ .

- ✓  $\int$  es el signo de integración.
- ✓  $a$  límite inferior de la integración.
- ✓  $b$  límite superior de la integración.
- ✓  $f(x)$  es el **integrando** o función a integrar.

- ✓ **dx** es **diferencial de x**, e indica cuál es la variable de la función que se integra.

Tomado de: [Integral definida - Vitutor](#)

[www.vitutor.com/integrales/definidas/integral\\_definida.html](http://www.vitutor.com/integrales/definidas/integral_definida.html)

- **ÁREA BAJO UNA CURVA:** La más famosa aproximación del área bajo una curva, en la antigüedad, es la de Arquímedes, referenciada de manera lúcida por Tom Apostol en la introducción histórica de su Calculus. El ejemplo de Apóstol sirve como acercamiento del concepto de Integral. Por definición toda Área es positiva o cero, las integrales pueden ser negativas, por lo tanto, el área bajo la curva no debe confundirse con la integral, sin embargo, tal y como se abordó el tema de derivadas, vamos a utilizar este cálculo del área bajo la curva como una aproximación a la Integral.

Lo primero que podemos hacer es definir una función con la cual podamos obtener fácilmente su área (en un intervalo determinado) de manera geométrica y comparar este resultado con el valor obtenido aplicando la función intregate

( ) de R.

Tomado de: [El Área bajo la curva - WIKI-FCE](#)

[www.fce.unal.edu.co/wiki/index.php?title=El\\_Área\\_bajo\\_la\\_curva](http://www.fce.unal.edu.co/wiki/index.php?title=El_Área_bajo_la_curva)

- **Sólido de revolución:** Cuando una región en el plano rota alrededor de una línea recta tal que a lo suma esta línea es frontera de la región (no la intersecta) se produce un sólido tridimensional que se llama sólido de revolución.

La recta alrededor de la cual rota la región se llama eje de rotación o de revolución.

Tomado de: [Volúmenes de sólidos obtenidos por revolución - SEDE ...](#)

[www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/2000916/.../03\\_02\\_01.html](http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/2000916/.../03_02_01.html)

- **integración por partes:** El **método e integración por partes** permite calcular la **integral de un producto** de dos funciones aplicando la **fórmula** :

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

Las funciones logarítmicas, "arcos" y polinómicas se eligen como  $u$ .

Las funciones exponenciales y trigonométricas del tipo seno y coseno, se eligen como  $v'$ .

Tomado de: [Integración por partes - Vitutor](#)

[www.vitutor.com/integrales/metodos/integral\\_partes.html](http://www.vitutor.com/integrales/metodos/integral_partes.html)

- *Integración por Fracciones Parciales:* La integración por fracciones parciales es más un truco o recurso algebraico que algo nuevo que vaya a introducirse en el curso de Cálculo Integral. Es decir, en realidad en este tema no va a aprenderse nada nuevo de Cálculo Integral, simplemente se va a echar mano del Álgebra y luego aplicar técnicas que ya se estudiaron en otros capítulos. El tema de fracciones parciales en Álgebra se refiere a desumar 1 una fracción, es decir a deshacer una suma de fracciones; en otras palabras, se trata de encontrar la suma de qué fracciones da como resultado la fracción dada.

Tomado de: [Fracciones parciales - A la Sala](#)

[www.alasala.cl/wp-content/uploads/2012/07/capitulo9.pdf](http://www.alasala.cl/wp-content/uploads/2012/07/capitulo9.pdf)

## 7. PISTAS DE APRENDIZAJE

**Tener en cuenta:** Cuando se dice  $y(2) = 5$  significa que

$$y = 5 \text{ cuando } x = 2$$

**Tenga presente:** la gravedad es de  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Quiere decir  $a(t) = -9.8 \text{ m/s}^2$ .

**Traer a la memoria:** Otra forma de determinar la altura máxima sería determinando los máximos y mínimos de la función  $s(t) = -4.9t^2 + 15t + 310$  utilizando los conceptos de primera y segunda derivada.

**Tener en cuenta:** Para solucionar la ecuación de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , se utiliza la fórmula general:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

**Tenga presente:** Cuando hay **una sola expresión trigonométrica**, para hacer el cambio de variable se toma lo que está **dentro de la expresión trigonométrica**, es decir **el ángulo**

**Traer a la memoria:** Cuando hay **dos o más expresiones trigonométricas** en la misma integral, el cambio de variable se hace tomando **una de las expresiones trigonométricas**

**Tener en cuenta:**  $\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

**Traer a la memoria**

$$\int \cot u \, du = \ln|\sin u| + C$$

**Tener en cuenta:** El área de un rectángulo es igual a base por altura.

➤ El área total será igual a la suma de cada área, es decir:

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \dots + A_9$$

**Tener en cuenta:** Un polinomio de la forma  $ax^2 + bx + c$ , se factoriza multiplicando y dividiendo por el coeficiente de  $x^2$  (**o sea por a**).

**Tenga presente:**  $\int \frac{1}{(x+3)^2} dx = \int \frac{1}{u^2} du = \int u^{-2} du = \frac{u^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{u}$

Reemplazando:  $\int \frac{1}{(x+3)^2} dx = -\frac{1}{x+3}$

**Traer a la memoria:** para solucionar un sistema de ecuaciones lineales 2x2:

1. Se toman los coeficientes de cada una de las variables y se forma una matriz de orden 2.
2. Esta matriz se iguala al término independiente.
3. Para encontrar cada variable su lugar es ocupado por el término independiente y se coloca de denominador para cada una de ellas la matriz de orden 2 obtenida inicialmente, esto es, en forma general:

Sean:

$$ax + by = m$$

$$cx + dy = n$$

- Se toman los coeficientes de  $x$  y de  $y$ , se forma la matriz determinante de orden 2:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

- Para hallar cada una de las variables, se reemplaza el lugar de la respectiva variable por el término independiente y se divide por la matriz original, así:

$$\text{➤ } x = \frac{\begin{bmatrix} m & b \\ n & d \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{bmatrix} a & m \\ c & n \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$$

**Nota:** Para solucionar una matriz de orden 2, se multiplican los elementos de **la diagonal principal** (De izquierda a derecha, de arriba hacia abajo) y se le resta el producto de **la diagonal secundaria** (De derecha a izquierda, de arriba hacia abajo), esto es:

$$\text{➤ } x = \frac{(m*d)-(b*n)}{(a*d)-(b*c)}$$

$$y = \frac{(a * n) - (m * c)}{(a * d) - (b * c)}$$

## 8. BIBLIOGRAFÍAS

ARANDA, E., URENA, F. **Problemas de Cálculo en una variable**. 2008. (compra on-line a través de la página [www.bubok.es](http://www.bubok.es))

DÁVILA, Antonio; NAVARRO, Pedro; CARVAJAL, José. Introducción al Cálculo. 1 ed. Caracas: Mc Graw Hill, 1966.

DOWLING, Edward T. Cálculo para Administración, Economía y Ciencias Sociales. 1 ed. México: Mc Graw Hill, 1966.

Estela, M.R.; Saà, J; "Cálculo con soporte interactivo en Moodle"; Ed. Pearson-Prentice Hall; Madrid, 2008.

GARCÍA, A., LÓPEZ, A., RODRIGUEZ, G., ROMERO, S., DE LA VILLA, A. **Cálculo II**. Ed. Clagsa, 2002.

HAEUSSLER. Ernest. F. Jr; RICHARD S. Paul. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. 8 ed. México: Prentice Hall, 1997.

HOFFMANN, Laurence D; BRADLEY, Gerald L. Cálculo aplicado a Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales. 5 ed. Bogotá: Mc Graw Hill.

LEITHOLD, Louis. El Cálculo con geometría analítica. 7a edición. México: Oxford University, 2003.

PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993.

\_\_\_\_\_ Cálculo diferencial e integral. Novena edición. México: Prentice Hall Hispanoamericana, 2007.

SOLER FAJARDO, Francisco; NUÑEZ, Reinaldo; ARANDA SILVA, Moisés. Fundamentos de Cálculo con aplicaciones a ciencias Económicas y Administrativas. 2 ed. Bogotá: Ecoe ediciones, 2002.

STEWART, James. Cálculo conceptos y contexto. 1 ed. México: International Thomson Editores, 1999.

\_\_\_\_\_ Cálculo diferencial e integral. Segunda edición. Bogotá: International Thompson editores, 2007.

\_\_\_\_\_ Pre cálculo. 3 ed. México: International Thompson editores, 2001.

### 8.1. Fuentes digitales o electrónicas

[http://www.matematicasbachiller.com/temario/calculin/tema\\_01/indice.html](http://www.matematicasbachiller.com/temario/calculin/tema_01/indice.html)

Fecha Enero de 2010

<http://www.matematicasbachiller.com/temario/calculin/index.html>

Fecha Enero de 2010

[http://video.google.com.co/videosearch?sourceid=navclient&hl=es&rlz=1T4WZPC\\_esCO342CO345&q=calculo+integral&um=1&ie=UTF-8&ei=5oNXS7D-Asi0tgfcwdCoBA&sa=X&oi=video\\_result\\_group&ct=title&resnum=4&ved=0CB0QwOwAw#](http://video.google.com.co/videosearch?sourceid=navclient&hl=es&rlz=1T4WZPC_esCO342CO345&q=calculo+integral&um=1&ie=UTF-8&ei=5oNXS7D-Asi0tgfcwdCoBA&sa=X&oi=video_result_group&ct=title&resnum=4&ved=0CB0QwOwAw#)

Fecha Enero de 2010

<http://www.aulafacil.com/matematicas-integrales/curso/Temario.htm>

Fecha Enero de 2010

<http://apuntes.rincondelvago.com/calculo-integral.html>

Fecha Enero de 2010

<http://www.monografias.com/trabajos73/calculo-integral/calculo-integral.shtml>

Fecha Enero de 2010

<http://elcentro.uniandes.edu.co/cr/mate/calculo/integral.htm>

Fecha Enero de 2010

<http://www.xtec.cat/~jlagares/integral.esp/integral.htm#E1>

Fecha Enero de 2010

<http://personal.redestb.es/javfuetub/analisis/calculo/integral.htm>

Fecha Enero 2010

[http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/CALCULODIFERENCIAL/curso-elsie/integral\\_indefinida/html/index.html](http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/CALCULODIFERENCIAL/curso-elsie/integral_indefinida/html/index.html)

Fecha Enero 2010

[http://es.wikibooks.org/wiki/C%C3%A1lculo\\_en\\_una\\_variable/C%C3%A1lculo\\_integral/T%C3%A9cnicas\\_de\\_integraci%C3%B3n](http://es.wikibooks.org/wiki/C%C3%A1lculo_en_una_variable/C%C3%A1lculo_integral/T%C3%A9cnicas_de_integraci%C3%B3n)

Fecha Enero de 2010

[http://www.matematicasbachiller.com/videos/cintegral/ind\\_int01.htm#1](http://www.matematicasbachiller.com/videos/cintegral/ind_int01.htm#1)

Fecha Enero de 2010

<http://www.matematicasyoesia.com.es/ProbIntegral/ProbCalIntPreg.htm>

Fecha Enero de 2010

<http://www.biopsychology.org/apuntes/calculo/calculo3.htm>

Fecha Enero de 2010

[http://books.google.com.co/books?id=wwD5\\_lve6f4C&pg=PA427&lpg=PA427&dq=calculo+integral&source=bl&ots=Cf95\\_WqoYa&sig=khiNK6ESgLwRURReZOK6v1p32Uwk&hl=es&ei=H41XS4PRGs2PtgfFvcyqBA&sa=X&oi=book\\_result&ct=result&resnum=6&ved=0CCYQ6AEwBTgy#v=onepage&q=calculo%20integral&f=false](http://books.google.com.co/books?id=wwD5_lve6f4C&pg=PA427&lpg=PA427&dq=calculo+integral&source=bl&ots=Cf95_WqoYa&sig=khiNK6ESgLwRURReZOK6v1p32Uwk&hl=es&ei=H41XS4PRGs2PtgfFvcyqBA&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=6&ved=0CCYQ6AEwBTgy#v=onepage&q=calculo%20integral&f=false)

Fecha Enero de 2010

[http://books.google.com.co/books?id=YFXiagjvmDYC&printsec=frontcover&dq=calculo+integral&ei=B45X\\_S\\_ydH6rGywSHuejWDw&cd=7#v=onepage&q=&f=false](http://books.google.com.co/books?id=YFXiagjvmDYC&printsec=frontcover&dq=calculo+integral&ei=B45X_S_ydH6rGywSHuejWDw&cd=7#v=onepage&q=&f=false)

Fecha Enero de 2010

<http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/CALCULODIFERENCIAL/index.htm>

Fecha Enero de 2010

<http://www.scribd.com/doc/5052129/CALCULO-DIFERENCIAL-E-INTEGRAL-II-FAS1-LA-INTEGRAL-DEFINIDA->

Fecha Enero de 2010

<http://huitoto.udea.edu.co/Matematicas/intro.html>

Fecha enero de 2010

[http://www.brujula.net/wiki/Funci%C3%B3n\\_matem%C3%A1tica.html](http://www.brujula.net/wiki/Funci%C3%B3n_matem%C3%A1tica.html)

Fecha enero de 2010.

<http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/20/matematicas-20.html>

Fecha enero de 2010.

<http://www.ejercitando.com.ar/probmate/inecua01.htm>

Fecha enero de 2010.

<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html>

Fecha enero de 2010.

<http://www.monografias.com/trabajos10/historix/historix.shtml>

Fecha enero de 2010.

<http://www.matematicasbachiller.com/videos/cintegral/index.htm>

Fecha febrero de 2010.

[http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/UnidadesDidacticas/03-2-u-graficas.html#ACTI\\_3](http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/UnidadesDidacticas/03-2-u-graficas.html#ACTI_3)

Fecha enero de 2010.

[http://math.uprm.edu/~santiago/Calculus\\_II/HOMEWORK/HOMEWORK\\_HTML/HTML\\_Homework\\_Integration\\_Applications\\_Volume/index.html](http://math.uprm.edu/~santiago/Calculus_II/HOMEWORK/HOMEWORK_HTML/HTML_Homework_Integration_Applications_Volume/index.html)

Fecha febrero de 2010.

<http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/CALCULODIFERENCIAL/curso-elsie/aplicacionesintegral/html/node6.html>

Fecha febrero de 2010.