TECNOLOGÍA AGROINDUSTRIAL
ASIGNATURA: FÍSICA GENERAL O MECÁNICA

CORPORACIÓN UNIVERSITARIA REMINGTON
DIRECCIÓN DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

2011

CRÉDITOS

AUTOR

Oswaldo Muñoz Cuartas
oswi7@hotmail.com
Nota: el autor certificó (de manera verbal o escrita) No haber incurrido en fraude científico, plagio o vicios de autoría; en caso contrario eximió de toda responsabilidad a la Corporación Universitaria Remington, y se declaró como el único responsable.

RESPONSABLES

Ignacio Ramos Jaramillo
Decano del programa Tecnología Agroindustrial
Elkin Darío Ocampo Toro
Director general de Educación a Distancia
Octavio Toro Chica
Vicerrector Académico de Educación a Distancia
Angélica Ricaurte Avendaño
Coordinadora de la Unidad de Medios y Mediaciones Educativas

GRUPO DE APOYO

Personal de la Unidad de Medios y Mediaciones
EDICIÓN Y MONTAJE
Unidad de Medios y Mediaciones
Primera versión. Febrero de 2011.

TABLA DE CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la física busca formar un alumno crítico, creativo, protagonista de su propio aprendizaje, donde el interés por descifrar las leyes naturales los motiven hacia esa búsqueda de sus propios interrogantes.

El presente módulo de Física General es una propuesta pedagógica que tiene como objetivo desarrollar habilidades y destrezas que faciliten la comprensión de todos aquellos principios físicos que a diario vivimos.

Para facilitar la comprensión del módulo, el alumno debe participar activamente del desarrollo de los contenidos, ser un ente dinamizador de procesos, fomentar un aprendizaje por competencias, y lo más importante, investigar todo aquello que le inquiete, articulando siempre la transversalidad con las demás áreas del conocimiento.

2. JUSTIFICACIÓN

La comprensión científica y sistemática de fenómenos básicos sobre el movimiento y la energía son fundamentales en la formación del estudiante, logrando en él un mejor desempeño y motivación para enfrentar problemas y situaciones que involucren nuevos conocimientos.

El curso de Física Mecánica se remonta a los fenómenos, conceptos y teorías relacionadas con la mecánica de la partícula y del cuerpo rígido, a través de modelos idealizados que facilitan la comprensión y las posibilidades de transformación de un sistema.

Este módulo es una herramienta de apoyo y consulta para abordar estos temas fundamentales, motivando al estudiante a participar en la construcción de su propio conocimiento, utilizando todo el material teórico y práctico que abunda a través de Internet; y conscientes de que el aprendizaje significativo se construye a través de la experiencia con el entorno que nos rodea, llevando al aula de clase aquellas inquietudes que son viables de razonar y que aportan a nuestro conocimiento.

3. PROPÓSITO GENERAL DEL MÓDULO

Promover el interés por conocer las leyes físicas de la naturaleza con la ayuda del lenguaje matemático. Mostrar que la física es una ciencia de vital importancia para el desarrollo de otras áreas del conocimiento, de esta forma, se adquiere conciencia de que la física es la ciencia de la vida cotidiana.

4. OBJETIVO GENERAL DEL MÓDULO

Proporcionar de manera concreta y precisa, una variedad de conceptos, resultados, técnicas y aplicaciones de la física que son particularmente útiles para los estudiantes de Tecnología. Igualmente, se pretende desarrollar hábitos de análisis e interpretación de situaciones reales, necesarias para todo estudiante, e incidir en la modelación de nuevos problemas que tengan que ver con la física.

5. OBJETIVOS ESPECÍFICOS DEL MÓDULO

- Fomentar en el estudiante un alto nivel de análisis e interpretación por las leyes físicas
- Analizar los diferentes tipos de movimiento que hay y establecer diferencias entre ellos
- Aplicar las leyes de la mecánica clásica al equilibrio y al movimiento de los cuerpos, a lo largo del estudio de las divisiones tradicionales de la misma en cinemática, estática y dinámica
- Interpretar adecuadamente las leyes de conservación
- Conjugar la teoría con la práctica a través de talleres y simulaciones virtuales
- Interpreta las leyes y principios físicos fundamentales que se hallan en las bases de las teorías científicas

6. FICHA TÉCNICA DEL MÓDULO

Área		**Nivel de Formación**		**Objetivos**			
Global	**Específica**			**General**		**Específicos**	
Ciencias básicas	**Física General**		Perceptual		Explorar	**X**	**Explorar**
				X	Describir	**X**	**Describir**
			Aprehensivo		Comparar	**X**	**Comparar**
				X	**Analizar**	**X**	**Analizar**
			Comprensivo	**X**	**Explicar**	**X**	**Explicar**
					Predecir	**X**	Predecir
				X	**Proponer**	**X**	Proponer
			Integrativo		Modificar		Modificar
					Confirmar	**X**	Confirmar
					Evaluar	**X**	Evaluar

Indicadores Metodológicos		
Propósito de Formación		Fundamentación Conceptual
		Fundamentación Procedimental
	X	**Aplicación en el Saber Específico**
Competencias a Desarrollar	X	Interpretativas
	X	**Argumentativas**
		Propositivas
Uso del Conocimiento	**X**	**Capacidad para Representar**
	X	**Capacidad para Reconocer Equivalencias**
	X	**Capacidad para Recordar Objetos y sus propiedades**
Uso de Procedimientos		Habilidad y Destreza para Usar Equipos
	X	**Habilidad y Destreza para Usar Procedimientos de Rutina**
		Habilidad y Destreza para Usar Procedimientos Complejos

7. MAPA DEL MÓDULO

FÍSICA GENERAL

La física se presenta como una ciencia que con el paso del tiempo ha inquietado al hombre. Descifrar y comprender los fenómenos físicos que nos rodean no ha sido fácil, pero a medida que vamos formulando preguntas acerca del por qué, para qué, donde y el cómo de los fenómenos naturales, vamos estructurando el mundo de la física en términos de unos principios fundamentales. Los diferentes tipos de movimiento, las causas del movimiento, la conservación de la energía, y otros temas afines se presentan en este módulo.

Objetivo general

Comprende los principales conceptos de la Física mecánica y su articulación en leyes, teoría y modelos, permitiendo el apropiamiento de un lenguaje científico y la destreza analítica, de forma que el estudiante utilice estrategias necesarias para resolver problemas que se planteé.

UNIDAD 1 **UNIDAD 2** **UNIDAD 3**

Objetivos Específicos

- Describir el método de la física y su importancia en la formación, especialmente para un tecnólogo.
- Conocer las herramientas matemáticas necesarias para resolver e interpretar correctamente los resultados de un determinado supuesto físico.
- Promover el aprendizaje de un conocimiento científico básico, privilegiando el razonamiento lógico, la experimentación, la argumentación y la apropiación del lenguaje de las ciencias.

Capacidad para describir cualquier tipo de movimiento y tomar una posición crítica frente a las leyes de Newton.

Habilidad para razonar porque un cuerpo posee determinada energía y como la conserva o transforma.

Capacidad para identificar la ley de la conservación de la cantidad de movimiento.

UNIDAD 4

Capacidad para demostrar por qué un cuerpo rígido se encuentra o no en equilibrio de rotación y traslación.

UNIDAD 5

Habilidad para Analizar situaciones teóricas y prácticas sobre movimientos oscilatorios.

8. UNIDAD 1 CINEMÁTICA Y DINÁMICA DEL MOVIMIENTO

8.1. OBJETIVO GENERAL

Explicar los conceptos de posición, desplazamiento, velocidad y aceleración, describiendo los diferentes tipos de movimiento que se dan en nuestro entorno, y sus respectivas causas a partir de las leyes de Newton.

8.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Comparar algunos sistemas de medida y establecer conversiones entre unidades
- Proponer conclusiones criticas en la aplicación de formulas de velocidad constante y variable
- Describir el movimiento de caída libre como un movimiento acelerado
- Proponer situaciones que permitan la aplicación de las ecuaciones del movimiento parabólico, semiparabólico, circular y caída libre
- Analizar desde el ámbito experimental el concepto de fuerza
- Predecir generalizaciones que le permitan manipular el concepto de fuerza en la aplicación de las leyes de Newton

8.3. PRUEBA INICIAL

- Se midió la altura de una persona y se encontró que tiene 1,9 metro. En centímetros, la altura de esta persona, con las cifras significativas, es:

a. $190 cm$ b. $190,0 cm$ c. $1,9 \times 10^{2} cm$ d. $1,90 \times 10^{2} cm$ e. $1,900 \times 10^{2} cm$

- Una pelota se lanza hacia arriba, con una velocidad de $20 m/s$. ¿Cuál es la distancia que recorre durante el primer segundo?

a. 10m b. 15m c. 20m d. 25m e. 35m

- La pelota de la pregunta anterior, ¿hasta qué altura máxima sube?

a. 20m b. 30m c. 25m d. 40m e. 50m

- 8×10^{-4} gramos equivale a:

a. 0.8kg b. 8×10^{-7} kg c. 8×10^{-12} kg d. 8×10^{12} kg e. 8×10^{6} kg

- Sea un objeto A suspendido del techo por medio de un hilo. La tercera ley de Newton nos dice que la reacción a la tensión T en el punto A es:

a) El peso del objeto
b) La fuerza que hace el objeto sobre la tierra
c) La fuerza que hace el objeto sobre el hilo
d) La fuerza que hace la tierra sobre el objeto
e) La fuerza que hace el techo sobre el objeto

- Bajo la acción de una fuerza de 20 Newton, un resorte se comprime 0,1 metros. La constante del resorte es:

a. $0,005 \ N/m$ b. $5 \ N/m$ c. $2 \ N/m$ d. $20 \ N/m$ e. $200 \ N/m$

- La energía potencial elástica del resorte anterior es:

a. 0,5 J   b. 2 J   c. 1 J   d. 10 J   e. 20 J

- Una fuerza de 1 newton actúa durante 1 segundo sobre un cuerpo de masa 1 kilogramo, inicialmente en reposo. El trabajo de la fuerza es:

a. 0,5 J   b. 2 J   c. 1.5J   d. 1 J   e. 2,5 J

- La energía cinética final del cuerpo anterior es:

a. 0,5 J   b. 1 J   c. 1.5J   d. 2 J   e. 2,5 J

- Una fuerza de 1 newton actúa durante 1 segundo sobre un cuerpo de masa 1 kilogramo y con velocidad inicial de $1 m/s$. El trabajo de la fuerza es

a. 1 J   b. 0,5 J   c. 1.5J   d. 2,5J   e. 2,0 J

- La energía cinética final del cuerpo anterior es:

a. 1 J   b. 0,5 J   c. 1.5J   d. 2,5J   e. 2,0 J

- **Razona la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados dando explicación:**

a) Para que un cuerpo esté en movimiento debe haber forzosamente una fuerza aplicada sobre el cuerpo en ese instante

b) Podemos arrastrar un cuerpo por una superficie aplicando una fuerza menor que su peso

c) Al chocar una bola de billar con otra de menor masa, la fuerza que la bola grande ejerce sobre la pequeña es mayor que la fuerza que la bola pequeña ejerce sobre la grande

d) El peso, la fuerza que la Tierra ejerce sobre los cuerpos, depende de la masa de cada cuerpo. Sin embargo, todos los cuerpos caen con la misma aceleración

e) Si un cuerpo no está acelerado, no existe ninguna fuerza actuando sobre él

f) Un cuerpo se mueve siempre en la dirección de la fuerza resultante

8.4. TEMAS

8.4.1. Unidades

"Sabemos bien que no todas las cosas pueden medirse, por ejemplo, la belleza de una flor. Cualquiera que sea el conocimiento que tengamos de estas cosas, comprendemos fácilmente que este conocimiento no pertenece al campo de la ciencia. La capacidad de no sólo definir, sino también de medir, es un requisito de la ciencia. Y en física, más que en cualquier otro campo del conocimiento, la definición precisa de los términos y la medida exacta de las magnitudes ha conducido a grandes descubrimientos.

La medida de toda magnitud física exige compararla con cierto valor unitario de la misma. Así, para medir la distancia entre dos puntos, la comparamos con una unidad estándar de distancia tal como el metro. La afirmación de que una cierta distancia es de 25 metros significa que equivale a 25 veces la longitud de la unidad metro; es decir, una métrica patrón se ajusta 25 veces en dicha distancia. Toda magnitud física debe expresarse con una cifra y una unidad."[1].

"Todas las magnitudes físicas pueden expresarse en función de un pequeño número de unidades fundamentales, muchas de las magnitudes que se estudiarán, tales como velocidad, fuerza, ímpetu o momento lineal, trabajo, energía y potencia, pueden expresarse en función de tres unidades fundamentales: Longitud, tiempo y masa" [2].

"El sistema utilizado universalmente en la comunidad científica es el sistema internacional (SI)" [3].

"En el (SI) la unidad patrón de longitud es el metro, la unidad patrón del tiempo es el segundo y la unidad patrón de la masa es el kilogramo"[4]

Longitud

El patrón de longitud, el metro, se escogió originalmente de modo que la distancia del ecuador al polo norte a lo largo del meridiano que pasa por parís fuese metros.

---

[1] Paul A Tipler. Física para la ciencia y la tecnología. Editorial Reverte. Tomo I
[2] Íbid.
[3] Íbid.
[4] Íbid.

En octubre de 1983, el metro se define como “la distancia recorrida por la luz en el vacío en un intervalo de 1/ 299.792,458 segundos”. Esta última definición establece que la velocidad de la luz en el vacío es de 299.792,458 metros por segundo.

Tiempo

Primera definición: El segundo es la fracción 1/ 86.400 de la duración de un día solar, es decir, la duración entre dos apariciones del Sol en un punto de la tierra. Actualmente hay otras definiciones de tiempo.

Masa

Admitiremos que a cada sistema material se puede hacer corresponder un número positivo llamado masa y que tenga la propiedad siguiente: la masa de un sistema es la suma de las masas de sus partes. La unidad de masa es el kilogramo (kilogramo).

Actualmente, un litro de agua tiene una masa de 0,999972 kilogramos.

Ejemplo resuelto

Un año - luz no es una medida de tiempo sino de longitud, igual a la distancia que la luz recorre en un año. Calcular el factor de conversión entre años – luz y metros.

Solución

$$1\text{año} = 1\text{año} \times \frac{365.25\,\text{d}}{1\text{año}} \times \frac{24\,\text{h}}{1\text{d}} \times \frac{60\,\text{min}}{1\text{h}} \times \frac{60\,\text{s}}{1\text{min}} = 3.16 \times 10^{7}\,\text{s}$$

La velocidad de la luz, con tres cifras significativas es . Entonces en un año la luz recorre una distancia de:

$$3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s} \times (3.16 \times 10^{7}\ \text{s}) = 9.48 \times 10^{15}\,\text{m} \quad (1\text{año-luz})$$

8.4.2. Ejercicio

a) Una unidad de tiempo a veces usada en la física microscópica es el trémolo. Un trémolo es igual a ¿hay más trémolos en un segundo que segundos en un año?

b) El ser humano ha existido desde hace años. Mientras que el universo tiene una edad de años aproximadamente. Si la edad del universo fuera de un día ¿Cuántos segundos de existencia tendría el ser humano?

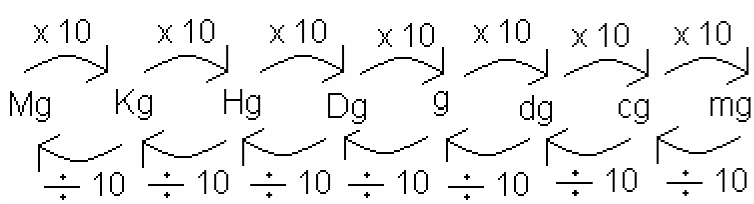
8.4.3. Conversión de unidades

Una misma longitud puede expresarse con diferentes unidades. Por ejemplo: El largo del tablero es de 1,2 metros; que también se puede decir 120 centímetros. Para resolver un problema debemos convertir las diferentes unidades a la unidad patrón respectiva del (SI), empleando para tal efecto los factores de conversión.

A continuación ilustramos una estrategia muy práctica a la hora de hacer conversiones con la unidad de masa.

Múltiplos de Metro				Unidad Principal	Submúltiplos del Metro		
	Kilogramo	Hectogramo	Decagramo	Gramo	Decigramo	Centigramo	Miligramo
	Kg 1000 g	Hg 100 g	Dg 10 g	g	dg 0.1 g	cg 0.01g	mg 0.001 g

Metodología a utilizar:



Similarmente se puede elaborar el cuadro para otro tipo de unidad.

Ejemplo resuelto

Si la masa de un objeto es 3 toneladas +280 kilogramos + 75 gramos, la masa en gramos es:

a. $3,280075\times10^{6}$ b. 3×10^{5} c. $1,2\times10^{6}$ d. $32,80075\times10^{6}$

Solución

$$3\,ton\times\frac{1000kg}{1ton}=3000\,kg,\ 3000\,kg\times\frac{1000\,gr}{1kg}=3000000\,gr,\ 280\,kg\times\frac{1000gr}{1kg}=280000\,gr$$

En total son:

$$3000000gr+280000+75gr=3280075.\ gr=3,280075\times10^{6}$$

La respuesta correcta es la letra a.

8.4.4. Ejercicio

a) Un galón de pintura (volumen $9.78\times10^{-3}\ m^{3}$) cubre un área de $25.0\ m^{2}$. ¿Cuál es el espesor de la pintura en la pared?

b) En una probeta graduada se observa que 300 gotas de agua ocupan un volumen de $10\ cm^{3}$. ¿El volumen de una gota a cuánto equivale?

8.4.5. Notación científica

La notación científica sirve para expresar de una forma más cómoda aquellas cantidades que son demasiado grandes o pequeñas. Para ello se debe tener en cuenta la representación de las potencias de 10.

Ejemplo resuelto

Supongamos que un planeta tiene un radio de 9800000 metros. Escribir este valor en notación científica.

Solución

$$9800000=9.8\times1000000=9.8\times10^{6}\ \text{metros}$$

8.4.6. Ejercicio

a) Se midieron la longitud 1.200 metros y el ancho 30 metros de un terreno rectangular. El área de este terreno, con las cifras significativas correctas es:

a. $36.000\ m^2$
b. $3{,}6\times10^4\ m^2$
c. $3{,}60\times10^4\ m^2$
d. $3{,}6000\times10^4\ m^2$
e. $36.000{,}0\ m^2$

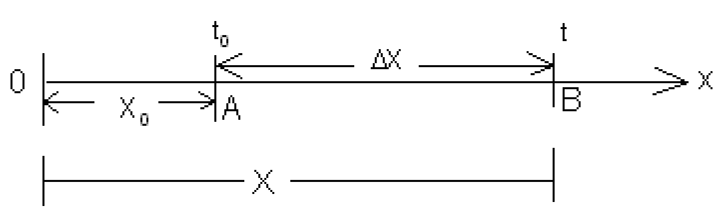
b) Una casa mide 25,68 metros por 6,245 metros ¿Cuál es el área de esta casa, con las cifras significativas?

a. $160{,}4 m^2$ b. $1{,}64\times10^3 m^2$ c. $16{,}4 m^2$ d. $160\times10^{-2}\ m^2$

8.4.7. Cinemática (movimiento rectilíneo)

La cinemática es la parte de la física que estudia cómo se mueven los cuerpos sin pretender explicar las causas que originan dichos movimientos. Más tarde, al estudiar las leyes de NEWTON, analizaremos el porqué se mueven.

Consideremos una partícula que se mueve en la dirección x. A continuación daremos unas definiciones en el marco de la cinemática



La posición X de la partícula en cualquier tiempo t es la distancia medida desde un punto arbitrario o, u origen, hasta el punto en que se encuentra la partícula sobre el eje.

Desplazamiento es el cambio de la posición del cuerpo. Lo indicamos con X_o en t_o y con x en t.

Velocidad media (V) Se denomina por:

$$V = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X - X_0}{t - t_0}$$

En el sistema internacional, la unidad se expresa en $\frac{m}{s}$ o $\frac{Km}{hr}$

Velocidad instantánea es el valor que toma la velocidad en un instante dado recibe el nombre de velocidad instantánea.

$$V_{Instantánea} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{dX}{dt}$$

Aceleración media es el cambio de velocidad desde V hasta $V + \Delta t$ como el cociente $\frac{\Delta V}{\Delta t}$. $\text{aceleración media} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$, donde $\Delta V = V_2 - V_1$

En el sistema internacional, la unidad se expresa en $\frac{m}{s^2}$

Aceleración Instantánea de una partícula en un tiempo t como el límite de la velocidad promedio cuando el incremento del tiempo se aproxima a cero.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}$$

Ejemplo resuelto

¿Cuál es la velocidad instantánea al instante $t_0 = 1\,s$ para un cuerpo cuya posición en metros está dada por $x = t^2$?

Solución

Calculemos la velocidad media para $t = 1{,}1\,s$

$$\bar{v} = \frac{(1{,}1)^2 - 1^2}{1{,}1 - 1} = 2{,}1\,m/s$$

Calculemos la velocidad media para $t = 1{,}01\,s$

$$\bar{v} = \frac{(1{,}01)^2 - 1^2}{1{,}01 - 1} = 2{,}01\,m/s$$

Calculemos la velocidad media para $t = 1{,}001\,s$

$$\bar{v} = \frac{(1{,}001)^2 - 1^2}{1{,}001 - 1} = 2{,}001\,m/s$$

A medida que el intervalo de tiempo de hace cada vez más pequeño, la velocidad media se acerca a $2\,m/s$. Podemos afirmar, que la velocidad instantánea en el instante $t_0 = 1\,s$ es igual a $2\,m/s$.

8.4.8. Ejercicio

Suponga que usted maneja un auto por una carretera recta durante 5 minutos a , en cuyo punto se queda sin gasolina. Camina 1 kilómetro hacia adelante, hasta la estación de gasolina más próxima, durante 20 minutos. ¿Cuál fue la velocidad promedio desde el momento en que arrancó con su auto hasta el momento en que llegó a la estación de gasolina?

8.4.9. Movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U)

El movimiento rectilíneo (por ejemplo en la dirección del eje X) y uniforme fue definido, por primera vez, por Galileo en los siguientes términos: «Por movimiento igual o uniforme entiendo aquél en el que los espacios recorridos por un móvil en tiempos iguales, tómense como se tomen, resultan iguales entre sí», o dicho de otro modo, es un movimiento de velocidad constante. Si la velocidad es constante, entonces la aceleración es igual a cero.

$$V = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \text{Constante} \rightarrow V = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}, \text{es decir } X_2 = X_1 + V(t_2 - t_1).$$

Por comodidad, redimiendo las variables X_2=X, t_2=2, $X_1 = X_0$ y escogiendo $t_1 = 0$, donde X_0 representa la posición inicial de la partícula para t = 0:

$$X = X_0 + V \cdot t$$

La ecuación anterior nos dice que la posición aumenta linealmente con el tiempo.

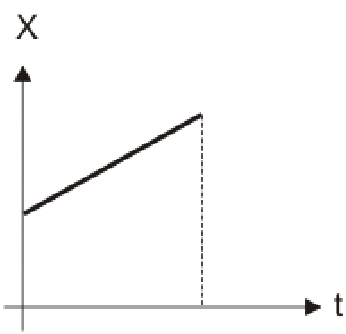
También es posible determinar dicha fórmula con las herramientas del cálculo:

$$\text{Dado que } v = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = vdt, \text{ utilizando integral a ambos lados:}$$

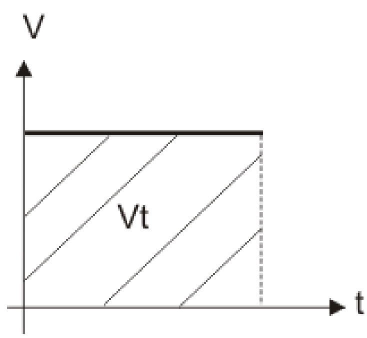
$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} vdt \rightarrow x\,|_{x_0}^{x} = v(t)_{t_0}^{t} \rightarrow x - x_0 = v(t - t_0) \rightarrow X = X_0 + V \cdot t$$

Gráficos

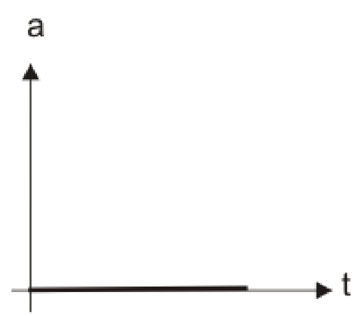
Posición $X = X_0 + V\,t$



Rapidez : $V = +$ constante

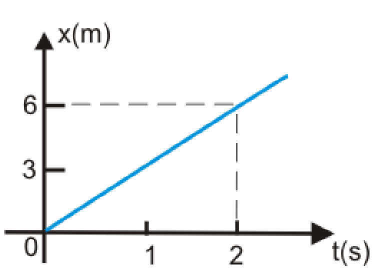


Aceleración : $a = 0$



Ejemplo resuelto

La gráfica de la siguiente figura representa un movimiento rectilíneo uniforme:



a. ¿Cuál es la velocidad de ese movimiento?
b. ¿Cuál es la ecuación del movimiento?
c. ¿Cuál es la posición del móvil a t = 1.5 segundos?

Solución

a.

$$m = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1} = \frac{6-3}{2-1} = 3\, {}^{m}\!/_{s} = \text{Velocidad}$$

b.

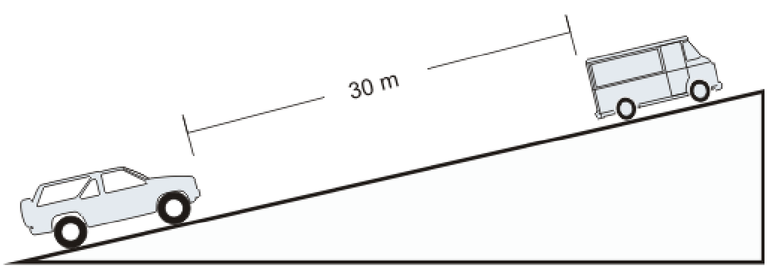
$$x = 3t$$

c.

$$x = 3\ m/s \cdot (1.5\ s) = 4.5m$$

Ejemplo resuelto

Sobre un plano inclinado un auto se encuentra a 30 metros de distancia de un camión como muestra la siguiente figura. El auto lleva una velocidad constante de 12 m/s, mientras que el camión lleva una velocidad constante de 10 m/s. Determinar en que punto se encuentran y en que tiempo.



Como ambos tienen velocidad constante, la formula a utilizar es $x = x_0 + v \cdot t$

$$\text{Para al auto}: x_A = 12\, {}^{m}\!/_{s} \cdot t \qquad \text{Para el camión}: x_C = 30\, m + 10\, {}^{m}\!/_{s} \cdot t$$

Se encuentran cuando $x_A = x_C$; es decir : $12 \, m/s \cdot t = 30\, m + 10 \, m/s \cdot t$

Despejando t encontramos $t = 15\, s$

Reemplazando t en $x_A = 12 \, m/s \cdot t$, encontramos $x_A = 180\, m$

8.4.10. Ejercicio

Un auto de 4 metros de longitud parte de una ciudad A con una velocidad de 2 m/s. En el mismo instante un tren de 84 metros de longitud parte hacia la estación A con una velocidad de 6 m/s. el auto y el tren están separados por una distancia de 64 metros.

- El tiempo que tarda el auto y el tren en cruzarse en segundos es:

a. 8 Seg   b. 10.6 Seg   c. 16 Seg   d. 32 Seg

- La distancia que ha recorrido el frente del carro cuando se encuentra con el frente del tren es

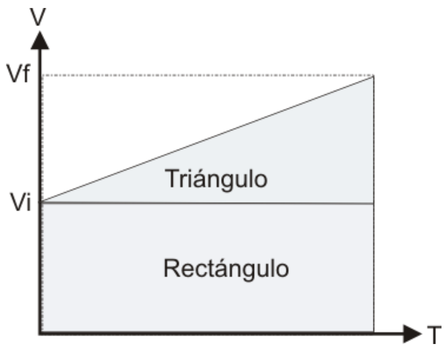
a. 16 mts   b. 32 mts   c. 48 mts   d. 16 mts

8.4.11. Movimiento Rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)

Este es un tipo de movimiento en una dirección (por ejemplo eje X) y con aceleración constante. Un cuerpo que se mueva con aceleración constante irá ganando velocidad con el tiempo de un modo uniforme, es decir, al mismo ritmo.

El movimiento rectilíneo uniformemente acelerado es un tipo de movimiento frecuente en la naturaleza. Una bola que rueda por un plano inclinado o una piedra que cae en el vacío desde lo alto de un edificio son cuerpos que se mueven ganando velocidad con el tiempo de un modo aproximadamente uniforme, es decir, con una aceleración constante.

Las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado se pueden obtener al a analizar el siguiente gráfico teniendo en cuenta que la pendiente corresponde a la aceleración y el área bajo la curva al espacio recorrido.



De acuerdo con la definición de aceleración:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t},\ a = \frac{v - v_i}{\Delta t} \rightarrow v = v_i + a \cdot t$$

De acuerdo al gráfico anterior, es posible hallar el espacio recorrido, calculando el área bajo la curva, la figura corresponde a un trapecio.

$$A = \frac{(B+b)}{2} \cdot h,\ \text{en el gráfico}: x = \frac{(v - v_i)}{2} \cdot t$$

Pero la figura se puede descomponer en un rectángulo y un triángulo, el área del trapecio es la suma del área del rectángulo y el área del triángulo.

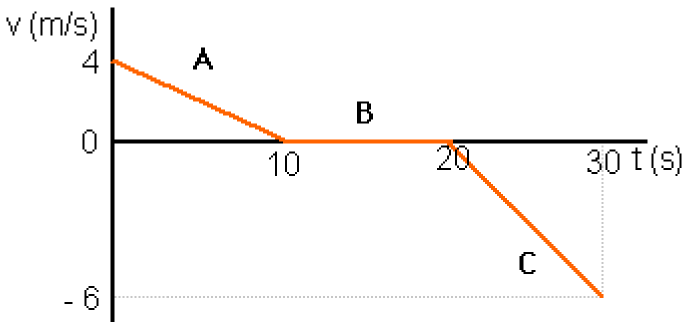
$$x = v_i \cdot t + \frac{(v - v_i)}{2} \cdot t;\ \ \text{pero}\ \ v - v_i = at,\ \text{entonces}\ x = v_i \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

Utilizando procedimientos algebraicos, en la ecuación 1, se despeja el tiempo y se reemplaza en la ecuación 2.

$$x = \frac{(v + v_i)}{2} \cdot \frac{(v - v_i)}{a};\ x = \frac{(v^2 + v_i^2)}{2 \cdot a}$$

Ejemplo resuelto

Analizar el siguiente gráfico:



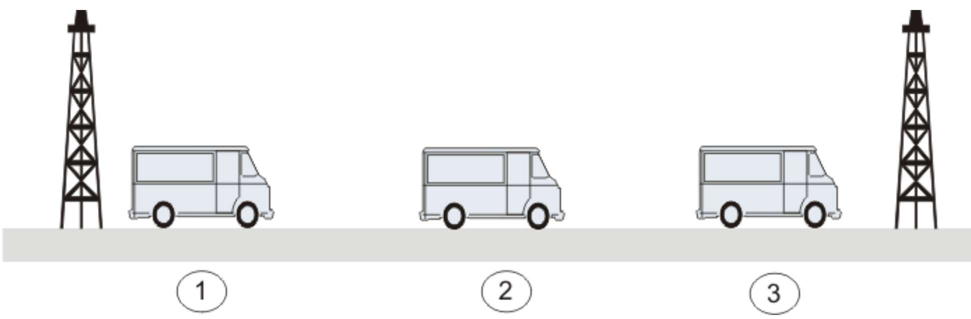
Solución

Tramo A	**Tramo B**
Tipo de movimiento = Uniformemente acelerado Distancia: Área triángulo: $\text{Base}\,x\,\text{altura}/2: \dfrac{10\text{s} \times 4 \,{}^{m}\!/\!{}_{s}}{2} = 20\text{m}$ Distancia y desplazamiento coinciden: El móvil recorre 20 m hacia la derecha en 10 segundos.	Tipo de movimiento = Está en reposo Tiempo = 10 segundos Área = 0 Durante 10 s permanece en reposo.

Tramo C	**Completo**
tipo de movimiento = Uniformemente acelerado Distancia: Área triángulo: $\text{Base}\,x\,\text{altura}/2: \dfrac{10\text{s} \times (-6 \,{}^{m}\!/\!{}_{s})}{2} = -30\text{m}$ Distancia y desplazamiento coinciden porque no hay cambios en el signo de la velocidad durante el tramo (siempre negativa). Durante 10 segundos recorre 30 m hacia la izquierda.	Duración total = 30 segundos Distancia y desplazamiento no coinciden porque hay cambios en el signo de la velocidad. Distancia = 20m + 30m = 50m Desplazamiento=20m -30m=-10m

Ejemplo resuelto

Un carro inicialmente en reposo, se pone en movimiento y aumenta uniformemente su velocidad hasta que al cabo de 10 segundos alcanza 20 m/s. A partir de ese instante, la velocidad se mantiene constante durante 15 segundos, después de los cuales el conductor disminuye uniformemente la velocidad hasta detenerse a los 5 segundos de haber comenzado a frenar. Teniendo en cuenta que el movimiento ha sido rectilíneo, calcula la aceleración del carro en cada intervalo de tiempo y el desplazamiento entre las dos torres. Construye las gráficas x-t, v-t y a-t



Solución

Intervalo 1

En este intervalo la velocidad aumenta uniformemente

$$\text{Aceleración}: a = \frac{V - V_0}{t} = \frac{20\ {}^{m}\!/\!_{s} - 0}{10\,s} = 2\ {}^{m}\!/\!_{s^2}$$

$$\text{Desplazamiento}: \Delta x = V_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} = \frac{20\ {}^{m}\!/\!_{s^2} - (10\,s)^2}{2} = 100\,m$$

Intervalo 2

En este intervalo la velocidad se mantiene constante. La aceleración es cero

$$\Delta x = V \cdot t = 20\ {}^{m}\!/\!_{s} \cdot (15s) = 300\,m$$

Intervalo 3

En este intervalo la velocidad disminuye uniformemente.

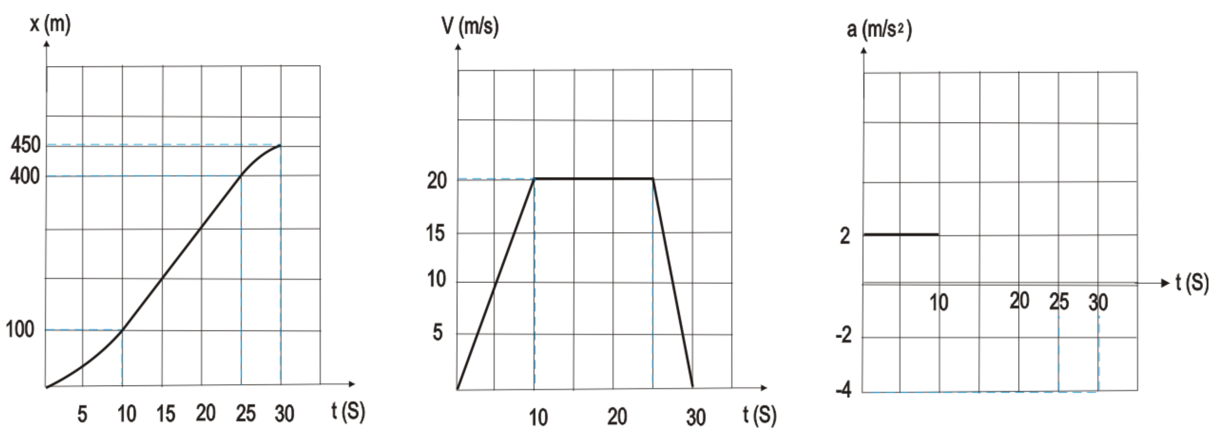
$$\text{Aceleración}: a = \frac{V - V_0}{t} = \frac{0 - 20\ {}^{m}\!/_{s}}{5s} = -4\ {}^{m}\!/_{s^2}$$

$$\text{Desplazamiento}: \Delta x = V_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} = 20\ {}^{m}\!/_{s} \cdot (5s) - \frac{4\ {}^{m}\!/_{s^2} \cdot (5s)^2}{2} = 50m$$

Desplazamiento total:

$$100m + 300m + 50m = 450m$$

Miremos las gráficas:



Explicación Gráfica: x-t

t (s)	X (m)	t (s)	X (m)	t (s)	X (m)
10	100	10 + 15 = 25	100 + 300 = 400	25 + 5 = 30	400 + 50 = 450

8.4.12. Ejercicio

Un auto A y un camión C se mueven en sentidos contrarios sobre la misma pista. En el instante en que el auto pasa por O, el camión cruza el punto B, que se encuentra a una distancia de 100 metros con respecto a O. El auto en el punto O va con una velocidad de $10\ m/s$ y una aceleración de $8\ m/s^2$, mientras que el camión se desplaza con velocidad de $20\ m/s$. Calcular en qué momento y lugar se encuentran.

8.4.13. Movimiento da caída libre

El caso más importante de movimiento uniformemente acelerado es el de caída libre bajo la acción de la gravedad. En ausencia de un medio resistente como el aire, es decir en el vacío, el movimiento de caída es de aceleración constante, siendo dicha aceleración la misma para todos los cuerpos, independientemente de cuáles sean su forma y su peso. La presencia de aire frena ese movimiento de caída y la aceleración pasa a depender entonces de la forma del cuerpo.

La aceleración en los movimientos de caída libre, conocida como aceleración de la gravedad, se representa por la letra g (a= - g) y toma un valor aproximado de $9.8\ {}^{m}\!/\!{}_{s^2}$.

Las ecuaciones de caída libre son:

$$v = v_i + a\cdot t \quad 1) \qquad y = v_i\cdot t + \frac{g\cdot t^2}{2} \quad 2) \qquad y = \frac{v^2 + v_i^2}{2\cdot g} \quad 3)$$

Se toma a = -g cuando el cuerpo es lanzado hacia arriba.

Ejemplo resuelto

Para medir la profundidad de un pozo se deja caer desde su boca una piedra. Al cabo de 3,5 segundos desde que se dejó caer la piedra se oye el golpe en el fondo.

a. ¿Qué es más rápido: la caída de la piedra o el recorrido del sonido?
b. ¿Cuál es la profundidad?

Solución

Llamando t_1 al tiempo que tarda la piedra en recorrer la altura h del pozo y llegar al fondo. Parte de reposo.

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2 \qquad (1)$$

Por otro lado, llamando t_2 al tiempo que tarda el sonido en recorrer esa altura h. la velocidad del sonido es constante (330 metros/segundo):

$$h = 330t_2 \quad (2)$$

Por último sabemos que $t_1 + t_2 = 3{,}5 \text{ Segundos.} \quad (3)$

Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos:

$$\text{Dividimos la 1 por la 3. } \frac{h}{h} = \frac{\frac{1}{2}gt_1^2}{330t_2} \rightarrow 1 = \frac{gt_1^2}{660t_2} \rightarrow 660t_2 = gt_1^2$$

$$\text{Reemplazando } t_1 + t_2 = 3{,}5 \text{ tenemos } 660(3.5 - t_1) = gt_1^2$$

$$2310 - 660t_1 = 9.8t_1^2\text{; es una ecuación cuadrática, resolviendo } t_1 = 3.33\,\text{seg}$$

$$\text{Reemplazando } t_1 \text{ en la ecuación } 3: t_2 = 0.17\,\text{seg}$$

El sonido es más rápido que la piedra

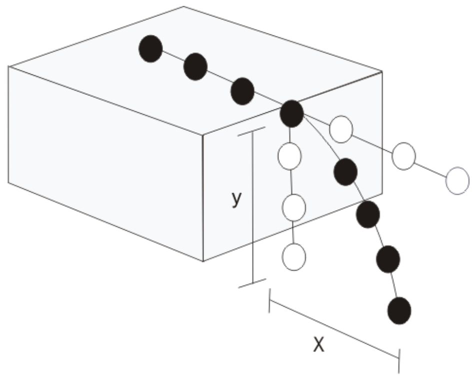
Reemplazando el tiempo en la ecuación 2: h = 56 metros de profundidad.

Ejercicio

Desde el borde de la ventana se deja caer una esfera de acero. Si el cuerpo tarda 0.3 segundos en pasar por una ventana cuya altura es de 3 metros ¿Qué distancia hay entre el borde superior de la ventana y la azotea?

8.4.14. Movimiento semiparabólico

En este movimiento los cuerpos están sometidos a dos movimientos: uno horizontal uniforme y el otro vertical acelerado. El cuerpo al lanzase horizontalmente describe un movimiento semiparabólico.



En el eje x tenemos un movimiento rectilíneo uniforme (Velocidad constante)
En el eje y tenemos un movimiento uniforme acelerado (Aceleración constante)

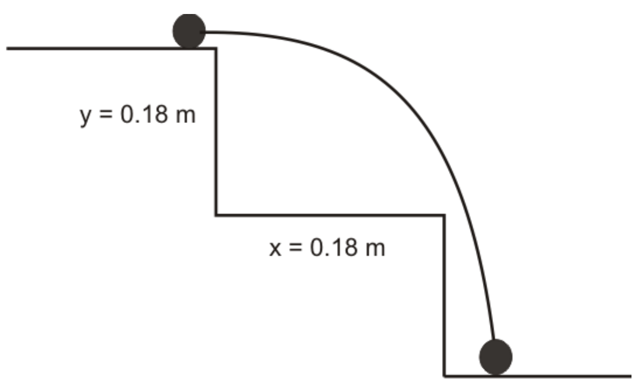
eje Horizontal	Eje Vertical
$x = v_0 \cdot t$	$y = \frac{g \cdot t^2}{2}$

Donde y es la altura y el valor de x es el alcance horizontal

Ejemplo resuelto

Una pelota sale rodando por el borde de una escalera con una velocidad horizontal de 1.08 m/s. Si los escalones tienen 18 centímetros de altura y 18 centímetros de ancho, ¿Cuál será el primer escalón que toque la pelota?

Solución



Utilizando $y = \frac{g \cdot t^2}{2}$ tenemos: $2(0.18m) = 9.8 \, {}^{m}/_{s} \, t^2 \rightarrow t = 0.189\,s$

Reemplazo $t = 0.189\ s$ en $x = v_0 \cdot t$ tenemos: $x = 1.08\ {}^{m}\!/\!{}_{s} \cdot (0.189\,s) = 0.20\ m$

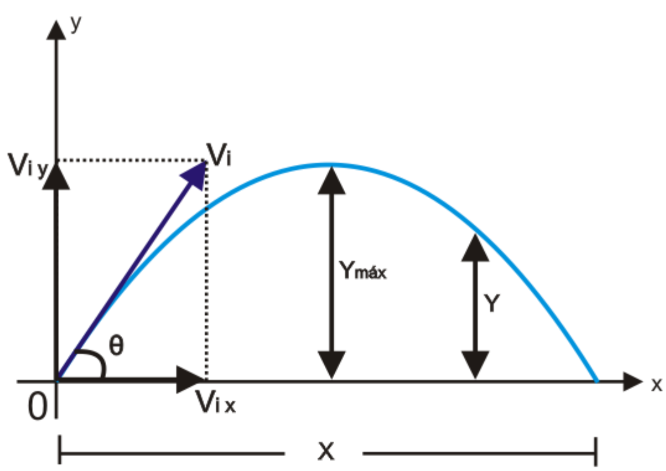
La pelota cae en el segundo escalón.

8.4.15. Ejercicio

Una pelota sale rodando del borde de una mesa de 1.25 metros de altura. Si cae al suelo en un punto situado a 1.5 metros del pie de la mesa ¿qué velocidad llevaba la pelota al salir de la mesa?

8.4.16. Movimiento parabólico

Es el movimiento que realizan los objetos al ser lanzados cerca de la superficie terrestre con un ángulo de inclinación respecto al suelo. Los cuerpos se hallan sometidos a dos movimientos: uno horizontal y el otro vertical



Utilizando las funciones Seno y Coseno deducimos las componentes de la velocidad.

$$v_{i\,x} = v_i \cdot Cos\theta \qquad v_{i\,y} = v_i \cdot Sen\theta$$

La velocidad horizontal siempre es constante, por consiguiente:

$$v_{f\,x} = v_{i\,x} = v_i \cdot Cos\theta$$

El alcance horizontal del cuerpo viene dado por:

$$X_{max} = v_{ix} \cdot t_V = v_i \cdot Cos\theta \cdot t_V$$

La velocidad vertical tiene un comportamiento uniformemente acelerado.

$$\text{De } v_y = v_{iy} - g \cdot t \text{ deducimos que}: v_y = v_i Sen\theta - g \cdot t$$

La altura máxima que alcanza el cuerpo nos indica que, cuando alcanza la altura más alta la componente vertical de la velocidad es nula. El cuerpo sube (-g).

$$\text{De } y_{max} = \frac{v_y^2 - v_{iy}^2}{-2 \cdot g} \text{ deducimos que}: y_{max} = \frac{v_{iy}^2}{2 \cdot g} \rightarrow y_{max} = \frac{v_i^2 \cdot Sen^2\theta}{2 \cdot g}$$

El tiempo de subida nos señala que en el punto más alto la componente vertical de la velocidad es cero.

$$\text{De } v_y = v_{iy} - g \cdot t \text{ deducimos que}: t_{Sub} = \frac{v_i Sen\theta}{g}$$

El tiempo de vuelo es: $t_V = 2 \cdot t_{Sub}$, por lo tanto: $t_V = \dfrac{2v_i Sen\theta}{g}$

La velocidad del cuerpo en un momento dado viene dado por el teorema de Pitágoras.

$$V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Para calcular una altura diferente a la altura máxima utilizamos la formula:

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 Sen\theta t$$

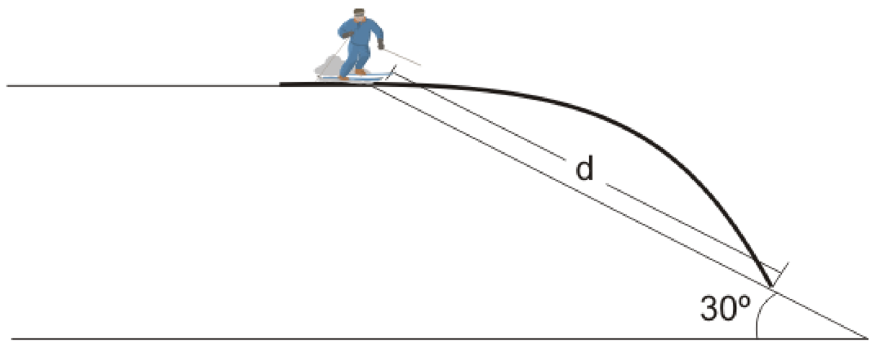
Si en la formula de alcance horizontal despejamos el tiempo de vuelo y lo reemplazamos en la formula $y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 Sen\theta t$ tenemos lo siguiente:

$$y=-\frac{1}{2}g(\frac{x}{v_i\cdot Cos\theta})^2+(\frac{Sen\theta}{Cos\theta})x\rightarrow y=-\frac{1}{2}g(\frac{x}{v_i\cdot Cos\theta})^2+(Tan\theta)x$$

Nos resulta una ecuación de la forma $y=-ax^2+b$, que es la ecuación de una parábola

Ejemplo resuelto

Un esquiador abandona la plataforma horizontalmente, como se muestra en la figura. ¿A qué distancia a lo largo de la pendiente de 30° tocará el suelo? La rapidez de salida del esquiador es de 40 [m/s].



Solución

En la figura se puede observar que:

$$Tang\,30^o=\frac{y}{x}\rightarrow \text{o sea}\ \frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{y}{x},\ \text{además Tangente II cuadrante es (-)}$$

$$\text{entonces}\quad y=-\frac{x}{\sqrt{3}}\qquad 1)$$

El punto donde el esquiador toca la pendiente, es la intersección de la parábola.

Como $\theta=0^o$, ya que el esquiador dale horizontalmente, entonces podemos reemplazar $\theta=0^o$ en la formula $y=-\frac{1}{2}g(\frac{x}{v_i\cdot Cos\theta})^2+(Tan\theta)x$ obtenemos:

$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_i^2} \qquad 2)$$

Igualando la ecuación 1 con la 2, obtenemos:

$$x = \frac{2v_i^2}{\sqrt{3}g} \text{ numéricamente } x = 188.5\,m$$

$$\text{Pero } \cos 30º = \frac{x}{d} \rightarrow d = x \cos 30º \rightarrow d = 217.6\,m$$

8.4.17. Ejercicio

Se lanza una pelota desde la ventana del piso más alto de un edificio. Se da a la pelota una velocidad inicial de a un ángulo de 20 º debajo de la horizontal. La pelota golpea el suelo 3 segundos después.

a. A qué distancia horizontal a partir de la base del edificio la pelota golpea el suelo

b. Encuentre la altura desde la cual se lanzo la pelota

c. Cuánto tiempo tarda la pelota para alcanzar un punto de 10 metros bajo del nivel del lanzamiento

8.4.18. Movimiento circular

Movimiento circular es un movimiento curvilíneo cuya trayectoria es un círculo; por ejemplo; el movimiento de las manecillas del reloj.

Consideremos un cuerpo que describe una trayectoria circular de radio R (figura e)

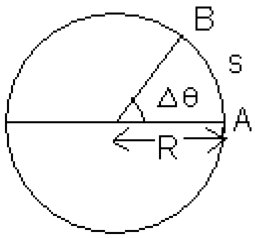


Figura e

$\theta =$ es la posición angular.
$s =$ es el recorrido del auto en metros o Km.

Velocidad angular media: es el cociente entre el desplazamiento y el tiempo.

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Velocidad angular Instantánea: se obtiene calculando la aceleración angular media en un intervalo de tiempo que tiende a cero.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Aceleración angular media: al cociente entre el cambio de velocidad angular y el intervalo de tiempo que tarda en efectuar dicho cambio.

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

La aceleración angular Instantánea: se obtiene calculando la aceleración angular media en un intervalo de tiempo que tiende a cero.

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

8.4.19. Movimiento circular uniforme M.C.U

En este caso la velocidad angular es constante (ω), entonces $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0$; es decir no hay aceleración tangencial, el movimiento es periódico y la partícula pasa por cada punto del círculo a intervalos regulares de tiempo. Si ω es constante, es posible establecer una analogía con el movimiento rectilíneo uniforme.

$$X = X_0 + V \cdot t \quad \leftrightarrow \quad \theta = \theta_0 + \omega \cdot t$$

Se define la frecuencia f, en un movimiento circular uniforme como el número de vueltas (n) por unidad de tiempo (t); es decir:

$$f = \frac{n}{t}$$

Y el período (P), como el tiempo (t) sobre número de vueltas (n), esto es:

$$P = \frac{t}{n}$$

Por lo tanto el período es el inverso de la frecuencia:

$$P = \frac{1}{f}$$

El período se expresa en segundos, la frecuencia se debe expresar en $(seg)^{-1}$. A esta unidad se le llama HERTZ y se le abrevia Hz. Así, una frecuencia de un HERTZ corresponde a una revolución (o ciclo) por segundo.

Además: cuando el auto da una vuelta completa, entonces recorrió 2π (360º) y el tiempo empleado es igual al período.

El valor de s (recorrido del auto en metros es $2\pi R$).

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{P} = 2\pi f, \text{ además } \quad V = \frac{s}{t} = \frac{2\pi R}{P}, \text{ pero } \omega = \frac{2\pi}{P} \text{ tenemos que}: V = \omega R \rightarrow \omega = \frac{V}{R}$$

Ejemplo resuelto

Un juego mecánico, los pasajeros viajan con velocidad constante en un círculo de 5.0 metros de radio, dando una vuelta cada 4.0 segundos. Calcular el valor de la velocidad.

Solución

Como la velocidad es constante, podemos utilizar la ecuación $V = \frac{2\pi R}{P}$

$$V = \frac{2\pi(5.0\ m)}{4.0\ s} = 7.9\ m/s$$

8.4.20. Ejercicio

En el ciclo de centrifugado de una máquina lavadora, el tubo de 0.3 metros de radio gira a una tasa constante de $630\ rev/min$ ¿Cuál es la máxima velocidad lineal con la cual el agua sale de la máquina?

8.4.21. Movimiento circular con aceleración angular constante

En este movimiento la aceleración angular (α) es constante. Haciendo una analogía con las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniforme acelerado tenemos:

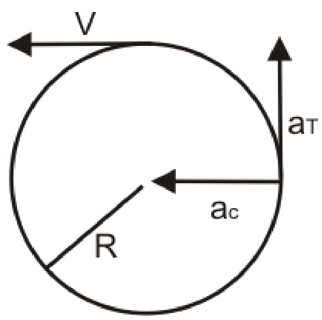
MRUA	**MCUA**
$v = v_i + a \cdot t$	$\omega = \omega_i + \alpha \cdot t$
$x = v_i \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$	$\theta = \omega_i \cdot t + \frac{\alpha \cdot t^2}{2}$
$x = \frac{(v^2 + v_i^2)}{2 \cdot a}$	$\theta = \frac{(\omega^2 + \omega_i^2)}{2 \cdot \alpha}$

8.4.22. Aceleración centrípeta

"Es la aceleración que experimenta un cuerpo por moverse en una trayectoria circular de radio R con una cierta velocidad lineal (V)"[5i].

[5] http://espanol.answers.yahoo.com/question/index?qid=20080224233615AATktGL

El gráfico siguiente nos ilustra tal situación.



La magnitud de la aceleración centrípeta se calcula con la siguiente ecuación:

$$A_c = \frac{V^2}{R}$$

“Ejemplos de la aceleración centrípeta: cuando un auto está girando en una curva. Los planetas giran alrededor del sol, por tanto experimentan una aceleración centrípeta”[6].

“La aceleración centrípeta siempre va apuntando hacia el centro de la circunferencia que describe el movimiento”[7].

“Por último, así no sea un movimiento circular uniforme, sino que tan solo haya movimiento que implique seguir una curva en el espacio...existirá una aceleración centrípeta”[8].

Podemos concluir que hay una aceleración total. Una, la aceleración centrípeta que es perpendicular a la trayectoria, y da idea de la rapidez con la que el móvil cambia de orientación; la otra, la aceleración tangencial que es tangente a la trayectoria y representa la rapidez con la que varía en módulo el vector velocidad. Si la primera componente no es nula, eso significa que el movimiento es circular; si la segunda tampoco lo es quiere decir que el movimiento no es uniforme.

$$a\,total = \sqrt{a_c^{\,2} + a_T^{\,2}}$$

La aceleración centrípeta siempre va apuntando hacia el centro de la circunferencia que describe el movimiento.

[6] http://espanol.answers.yahoo.com/question/index?qid=20080224233615AATktGL
[7] Íbid.
[8] Íbid.

Tanto la aceleración centrípeta como la aceleración tangencial tienen como unidades (m/seg^2).

Ejemplo resuelto

Una rueda de 3 metros de radio acelera uniformemente desde el reposo dando 6 vueltas completas en los primeros 4 segundos.

Hallar el valor de la aceleración total de un punto P sobre la periferia de la rueda en el instante t = 1 segundo.

Solución

$\omega = \omega_o + \alpha t \rightarrow \omega = \alpha t$ 1), ya que ω_o (reposo).

$\theta = \theta_o + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \rightarrow \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$ 2) θ en radianes.

Para $t = 4$ segundos y $\theta = 6$ revoluciones. Pasando estas revoluciones o vueltas a radianes tenemos: 1 vuelta en radianes son (2π). ¿6 vueltas cuántos radianes son (θ)?

$\theta = 6x(6,28)\ rad = 37,7\ rad.$

De 2) despeja $\alpha \rightarrow \alpha = \frac{2\theta}{t^2} \rightarrow \alpha = \frac{2(37,7)}{(4)^2} \rightarrow \alpha = 4,7\ rad/seg^2$

$a_T = \alpha R \rightarrow a_T = 4,7 rad/seg \cdot (3mts) = 14,1 mts/seg^2$

De 1) $\omega = \alpha t \rightarrow \omega = 4,7 rad/seg^2 \cdot (1seg) = 4,7 rad/seg$

Usando $a_N = \omega^2 R \rightarrow a_N = 66,7 m/seg^2$. $a = \sqrt{{a_N}^2 + {a_T}^2} = 67,8 mts/seg^2$

8.4.23. Ejercicio

Dos poleas de 20 y 25 centímetros de radio respectivamente, giran conectadas por una banda. Si la frecuencia de la polea de menor radio es, ¿Cuál será la frecuencia de la polea de mayor radio?

8.4.24. Leyes de Newton

Las leyes de Newton están asociadas al concepto de Fuerza, la cual se considera un vector por tener magnitud, dirección y sentido.

La fuerza es la acción física que modifica el estado de reposo o movimiento de los cuerpos.

Primera ley: Todo cuerpo tiende a mantener su estado de movimiento rectilíneo con velocidad constante, o permanecerá en reposo si el cuerpo se encuentra inicialmente en este estado.

Segunda ley: "Nos dice que la fuerza neta aplicada sobre un cuerpo es proporcional a la aceleración que adquiere dicho cuerpo. La constante de proporcionalidad es la masa del cuerpo, de manera que podemos expresar la relación de la siguiente manera"[9]

Tercera ley: Cuando dos partículas interaccionan entre sí, la fuerza que haga la partícula 1 sobre 2 es igual en módulo y dirección pero de sentido contrario a la que hace 2 sobre 1. Es decir, las fuerzas en la naturaleza se presentan por pares, fuerza de acción y fuerza de reacción.

Peso de un cuerpo (w): El peso de un cuerpo es la fuerza gravitatoria que sobre el ejerce la tierra. Siendo el peso una fuerza, esta es una cantidad vectorial. La dirección de este vector es la dirección de la fuerza gravitatoria, es decir, central y por lo tanto en la línea que une ambos cuerpos. De esta forma el vector (w) queda hacia el centro de la Tierra donde su magnitud se expresa en [Newton] o en alguna otra unidad de fuerza. Un newton equivale a un $kg \cdot \frac{m}{s^2}$

Cuando un cuerpo de masa m se deja caer libremente, su aceleración es la aceleración de gravedad (g) y la fuerza que actúa sobre el es (w).

$$w = m \cdot g$$

Fuerza de Tensión (T): "Es la fuerza ejercida por una cuerda, considerada de masa despreciable, sobre un cuerpo que está ligado a ella"[10].

Fuerzas de fricción: "El hecho de que un cuerpo arrojado en una mesa, al cabo de cierto tiempo se detenga, conlleva a que sobre el cuerpo interviene una resistencia contraria al movimiento. Como

[9] http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Fisica/02/leyes.html
[10] Paul Tippens. Física I. 3. Ed. México. McGraw-Hill, 2008.

esta resistencia produce una disminución en la velocidad de cuerpo, esta se cuantifica mediante una fuerza. Esta fuerza se denomina de fricción o roce (f_r)"[11].

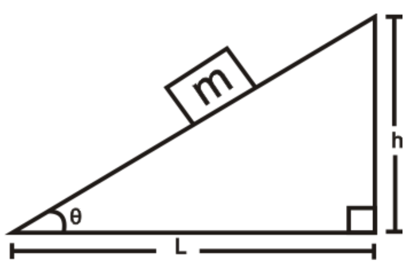
"Las fuerzas de fricción que obran entre superficies en reposo, una con respecto a la otra, se llaman fuerzas de fricción estática. La máxima fuerza de fricción estática será igual a la mínima fuerza necesaria para iniciar el movimiento. Una vez que el movimiento comienza, las fuerzas de fricción que actúan entre las superficies ordinariamente disminuyen, de tal manera que basta una fuerza menor para conservar el movimiento uniforme. Las fuerzas que obran entre las superficies en movimiento relativo se llaman fuerzas de fricción cinética o dinámica"[12].

"Para dos tipos dados de superficie cualquiera que estén secas y no lubricadas, experimentalmente se encuentra que la máxima fuerza de roce estática entre ellas, es decir, cuando el cuerpo está a punto de moverse, es aproximadamente independiente del área de contacto entre amplios límites, pero es proporcional a la fuerza normal (N) que mantiene en contacto a las dos superficies; es decir, $f_r = \mu \cdot N$"[13].

Donde μ es la constante de proporcionalidad llamada coeficiente de roce estático o cinético e.
Tanto los coeficientes son coeficientes sin dimensiones, los cuales dependen de la naturaleza de ambas superficies de contacto, siendo mayores en superficies ásperas o rugosas y menores, en general, si son lisas.

Ejemplo resuelto

Un bloque de masa (m) se encuentra en reposo sobre un plano inclinado el cual posee un coeficiente de fricción crítico (), como se muestra la figura:



La expresión que representa dicho coeficiente es:

[11] Paul Tippens. Física I. 3. Ed. México. McGraw-Hill, 2008.
[12] Íbid.
[13] Íbid.

a. L/h

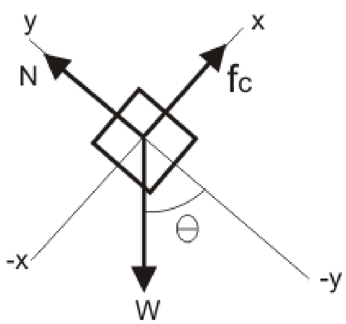
b. $Cos\theta$

c. $Sen\theta$

d. h/L

Solución

Realizando el diagrama de fuerzas tenemos:



Sacando las ecuaciones de las fuerzas en cada eje tenemos:

$$\text{Eje x} \rightarrow F_r - w_x = 0 \rightarrow F_r = wSen\theta \quad 1)$$

$$\text{Eje y} \rightarrow N - w_y = 0 \rightarrow N = wCos\theta \quad 2)$$

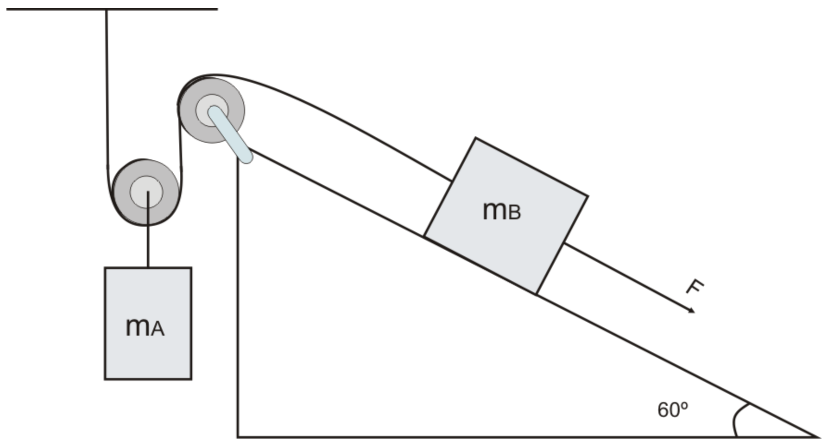
$$1 \div 2 \rightarrow \frac{F_r}{N} = Tang\theta \rightarrow \frac{\mu N}{N} = Tang\theta, \text{ pero } \; Tang\theta = \frac{h}{L} \rightarrow \mu = \frac{h}{L}$$

La respuesta correcta es la letra d.

Ejemplo resuelto

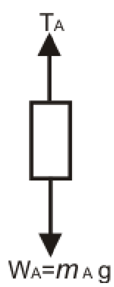
Usando los datos que se indican, calcular la magnitud de F de la fuerza de modo que el bloque de masa m_a suba con aceleración de magnitud $a_A = 2\, m/s^2$. Las poleas son de masa despreciable.

$$m_b = 1kg, \quad m_a = 2m_b \text{ kg}, \quad \mu = 0.2, \quad g = 10\, m/s^2$$



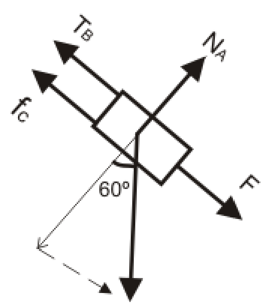
Solución

Análisis para m_A:



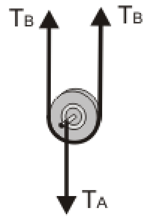
$$\sum F \text{ eje } y: T_A - m_A g = m_A a_A \quad 1)$$

Análisis para m_B:



$$\sum F \text{ eje } x: F - T_B + m_B g \,\text{Sen}(60^o) - f_c = m_B a_B \quad 2)$$

$$\sum F \text{ eje } y: N_B - m_B g \,\text{Cos}(60^o) = 0 \quad 3)$$



$$\sum F : 2T_B - T_A = 0 \quad \text{(masa polea despreciable)} \qquad 4)$$

Como:

$$f_c = N \cdot \mu, \quad a_B = 2a_A, \quad T_A = 2T_B, \quad m_a = 2m_b;$$

Reemplazando la ecuación 4 en la 2 nos queda:

$$F - \frac{T_A}{2} + m_B\, g\, Sen(60^o) - f_c = m_B\, a_B$$

Reemplazamos la ecuación 1 en esta última:

$$F - \frac{m_A\, a_A + m_A\, g}{2} + m_B\, g\, Sen(60^o) - f_c = m_B\, a_B$$

Reemplazando la 3 en la anterior:

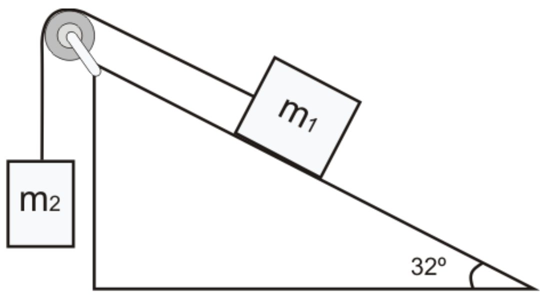
$$F - \frac{m_A\, a_A + m_A\, g}{2} + m_B\, g\, Sen(60^o) - \mu m_B\, g\, Cos(60^o) = m_B\, a_B$$

Reemplazando los datos conocidos y organizando la anterior nos queda:

$$F = \frac{2\, a_A (2m_B + m_A) + 2\mu m_B\, g\, Cos(60^o) + m_A\, g - 2m_B\, g\, Sen(60^o)}{2} = 10.3N$$

Ejercicio

Sobre un plano inclinado como muestra la siguiente figura, tenemos dos cuerpos unidos por una cuerda. Consideremos despreciable la masa de la polea. Teniendo los valores de las masas , encontrar la tensión de la cuerda.


m1
m2
32º

8.5. PRUEBA FINAL

Selecciona la respuesta correcta en los siguientes ejercicios

- Solo las propiedades susceptibles de ser medidas son consideradas una magnitud. de las siguientes propiedades no es una magnitud

a. La temperatura b. la masa c. La relatividad d. La longitud

- Una de las siguientes expresiones es falsa:

a. 144km/h = 40m/s b. 7m/s = 42000 cm/min
c. 36m/s = 10 km/h d. 28min = 1680 s

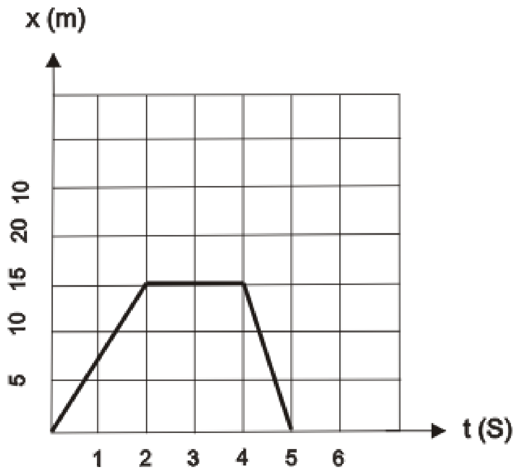
- Una de las siguientes expresiones es verdadera:

a. $12000000000\,km/h = 1.2x10^{-9}\,km/h$ b. $0,0000034\,km = 3,4x10^{6}\,km$
c. $6300000\,h = 6,3x10^{5}h$ d. $13500000000000\,m/s = 1,35x10^{13}m/s$

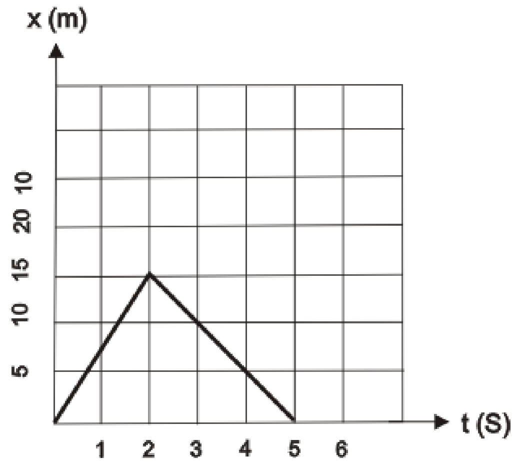
- El resultado de $0.00070\,m/s \times 0.0030$ es:

a. $2.1\,x\,10^{-6}\,m$ b. $0,0000021m$
c. $2.1\,x\,10^{-5}\,m$ d. $0.000021m$

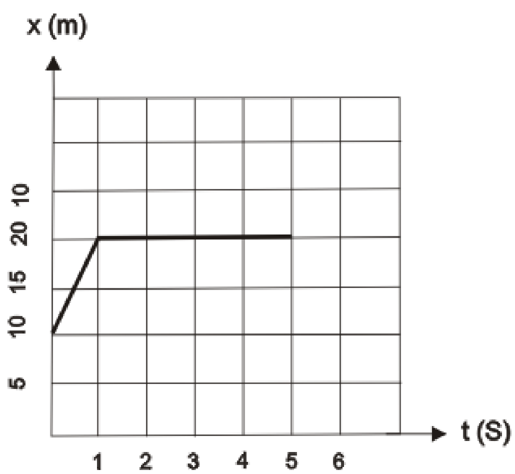
De acuerdo al siguiente gráfico contesta las preguntas



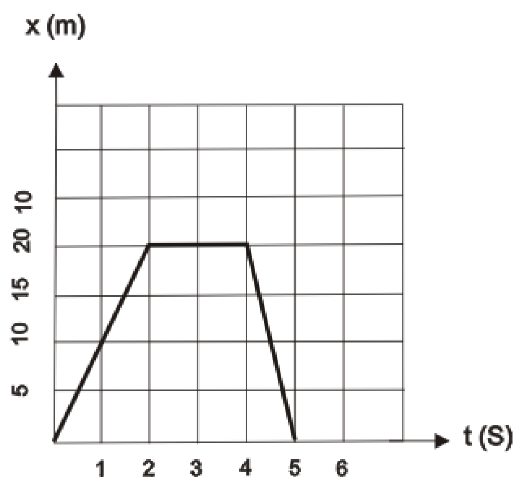
A.



B.



C.



D.

- En toda gráfica lineal la pendiente indica la razón de cambio de la variable dependiente (ubicada en el eje vertical o de la ordenada) por unidad de cambio de la variable independiente (ubicada en el eje horizontal o de la abscisa). En las gráficas de espacio X (m) contra tiempo t (s), la pendiente de las líneas nos indica:
  a. El recorrido
  b. El desplazamiento
  c. La velocidad
  d. La aceleración
- La única gráfica que nos describe un cuerpo en permanente movimiento es:

  a. Gráfica A
  b. Gráfica B

c. Gráfica C
d. Gráfica D

- Cuál gráfica nos indica el siguiente fenómeno: “Un cuerpo lleva una velocidad de 10 m/s. Se queda quieto al cabo de dos segundos y luego se devuelve a su punto de partida en 1 segundo”.

e. Gráfica A
f. Gráfica B
g. Gráfica C
h. Gráfica D

- En todas las gráficas el cuerpo vuelve a su punto de partida, a excepción de la:

a. Gráfica A
b. Gráfica B
a. Gráfica C
b. Gráfica D

- La distancia total recorrida en la gráfica A entre 0 y 5 segundos es de:

a. Gráfica A
b. Gráfica B
c. Gráfica C
d. Gráfica D

- La velocidad media en la gráfica A es:

a. 6 m/s
b. 0 m/s
c. 5 m/s
d. 3 m/s

- El desplazamiento entre 0 y 5 segundos en la gráfica A es de:

a. 0 metros
b. 15 metros
c. 25 metros
d. 30 metros

Consultar sobre este ejercicio y otros en:

http://www.cespro.com/Materias/MatContenidos/ContFisica/tallergraficasxt.htm

- La principal característica de un movimiento uniformemente acelerado es:

  a. Velocidad constante.
  b. Aceleración variable.
  c. Se recorren espacios iguales en tiempos iguales.
  d. Aceleración constante.

- En la expresión $y = \frac{1}{2}at^2$, si el valor de t se duplica; Entonces el valor de y:

a. Se duplica b. Se triplica c. Se reduce a la mitad d. Se cuadriplica

- Una piedra que se deja caer desde una altura de 45m tarda en llegar al suelo:

a. 1 seg b. 2 seg c. 3 seg d. 4 seg

- La altura desde la que se soltó un cuerpo que tardó 5 segundos en llegar al suelo fue de:

a. 25 mts b. 125 mts c. 75 mts d. 50 mts

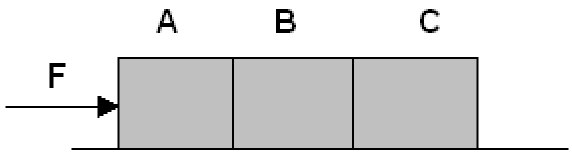
- Uno de los siguientes enunciados es falso:

  a. La aceleración para los movimientos de caída libre es la misma para todos los cuerpos.
  b. Todos los cuerpos en el vacío caen al mismo tiempo.
  c. La velocidad de un objeto lanzado verticalmente hacia arriba en el instante. que alcanza la máxima altura, puede ser diferente de cero.
  d. El movimiento de caída libre es un movimiento uniformemente acelerado.

- Un auto móvil que viaja con velocidad de 20m/s frena con una desaceleración constante y se detiene en 8 segundos, en este frenado recorre una distancia de:

a. 160mts b. 28mts c. 80mts d. 2,5mts

Las siguientes dos preguntas se responden de acuerdo al siguiente enunciado: Tres cuerpos iguales de masa M = 20 kilogramos. Cada uno está en contacto sobre una superficie horizontal, tal como se ve en la figura. El sistema se mueve por la acción de una fuerza horizontal de módulo F. (considere los tres cuerpos como una sola masa).



- Suponiendo que el coeficiente de fricción entre los cuerpos y la superficie horizontal es μ. El valor de F para que el sistema tenga una aceleración (a) está dada por la expresión:

a. $\frac{N - W}{M} = F$ b. $Ma - \mu W = F$ c. $N\mu + W = F$ d. $Ma + \mu W = F$

- Un expresión válida para la fuerza de rozamiento sería:

a. $F_R = 3\mu W$ b. $F_R = \mu W$ c. $F_R = -\mu W$ d. $F_R = \frac{\mu W}{N}$

8.5.1. Actividades

- Investiga las siguientes páginas de Internet y elabora una serie de conclusiones

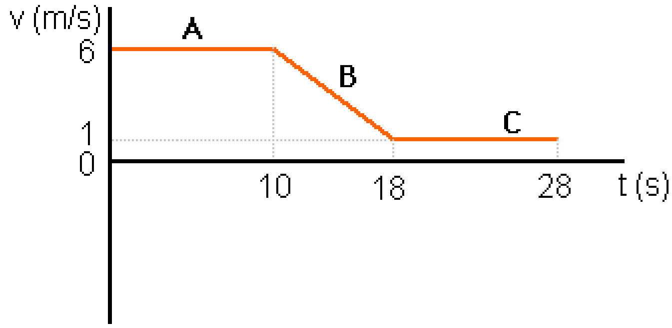
http://lefmvespertino.usach.cl/animaciones.htm

http://www.unalmed.edu.co/~daristiz/virtual/laboratoriovirtual.htm

Las siguientes actividades nos remiten a la solución de problemas de la vida cotidiana, en donde la investigación es un pilar fundamental del conocimiento.

- Se deja caer una pelota de caucho desde una altura de 30 meros. Si al rebotar alcanza una rapidez igual al 20 % de la rapidez con la qué llegó al suelo, entonces, ¿Qué altura alcanza en el rebote?

Dado el siguiente gráfico



- Contestar las siguientes preguntas:

    a. Tipo de movimiento en cada intervalo.

    a. Hallar la distancia que recorre en cada intervalo.

    b. Hallar el desplazamiento en cada intervalo y el desplazamiento total.

- Una pelota de Golf es lanzada con una velocidad de 60 m/s y formando un ángulo de 37º con la horizontal. El cuerpo cae sobre un montículo a una distancia horizontal de 240 metros. Calcular:

    a. Qué elevación tiene el montículo.

    b. Qué velocidad tiene el balón al chocar el montículo.

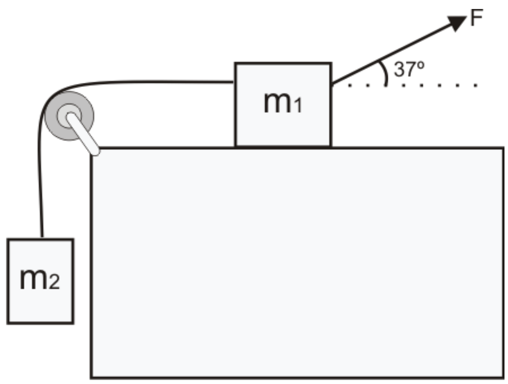
- Una rueda de 10 centímetros de radio parte del reposo y gira con aceleración angular constante de $4 rad/seg^2$ cuando ha completado $4/\pi$ vueltas. Hallar:

    a. Ángulo barrido.

    b. Tiempo empleado.

    c. Velocidad angular.

- La figura muestra dos bloques de masas $m_1 = 3kg$ y $m_2 = 2kg$ ligados por una cuerda de masa despreciable e inextensible que pasa por una polea de masa también despreciable. Sobre el cuerpo 1 se aplica una fuerza F de dirección 37º sobre la horizontal. Entre el plano y el bloque 1 el coeficiente de rozamiento cinético (μ) es 0,1.



9. UNIDAD 2 PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN - ENERGÍA

9.1. OBJETIVO GENERAL

Describir y analizar los conceptos de trabajo, energía y potencia en determinados contextos reales, dando cuenta del principio de la conservación de la energía.

9.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Explorar los diferentes tipos de energía que hay en nuestro mundo
- Evaluar el concepto de trabajo y potencia en la solución de problemas
- Analizar porque un cuerpo posee determinada energía y como la conserva o transforma
- Confirmar a través de ejemplos prácticos el principio de la conservación de la energía
- Analizar en que situaciones las fuerzas son conservativas y en cuales no conservativas

9.3. PRUEBA INICIAL

- Bajo la acción de una fuerza de 20 Newton, un resorte se comprime 0,1 metros. La constante del resorte es:

a. $0{,}005\ N/m$ b. $5\ N/m$ c. $2\ N/m$ d. $20\ N/m$ e. $200\ N/m$

- La energía potencial elástica del resorte anterior es:

a. 0,5 J b. 2 J c. 1 J d. 10 J e. 20 J

- Una fuerza de 1 newton actúa durante 1 segundo sobre un cuerpo de masa 1 kilogramo, inicialmente en reposo. El trabajo de la fuerza es:

a. 0,5 J b. 2 J c. 1.5 J d. 1 J e. 2,5 J

- La energía cinética final del cuerpo anterior es:

a. 0,5 J b. 1 J c. 1.5 J d. 2 J e. 2,5 J

- Una fuerza de 1 newton actúa durante 1 segundo sobre un cuerpo de masa 1 kilogramo y con velocidad inicial de $1\,m/s$. El trabajo de la fuerza es

a. 1 J b. 0,5 J c. 1.5 J d. 2,5 J e. 2,0 J

- La energía cinética final del cuerpo anterior es:

a. 1 J b. 0,5 J c. 1.5 J d. 2,5 J e. 2,0 J

- De acuerdo a tus conocimientos previos contesta los siguientes enunciados:

a. ¿Qué se entiende por trabajo? Dar dos ejemplos.
b. ¿Qué se entiende por energía? ¿Cuáles son los tipos de energía?
c. ¿Qué se entiende por potencia?
d. Se dice que la energía no se destruye ni se crea, pero si se transforma. ¿Explicar en que se transforma la energía?

e. ¿Qué son fuerzas conservativas y fuerzas no conservativas?

9.4. TEMAS

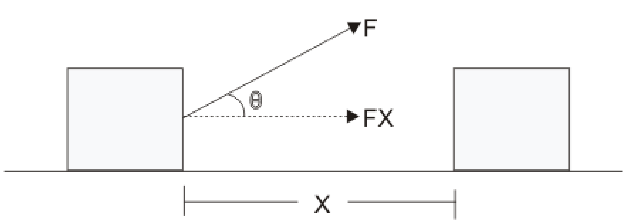
9.4.1. Trabajo y energía

“La energía es una propiedad que está relacionada con los cambios o procesos de transformación en la naturaleza. Sin energía ningún proceso físico, químico o biológico sería posible. La forma de energía asociada a las transformaciones de tipo mecánico se denomina energía mecánica y su transferencia de un cuerpo a otro recibe el nombre de trabajo. Ambos conceptos permiten estudiar el movimiento de los cuerpos de forma más sencilla que usando términos de fuerza, a partir de las leyes de Newton, y constituyen, por ello, elementos clave en la descripción de los sistemas físicos”[14].

“El estudio del movimiento atendiendo a las causas que lo originan lo efectúa la dinámica como teoría física relacionando las fuerzas con las características del movimiento, tales como posición y velocidad. Es posible, no obstante, describir la condición de un cuerpo en movimiento introduciendo una nueva magnitud, la energía mecánica, e interpretar sus variaciones mediante el concepto de trabajo físico. Ambos conceptos surgieron históricamente en una etapa avanzada del desarrollo de la dinámica y permiten enfocar su estudio de una forma por lo general más simple”[15].

Trabajo: “Podemos decir que trabajo es todo proceso que implique demanda de energía; entendiéndose como demanda el suministro, consumo o acumulación de energía”[16]

El trabajo se define como el producto de la componente de la fuerza en la dirección del movimiento de un cuerpo por el desplazamiento que sufre el cuerpo.



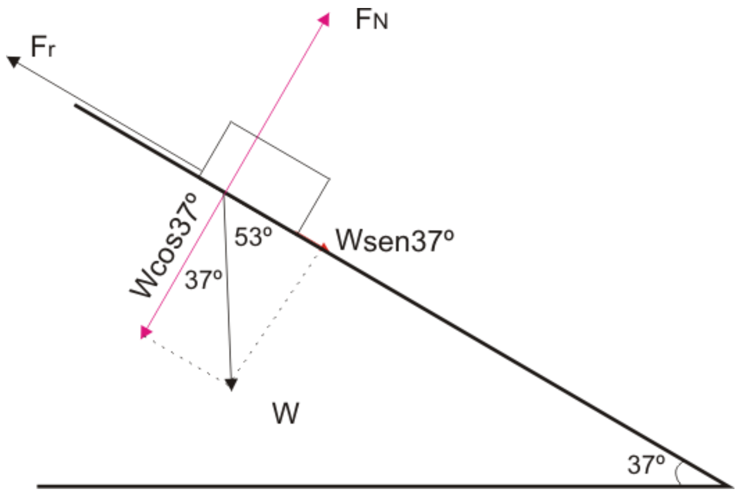
$$T = (F\cos\theta)\Delta x$$

[14] Paul Tippens. Física I. 3. Ed. México. McGraw-Hill, 2008.
[15] Íbid.
[16] Íbid.

Problema resuelto

Un bloque de desliza 20 metros, hacia abajo por un plano inclinado 37º con la horizontal. Si el bloque tiene un peso de 30 Newton y la fuerza de rozamiento es de 4 Newton, calcular:

a. El trabajo realizado por la fuerza normal.
b. El trabajo realizado por el peso.
c. El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento.
d. La suma de los trabajos que realizan las tres fuerzas que actúan.



Solución

a) Como la fuerza normal es perpendicular al desplazamiento; es decir, forman un ángulo de 90º y Coseno de 90º es cero, entonces el trabajo de la normal es cero.

b) El peso forma con el desplazamiento un ángulo de 53º, por lo tanto el trabajo realizado por el peso es:

$$T_W = W \cdot Cos\,53^o \cdot (2m) = 30N \cdot (2m).Cos53^o = 36\ J$$

c) La fuerza de rozamiento con el desplazamiento forma un ángulo de 180º.

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento está dado por la expresión:

$$T_{Fr} = F_r \cdot Cos53^o \cdot (2m) = 4N \cdot (2m).Cos180^o = -8\ J$$

d) La suma de los trabajos realizados por las tres fuerzas es igual a:

$$T_{Neto} = 0\,J + 36\,J - 8\,J = 28\,J$$

9.4.2. Ejercicio

Un cuerpo de 80 kilogramos se desplaza hacia arriba 20 metros por un plano inclinado que forma 30º con la horizontal, si la fuerza que se ejerce es de 600 Newton y el coeficiente de rozamiento entre la superficie y el cuerpo es de 0.2. Calcular:

a. El trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo

b. El trabajo neto realizado

9.4.3. Energía

"El término energía es probablemente una de las palabras propias de la física que más se nombra en las sociedades industrializadas. La crisis de la energía, el costo de la energía, el aprovechamiento de la energía, son expresiones presentes habitualmente en los diferentes medios de comunicación social. ¿Pero qué es la energía? La noción de energía se introduce en la física para facilitar el estudio de los sistemas materiales. La naturaleza es esencialmente dinámica, es decir, está sujeta a cambios: cambios de posición, cambios de velocidad, cambios de composición o cambios de estado físico, por ejemplo. Pues bien, existe algo que subyace a los cambios materiales y que indefectiblemente los acompaña; ese algo constituye lo que se entiende por energía. La energía es una propiedad o atributo de todo cuerpo o sistema material en virtud de la cual éstos pueden transformarse modificando su situación o estado, así como actuar sobre otros originando en ellos procesos de transformación. Sin energía, ningún proceso físico, químico o biológico sería posible"[17].

De esta manera, todos los cambios materiales están asociados con una cierta cantidad de energía que se pone en juego, recibiéndola o entregándola. La energía es la capacidad que tienen los cuerpos o partículas para realizar un trabajo.

[17] Paul Tippens. Física I. 3. Ed. México. McGraw-Hill, 2008.

Energía Cinética: La energía cinética va referida a la velocidad, cuando un cuerpo esta en movimiento se dice que tiene energía cinética.

Las unidades de energía cinética son las mismas que las de trabajo.

$$E_C = \frac{mv^2}{2}$$

Si al realizar trabajo sobre un cuerpo, éste experimenta una variación de la velocidad, el trabajo realizado es igual a la variación de la energía cinética.

$$T = E_{Cf} - E_{Ci} \leftrightarrow T = \frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2}$$

Energía potencial gravitacional: "La energía potencial de un cuerpo se define como la energía que es capaz de generar un trabajo como consecuencia de la posición del mismo. Este concepto indica que cuando un cuerpo se mueve con relación a cierto nivel de referencia puede acumular energía. Un caso típico es la energía potencial gravitacional la cual se evidencia al levantar un cuerpo a cierta altura, si lo soltamos, la energía potencial gravitacional se liberará convirtiéndose en energía cinética al caer"[18].

$$E_{Pg} = mgh$$

Si al realizar trabajo sobre un cuerpo, éste varía su distancia a la superficie de la Tierra, el trabajo realizado es igual a la variación de la energía potencial.

$$T = E_{Pf} - E_{Pi} \leftrightarrow T = mgh_f - mgh_i$$

Energía potencial elástica: "Si se considera un resorte que cuelga del techo y uno de sus extremos está fijo, adosado al techo, mientras su otro extremo está libre, al ejercer una fuerza sobre el resorte éste se puede comprimir, disminuyendo su longitud. Para que el resorte no se estire será necesario mantener una fuerza sobre él. Al acabarse la fuerza, el resorte se descomprime, estirándose"[19].

"Si ahora se tiene el resorte con un extremo fijo sobre la mesa, y se ejerce una fuerza para comprimirlo, si el extremo libre de este resorte se pone en contacto con algún cuerpo, al

[18] Paul A Tipler. Física para la ciencia y la tecnología. Editorial Reverte. Tomo I.
[19] Íbid.

descomprimirse puede provocar que el objeto se mueva, comunicándole energía cinética (energía que poseen los cuerpos cuando se mueven)”[20].

“Este hecho pone de manifiesto que el resorte comprimido posee energía almacenada que se denomina energía potencial elástica”[21].

$$E_{Pe} = \frac{kx^2}{2}$$

Si el trabajo realizado es sobre una masa ligada a un resorte, el trabajo realizado es igual a la variación de la energía potencial elástica.

$$T = E_{Pef} - E_{Pei} \leftrightarrow T = \frac{kx_f^{\ 2}}{2} - \frac{kx_i^{\ 2}}{2}$$

Ejemplo resuelto

¿Qué trabajo se debe realizar sobre un cuerpo de 20 kilogramos para que incremente su velocidad de $2\ m/s$ a $10\ m/s$?

Solución

Los datos conocidos son:

$$m = 20kg, \quad V_i = 2\ m/s, \quad V_f = 10\ m/s$$

El trabajo es igual a la variación de la energía cinética.

$$T = E_{Cf} - E_{Ci} \rightarrow \quad T = \frac{m(V_f)^2}{2} - \frac{m(V_i)^2}{2}$$

$$T = \frac{(20\ kg)(10\ m/s)^2}{2} - \frac{(20\ kg)(2\ m/s)^2}{2} = 1000\,J - 40\,J = 960\,J$$

[20] Íbid.
[21] Íbid.

9.4.4. Ejercicio

Un cuerpo de 1 kilogramo se lanza verticalmente hacia arriba con velocidad de $30\ m/s$. Calcular:

a. La energía cinética en el momento del lanzamiento
b. La energía cinética cuando llega a la altura máxima
c. La energía cinética cuando ha ascendido los 3/4 de su altura máxima

9.4.5. Potencia

Potencia “es la cantidad de trabajo efectuado por unidad de tiempo. Esto es equivalente a la velocidad de cambio de energía en un sistema o al tiempo empleado en realizar un trabajo”[22].

$$P = \frac{T}{t}$$

En el sistema internacional (SI) la potencia se mide en W (Vatios) en honor a James Watt, quién desarrollo la máquina de vapor antecesora de las grandes máquinas de la actualidad.

Ejemplo resuelto

Un elevador vacío tiene un peso de 5160 Newton. Está diseñado para transportar una carga máxima de 20 pasajeros desde el primer piso al piso 25 en un tiempo de 18 segundos. Suponiendo que el peso promedio de un pasajero es de 710 Newton y la distancia entre los pisos es de 3.5 metros ¿Cuál es la potencia constante mínima necesaria del motor del elevador?

Solución

$$F = 5160N + 20\cdot(710N) = 19,400N$$

El trabajo que debe ser efectuado es:

$$Trabajo = F\cdot s = (19,400N)(25x3.5m) = 1.7x10^{6}\ J$$

La potencia mínima, es por lo tanto:

[22] http://www.fisicapractica.com/trabajo-energia.php

$$P = \text{Trabajo}/\text{tiempo} = 1.7x10^6\ \text{J}/18\ \text{s} = 94\,\text{kW}$$

9.4.6. Ejercicio

Un hombre de 70 kilogramos sube por un plano inclinado 12º con respecto a la horizontal, a una velocidad de $1.5\ m/s$. Calcular la potencia desarrollada.

9.4.7. Fuerzas conservativas

“Una fuerza es conservativa si el trabajo que realiza para ir desde un punto a otro no depende del camino, solo depende de las posiciones inicial y final”[23]. Son fuerzas conservativas el peso y la fuerza elástica.

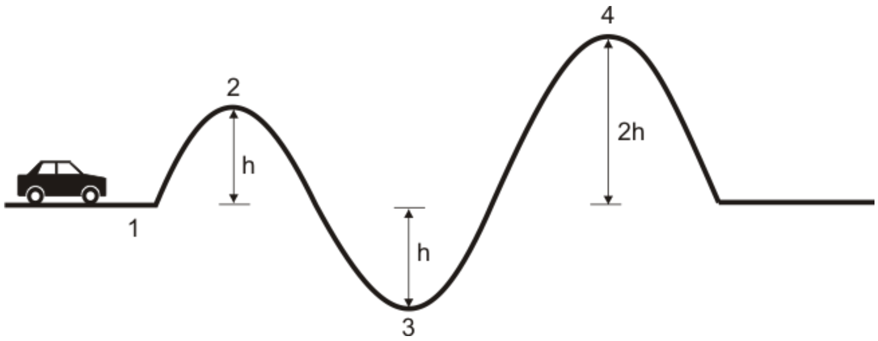
Conservación de la energía: “Cuando se consideran únicamente transformaciones de tipo mecánico, es decir, cambios de posición y cambios de velocidad, las relaciones entre trabajo y energía se convierten de hecho en ecuaciones de conservación, de modo que si un cuerpo no cede ni toma energía mecánica mediante la realización de trabajo, la suma de la energía cinética y de la energía potencial habrá de mantenerse constante. De esta forma si todas las fuerzas que actúan sobre un sistema son como las gravitatorias o como las fuerzas elásticas de resortes, ellas producen siempre transferencias de energía, entre energía cinética y potencial; en montos que son iguales y opuestos. En estas condiciones la energía mecánica del sistema (E); es decir, la suma de todas las energías potenciales y cinética del sistema, es constante en todo instante. Podemos escribir para ese sistema, la ecuación”[24].

Energía total = Energía cinética + Energía potencial

Ejemplo resuelto

La siguiente figura muestra el recorrido de un auto. La energía mecánica del carro es tal que cuando llega al punto 4 se encuentra en reposo. No hay rozamiento en el desplazamiento. Hallar una expresión que permita calcular la velocidad en el punto 1.

[23] http://www.mitecnologico.com/Main/TrabajoYEnergia
[24] Íbid.



Solución

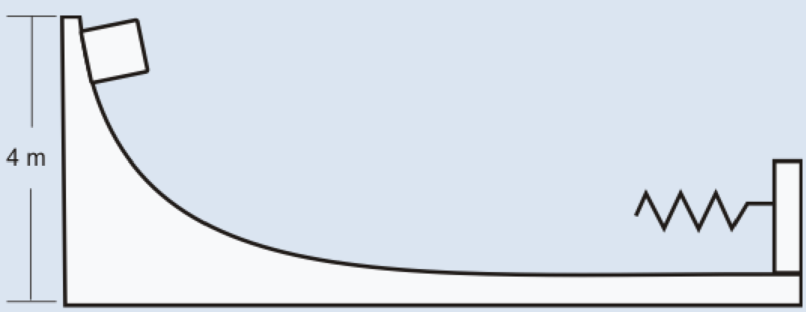
Aplicamos conservación de la energía en los puntos 1 (Inicial) y 4 (Final)

$$\frac{1}{2}mV_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mV_4^2 + 2mgh, \text{ pero } \; h_1 = 0 \text{ y } V_4 = 0$$

$$\frac{1}{2}V_1^2 = 2gh, \quad V_1 = 2\sqrt{gh}$$

9.4.8. Ejercicio

Un bloque de masa 3 kilogramos cae por la trayectoria que se muestra en la figura desde una altura de 4 metros. Si choca con un resorte de constante elástica de 500 N/m, ¿Cuánto se comprime el resorte? Considera despreciable la fricción.



9.4.9. Fuerzas no conservativas

"Naturalmente las fuerzas no conservativas son todas las demás, es decir, son aquellas que no tienen las propiedades necesarias para ser conservativas"[25].

"Entre las fuerzas no conservativas se encuentran las fuerzas de rozamiento o fricción que siempre se oponen al movimiento y por lo tanto siempre producen trabajo negativo. Por ejemplo si vas en bicicleta y frenas, estás aplicando una fuerza de rozamiento producida por el patín del freno sobre la llanta, el efecto será detener el movimiento y absorber la energía cinética, por ello también las fuerzas de rozamiento se llaman disipativas"[26] .

De manera general, podemos expresar el principio de conservación de la energía mecánica como:

Energía mecánica final - Energía mecánica inicial = Trabajo realizado por la fuerza de rozamiento

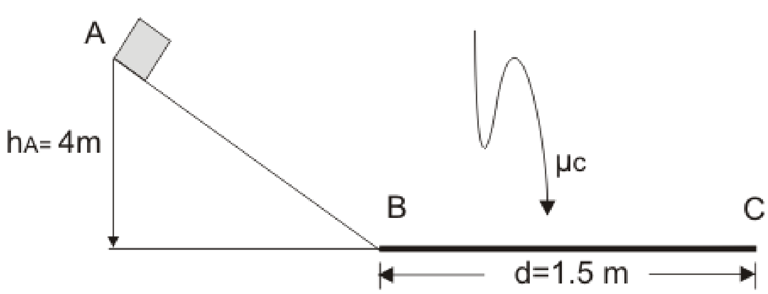
Ejemplo resuelto

Un cuerpo de 2 kilogramos de masa pasa por el punto A con velocidad de 20 m/s y sigue la trayectoria recta sin roce que se muestra en la figura. Al llegar a B entra en una superficie horizontal rugosa donde existe un coeficiente de rozamiento cinético igual a 0,2 y finalmente en C impacta a un resorte comprimiéndolo 50 centímetros. Determinar.

a) La rapidez con que pasa el bloque por el punto B.

b) La rapidez con que pasa el bloque por el punto C. Considere la gravedad $10\frac{m}{s^2}$

Solución



Tramo AB: Puesto que en dicho tramo no hay roce, la energía se conserva, es decir:

$$\frac{1}{2}mV_A{}^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mV_B{}^2 + mgh_B,\ \text{pero}\ \ h_B = 0\ \text{y reemplazando valores:}$$

[25] http://www.mitecnologico.com/Main/TrabajoYEnergia
[26] Íbid.

$V_B = 22 \, m/s$

Tramo BC: En este tramo la energía mecánica no se conserva debido a la fuerza de roce que se aplica sobre el bloque. Se debe utilizar la ecuación:

$$Em_B - Em_I = \text{Trabajo Fuerza Rozamiento}$$

$$\frac{1}{2}mV_C^2 + mgh_C - \left(\frac{1}{2}mV_B^2 + mgh_B\right) = fr \cdot Cos(180º) \cdot \Delta x, \text{ pero } fr = \mu \cdot N$$

$$\frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = \mu \cdot N \cdot Cos(180º) \cdot \Delta x, \text{ pero } N = mg \text{ según diagrama de fuerzas eje y.}$$

Reemplazando los valores conocidos, tenemos $V_C = 21.8 \, m/s$.

9.4.10. Ejercicio

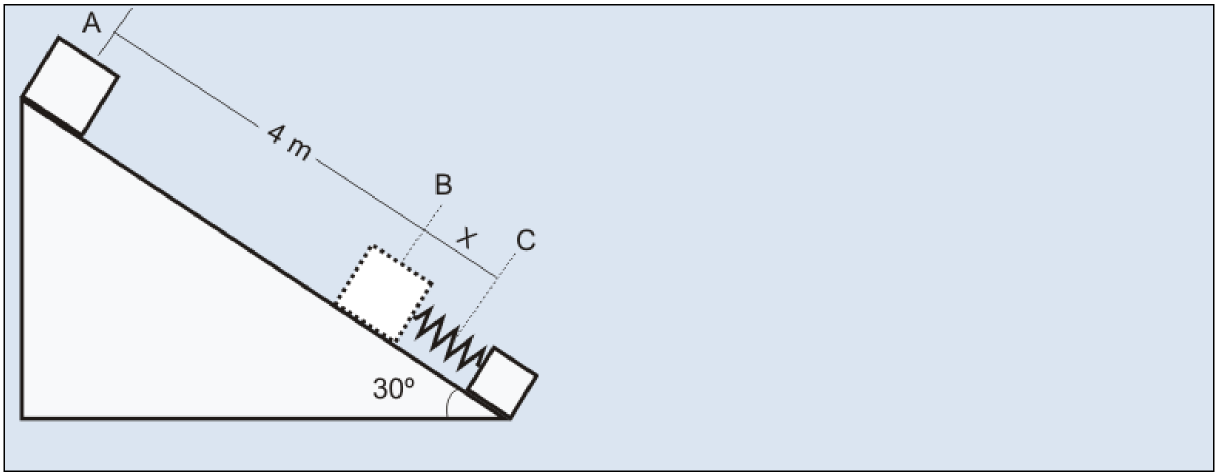
Un cuerpo (considérelo como partícula) de 2 kilogramos se deja deslizar por un plano inclinado 30º a partir del reposo en el punto A del dibujo. Cuando ha recorrido 4 metros sobre el plano (punto B), choca con un resorte sin masa de constante k=100 N/m, deteniéndose en el punto C luego de comprimirlo x metros. Si el coeficiente de roce cinético entre el cuerpo y el plano inclinado es de 0,2, hallar:

a) La energía mecánica en el punto A en función de x.

b) La energía mecánica en el punto C en función de x.

c) El trabajo mecánico realizado por la fuerza de roce cinética entre los puntos A y C, en función de x.

d) La compresión máxima del resorte (x).


A
4 m
B
x
C
30º

9.5. PRUEBA FINAL

Las siguientes preguntas se refieren a la siguiente información: Se aplica una fuerza F a un cuerpo inicialmente en reposo, de 5 kilogramos de masa. El cuerpo se mueve ahora con aceleración de $2\ {}^{m}\!/\!{}_{s^2}$ **.**

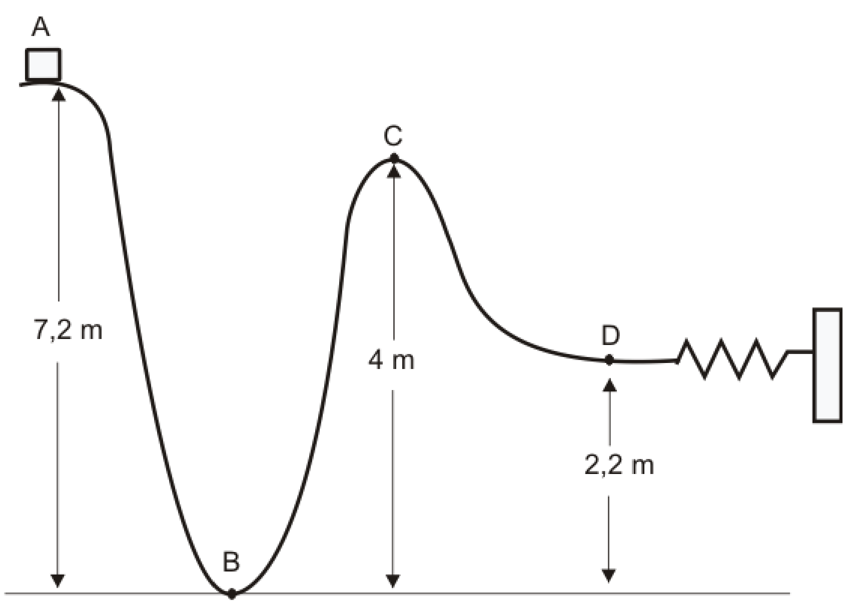
- Si el cuerpo se desplaza 3 metros en la dirección de la aceleración, el trabajo de F es:

a. 6J b. 15J c. 30J d. 60J e. 90J

- Si el cuerpo se desplaza durante 3 segundos en la dirección de la aceleración, el trabajo de F es:

a. 6J b. 15J c. 30J d. 60J e. 90J

Las siguientes preguntas se refieren a la siguiente información: Un cuerpo de 4 kilogramos de masa parte, sin velocidad inicial, del punto A de la pista, sin rozamiento, como muestra la siguiente figura:



- La velocidad del cuerpo, en el punto B, es:

a. $5\ {}^{m}\!/_{s}$ b. $6,6\ {}^{m}\!/_{s}$ c. $8\ {}^{m}\!/_{s}$ d. $10\ {}^{m}\!/_{s}$ e. $12\ {}^{m}\!/_{s}$

- La velocidad del cuerpo en el punto C, es:

a. $5\ {}^{m}\!/_{s}$ b. $6,6\ {}^{m}\!/_{s}$ c. $8\ {}^{m}\!/_{s}$ d. $10\ {}^{m}\!/_{s}$ e. $12\ {}^{m}\!/_{s}$

- Si la constante del resorte es $400\ {}^{N}\!/_{m}$, se comprimirá una distancia igual a:

a. 0,125 m b. 0,25 m c. 0,5 m d. 1 m e. 2 m

Responda:

- Si una fuerza de 12 Newton se aplica formando un ángulo de 60º con la dirección del movimiento de un cuerpo que se desplaza 20 metros, entonces el trabajo realizado es:

a. 120 J b. 240 J c. 206.4 J d. 232 J

- Cuando se deja caer un cuerpo (m) libremente de una altura h.

a. La energía potencial inicial del cuerpo es mg

b. La energía cinética en el momento de tocar el piso es $\frac{mV_i}{2}$

c. La energía cinética final es mv

d. La energía potencial inicial es igual a mgh.

- Un automóvil de masa 735 kilogramos se mueve con velocidad constante de $72\ km/h$, por una carretera de coeficiente de rozamiento 0,2. la potencia del motor en Watios es:

a. 20.000 W b. 29.400 W c. 10.000 W d. 50.000 W

- La altura de la que debería caer un tren para adquirir la energía cinética equivalente a la que tendría si viajara a una velocidad de 20 m/s, es:

a. 40 m b. 10 m c. 1 m d. 20 m

- En general, la cantidad de trabajo necesaria para detener un objeto en movimiento es igual a:

a. La velocidad del objeto
b. La energía cinética del objeto
c. La masa del objeto multiplicada por su aceleración
d. La energía potencial del objeto en reposo
e. El cuadrado de la velocidad del objeto

9.6. Actividades

- Investiga y analiza los siguientes planteamientos:

a) ¿Qué significa la expresión "hacer trabajo en contra de una fuerza"

b) Si sobre un cuerpo no se realiza trabajo alguno, entonces, ¿Qué puede ocurrir con su energía cinética?

c) Explica qué manifestaciones de la energía presentan las siguientes situaciones:

Un auto en movimiento

Una grúa levantando un auto

d) Una persona sube una maleta por una escalera y otra lo hace por medio de una polea. SI ambos suben la maleta hasta la misma altura, ¿En cuál de los dos casos de realiza más trabajo?

e) ¿Es posible que el valor de la energía cinética sea negativo?

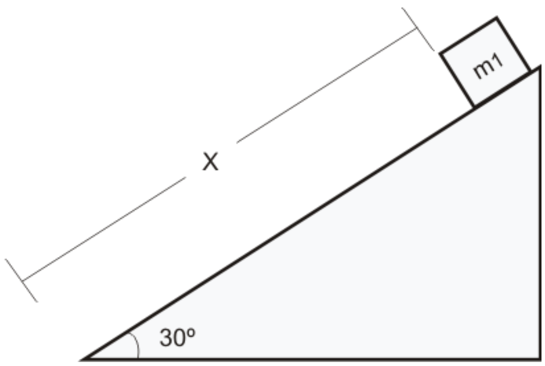
- De acuerdo a los conocimientos adquiridos en clase y a las respectivas investigaciones, resuelve los siguientes ejercicios de la vida real.

Ejercicio 1

Un hombre levanta un cuerpo de 50 kilogramos hasta una altura de 10 metros. ¿Qué potencia desarrolla si el trabajo lo realiza en un tiempo de medio minuto?

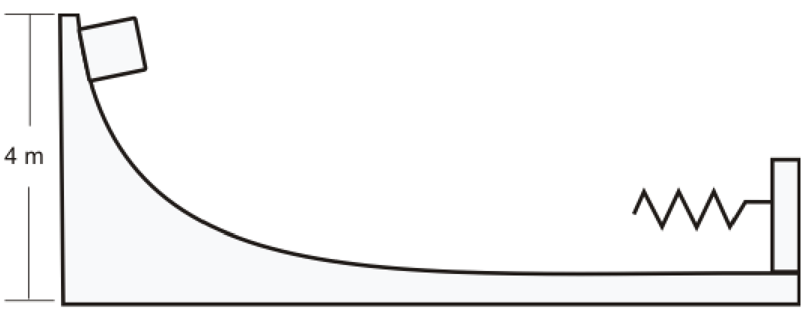
Ejercicio 2

Un cuerpo de 60 kilogramos se desea levantar hasta alcanzar una altura de 10 metros por medio de un plano inclinado como muestra la siguiente figura. La fuerza que se ejerce a través de la cuerda es de 600 Newton y el coeficiente de rozamiento cinético entre la superficie y la masa es de 0.2. Calcular el trabajo de cada fuerza.



Ejercicio 3

Un bloque de masa 3 kilogramos cae por la trayectoria que se muestra en la figura desde una altura de 4 metros. Si choca con un resorte de constante elástica de 500 N/m, ¿Cuánto se comprime el resorte? Considera despreciable la fricción.



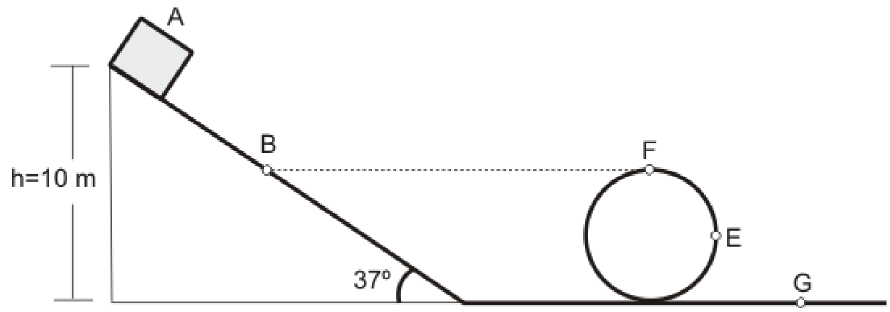
Ejercicio 4

Un cuerpo de masa 2 kilogramos se suelta desde el punto A. El tramo AB es rugoso, y el cuerpo pasa por el punto B con una energía cinética k = 25 J, para posteriormente recorrer un rizo y pasar por G como muestra la figura. Calcular:

a) El coeficiente cinético del tramo AB.

b) La rapidez del cuerpo al pasar por el punto E.

c) La rapidez del cuerpo al llegar al punto G.



- Explica todas las transformaciones de energía en el siguiente proceso:

Caída de agua de la represa
Rotores en funcionamiento por la caída de agua
Flujo de electricidad a través de las torres de energía
Conexión de una grabadora

10.UNIDAD 3 PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN - CANTIDAD DE MOVIMIENTO

10.1.OBJETIVO GENERAL

Explorar los conceptos de impulso y cantidad de movimiento en contextos reales, connotando el fenómeno de las colisiones.

10.2.OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Explorar el concepto de centro de masas
- Comparar los conceptos de impulso y cantidad de movimiento
- Evaluar el teorema de la conservación de la cantidad de movimiento en la solución de problemas
- Analizar las diferencias entre los choques elásticos y los inelásticos

10.3.PRUEBA INICIAL

- Un cuerpo de masa m se mueve con una velocidad v. Si la velocidad del cuerpo se duplica, su cantidad de movimiento será:

a. $m \cdot v$ b. $m \cdot \frac{v}{2}$ c. $2m \cdot v$ d. $m \cdot v^2$

- Dos cuerpos A y B tienen masas m y 2m respectivamente e idéntica cantidad de movimiento, entonces:

a. A posee mayor energía cinética
b. B posee mayor energía cinética
c. Poseen idéntica energía cinética
d. No se puede comparar la energía cinética

- En un choque elástico:

a. Se conserva la cantidad de movimiento
b. Se conserva la energía cinética
c. La energía cinética del sistema aumenta o disminuye
d. Se conserva la energía potencial

Las siguientes preguntas se refieren a la siguiente información: un cuerpo de 8 kilogramos y de velocidad $5m/s$ choca con otro de 2 kilogramos y de velocidad $15m/s$. Los dos cuerpos quedan unidos después del choque. ¿Cuál es la velocidad del conjunto después del choque en los siguientes casos?

- Los dos cuerpos se movían hacia la derecha, antes del choque:

a. $1m/s$ b. $2\,m/s$ c. $5\,m/s$ d. $3\,m/s$ e. $7\,m/s$

- Uno de los cuerpos se movía hacia la derecha y el otro hacia la izquierda, antes del choque:

a. $1m/s$ b. $2\,m/s$ c. $5\,m/s$ d. $3\,m/s$ e. $7\,m/s$

- Uno de los dos cuerpos se movía hacia el este y el otro hacia el norte, antes del choque:

a. $1\,m/s$ b. $2\,m/s$ c. $5\,m/s$ d. $3\,m/s$ e. $7\,m/s$

Desarrolla las siguientes preguntas, dando cuenta de la importancia que conlleva comprender cada concepto para el desarrollo de nuevos avances.

- ¿Qué se entiende por centro de masa?
- ¿Cómo se puede hallar el centro de masa de una figura plana?
- ¿Qué se entiende por Impulso y cantidad de movimiento?
- ¿Qué relación hay entre impulso y cantidad de movimiento?
- ¿Qué son fuerzas externas y fuerzas internas?
- ¿Desde la física que se entiende por choque?

10.4.TEMAS

10.4.1. Centro de masa

El centro de masa de un sistema de partículas es un punto en el cual es concentrada toda la masa del sistema.

Para un sistema de n partículas distribuidas en diferentes puntos del plano XY tenemos las siguientes formulas:

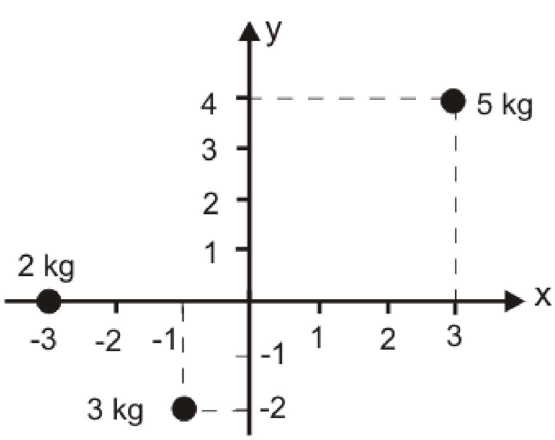
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

La pareja $(\bar{x}, \bar{y})$ es el centro de masa del sistema.

Ejemplo resuelto

Encontremos la posición del centro de masa de las tres masas de la siguiente figura:

Las coordenadas del centro de masa serán:



Las coordenadas del centro de masa serán:

$$X = \frac{(3\times5)+(-3\times2)+(-1\times3)}{10} = 0,6 \text{ m}$$

$$Y = \frac{(4\times5)+(0\times2)+(-2\times3)}{10} = 1,4 \text{ m}$$

El centro de masa es (1,6 m, 1,4 m)

10.4.2. Ejercicio

Tres masas puntuales de 2 kilogramos cada una están localizadas sobre el eje x, en el origen, en x = 0,20 metros y en x = 0,50 metros. Hallar el centro de masa del sistema.

10.4.3. Impulso y cantidad de movimiento

Cuando chocan dos cuerpos, las fuerzas que intervienen suelen ser muy grandes y su duración temporal es muy corta. Por ejemplo, en la interacción entre un taco de billar y una bola, durante el contacto, la fuerza no se mantiene constante sino que varía. Debido a esto, suele ser conveniente estudiar los problemas de choques desde el punto de vista de la cantidad de movimiento.

Consideremos que un cuerpo de masa (m) se mueve con velocidad v_1 y que una fuerza resultante (F) constante, actúa sobre el cuerpo durante un intervalo de tiempo Δt.

La fuerza hará que el cuerpo adquiera una velocidad v_2 y por lo tanto experimente una aceleración (a). De acuerdo con la segunda ley de Newton se tiene: $F = m \cdot a$

Pero se sabe que $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, entonces:

$$F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ ó } F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v \text{ ó } F \cdot \Delta t = mv_2 - mv_1$$

Obsérvese que la variación de la velocidad del cuerpo depende de su masa, de la fuerza que se ejerce y del intervalo de tiempo en que actúa. El producto de la fuerza por el tiempo durante el cual actúa recibe el nombre de impulso I.

$$I = F \cdot \Delta t$$

El impulso mide la acción de una fuerza en un intervalo de tiempo. El impulso es un vector, que tiene la misma dirección y sentido de la fuerza.

El producto de la masa (m) de un cuerpo por su velocidad (v) recibe el nombre de cantidad de movimiento (P), o sea:

$$P = m \cdot v$$

Todo cuerpo en movimiento posee una cantidad de movimiento, esta cantidad es vectorial, siendo su dirección y sentido los de la velocidad. En el mismo orden de ideas podemos establecer:

$$F = \Delta t = P_2 - P_1 \text{ ó } I = \Delta P$$

10.4.4. Unidades de Impulso y cantidad de movimiento

En el sistema internacional (S.I), Impulso está dado por:

I = 1 Newton. Segundo = 1 N.S

En el sistema internacional (S.I) cantidad de movimiento está dado por:

$$P = 1gr \, {}^{cm}\!/\!_{s}$$

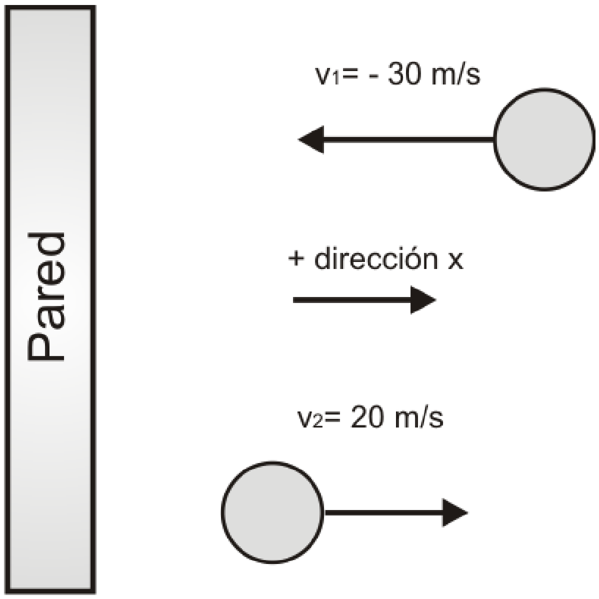
Ejemplo resuelto

Suponga que lanza una pelota de 0.40 kilogramos contra una pared, la cual golpea moviéndose horizontalmente hacia la izquierda a , rebotando horizontalmente hacia la derecha con rapidez de a. Calcule el impulso de la fuerza neta sobre la pelota durante el choque.

b. Si la pelota está en contacto con la pared durante 0.010 segundos, calcule la fuerza horizontal media que la pared ejerce sobre la pelota durante el impacto.

Solución

El movimiento es puramente horizontal. Tomaremos la horizontal como el eje x como muestra la siguiente figura:



a. Con el eje x que escogimos, las componentes x inicial y final de la cantidad de movimiento de la pelota son:

$$p_{1X} = mv_{1X} = (0.40\,kg)(-30\,m/s) = -12\,kg \cdot m/s$$
$$p_{2X} = mv_{2X} = (0.40\,kg)(+20\,m/s) = +8\,kg \cdot m/s$$

La componente x del impulso es igual al cambio en la componente de la cantidad de movimiento.

$$j_X = p_{2X} - p_{1X} = +8\,kg \cdot m/s - (-12\,kg \cdot m/s) = 20\,kg \cdot m/s = 20\,N \cdot s$$

b. El choque dura $t_2 - t_1 = \Delta t = 0.010\,s$. Entonces tenemos:

c.

$$j_X = (F_{med})_X(\Delta t) \rightarrow F_{med} = \frac{j_X}{\Delta t} \rightarrow F_{med} = \frac{20\,N \cdot s}{0.010\,s} = 2000\,N$$

10.4.5. Ejercicio

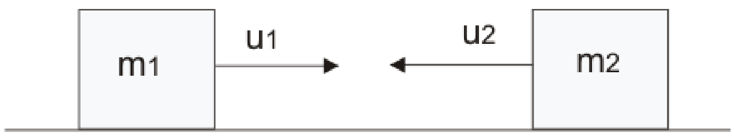
Un ladrillo de 0.3 kilogramos se deja caer desde una altura de 8 metros. Choca contra el suelo y queda en reposo.

a. Cuál es el impulso ejercido por el suelo sobre el ladrillo.

b. Si desde que el ladrillo toca el suelo hasta que queda en reposo transcurren 0.0013 segundos. ¿Cuál es la fuerza media ejercida por el suelo sobre le ladrillo?

10.4.6. Ley de la conservación de la cantidad de movimiento

Consideremos una colisión de frente entre las masas m_1 y m_2, como se muestra en la siguiente figura:



Antes de impacto

Suponga que las superficies están libres de fricción. Indicamos sus velocidades antes del impacto como u_1 y u_2 y después del impacto v_1 y v_2 . El impulso de la fuerza F_1, que actúa sobre la masa de la derecha es:

$$F_1 \cdot \Delta t = m_1 v_1 - m_1 u_1$$

En forma similar; el impulso de la fuerza F_2 sobre la masa de la izquierda es:

$$F_2 \cdot \Delta t = m_2 v_2 - m_2 u_2$$

Durante el tiempo Δt , $F_1 = -F_2$, de modo que:

$$F_1 \Delta t = -F_2 \Delta t$$

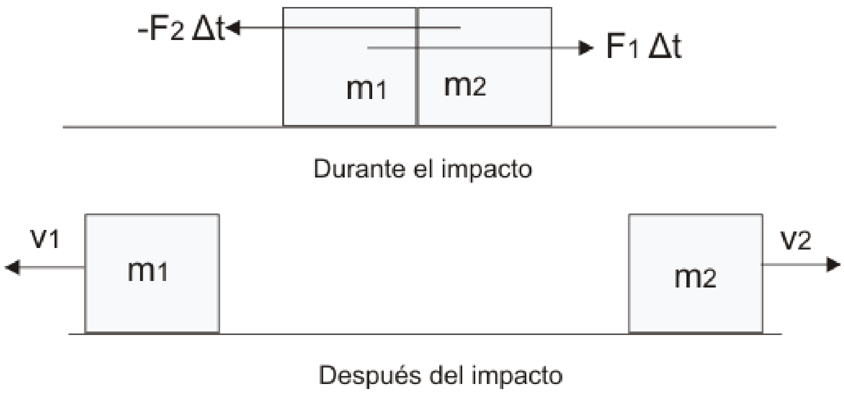
O bien:

$$m_1 v_1 - m_1 u_1 = -(m_2 v_2 - m_2 u_2)$$

Y finalmente, reagrupando términos, deducimos la ley de conservación de la cantidad de movimiento:

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

Cantidad de movimiento total antes del impacto = Cantidad de movimiento total después del impacto.



Ejemplo resuelto

Un balín de masa 0.0045 kilogramos se dispara horizontalmente sobre un bloque de masa 1.8 kilogramos que está en reposo en una superficie horizontal. El coeficiente de fricción cinético entre el bloque y la superficie es 0.2. El balín se detiene en el boque, y se mueve 1.8 metros. Encontrar la rapidez de la bola.
Solución:

Solución

$$\text{Sea } V_b = \text{Velocidad del balín}$$
$$\text{Sea } V_B = \text{Velocidad del bloque}$$

Antes del choque:

$$m_bV_b + m_BV_B\text{, pero el bloque esta en reposo, } m_BV_B = 0$$

Después del choque:

$$(m_B + m_b)V_c \text{ (Semueven con la misma velocidad)}$$

Aplicando conservación de la cantidad de movimiento tenemos:

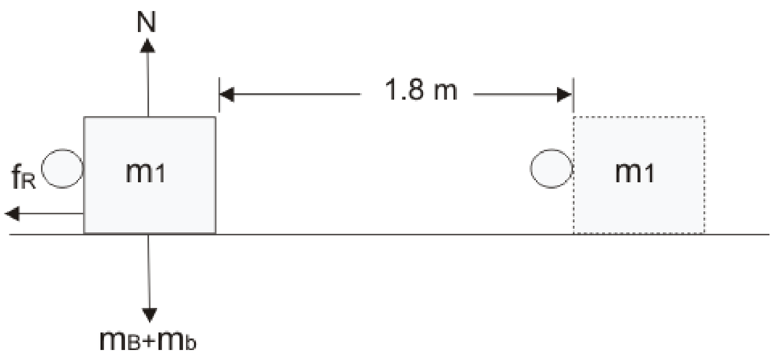
$$m_b V_b = (m_B + m_b) V_c$$

Donde V_c es la velocidad combinada de ambos cuerpos.

Despejando V_b tenemos:

$$V_b = \frac{(m_B + m_b)}{m_b} V_c$$

Haciendo diagrama de fuerza para aplicar las leyes de newton, tenemos:



$$\sum F \text{ en eje } x: -f_R = (m_B + m_b) \cdot a, \quad \text{pero} \quad f_R = \mu_C \cdot N$$

Despejando la aceleración (a):

$$a = \frac{-\mu_C \cdot N}{m_B + m_b}$$

Por diagrama de fuerzas en el eje Y, tenemos que: $N = (m_B + m_b) \cdot g$

$$a = \frac{-\mu_C \cdot (m_B + m_b) \cdot g}{m_B + m_b}$$

Reemplazando los valores conocidos, encontramos que:

$$a = -2 \, m/s^2$$

Para encontrar V_c, utilizamos la ecuación del movimiento rectilíneo acelerado:

$$x = \frac{(v^2 + v_C^2)}{2 \cdot a}$$

Despejando la velocidad (V_c), ya que la final vale cero (Se detiene), y tomando los valores x = 1.8 metros, la aceleración igual $a = -2 \, m/s^2$ tenemos:

$$v_C = \sqrt{2 \cdot a \cdot x} = 2.6 \, m/s$$

Por último, reemplazamos este valor en $V_b = \frac{(m_B + m_b)}{m_b} V_c$ obteniendo:

$$v_C = 1042.6 \, m/s$$

10.4.7. Ejercicio

Un bloque de masa 12 kilogramos, con velocidad de sobre el eje x, golpea una esfera de masa 5 kilogramos, en reposo. Después del choque, el bloque se desvía 90º respecto al eje x y la esfera 37º respecto al eje x. ¿Cuáles son la velocidad de la esfera y la del bloque después del choque?

10.4.8. Choques elásticos e inelásticos

Se puede suponer entonces, que la energía cinética, al igual que la cantidad de movimiento, no cambian a causa de un choque o una colisión. Sin embargo, esta suposición sólo es aproximadamente cierta para los cuerpos duros, como los balines y las bolas de billar; pero no resulta verdadera en el caso de los cuerpos blandos que rebotan con mucha mayor lentitud después de chocar. Durante el impacto, todos los cuerpos se deforman ligeramente y así se liberan pequeñas cantidades de calor. El vigor con el que un cuerpo recobra su forma original, después de sufrir una deformación, es una medida de su elasticidad o capacidad de restitución.

Si la energía cinética permanece constante en un choque (el caso idea), se dice que el choque es **completamente elástico.** En este caso no se pierde ninguna energía en forma de calor o deformación de un choque.

Cuando los cuerpos que chocan se adhieren entre sí y se mueven como un solo cuerpo después del choque, se dice que el choque es **completamente inelástico**[27].

Una bala que se incrusta en un bloque de madera es un ejemplo de este tipo de choque.

En una colisión completamente elástica entre dos cuerpos m_1 y m_2, podemos decir que tanto la energía como la cantidad de movimiento se conservan. Por lo tanto, es posible aplicar dos ecuaciones en este tipo de choques.

Energía:

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$$

Cantidad de movimiento:

$$m_1u_1+m_2u_2=m_1v_1+m_2v_2$$

En las dos anteriores podemos simplificar y obtener:

$$m_1(u_1^2-v_1^2)=m_2(v_2^2-u_2^2)$$

$$m_1(u_1-v_1)=m_2(v_2-u_2)$$

Al dividir la primera entre la segunda nos queda:

$$\frac{u_1^2-v_1^2}{u_1-v_1}=\frac{v_2^2-u_2^2}{v_2-u_2}$$

[27] http://mx.answers.yahoo.com/question/index?qid=20070302172511AAFncP3

Factorizando los numeradores y efectuando la división obtenemos:

$$u_1 + v_1 = u_2 + v_2$$

O bien:

$$v_1 - v_2 = u_2 - u_1 = -(u_1 - u_2)$$

Cuanto más parecidas sean las cantidades anteriores, tanto más será la colisión.

La relación negativa de la velocidad relativa después del choque entre la velocidad relativa antes del choque se llama coeficiente de restitución.

$$e = -\frac{v_1 - v_2}{u_1 - u_2}$$

Al incorporar el signo menos en el numerador de esta ecuación, nos queda:

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2}$$

Si el choque es completamente elástico, entonces e = 1.

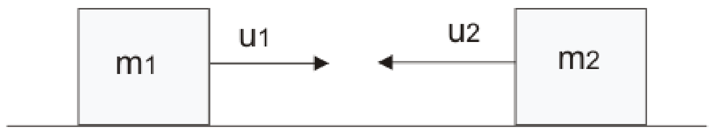
Si el choque es completamente inelástico, entonces e = 0. En el caso del choque inelástico, los dos cuerpos salen despedidos con la misma velocidad; es decir:

$v_2 = v_1$. En general, el coeficiente de restitución tiene un valor entre 0 y 1.

Ejemplo resuelto

Un cuerpo de 2 kilogramos que se desplaza hacia la izquierda con una rapidez de 24 m/s choca de frente con otro cuerpo de 4 kilogramos que viaja hacia la derecha a 16 m/s. Encontrar:

a.



Antes de impacto

Después del impacto

Datos presentados en el problema.

$$m_1 = 2\ \text{kg}, \quad u_1 = -24\,{}^{m}\!/_{s}, \quad e = 0.8 \quad \text{Encuentre}: v_1 = ?$$
$$m_2 = 4\ \text{kg}, \quad u_2 = +16\,{}^{m}\!/_{s} \qquad\qquad v_2 = ?$$

Como los dos cuerpos siguen juntos después del choque, entonces es inelástico; es decir, e = 0. En este caso se cumple que:

$$v_2 = v_1 = v_C$$

Antes del choque: $m_1u_1 + m_2u_2$

Después del choque: $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v_C = (m_1 + m_2)v_C$

Por conservación de la cantidad de movimiento:

$$m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2)v_C$$

Reemplazando valores conocidos y despejando v_C tenemos que:

$$v_C = 2.67\,{}^{m}\!/_{s}$$

El hecho de que está velocidad también sea positiva indica que ambos cuerpos se mueven juntos hacia la derecha después del choque.

b. En este caso el coeficiente de restitución (e) no es cero y los cuerpos rebotan después del choque con diferentes velocidades. Por lo tanto, necesitamos más información de la que es posible obtener de la ecuación de la cantidad de movimiento por sí sola.

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} = 0.80$$

O bien:

$$v_2 - v_1 = 0.80 \cdot (u_1 - u_2)$$

Al sustituir los valores conocidos para $u_1 \; y \; u_2$, obtenemos:

$$v_2 - v_1 = -32 \, m/s$$

Ahora podemos utilizar la ecuación de la cantidad de movimiento para obtener otra relación entre $v_2 - v_1$.

Antes del choque: $m_1u_1 + m_2u_2$

Después del choque: $m_1v_1 + m_2v_2$

Por conservación de la cantidad de movimiento:

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

Teniendo presente que $v_2 - v_1 = -32 \, m/s$ y reemplazando valores, tenemos:

$$v_1 = 24 \, m/s \;\; y \;\; v_2 = -8 \, m/s$$

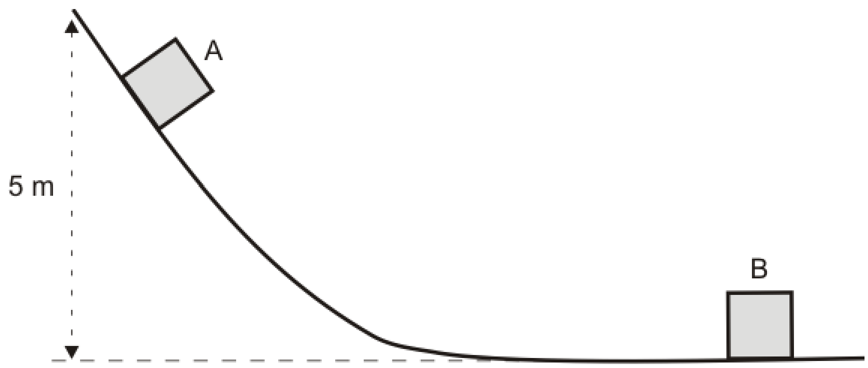
Por lo tanto, vemos que los cuerpos invierten sus direcciones: El cuerpo m_1 se mueve hacia la derecha a una velocidad de $24 \, m/s$ y m_2 se mueve hacia la izquierda a una velocidad de $8 \, m/s$.

10.4.9. Ejercicio

Una esfera de 4 kilogramos de masa golpea un bloque en reposo. Después del choque, perfectamente elástico, la esfera retrocede con una velocidad igual a la mitad de la que tenía inicialmente. ¿Cuál es la masa del bloque?

10.5.PRUEBA FINAL

Las siguientes preguntas se refieren a la siguiente información: Un cuerpo A que parte del reposo, de una altura de 5 metros, resbala sobre la superficie sin rozamiento de un plano inclinado y golpea un cuerpo B de igual masa, en reposo, como lo indica la siguiente figura:



- Si el choque es perfectamente inelástico ¿Cuál es la velocidad del cuerpo B después del choque?

a. $2{,}5\ m/s$ b. $5\ m/s$ c. $10\ m/s$ d. $20\ m/s$ e. $40\ m/s$

- Si el choque es perfectamente elástico ¿Cuál es la velocidad del cuerpo B después del choque?

a. $2{,}5\ m/s$ b. $2{,}5\ m/s$ c. $2{,}5\ m/s$ d. $2{,}5\ m/s$ e. $2{,}5\ m/s$

Responda:

- Un cuerpo de masa m tiene una energía cinética E. su cantidad de movimiento es:

a. 0 b. $\sqrt{2mE}$ c. $2mE$ d. $\sqrt{2E/m}$ e. $2E/m$

- Dos cuerpos de igual masa m y de igual energía cinética E, se dirigen uno hacia otro. Si el choque es perfectamente inelástico, la velocidad del conjunto es:

a. 0 b. $\sqrt{2mE}$ c. $2mE$ d. $\sqrt{2E/m}$ e. $2E/m$

- Un cuerpo con energía cinética E_C verifica un choque perfectamente inelástico con un segundo cuerpo de igual masa, inicialmente en reposo. La energía cinética del conjunto después del choque es:

a. 0 b. $E_C / 4$ c. $E_C / 2$ d. $2E_C$ e. E_C

- Una pelota se deja caer desde una altura h, con velocidad inicial cero. Si la colisión con el piso es elástica y se desprecia el rozamiento con el aire, se concluye que:

  a. Luego de la colisión la aceleración de la pelota es cero.
  b. La energía cinética de la pelota no varía mientras cae.
  c. luego de rebotar, la altura máxima de la pelota será igual a h.
  d. la energía mecánica total varía, porque la energía potencial cambia mientras la pelota cae.

Las siguientes preguntas se refieren a la siguiente información: Una pelota de tenis de 0,2 kilogramos cae, sin velocidad inicial, desde una altura de 5 metros, y rebota hasta una altura de 3,2 metros. La pelota estuvo en contacto con el piso durante 0,01 segundo.

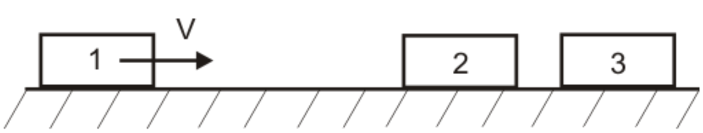
- ¿Cuál fue la variación de la cantidad de movimiento?

a. $1\,kg \cdot m/s$ b. $0{,}4\,kg \cdot m/s$ c. $3{,}6\,kg \cdot m/s$ d. $2\,kg \cdot m/s$

- ¿Cuál es la fuerza media ejercida por el piso sobre la pelota?

a. $0{,}4 \cdot 10^{-2}\,N$ b. $3{,}6 \cdot 10^{-2}\,N$ c. $360N$ d. $40N$

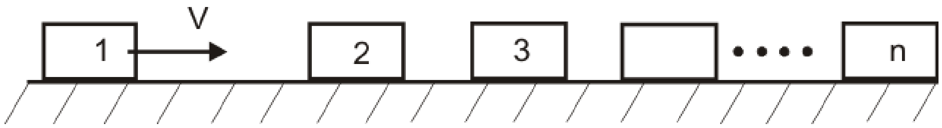
Responde las preguntas a continuación de acuerdo a la siguiente información:



Tres bloques de masas iguales están alineados sobre una mesa sin fricción. El bloque 1 avanza con velocidad constante V y choca inelásticamente contra el bloque 2, quedando pegado a él. Estos dos bloques chocarán inelásticamente contra el tercero que queda pegado a los anteriores.

- La velocidad del conjunto final es igual a:

a. V b. V / 2 c. V / 3 d. V / 3 e. V / 5



Si en la situación anterior se tuviesen n bloques y chocasen sucesiva e inelásticamente en igual forma, la velocidad del conjunto final formado por los n bloques, será igual a:

a. nV b. $\frac{nV}{N+1}$ c. $\frac{nV}{2(n+1)}$ d. V / n e. V / 2n

- Para cualquiera de las colisiones de las dos preguntas anteriores se puede afirmar que:

a. se conservan tanto la energía cinética como la cantidad de movimiento lineal.

b. no se conservan ni la energía cinética ni la cantidad de movimiento lineal.

c. únicamente se conserva la cantidad de movimiento lineal.

d. únicamente se conserva la energía cinética.

10.6.Actividades

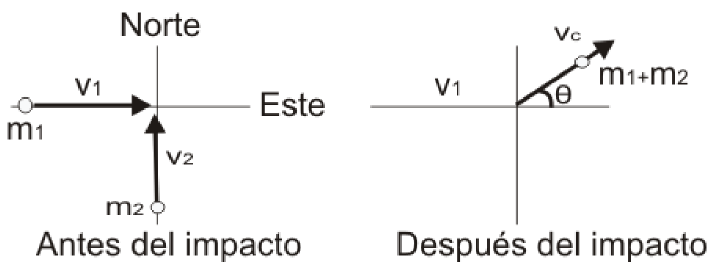
Investiga la solución de los siguientes ejercicios de la vida real.

Ejercicio 1

Un taco golpea una bola de 60 gramos, comunicándole un impulso de $N \cdot s$. ¿Cuál es la velocidad con que se empieza a mover?

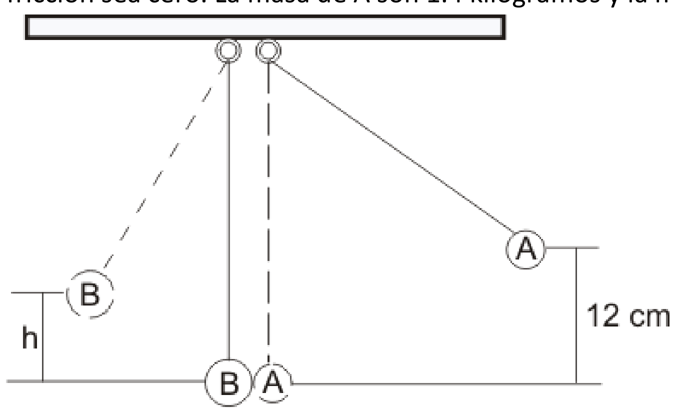
Ejercicio 2

Dos patinadores chocan y se abrazan, uno de ellos, cuya masa es de 70 kilogramos viaja inicialmente hacia el este con una rapidez de $60\ {km}/{h}$. El otro cuya masa es 50 kilogramos tiene un movimiento inicialmente hacia el norte con una rapidez de $80\ {}^{km}\!/_{h}$. Calcular la velocidad final de la pareja.



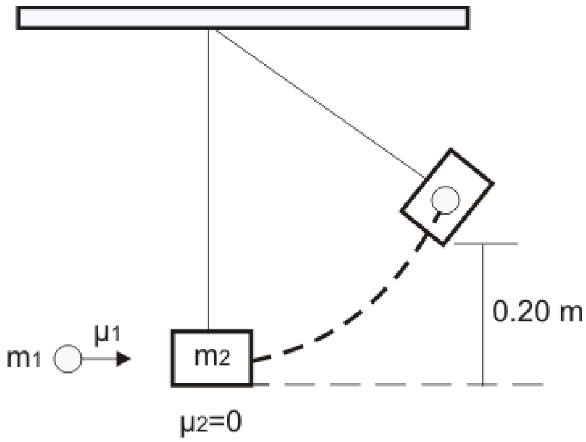
Ejercicio 3

Dos bolas de metal A y B están suspendidas como se muestra en la siguiente figura, así que cada una toca a la otra. Las masas se indican en la figura. La bola A se jala hacia un lado hasta que queda a 12 centímetros sobre una posición inicial y luego se deja caer. Si golpea la bola B en un choque completamente elástico, halle la altura (h) alcanzada por la bola B, suponiendo que la fricción sea cero. La masa de A son 1.4 kilogramos y la masa de B es 2 kilogramos.



Ejercicio 4

Un bloque de barro de 2 kilogramos está suspendido del techo por una cuerda larga, como muestra la siguiente figura. Una bola de acero de 500 gramos, lanzado horizontalmente, se incrusta en el barro provocando que las dos masas suban a una altura de 20 centímetros. Halle la velocidad a la cual se incrustó la bola.

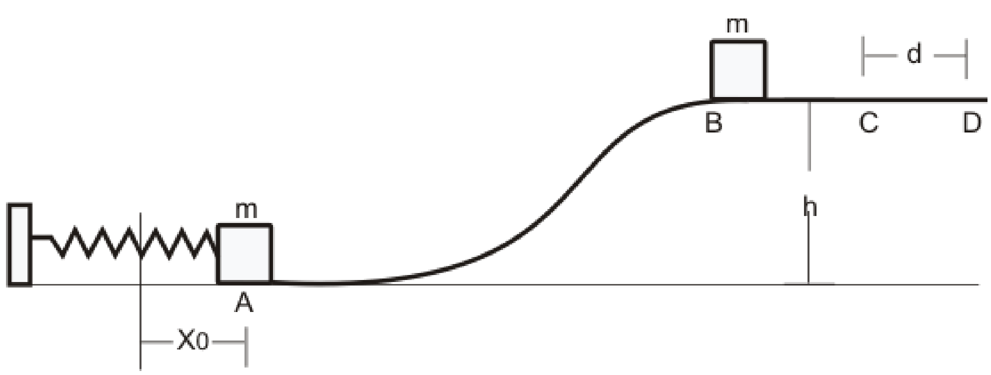


Ejercicio 5

Una masa de 2 kilogramos se mueve hacia la derecha a 2 m/s y choca con una masa de 6 kilogramos que se mueve hacia la izquierda a 4 m/s. Si el choque es completamente inelástico, ¿Cuál es la velocidad común de las dos masas después de chocar? ¿Cuánta energía se perdió en el impacto?

Ejercicio 6

Una masa m se detiene inicialmente contra un resorte (aunque no unido a él) de constante k, y se coloca en el punto A, comprimiendo el resorte una longitud X_0. Se suelta entonces la masa (m) y queda incrustada en otra masa idéntica (m) que está en reposo en el punto B. La trayectoria ABC es una superficie sin fricción, mientras que la trayectoria CD tiene fricción. Cuál es el coeficiente de fricción de la trayectoria CD si el conjunto (2m) se detiene en el punto D. La trayectoria BCD está a una altura (h) con respecto a la superficie inicial (la trayectoria CD tiene una longitud d).



11.UNIDAD 4 ESTÁTICA Y DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

11.1.OBJETIVO GENERAL

Analizar el concepto de estática e Identificar las variables del movimiento rotacional aplicando sus respectivas ecuaciones en la solución de problemas.

11.2.OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Evaluar las condiciones para que un cuerpo permanezca en equilibrio
- Explicar la energía cinética rotacional y el momento de inercia
- Describir la energía cinética rotacional
- Evaluar la conservación de la cantidad de movimiento angular
- Analizar las ecuaciones del movimiento del sólido rígido en situaciones problema

11.3.PRUEBA INICIAL

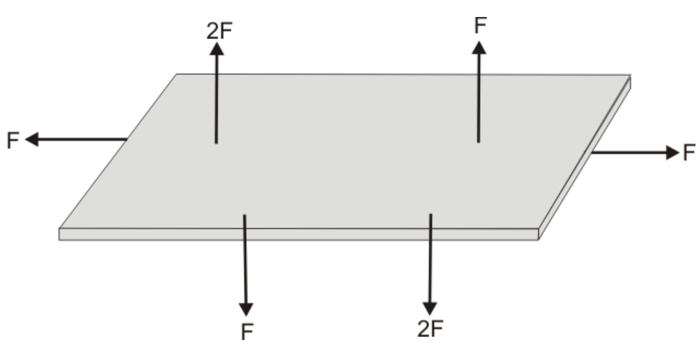
- Cuando la suma de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual a cero se puede asegurar, que el cuerpo:

a. Está en reposo
b. Se mueve con velocidad constante
c. Está en equilibrio de traslación
d. Todos los anteriores

- Un cuerpo se encuentra en equilibrio de rotación si:

a. La suma de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es igual a cero
b. La fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo es diferente de cero
c. La suma algebraica de los torques de las fuerzas con respecto a cualquier punto es igual a cero
d. Si rota con rapidez variable

- El cuerpo mostrado en la figura:



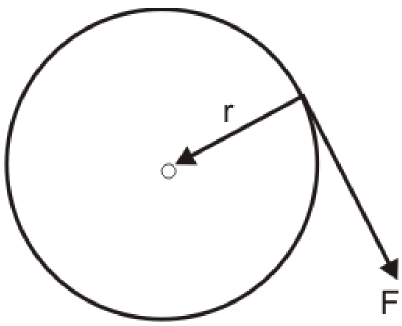
a. Se encuentra en equilibrio completo
b. Se encuentre en equilibrio de traslación
c. Se encuentra en equilibrio de rotación
d. No se encuentra en equilibrio

- Un cuerpo se encuentra en equilibrio de traslación si:

a. La suma de torques es igual a cero
b. No hay rotación

c. La fuerza resultante que sobre él actúa es cero
d. Se mueve en línea recta con velocidad constante

Las siguientes preguntas se refieren a la siguiente información: Se aplica una fuerza constante tangencial F = 40 Newton sobre un anillo de radio r = 0,5 metros, como se muestra en la siguiente figura. El anillo puede girar respecto a su eje, y cualquier punto de él tiene una aceleración tangencial de $2\ m/s^2$.



- ¿Cuál es el momento de inercia del anillo respecto a su eje?

a. $2{,}5\ kg\cdot m^2$ b. $5\ kg\cdot m^2$ c. $10\ kg\cdot m^2$ d. $20\ kg\cdot m^2$ e. $40\ kg\cdot m^2$

- La masa del anillo es:

a. 2,5 kg b. 5 kg c. 10 kg d. 20 kg e. 40 kg

- Si con la acción de la fuerza el anillo gira durante 2 segundos ¿Cuál es la velocidad angular final si partió del reposo?

a. 2 rad/s b. 4 rad/s c. 6 rad/s d. 8 rad/s e. 10 rad/s

- Al cabo de los dos segundos la energía cinética del anillo es:

a. 80 J b. 160 J c. 320 J d. 640 J e. 1600 J

11.4. TEMAS

11.4.1. Estática del sólido rígido

“La estática estudia las condiciones bajo las cuales los sistemas mecánicos están en equilibrio. Nos referiremos únicamente a equilibrio de tipo mecánico, situación que indica que el estado de movimiento del sistema debe de permanecer invariable si no hay acciones exteriores que lo modifiquen”[28].

Primera condición de equilibrio: **Equilibrio de traslación**

Si las fuerzas que actúan sobre un cuerpo son $F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_n = 0$

Si se utiliza un sistema de coordenadas cartesianas en cuyo origen colocamos el cuerpo y sobre los ejes proyectamos las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, tendremos:

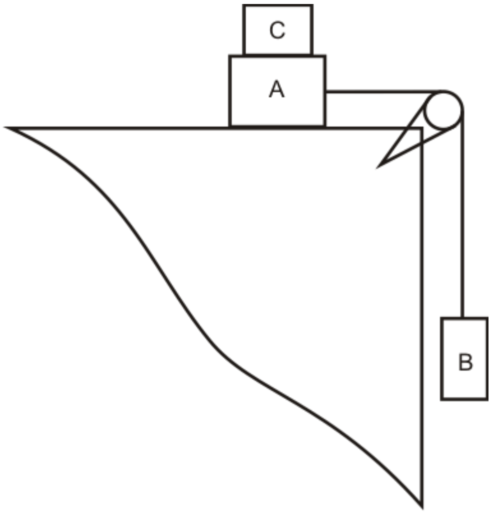
$$\sum F_X = 0 \quad y \quad \sum F_y = 0$$

Las ecuaciones anteriores son la expresión matemática correspondiente a la primera condición de equilibrio de un cuerpo.

Ejemplo resuelto

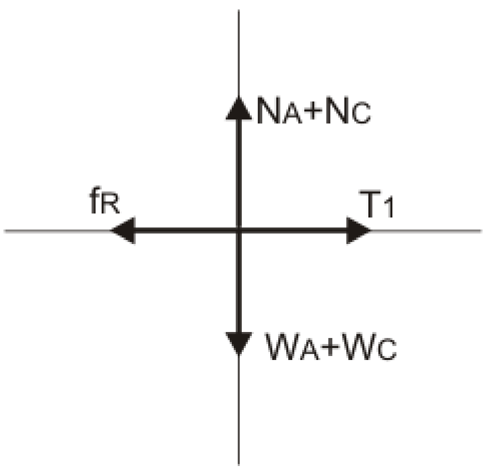
En la siguiente figura $W_A = 44\ N y\ W_B = 22\ N$, determine el peso del bloque C que debe ser colocado sobre el cuerpo A para impedir que resbale si el coeficiente entre A y la mesa es de 0.20.

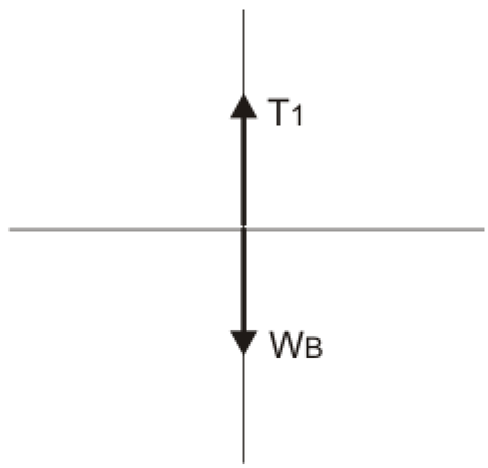
[28] Paul A Tipler. Física para la ciencia y la tecnología. Editorial Reverte. Tomo I.



Solución

Dibujamos los diagramas de fuerzas que actúan en el sistema: Para el bloque A y C, luego el diagrama del bloque B.





Para que no resbale el sistema; es decir, debe haber equilibrio traslacional.

Eje y para el bloque A y C:

$$N_A + N_C - (W_A + W_C) = 0 \rightarrow N_A + N_C = (W_A + W_C)$$

Eje x para el bloque A y C:

$$T_1 - f_R = 0, \quad \text{Pero } f_R = \mu \cdot N \rightarrow T_1 = \mu \cdot (W_A + W_C)$$

Para el cuerpo B analizamos el eje x:

$$T_1 - W_B = 0 \rightarrow T_1 = W_B$$

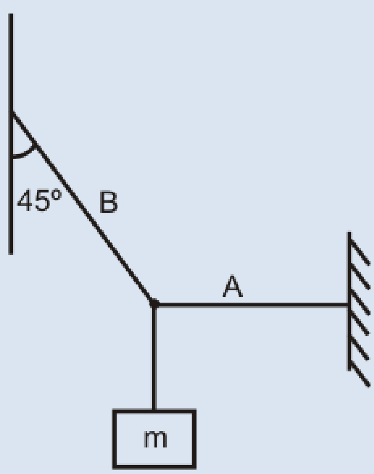
Igualando T_1 tenemos que:

$$\mu \cdot (W_A + W_C) = W_B \rightarrow \mu \cdot W_A + \mu \cdot W_C = W_B \rightarrow W_C = \frac{W_B - \mu \cdot W_A}{\mu}$$

$$W_C = \frac{22N - 0.20 \cdot (44N)}{0.20} = 66 \text{ N}$$

11.4.2. Ejercicio

El siguiente cuerpo mostrado en la figura está en equilibrio. Calcular el valor de las tensiones A y B. La masa del cuerpo es 10 kilogramos.



11.4.3. Segunda condición de equilibrio: equilibrio rotacional

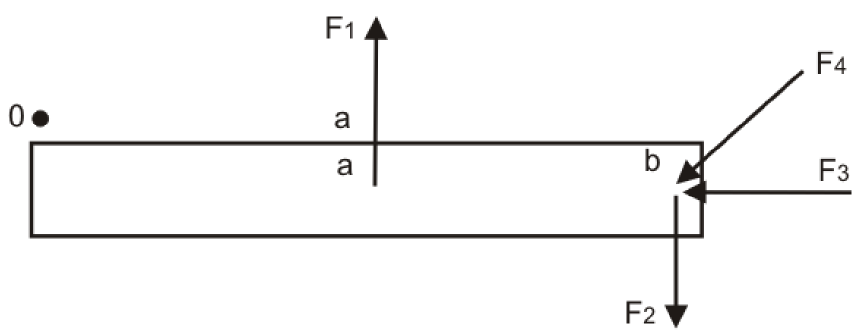
Se puede decir que un cuerpo se encuentra en equilibrio de rotación si:

La suma algebraica de los momentos o torques de las fuerzas aplicadas al cuerpo, respecto a un punto cualquiera debe ser igual a cero.

$$\sum T = 0$$

Cuando se aplica una fuerza en algún punto de un cuerpo rígido, el cuerpo tiende a realizar un movimiento de rotación en torno a algún eje. “La propiedad de la fuerza para hacer girar al cuerpo se mide con una magnitud física que llamamos **torque** o **momento de la fuerza**. Se prefiere usar la palabra torque y no momento, porque esta última se emplea para referirnos al momento lineal, momento angular o momento de inercia, que son todas magnitudes físicas diferentes para las cuales se usa una misma palabra”[29] [13].

Analizaremos cualitativamente el efecto de rotación que una fuerza puede producir sobre un cuerpo rígido. “Consideremos como cuerpo rígido a una regla fija en un punto O ubicado en un extremo de la regla, sobre el cual pueda tener una rotación, y describamos el efecto que alguna fuerza de la misma magnitud actuando en distintos puntos, produce sobre la regla fija en (O), como se muestra en la figura (a).Una fuerza $\mathbf{F_1}$ aplicada en el punto a produce una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj, $\mathbf{F_2}$ en b produce una rotación horaria y con mayor rapidez de rotación que en a, $\mathbf{F_3}$ en b pero en dirección de la línea de acción que pasa por (O) no produce rotación, $\mathbf{F_4}$ inclinada en b produce rotación horaria con menor rapidez de rotación que $\mathbf{F_2}$. Por lo tanto existe una cantidad que produce la rotación del cuerpo rígido relacionada con la fuerza, que definimos como el **torque** de la fuerza”[30] [13].



Se define el torque **T** de una fuerza **F** que actúa sobre algún punto del cuerpo rígido, en una posición r respecto de cualquier origen O, por el que puede pasar un eje sobre el cual se produce la rotación del cuerpo rígido, al producto vectorial entre la posición r y la fuerza aplicada **F**.

$$T = r \times F$$

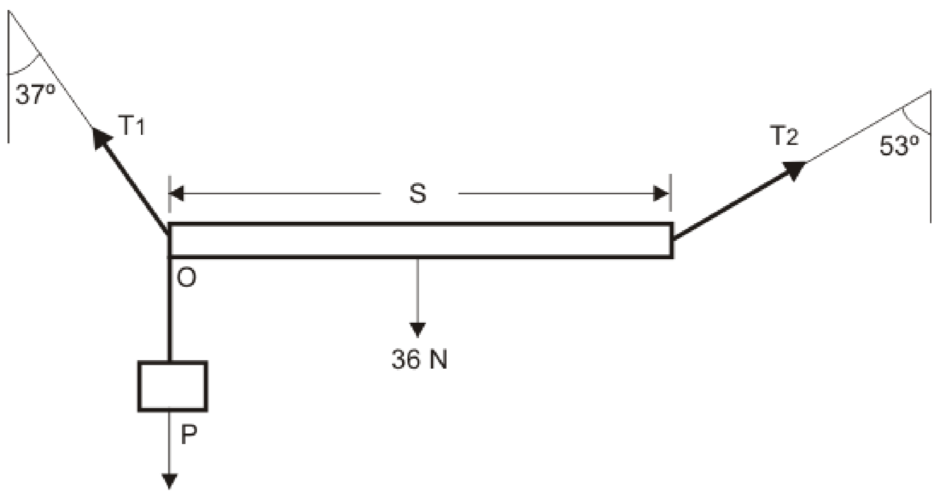
[29] Carlos Contreras J. Apuntes de física. Universidad técnica Federico. Villa del mar.
[30] Íbid.

A la distancia (r) se le denomina brazo. Si θ es el ángulo entre r y F, su valor numérico por definición del producto vectorial, es:

$$T = r\,F\,Sen\theta$$

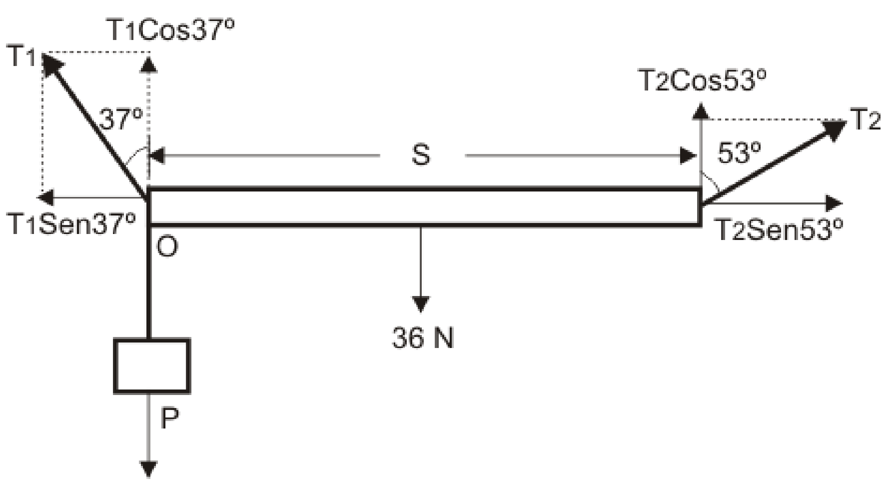
Ejemplo resuelto

A una viga homogénea de 36 Newton la soportan dos cables, tal como muestra la siguiente figura. ¿Cuál es el valor del peso para que la viga esté horizontal?



Solución:

Hagamos un diagrama de fuerzas del ejercicio.



Las ecuaciones de equilibrio son (los momentos respecto a O).

$$\sum F_x = T_2 sen53º - T_1 sen37º = 0$$

$$\sum F_y = T_2 Cos53º + T_1 Cos37º - 36 - P = 0$$

$$\sum \tau_O = T_2 Cos53º(S) - 36(\frac{S}{2})$$

Lo que se escribe (simplificando por s):

$$0,8T_2 = 0,6T_1$$

$$0,6T_2 + 0,8T_1 = 36 + P$$

$$6T_2 = 18$$

De aquí se deduce:

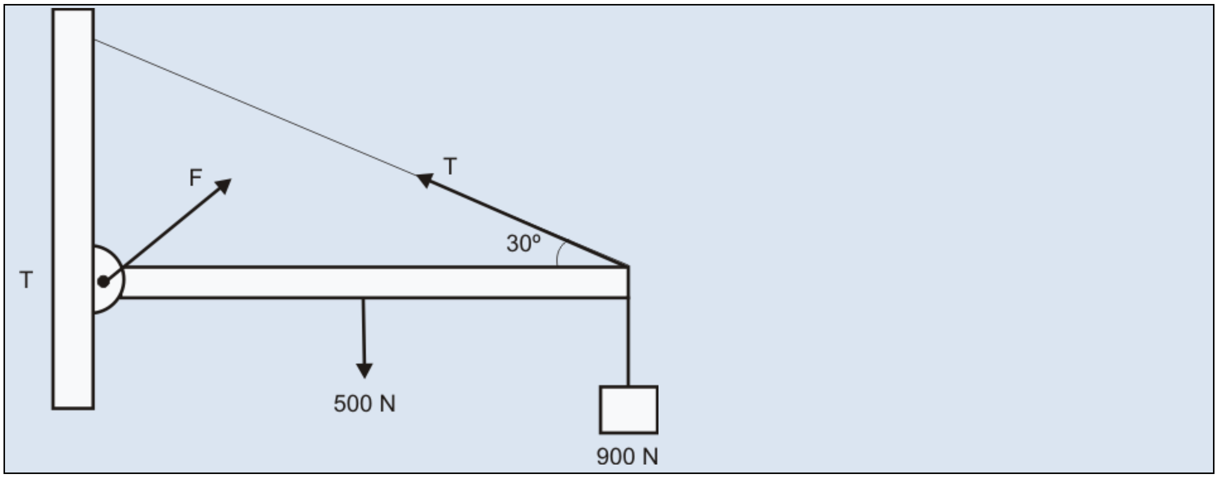
$$T_2 = 30N; \qquad T_1 = 40N$$
$$P = (0,6 \times 30) + (0,8 \times 40) - 36 = 14N$$

11.4.4. Ejercicio

Una viga uniforme d 500 Newton de peso y 3 metros de longitud está sostenida por un cable, como se muestra en la siguiente figura. La viga se apoya en la pared y el cable forma un ángulo de 30º con respecto a la viga, que está en posición horizontal. Si una carga de 900 Newton se cuelga del extremo derecho, calcular:

a) La tensión (T) del cable

b) Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por el pivote



11.4.5. Energía cinética rotacional: momento de inercia

Hemos visto que una partícula que se mueve en un círculo de radio (R) tiene una rapidez lineal dada por:

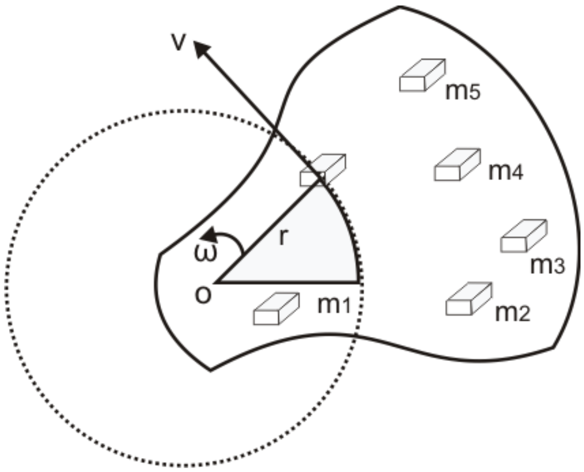
$$v = \omega \cdot R$$

Si la partícula tiene una masa (m), tendrá una energía cinética que se obtiene por:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow K = \frac{1}{2}m\omega^2 R^2$$

Un cuerpo rígido como el de la figura siguiente se puede considerar formado por muchas partículas de diferentes masas localizadas a diversas distancias del eje de rotación (0). "!La energía cinética total de un cuerpo será entonces la suma de las energías cinéticas de cada partícula que forma el cuerpo"[31] [15]. Así:

[31] Carlos Contreras J. Apuntes de física. Universidad técnica Federico. Villa del mar.



$$K = \sum \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$$

Puesto que la constante $\frac{1}{2}$ y la velocidad angular (ω) son las mismas para todas las partículas, se puede reorganizar la ecuación anterior y obtener:

$$K = \frac{1}{2}(\sum mr^2)\omega^2$$

La cantidad entre paréntesis, $\sum mr^2$ tiene el mismo valor para un cuerpo dado independientemente de su estado de movimiento.

Se define esta cantidad como el *momento de inercia* y se representa por (I):

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots$$

O bien.

$$I = \sum mr^2$$

La unidad del SI para (I) es el kilogramo – metro al cuadrado.

El momento de inercia realiza en la rotación un papel similar al de la masa en el *movimiento lineal.*

Por ejemplo, si con una honda se lanza una piedra pequeña y una grande, aplicando la misma fuerza a cada una, la piedra pequeña se acelerará mucho más que la grande.

"La inercia es la tendencia de un objeto a permanecer en reposo o a continuar moviéndose en línea recta a la misma velocidad"[32].

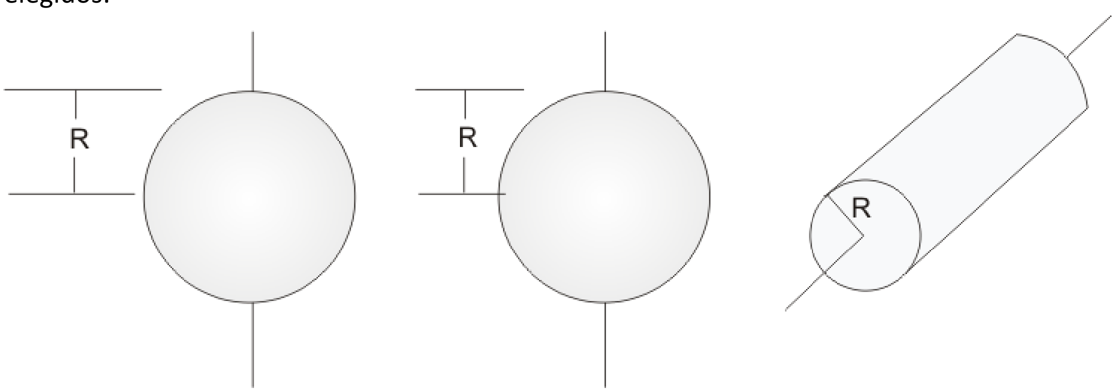
"El momento de inercia es, pues, masa rotacional y depende de la distribución de masa en un objeto. Cuanta mayor distancia hay entre la masa y el centro de rotación, mayor es el momento de inercia"[33].

A veces es conveniente expresar la inercia rotacional de un cuerpo en términos de su **radio de giro (k)**. Esta cantidad se define como la distancia radial del centro de rotación a la circunferencia en la cual se puede considerar concentrada la masa total del cuerpo sin cambiar su momento de inercia. De acuerdo con esta definición, el momento de inercia se calcula a partir de la formula:

$$I = mk^2$$

Donde (m) representa la masa total del cuerpo que gira y (k) es su radio de giro.

En la siguiente figura se muestran ***la inercia de rotación de algunos sólidos*** en torno a ejes elegidos.



Esfera Sólida, eje en su diámetro

$$I = \frac{2}{5}mR^2$$

Esfera hueca de pared delgada

$$I = \frac{2}{3}mR^2$$

cilindro sólido

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

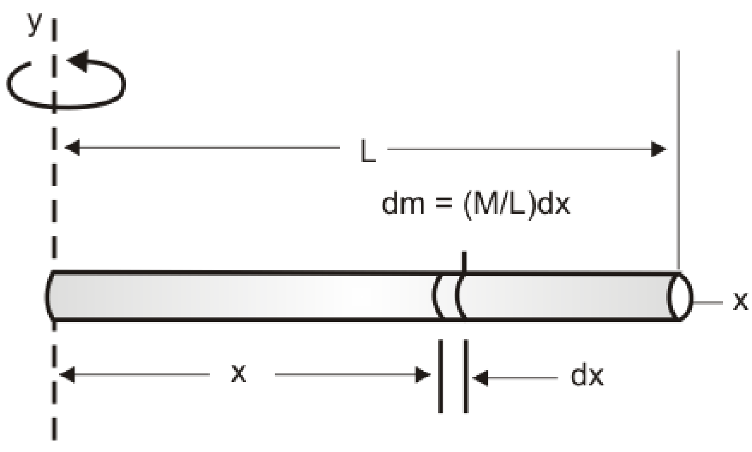
[32] Carlos Contreras J. Apuntes de física. Universidad técnica Federico. Villa del mar.
[33] Íbid.

Para calcular el momento de inercia en sistemas continuos, tomamos la suma finita $I = \sum mr^2$ la cual se transforma en la integral:

$$I = \int r^2 dm$$

Ejemplo resuelto

Determinar el momento de inercia de una barra uniforme de longitud L y masa M alrededor de un eje perpendicular a la barra que pasa por uno de sus extremos. Suponer que la barra tiene un espesor despreciable.



Solución

Supongamos que la barra está orientada según el eje x con su extremo en el origen. Para calcular I alrededor del eje y, elegimos un elemento de masa dm a una distancia x del eje como se muestra en la figura. Como la masa total M está uniformemente distribuida a lo largo de la longitud L, la masa por unidad de longitud (densidad de masa lineal) es $\lambda = M/L$.
El momento de inercia viene dado por la integral:

$$I = \int_O^L x^2 dm$$

Ahora debemos relacionar el dm con dx:

$$dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$$

Sustituimos en la integral los valores anteriores:

$$I_y = \int_O^L x^2 dm = \int_O^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L}\int_O^L x^2 dx = \frac{M}{L}\frac{1}{3}x^3 \Big|_0^L = \frac{M}{L}\frac{L^3}{3} = \frac{1}{3}ML^2$$

11.4.6. Ejercicio

Usar la ecuación $I = \int r^2 dm$ para calcular el momento de inercia de un disco sólido uniforme de masa M y radio R alrededor de un eje perpendicular al plano del disco y que pase por el centro.

11.4.7. Ecuaciones de movimiento de un sólido rígido

Para determinar las ecuaciones de movimiento de un sólido rígido debemos analizar la *Relación que hay entre momento de torsión y aceleración angular*.

Suponga que analizamos el movimiento de rotación de un cuerpo rígido como muestra la siguiente figura.

Considérese una fuerza (F) que actúa sobre la pequeña masa (m), indicada por la posición sombreada del objeto, a una distancia r del eje de rotación.

La fuerza (F) aplicada en forma perpendicular a (r) hace que el cuerpo gire con una aceleración tangencial:

$$a_T = \alpha \cdot r$$

Donde (α) es la aceleración angular. Partiendo de la segunda ley de Newton del movimiento,

$$F = ma_T = m\alpha \cdot r$$

Al multiplicar ambos lados de esta relación por (r) queda:

$$Fr = (mr^2)\alpha$$

La cantidad (Fr) se conoce con el nombre de torsión producido por la fuerza (F) con respecto al eje de rotación. Por lo tanto, para la masa (m) escribimos:

$$\tau = (mr^2)\alpha$$

Por consiguiente, el momento de torsión resultante en todo el cuerpo es:

$$\tau = (\sum mr^2)\alpha$$

O bien,

$$\tau = I\alpha$$

Momento de torsión es igual al momento de inercia por la aceleración centrípeta.
Al trabajar con problemas que involucren tanto la rotación como la traslación, debemos recordar sumar la energía cinética rotacional k_R a la energía cinética trasnacional k_T. Por ejemplo, al aplicar el principio de conservación de la energía total, sabemos que el total de todos los tipos de energía antes de un suceso debe ser igual al total después del suceso más cualquier pérdida debido a la fricción o a otras fuerzas disipativas.

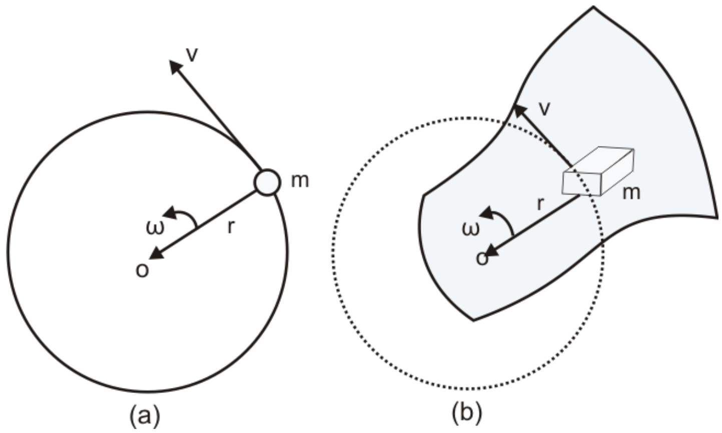
$$(U_0 + K_{TO} + K_{RO}) = (U_f + K_{Tf} + K_{Rf}) + |\text{Pérdidas}|$$

Los subíndices (0) y (f) se refieren a los valores inicial y final de la energía potencial (U), la energía cinética rotacional k_R y la energía cinética trasnacional k_T.

El término "pérdidas" puede establecerse como cero si suponemos que el movimiento es sin fricción.

Para la *Cantidad de movimiento angular* considérese una partícula de masa (m) que se mueve en un círculo de radio r, como se muestra en la siguiente figura (a). Si su velocidad tangencial es v, tendrá una cantidad de movimiento rectilíneo $p = mv$. Con respecto al eje de rotación fijado, definimos la cantidad de movimiento angular **L** de la partícula como el producto de su cantidad de movimiento rectilíneo por la distancia perpendicular que va del eje a la partícula que gira.

$$L = mvr$$



Ahora consideremos la definición de la cantidad de movimiento angular cuando está se aplica a un cuerpo rígido externo. La figura (b) describe este tipo de cuerpo, el cual gira alrededor de su eje O. Cada partícula del cuerpo tiene una cantidad de movimiento angular dado por la ecuación $L = mvr$

Sustituyendo $v = \omega \cdot R$ en la anterior tenemos lo siguiente:

$$mvr = m(\omega r)r = (mr^2)\omega$$

Puesto que el cuerpo es rígido, todas las partículas que lo forman tienen la misma velocidad angular, y la cantidad de movimiento angular del cuerpo es:

$$L = (\sum mr^2)\omega$$

Por lo tanto, la cantidad de movimiento angular total es igual al producto de la velocidad angular del cuerpo por su momento de inercia:

$$L = I\omega$$

Podemos entender mejor la definición de movimiento angular si regresamos a la ecuación básica para el movimiento angular $\tau = I\alpha$. Recordemos la ecuación que define la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_o}{t}$$

Reemplazando la anterior en $\tau = I\alpha$ tenemos lo siguiente:

$$\tau = \mathrm{I}(\frac{\omega_f - \omega_o}{t})$$

Al multiplicar por t, obtenemos:

$$\tau \mathrm{I} = \mathrm{I}\omega_f - \mathrm{I}\omega_o$$

Impulso angular = cambio en la cantidad de movimiento angular

El producto $\tau \mathrm{I}$ se define como impulso angular.

Si no se aplica ningún momento de torsión externo a un cuerpo que gira, podemos establecer $\tau = 0$ y nos queda la siguiente igualdad:

$$\mathrm{I}\omega_f = \mathrm{I}\omega_o$$

De esta manera, llegamos a un enunciado para expresar la conservación de la cantidad de movimiento angular.

Ejemplo resuelto

Una forma práctica de hacer ejercicio sin desplazarse del lugar puede conseguirse mediante una bicicleta situada en un soporte, de tal modo que la rueda trasera gira libremente. Al pedalear, la cadena aplica la piñón una fuerza de 18 newton a una distancia de $r_s = 7\,cm$ del eje de la rueda. Consideremos la rueda como un anillo ($\mathrm{I} = MR^2$) de radio 35 centímetros y masa 2,4 kilogramos. ¿Cuál es la velocidad angular de la rueda al cabo de 5 segundos?

Solución

La velocidad angular puede determinarse a partir de la aceleración angular, y está se deduce a partir de la segunda ley de Newton de la rotación. Como las fuerzas son constantes, los momentos de las fuerzas también lo serán y podemos aplicar las ecuaciones de la aceleración angular constante. Obsérvese que F actúa en la dirección de la cadena, y por lo tanto, la línea de fuerza es tangente a la rueda; el brazo de la palanca será el radio r_s del piñón.

La velocidad angular está relacionada con la aceleración y el tiempo:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \rightarrow \omega = \alpha t$$

Aplicamos la segunda ley de Newton al movimiento de rotación para relacionar α con el momento de las fuerzas y el momento de inercia:

$$\sum \tau_{ext} = I\alpha$$

El único momento de fuerza que actúa sobre el sistema es la fuerza aplicada F con el brazo de la palanca r_s:

$$\tau_{ext} = F \cdot r_s$$

Sustituir el momento de la fuerza por este valor, y el momento de inercia por mR^2

$$\alpha = \frac{\tau_{ext}}{I} = \frac{F \cdot r_s}{\mathrm{mR}^2}$$

Reemplazando este último valor en $\omega = \alpha t$ tenemos:

$$\omega = \alpha t = \frac{F \cdot r_s}{\mathrm{mR}^2} t = \frac{(18N)(0.07m)}{(2,4kg)(0.35m)^2}(5s) = 21,4 \, rad/seg$$

11.4.8. Ejercicio

Un cilindro de 2,5 kilogramos y radio 11 centímetros, inicialmente en reposo, puede girar alrededor de su eje. Sobre él, se arrolla una cuerda de masa despreciable que tira con una fuerza de 17 Newton. Determinar:

a. Momento ejercido por la cuerda
b. La aceleración angular del cilindro
c. Velocidad angular del cilindro al cabo de 5 segundos

11.4.9. Sólidos en rotación

Para comprender mejor este tema, se hace necesario elaborar un resumen de las ecuaciones del movimiento de un sólido rígido.

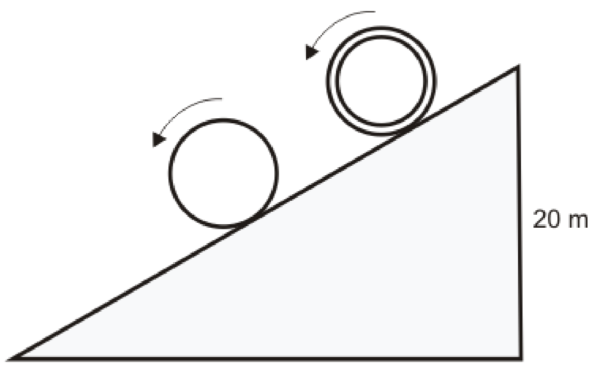
Ecuaciones del movimiento de un sólido rígido	
Desplazamiento angular	θ
Velocidad angular	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Aceleración angular	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Inercia de rotación	I
Torque	$\tau = I \cdot \alpha$
Energía cinética	$K = \frac{1}{2} I\omega^2$
Potencia	$P = \tau \cdot \omega$

Cantidad de movimiento angular	$L = I \cdot \omega$

Un cuerpo sólido se mueve en rotación pura si cada punto del cuerpo se mueve en trayectoria circular. Los centros de estos círculos deben estar sobre una línea recta común llamada eje de rotación.

Ejemplo resuelto

Un aro y un disco circular tienen cada uno una masa de 2 kilogramos y un radio de 10 centímetros. Se dejan caer rodando desde el reposo a una altura de 20 metros a la parte inferior de un plano inclinado, como se muestra en la siguiente figura. Compare sus rapideces finales suponiendo pérdidas de fricción insignificantes para cada caso.



Solución:

En cada caso, $U = mgh; \quad k_T = \frac{1}{2}mv^2; \quad k_R = \frac{1}{2}I\omega^2$

Aplicando la conservación de la energía $(U_0 + K_{TO} + K_{RO}) = (U_f + K_{Tf} + K_{Rf})$ sin pérdida de fricción tenemos:

$$mgh_o + 0 + 0 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}m\omega_f^2$$

Para el aro $I = mR^2$ y $\omega = \frac{v}{R}$

Así que al sustituir se obtiene:

$$mgh_o = \frac{1}{2}mv_f^{\,2} + \frac{1}{2}(mR^2)(\frac{v^2}{R^2})$$

Al simplificar y resolver para v, obtenemos:

$$v = \sqrt{gh_o} = \sqrt{(9.8m/s^2)(20m)} = 14.0\,m/s$$

Para el disco $I = \frac{1}{2}mR^2$ y aplicamos la conservación de la energía nuevamente:

$$mgh_o = \frac{1}{2}mv_f^{\,2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mR^2)(\frac{v^2}{R^2})$$

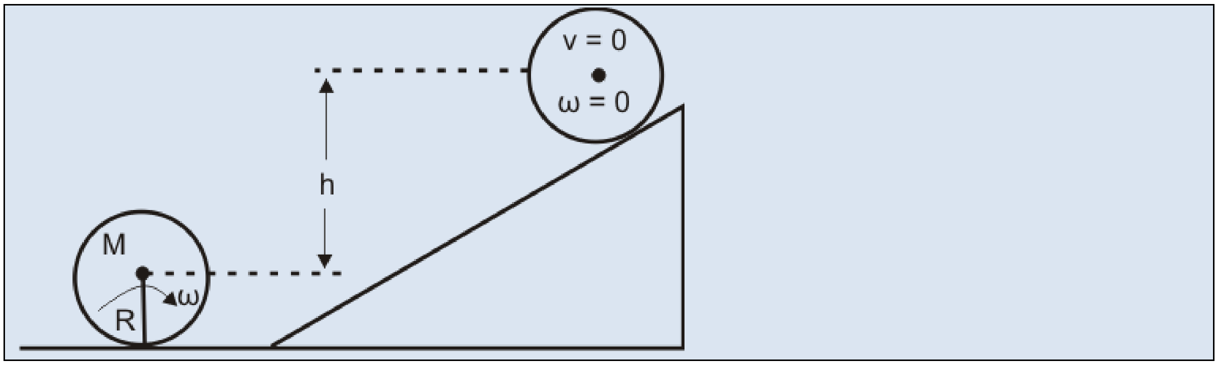
Esto se puede resolver para obtener:

$$v = \sqrt{\frac{3}{4}gh_o} = \sqrt{\frac{3}{4}(9.8m/s^2)(20m)} = 16.2\ m/s$$

Observe que aun cuando las masas y los radios son los mismos, el disco tiene una inercia rotacional inferior que da como resultado una rapidez final mayor. Llegará primero que el aro a la parte inferior.

11.4.10. Ejercicio

Una bola de bolera de radio 11 centímetros y masa M = 7,2 kilogramos rueda sin deslizamiento sobre una superficie horizontal a 2 m/s. Después sube por una pendiente sin deslizamiento hasta una altura h antes de alcanzar momentáneamente el reposo y volver rodando hacia atrás. Determinar el valor de h.



11.4.11. Movimiento de traslación y rotación: combinadas

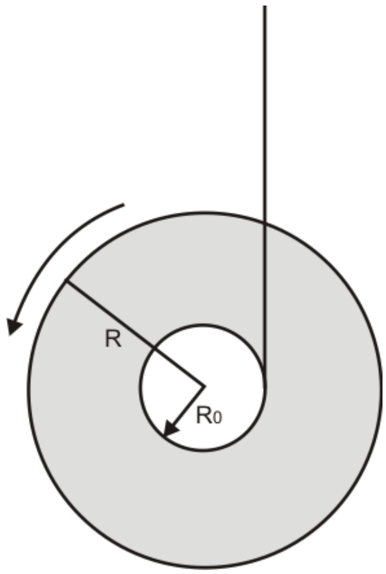
Es posible demostrar que el movimiento de un cuerpo rígido siempre puede dividirse en movimientos independientes de traslación del centro de masa y rotación alrededor del centro de masa. Además, la energía cinética del cuerpo es la suma de una parte ($\frac{1}{2}Mv_{cm}{}^{2}$) asociada al movimiento del centro de masa y una parte ($\frac{1}{2}I_{cm}\omega^{2}$) asociada a la rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.

$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}{}^{2} + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^{2}$$

Donde v_{cm} es velocidad del centro de masa y I_{cm} es el momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de masa.

Ejemplo

Un yoyo de masa M = 0.023 kilogramos, que consta de dos discos de radio $R = 2.6\,cm$ unidos por un eje de radio $R_0 = 0.3\,cm$, está girando en el extremo de un cordón de longitud $L = 0.84\,m$ con una velocidad angular ω_0 ¿Qué velocidad angular se necesita para que el yoyo suba por el cordón? Suponga que el cordón tiene un espesor despreciable.



Solución

Al comenzar la subida, sólo existe energía cinética de rotación, pero, al final, está es, en parte, energía cinética de rotación, en parte energía cinética de traslación y en parte energía potencial gravitatoria. La conservación de la energía nos da entonces:

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + MgL$$

Donde ω y v son las velocidades finales angular y lineal. No podemos resolver este problema sencillamente para un yoyo real, pero podemos resolverlo para el yoyo ideal con un cordón de espesor despreciable hallando la condición necesaria para que el yoyo llegue justo a la mano (llegando con $\omega = v = 0$)

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = MgL$$

Usando la inercia de rotación de un disco $I = \frac{1}{2}MR^2$ y despreciando la contribución del eje a la inercia de rotación, resolvemos para ω_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4gL}{R^2}} = \sqrt{\frac{4(9.8\,m/s^2)(0.84\,m)}{(0.026\,m)^2}} = 221\ rad/s$$

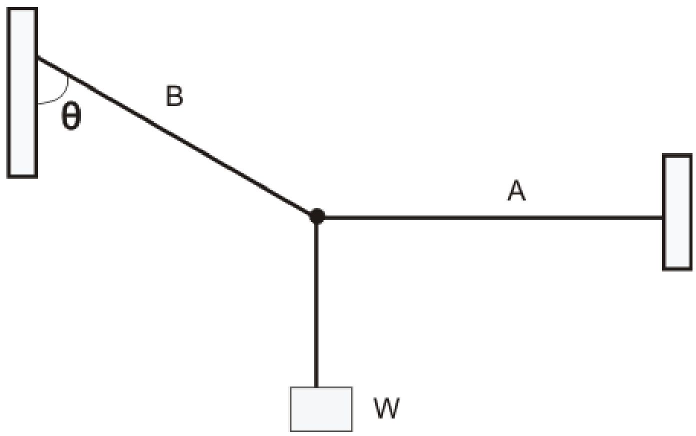
11.4.12. Ejercicio

Un aro de masa 1,5 kilogramos y de radio 65 centímetros tiene una cuerda arrollada a su circunferencia y está apoyado en posición plana sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Se tira de la cuerda con una fuerza de 5 Newton. Calcular:

a. Qué distancia recorre el centro del aro en 5 segundos
b. Cuál es la velocidad angular del aro respecto a su centro de masas al cabo de 3 segundos

11.5.PRUEBA FINAL

Las siguientes preguntas se refieren a la siguiente información: El cuerpo de la siguiente figura está en equilibrio.



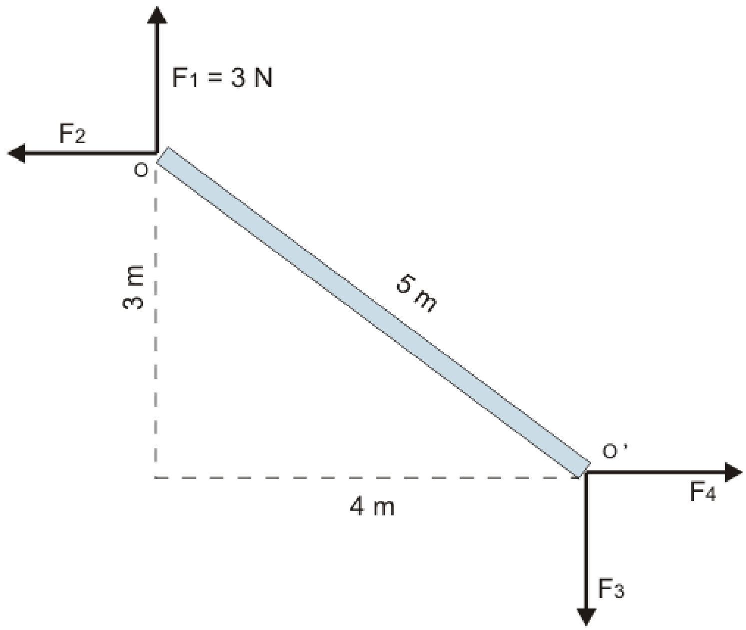
- La tensión de la cuerda A es:

a. $w\,Sen\theta$ b. $w\,Cos\theta$ c. $w\,Tan\theta$ d. $w/Sen\theta$ e. $w\,Cos\theta$

- La tensión de la cuerda B es:

a. $w\,Sen\theta$ b. $w\,Cos\theta$ c. $w\,Tan\theta$ d. $w/Sen\theta$ e. $w\,Cos\theta$

Las preguntas siguientes se refieren a la siguiente información: Sean las cuatro fuerzas de la siguiente figura, aplicadas a una regla sin peso. El sistema está en equilibrio.



- El momento de F_1 respecto a O es:

a. 0 b. 9 N·m c. 12 N·m d. 15 N·m e. 21 N·m

- El momento de F_1 respecto a O ' es:

a. 0 b. 9 N·m c. 12 N·m d. 15 N·m e. 21 N·m

- La magnitud de F_3 es:

a. 1 N b. 3 N c. 4 N d. 5 N e. 7 N

- La magnitud de F_2 es:

a. 1 N b. 3 N c. 4 N d. 5 N e. 7 N

- La magnitud de F_4 es:

a. 1 N b. 3 N c. 4 N d. 5 N e. 7 N

Las siguientes preguntas se refieren a la siguiente información: un disco homogéneo, de radio r y de masa M, rueda sin resbalar sobre un plano horizontal con una velocidad del centro de masa v.

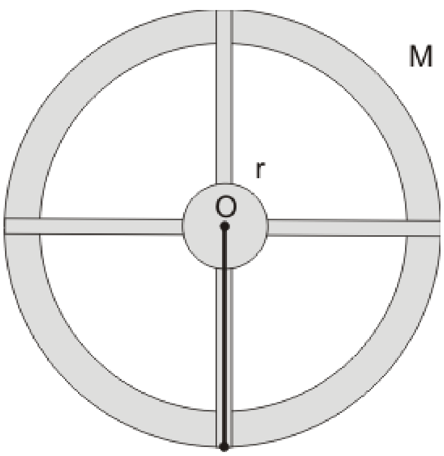
- La energía cinética total del disco es:

a. $Mv^2/4$ b. $Mv^2/2$ c. $3Mv^2/4$ d. Mv^2 e. $5Mv^2/4$

- El disco sigue subiendo una pendiente. ¿Hasta que altura?

a. gv^2 b. v^2/g c. $v^2/2g$ d. $v^2/4g$ e. $3v^2/4g$

Las siguientes preguntas se refieren a la siguiente información: Considérese un anillo de masa M = 20 kilogramos y de radio r = 0,5 metros, inicialmente en reposo, como muestra la siguiente figura (Toda la masa está situada sobre la circunferencia y el eje es fijo sin rozamiento).



- El momento de inercia del anillo respecto al centro O es:

a. $2{,}5\ kg\cdot m^2$ b. $5\ kg\cdot m^2$ c. $10\ kg\cdot m^2$ d. $20\ kg\cdot m^2$ e. $25\ kg\cdot m^2$

- Se aplica una fuerza tangencial F = 40 newton al anillo anterior. La aceleración angular es:

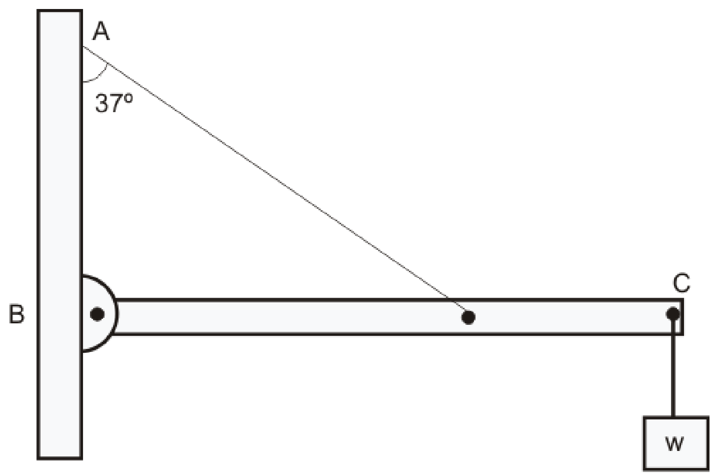
a. $1\ rad/s^2$ b. $2\ rad/s^2$ c. $4\ rad/s^2$ d. $8\ rad/s^2$ e. $10\ rad/s^2$

11.5.1. Actividades

Investiga la solución de los siguientes ejercicios de la vida real. Se recomienda consultar en Internet para una mayor profundización.

Ejercicio 1

Una viga horizontal de 6 metros, cuyo peso es de 400 Newton, gira sobre un pivote fijo en la pared como se observa en la siguiente figura. La viga está sostenida por un cable en un punto localizado a 4.5 metros de la pared y sostiene un peso de 1200 Newton en el extremo derecho ¿Cuál es la tensión en el cable?



Ejercicio 2

Un puente cuyo peso total es de 4500 Newton tiene 20 metros de longitud y tiene soportes en ambos extremos. Halle las fuerzas que se ejercen en cada extremo cuando se colocan un tractor de 1600 Newton a 8 metros del extremo izquierdo.

Ejercicio 3

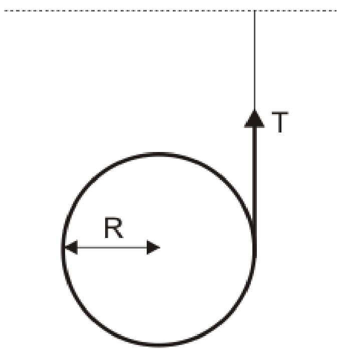
Una viga uniforme d 500 Newton de peso y 3 metros de longitud está sostenida por un cable, como se muestra en la siguiente figura. La viga se apoya en la pared y el cable forma un ángulo de 30º con respecto a la viga, que está en posición horizontal. Si una carga de 900 Newton se cuelga del extremo derecho, calcular:

a. La tensión (T) del cable
b. Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por el pivote

Ejercicio 4

Un disco cuelga de una cuerda sujeta al techo. Si el radio es 0.5 metros y el disco tiene una masa de 5 kilogramos. (Observar la siguiente figura), Calcular:

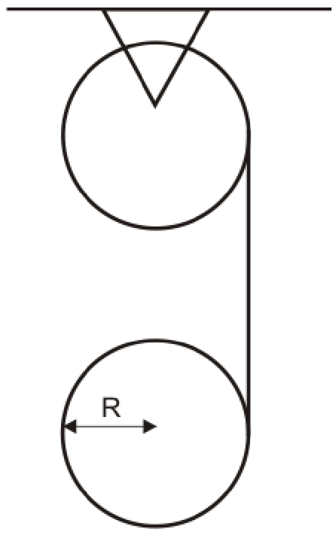
a. La aceleración del centro de la masa del disco
b. La velocidad lineal a los 2 segundos si inicialmente parte del reposo



Ejercicio 5

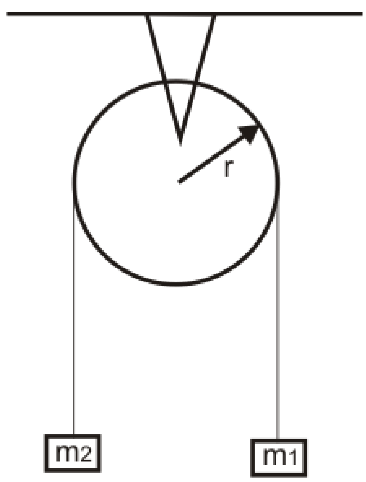
Los discos de la siguiente figura tienen iguales masas (M) y radio (R). El disco superior puede girar libremente alrededor de un eje horizontal, a través de su centro. Una cuerda que esta enrollada alrededor de ambos discos, y el disco inferior se deja caer. Encontrar:

a. La aceleración del centro de masa del disco inferior
b. La aceleración angular de cada disco con respecto a su centro de masa



Ejercicio 6

En la siguiente figura, se supone que la masa es mayor que la masa y que la polea tiene un momento de inercia y un radio r. Calcular la aceleración de una de sus masas.



Ejercicio 7

Una polea de entrada de 30 centímetros de diámetro gira a 200 revoluciones por minuto sobre una correa de transmisión conectada a una polea de salida cuyo diámetro es de 60 centímetros. ¿Cuál es la razón entre el momento de torsión de salida y el momento de torsión de entrada? ¿Cuántas revoluciones por minuto hay en la salida?

Ejercicio 8

La rueda de una bicicleta pesa 1.2 kilogramos y tiene 70 centímetros de radio; además, tiene rayos cuyo peso es insignificante. Si parte del reposo y recibe una aceleración angular de $3\ {rad}/{s^2}$ ¿Cuál es la energía cinética rotacional?

Ejercicio 9

Con materiales reciclables, debes realizar un experimento que tenga que ver dinámica del sólido rígido. Debes elaborar el proyecto respectivamente.

12.UNIDAD 5 OSCILACIONES

12.1.OBJETIVO GENERAL

Analizar situaciones teóricas y prácticas sobre movimientos oscilatorios y vincularlos a situaciones concretas.

12.2.OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Describir un movimiento armónico simple (M.A.S)
- Comparar las ecuaciones de un M.A.S
- Analizar la conservación de la energía mecánica en un sistema oscilante
- Confirmar el funcionamiento de un péndulo simple
- Describir los fenómenos de oscilaciones amortiguadas y forzadas

12.3.PRUEBA INICIAL

Las siguientes preguntas se refieren a la siguiente información: Un oscilador armónico de amplitud 20 centímetros, de frecuencia angular $4 rad/s$**, tiene una posición x = 0 para t = 0.**

- La respectiva ecuación del movimiento es:

a. $x = 20 Sen(4t)$
b. $x = 4 Cos(20t)$
c. $x = 20 Tang(4t)$
d. $x = 4 Sen(20t)$

- La velocidad máxima en este sistema es:

a. $40\ cm/s$ b. $80\ cm/s$ c. $60\ cm/s$ d. $20\ cm/s$ e. $10\ cm/s$

- La aceleración máxima de este sistema es:

a. $200\ cm/s^2$ b. $280\ cm/s^2$ c. $320\ cm/s^2$ d. $100\ cm/s^2$ e. $180\ cm/s^2$

Las siguientes preguntas se refieren a la siguiente información: Un cuerpo describe un círculo de radio 50 centímetros, en un tiempo de π **segundos, con una velocidad angular constante. Se considera la proyección del cuerpo sobre un diámetro.**

- Es válido afirmar que el valor de la amplitud es:

a. $10\ cm$ b. $30\ cm$ c. $40\ cm$ d. $20\ cm$ e. $50 cm$

- Es válido afirmar que el valor del período es:

a. $2\pi\ seg$ b. $\frac{\pi}{2}\ seg$ c. $4\pi\ seg$ d. $\frac{2\pi}{3}\ seg$ e. $3\pi\ seg$

- El valor correcto para la frecuencia angular del movimiento de la proyección:

a. $2\ rad/s$ b. $4\ rad/s$ c. $6\ rad/s$ d. $8\ rad/s$ e. $10\ rad/$

Las siguientes preguntas se refieren a la siguiente información: Sobre una mesa sin rozamiento, se estira un resorte de constante $20\ N/m$**, a una distancia de 0,4 metros. A t = 0 se suelta el resorte, que arrastra una masa de 5 kilogramos.**

- Podemos deducir que el período de este sistema es:

a. 6π seg b. 4π seg c. π seg d. 8π seg e. $\pi/2$ seg

- La frecuencia angular del movimiento equivale a:

a. $2\ rad/s$ b. $4\ rad/s$ c. $6\ rad/s$ d. $8\ rad/s$ e. $10\ rad/s$

Responda:

- Si a un péndulo simple se le aumenta la longitud:

a. Aumenta el período.
b. Aumenta la frecuencia.
c. Disminuye el período.
d. Aumentan la frecuencia y el período.
e. Aumenta la frecuencia y disminuye el período.

- El mayor desplazamiento que puede tener un cuerpo en el movimiento armónico simple se llama:

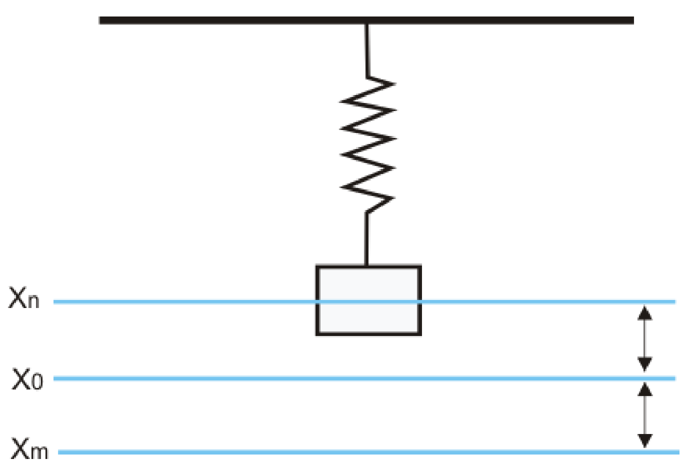
a. Elongación.
b. Longitud.
c. Amplitud.
d. Período.
e. Frecuencia.

12.4. TEMAS

12.4.1. Movimiento armónico simple (M.A.S)

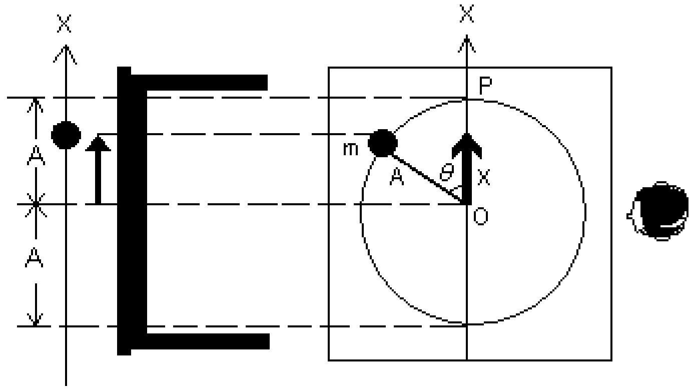
El movimiento armónico simple "es un movimiento periódico de vaivén, en el que un cuerpo oscila a un lado y a otro de su posición de equilibrio, en una dirección determinada, y en intervalos iguales de tiempo"[34].

Por ejemplo, "es el caso de un cuerpo colgado de un muelle oscilando arriba y abajo (tal como puede verse en la figura. El objeto oscila alrededor de la posición de equilibrio cuando se le separa de ella y se le deja en libertad. En este caso el cuerpo sube y baja"[35].



El movimiento armónico simple es un tipo de movimiento vibratorio causado por la proyección de un movimiento circular uniforme en una recta lineal.

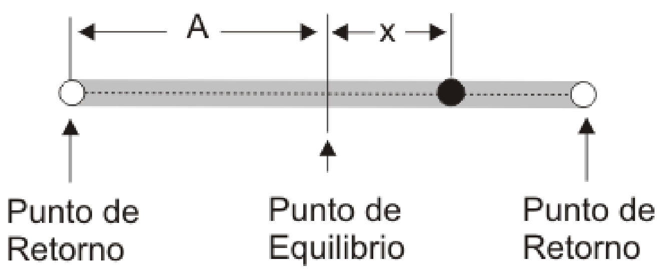
[34] http://centros5.pntic.mec.es/ies.victoria.kent/Rincon-C/Curiosid/Rc-28/cinemat.htm
[35] Íbid.



Movimiento Circular Uniforme visto desde arriba
y a la altura de la mesa

La figura anterior nos muestra una partícula (m) que gira con movimiento Circular uniforme sobre una mesa. Es alumbrado por una fuente de luz, produciéndose la proyección de la sombra de la partícula (m) sobre la superficie de la pared. Este último es el movimiento armónico simple (M.A.S). Algunas definiciones en el movimiento armónico simple son:

Proyección de un M.A.S en un línea recta



- Oscilación sencilla: Es el movimiento de un extremo al otro de la trayectoria.
- Oscilación completa: Es el movimiento de un extremo al otro de la trayectoria y regreso hasta el punto de partida; es decir, una oscilación completa es igual a dos oscilaciones sencillas.
- Período (T): Es el tiempo que tarda la partícula en dar una oscilación completa.
- Frecuencia (f): Es la cantidad de oscilaciones completas que la partícula realiza en la unidad de tiempo (1 segundo). Se cumple que: $f = \dfrac{1}{T}$

- Punto de equilibrio: Es el punto central de la trayectoria de la partícula.
- Punto de retorno: Son los extremos de la trayectoria que limitan el movimiento de la partícula.
- Elongación (x): Es la distancia que separa la partícula de su posición de equilibrio.
- Amplitud (A): Es la máxima elongación posible y equivale a la distancia entre el punto de equilibrio y uno de los puntos de retorno.

Cuando un cuerpo unido a un resorte se va desplazando una cantidad x de su posición de equilibrio, el resorte ejerce una fuerza de recuperación o restauración, que viene dada por la Ley de Hooke:

$$F_x = -kx$$

El signo menos indica que se trata de una fuerza restauradora; es decir, que se opone al sentido del desplazamiento respecto al punto de equilibrio.

Pero $F_x = ma_x$. Igualando ambas fuerzas se tiene $ma_x = -kx$; es decir,

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

Pero la aceleración es la segunda derivada de la elongación (x); es decir,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

El signo menos indica que la aceleración y el desplazamiento siempre tienen signos opuestos. Además, el valor de k es la constante del resorte, característica de su rigidez.

Una solución para $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$ sería la siguiente ecuación:

$$X = ACos(\omega t + \delta)$$

Donde A es la amplitud, el valor ω es la frecuencia angular y difiere de frecuencia (f), la frecuencia nos dice cuántos ciclos de oscilación se dan por segundo; mientras que frecuencia angular nos dice a cuántos radianes por segundo corresponde esto en el círculo de referencia, el valor $(\omega t+\delta)$ se denomina fase de movimiento y la constante δ es la fase inicial y se denomina constante de fase.

Si derivamos dos veces la ecuación $X = ACos(\omega t+\delta)$ obtenemos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 Cos(\omega t+\delta)$$

Reemplazando en $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$ y teniendo presente que $X = ACos(\omega t+\delta)$ obtenemos:

$$-A\omega^2 Cos(\omega t+\delta) = -\frac{k}{m}ACos(\omega t+\delta)$$

Por lo tanto, si elegimos a la constante ω de modo que $\omega^2 = \frac{k}{m}$, entonces la ecuación $X = ACos(\omega t+\delta)$ es, de hecho, una solución de la ecuación del movimiento armónico simple.

Si reemplazamos $\omega^2 = \frac{k}{m}$ en la ecuación $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$ nos queda más organizada la ecuación del movimiento armónico simple:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Además, si incrementamos el tiempo t en $2\pi/\omega$, en la ecuación $X = ACos(\omega t+\delta)$ resulta:

$$x = ACos\left[\omega(t + 2\pi/\omega) + \delta\right] = ACos\left[\omega t + 2\pi + \delta\right] = ACos\left[\omega t + \delta\right]$$

Es decir, la función simplemente se vuelve a repetir después de un tiempo $2\pi/\omega$. Por lo tanto, $2\pi/\omega$ es el período del movimiento ($T = 2\pi/\omega$).

Si derivamos la elongación, entonces tenemos la velocidad.

$$V = -A\omega Sen(\omega t + \delta)$$

La aceleración es la segunda derivada de la elongación; es decir, $a = -A\omega^2 Cos(\omega t + \delta)$

Reemplazando el valor de la elongación en la aceleración nos queda:

$$a = -\omega^2 x$$

Ejemplo resuelto

Un objeto oscila con frecuencia angular $\omega = 8{,}0\ {rad}/{s}$. En t = 0, el objeto se encuentra en x = 4 centímetros con una velocidad inicial $v = 25\ {cm}/{s}$. Determinar:

a. Determinar la amplitud y la constante de fase para este movimiento

b. Escribir x en función del tiempo

Solución

a. La posición inicial y la velocidad están relacionadas con la amplitud y con la constante de fase. La posición viene dada por la ecuación $X = ACos(\omega t + \delta)$ y la velocidad se calcula derivando la ecuación de la posición.

$$V = \frac{dx}{dt} = -A\omega Sen(\omega t + \delta)$$

Cuando t = 0, la posición y la velocidad valen:

$$x_0 = ACos\delta \quad y \quad V_0 = -A\omega Sen\delta$$

Procedemos a dividir ambas ecuaciones para eliminar la amplitud.

$$\frac{V_0}{x_0} = \frac{-A\omega Sen\delta}{ACos\delta} = -\omega Tang\delta \rightarrow Tang\delta = -\frac{V_0}{\omega x_0}$$

Reemplazando los valores numéricos se obtiene:

$$\delta = Tang^{-1}(-\frac{V_0}{\omega x_0}) \rightarrow \delta = Tang^{-1}(-\frac{-25\,cm/s}{(8,0\,rad/s)(4\,cm)}) = 0.663\,rad$$

Despejamos de $x_0 = ACos\delta$ la amplitud:

$$A = \frac{x_0}{Cos\delta} = \frac{4\,cm}{Cos\,0.663} = 5,08\,cm$$

b. Para obtener x en función del tiempo reemplazamos los datos respectivamente.

$$X = (5,08\,cm)Cos\left[(8,0\,s^{-1})t + 0.663\right]$$

12.4.2. Ejercicio

Un bote se balancea arriba y abajo. El desplazamiento vertical del bote viene dado por:

$$y = (1,2m)Cos(\frac{1}{2s}t + \frac{\pi}{6})$$

a. Determinar la amplitud, frecuencia angular, constante de fase, frecuencia y período del movimiento
b. ¿Dónde se encuentra el bote cuando t = 1 segundo?
c. Determinar la velocidad y la aceleración en cualquier tiempo t
d. Calcular los valores iniciales de la posición, la velocidad y la aceleración del bote

12.4.3. Energía en el movimiento armónico simple

Supongamos que m oscila bajo la acción de una fuerza $F = -kx$. Sabemos que el resorte se desplaza, y que tendrá una energía potencial $E_p = \frac{1}{2}kx$.

Si reemplazamos $X = ACos(\omega t + \delta)$ en la energía potencial tenemos:

$$E_p = \tfrac{1}{2}kA^2Cos^2(\omega t + \delta)$$

También hay una energía cinética en el sistema igual a $E_C = \tfrac{1}{2}mv^2$.

Si reemplazamos $V = -A\omega Sen(\omega t + \delta)$ en la energía cinética tenemos:

$$E_C = \tfrac{1}{2}mA^2\omega^2Sen^2(\omega t + \delta)$$

Teniendo en cuenta que $\omega^2 = k/m$ nos resulta:

$$E_C = \tfrac{1}{2}kA^2Sen^2(\omega t + \delta)$$

La energía total es la suma de la energía potencial y la energía cinética:

$$\begin{aligned} E_T &= \tfrac{1}{2}kA^2Cos^2(\omega t + \delta) + \tfrac{1}{2}kA^2Sen^2(\omega t + \delta) \\ &= \tfrac{1}{2}kA^2\left[Cos^2(\omega t + \delta) + Sen^2(\omega t + \delta)\right] \end{aligned}$$

Como $Cos^2(\omega t + \delta) + Sen^2(\omega t + \delta) = 1$ tenemos por último:

$$E_T = \tfrac{1}{2}kA^2$$

Ejercicio resuelto

Un objeto de 3 kilogramos ligado a un muelle oscila con una amplitud de 4 centímetros y un período de 2 segundos.

a. ¿Cuál es la energía total?
b. ¿Cuál es el módulo máximo de la velocidad del objeto?
c. ¿En qué posición x_1 el módulo de velocidad es igual a la mitad de su valor máximo?

Solución

a. Expresar la energía total función de k y la amplitud A: $E_T = \frac{1}{2}kA^2$

b.

La constante de fuerza se relaciona con el período y la masa: $k = m\omega^2 = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$

Sustituimos los valores proporcionales para determinar E:

$$E_T = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A^2 = \frac{1}{2}(3kg)\left(\frac{2\pi}{2s}\right)^2 (0.04m)^2 = 2,37\times10^{-2}\,J$$

c. Para determinar velocidad máxima, hay que igualar la energía cinética con la energía total y despejar v:

$$E_T = \frac{1}{2}mv_{máx}^2 = E \rightarrow v_{máx} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2(2,37\times10^{-2}\,J}{3kg}} = 0.126\,m/s$$

d. La conservación de la energía relaciona la posición x con la velocidad v:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Debemos sustituir $v = \frac{1}{2}v_{máx}$ y despejar x_1:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}v_{máx}\right)^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}mv_{máx}^2\right) + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{4}E + \frac{1}{2}kx_1^2$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2}kx_1^2 = E - \frac{1}{4}E = \frac{3}{4}E \rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{3E}{2k}} = \sqrt{\frac{3}{2k}\left(\frac{1}{2}kA^2\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}A = \frac{\sqrt{3}}{2}(4cm) = 3,46cm$$

12.4.4. Ejercicio

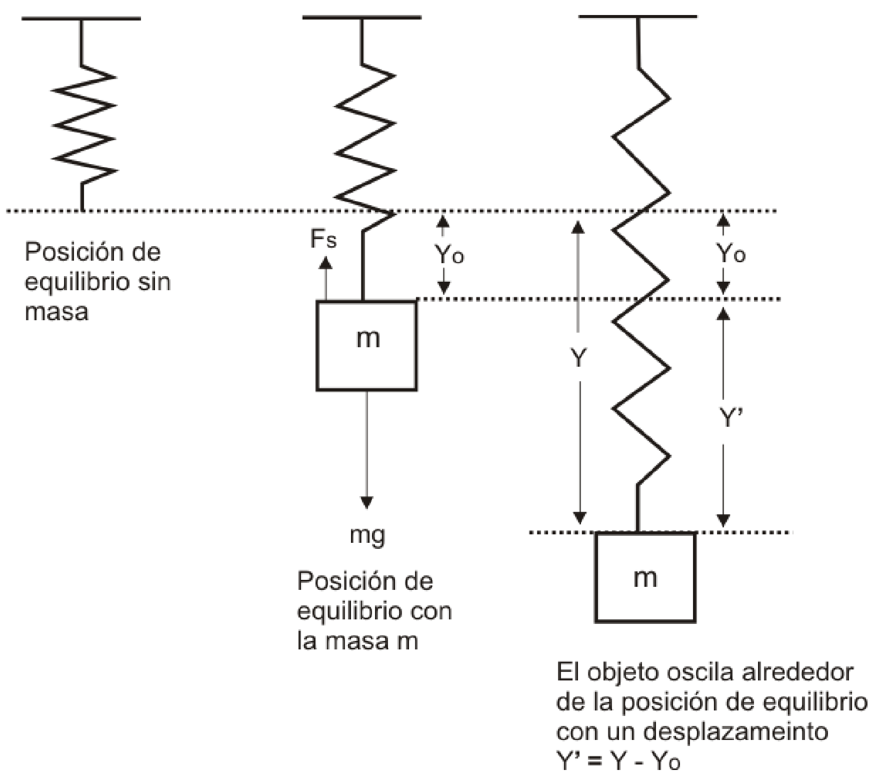
Un oscilador armónico de amplitud 0,2 metros y de frecuencia angular $4 rad/s$, tiene una masa de 5 kilogramos.

a. ¿Cuál es su energía total?

b. ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre el oscilador, cuando éste se encuentra en uno de los extremos del movimiento?

12.4.5. Sistema masa resorte

Cuando un cuerpo cuelga de un resorte vertical, además de la fuerza del resorte hay una fuerza vertical adicional hacia abajo que es el peso mg.



Si se elige la dirección hacia abajo como el sentido positivo del eje y, la fuerza del resorte sobre el cuerpo es $-ky$, donde y es el alargamiento del resorte.

La fuerza neta sobre el cuerpo es:

$$\sum F_Y = -ky + mg$$

Pero el gráfico nos muestra que $Y = Y' + Y_0$. Reemplazando esta información tenemos:

$$\sum F_Y = -k(Y' + Y_0) + mg \rightarrow \sum F_Y = -kY' - kY_0 + mg$$

Pero cuando el cuerpo está en equilibrio con la masa m se cumple que: $kY_0 = mg$

Reemplazando este valor tenemos:

$$\sum F_Y = -kY' - mg + mg \rightarrow \sum F_Y = -kY'$$

La segunda Ley de Newton $\sum F_Y = ma_y$ nos lleva a:

$$-kY_0 = m\frac{d^2Y}{dt^2}$$

Sin embargo $Y = Y' + Y_0$, donde $Y_0 = \frac{mg}{k}$ es constante. Entonces $\frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{d^2Y'}{dt^2}$, Por lo tanto:

$$-kY' = m\frac{d^2Y'}{dt^2}$$

Es decir:

$$\frac{d^2Y'}{dt^2} = \frac{-k}{m}Y'$$

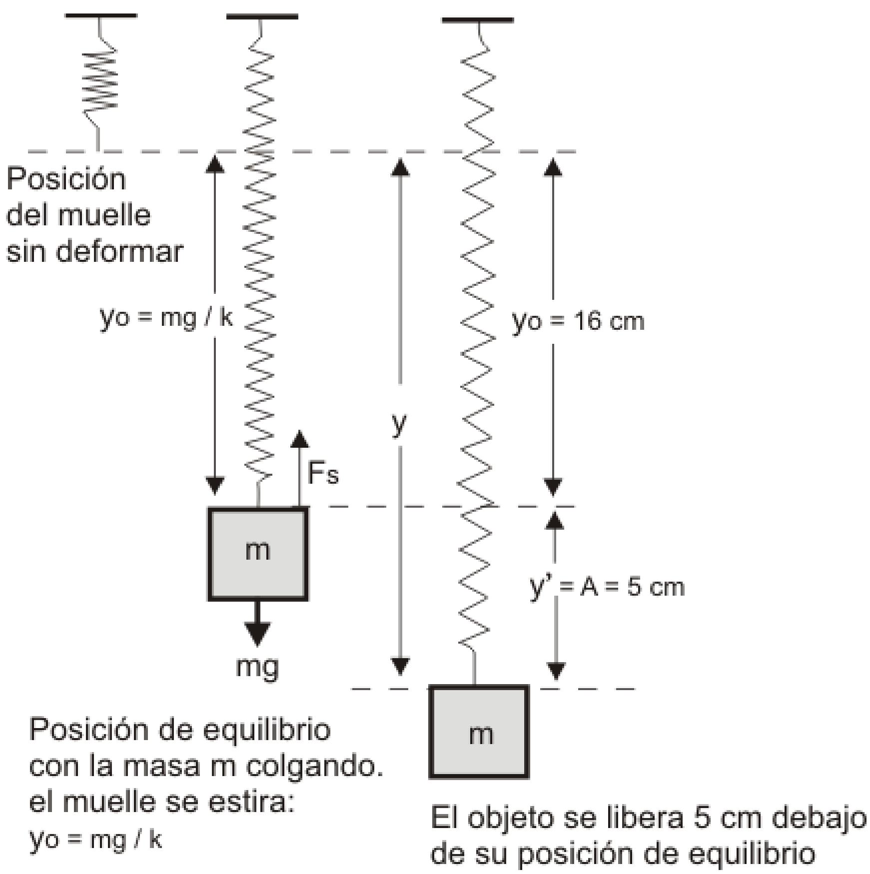
La solución de esta ecuación nos es familiar:

$$Y' = ACos(\omega t + \delta)$$

Donde $\omega = \sqrt{k/m}$

Ejemplo resuelto

Un cuerpo de 3 kilogramos alarga en 16 centímetros la longitud de un muelle cuando cuelga de él verticalmente y está en equilibrio. El muelle se estira 5 centímetros más desde su posición de equilibrio y se deja el objeto en libertad. Sea U la energía potencial total del sistema muelle – objeto – planeta. Determinar U cuando la separación de la masa respecto de su posición de equilibrio es máxima (a) si U = 0 en la posición de equilibrio y (b) si U = 0 cuando el muelle está sin deformar.



Solución

a. Si la dirección positiva **y'** es la dirección hacia abajo y si **y' = 0** en la posición de equilibrio, la energía potencial vale:

$$U=\frac{1}{2}ky'^{2}$$

Para saber el valor de U es necesario calcular el valor de la constante k. Cuando hay equilibrio la fuerza hacia arriba del muelle iguala la fuerza hacia debajo de la gravedad.

$$ky_0=mg\rightarrow k=\frac{mg}{y_0}=\frac{(3kg)(9.8m/s^2)}{0.16cm}=184\ N/m$$

Ahora podemos encontrar el valor de U:

$$U=\frac{1}{2}ky'^{2}\rightarrow U=\frac{1}{2}(184N/m)(0.05m)^{2}=0.230J$$

b. La energía potencia total viene dada por la ecuación:

$$U=\frac{1}{2}ky'^{2}+U_0$$

Cuando $y'=y'_{REF}=$-16 cm, la energía potencial vale cero; es decir:

$$0=\frac{1}{2}ky'^{2}+U_0\rightarrow U_0=-\frac{1}{2}ky'^{2}=-\frac{1}{2}(184\ N/m)(\text{-}0.16cm)^{2}=-2,35J$$

Sustituyendo este resultado en $U=\frac{1}{2}ky'^{2}+U_0$ tenemos:

$$U=\frac{1}{2}(184N/m)(0.05m)^{2}-2,35J=-2,12J$$

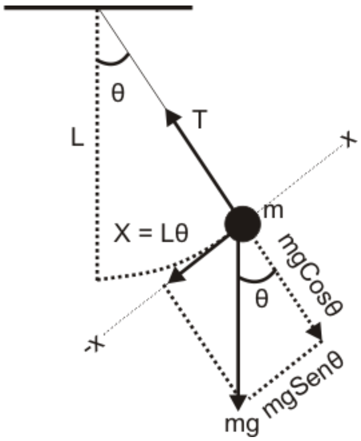
12.4.6. Ejercicio

Confeccionamos adornos para una fiesta con muelles de papel. Construimos un muelle de papel del cual cuelga una hoja de papel de color que lo alarga 8 centímetros. ¿Cuántas hojas de papel de color hay que colgar del muelle para que oscile con la frecuencia de 1 ciclo/s?

12.4.7. Péndulo simple

El péndulo simple es un modelo idealizado que consiste en una masa puntual suspendida de un hilo sin masa y no estirable. Si la masa se mueve a un lado de su posición de equilibrio (vertical), oscilará alrededor de dicha posición.

Las fuerzas que actúan sobre un péndulo simple son la Tensión (T) y la fuerza gravitatoria que se descompone en sus componentes radial y tangencial.



La fuerza responsable del desplazamiento es $F = -mg_X = \text{-}mgSen\theta$

El desplazamiento a lo largo del arco es $X = L\theta$ y para ángulos pequeños esto es casi un movimiento en línea recta. Por lo tanto, suponiendo que $Sen\theta \approx \theta$ obtenemos:

$$F = -mg\theta \rightarrow F = -mg\frac{X}{L}$$

Pero la segunda Ley de Newton establece que $F = ma$. Igualando con la anterior:

$$ma = -mg\frac{X}{L} \rightarrow a = \text{-}g\frac{X}{L}$$

Sabemos ya que la aceleración es igual a $a = \text{-}\omega^2 x$. Igualando con la anterior:

$$\text{-}g\frac{X}{L} = \text{-}\omega^2 X \rightarrow \frac{g}{L} = \omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{g/L}$$

Teniendo presente que $T = {2\pi}/{\omega}$ es posible establecer que el período del péndulo simple es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Ejemplo resuelto

En un determinado planeta; un péndulo simple de 60 centímetros oscila con un período de 2 segundos. ¿Cómo podemos averiguar la aceleración de gravedad de dicho planeta?

Solución

Sabemos que le período de un péndulo simple es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Elevando al cuadrado ambos lados tenemos que:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow T^2 = \left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right)^2 \rightarrow T^2 = 4\pi^2\frac{L}{g} \rightarrow g = \frac{4\times 10\times(0,6\,m)}{(2)^2\ seg^2} = 6\,m/s^2$$

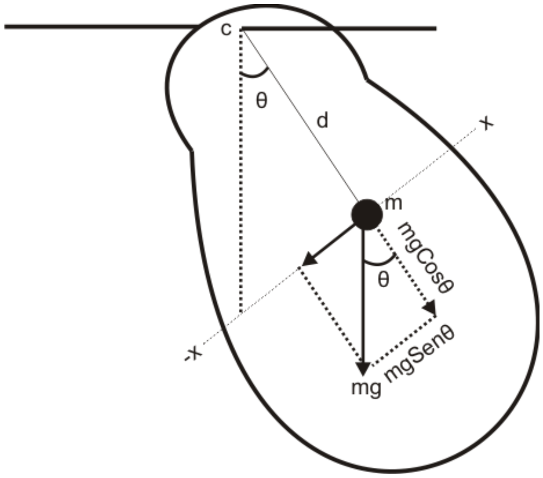
12.4.8. Ejercicio

a. Halle la longitud de un péndulo simple cuyo período sea 1.00 segundos en un lugar donde la gravedad vale $g = 10\,m/s^2$

b. Un péndulo simple de 1.53 metros de longitud efectúa 72.0 oscilaciones completas en 180 segundos en un cierto lugar. Halle la aceleración debido a la gravedad en ese punto

El péndulo Físico

Un cuerpo rígido que pueda girar libremente alrededor de un eje horizontal que no pase por su centro de masa oscilará cuando se desplace de su posición de equilibrio. Este sistema recibe el nombre de péndulo físico.



Tenemos en el péndulo físico un torque restaurador equivalente a $\tau_C = Fxd$

Además, la fuerza responsable del desplazamiento es $F = -mg_X = \text{-}mgSen\theta$

Reemplazando este último valor en el torque tenemos:

$$\tau_C = \text{-}dmgSen\theta$$

Para ángulos muy pequeños se cumple que $Sen\theta \approx \theta$. Luego podemos escribir:

$$\tau_C = \text{-}dmg\theta$$

Pero tenemos en el péndulo físico un momento de torsión $\sum \tau_C = I\alpha$. Igualando con la anterior tenemos:

$$I\alpha = \text{-}dmg\theta$$

Pero $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$, lo que implica que: $I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \text{-}dmg\theta$

Dividiendo por I a ambos lados de la última ecuación y organizando términos tenemos:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{dmg\theta}{I} = 0$$

Y comparando esta última con $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$ podemos establecer que:

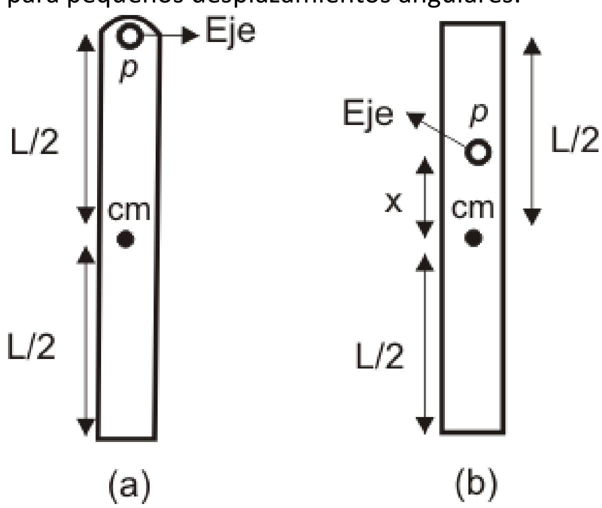
$$\omega^2=\frac{dmg}{I}\rightarrow\omega=\sqrt{\frac{dmg}{I}}$$

Teniendo presente que $T=\frac{2\pi}{\omega}$ establecemos el período de un péndulo físico como:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{dmg}}$$

Ejercicio resuelto

Una barra uniforme de masa M y longitud L puede girar libremente alrededor de un eje horizontal perpendicular a la barra y que pasa por uno de sus extremos. Determinar el período de oscilación para pequeños desplazamientos angulares.



Solución

El período de un péndulo simple viene dado por

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{dmg}}$$

El valor de I respecto al extremo es igual a $I = \frac{1}{3}ML^2$ Y D es la mitad de la longitud de la barra. Reemplazando estos valores en el período de un péndulo físico tenemos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{mg\frac{1}{2}L}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

12.4.9. Ejercicio

Un péndulo físico consta de una barra de un metro pivotada en un pequeño orificio taladrado a través de la barra a una distancia x de la marca de 50.0 centímetros. Se observa que el período de oscilación es de 2.50 segundos. Halle la distancia x.

12.4.10. Oscilaciones amortiguadas

Si un resorte o un péndulo oscilan libremente, siempre acaban parándose porque las fuerzas de rozamiento disipan su energía mecánica. Un movimiento con estas características se denomina movimiento amortiguado. Si el amortiguamiento es muy grande, el oscilador ni tan solo ejecuta una oscilación completa, sino que se mueve a la posición de equilibrio con una velocidad que se aproxima a cero cuando el objeto se acerca a dicha posición de equilibrio. Este tipo de movimiento se denomina sobreamortiguado.

Si, en cambio, el amortiguamiento del movimiento es débil, de modo que la amplitud decrece lentamente con el tiempo, como le ocurre a un niño que se divierte en un columpio de un parque cuando su mare deja de empujarlo, el movimiento resultante se denomina subamortiguado.

Cuando se tiene el amortiguamiento mínimo para que se produzca un movimiento no oscilatorio se dice que el sistema está amortiguado críticamente.

La fuerza de amortiguamiento depende de la velocidad del objeto que oscila; se opone al movimiento y en muchos casos puede considerarse directamente proporcional a la velocidad:

$$F_{amortiguamiento} = -bv$$

Donde b es una constante. Para una masa que oscila en el extremo de un resorte, la fuerza restauradora del resorte es $F_X = -kx$; de modo que la segunda Ley de Newton ($F = ma$) se convierte en:

$$ma = -bv - kx$$

Recordemos que amortiguar significa disminuir o restringir.

Sabemos que $v = \frac{dx}{dt}, \quad a = \frac{d^2x}{dt^2}$ y llevando todos los términos al lado izquierdo tenemos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Que es la ecuación del movimiento amortiguado. Si la fuerza de amortiguación es relativamente pequeña, la solución a la anterior ecuación es:

$$x = Ae^{-\left(b/2m\right)t}Cos(\omega' t + \delta)$$

La frecuencia angular de la oscilación ω' esta dada por:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Esta frecuencia angular (ω'), ya no es igual a $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, sino un poco menor, y se hace cero si b es tan grande que:

$$\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} = 0 \quad \text{o} \quad \text{bien} \quad b = 2\sqrt{km}$$

Si lo anterior se satisface, el sistema ya no oscila, sino que vuelve a su posición de equilibrio sin oscilar cuando se le desplaza y suelta.

Volviendo a la expresión $F_{amortiguamiento} = -bv$, "la fuerza de amortiguamiento se opone a la dirección del movimiento, por lo tanto, realiza un trabajo negativo y hace que la energía mecánica del sistema disminuya. Esta energía es proporcional al cuadrado de la amplitud, y el cuadrado de la amplitud disminuye exponencialmente a medida que aumenta el tiempo"[36], por lo tanta:

$$A^2 = A_0^2 e^{-t/\tau}$$

En donde A es la amplitud, A_0 es la amplitud cuando t = 0 y τ es el tiempo de extinción o constante de tiempo. La constante de tiempo es el tiempo necesario para que la energía disminuya en un factor e.

Un oscilador amortiguado se describe normalmente por su factor Q (o factor de calidad):

$$Q = \omega_0 \tau$$

El factor Q es adimensional. Podemos relacionar Q con la pérdida relativa de energía por ciclo; además $\frac{|\Delta E|}{E}$ en un ciclo (un período) viene dado por:

$$\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{Ciclo} = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_0 \tau} = \frac{2\pi}{Q}$$

O sea:

$$Q = \frac{2\pi}{(|\Delta E| / E)_{Ciclo}}, \quad \frac{|\Delta E|}{E} << 1$$

Así pues, Q es inversamente proporcional a la pérdida relativa de energía por ciclo.

Ejemplo resuelto

Cuando se pulsa la nota do-central en el piano (frecuencia $262\,Hz$), la mitad de su energía se pierde en 4 segundos.

a. Cuál es el tiempo de extinción.

b. Cuál es el factor Q de está cuerda de piano.

[36] Young Freedman. Física Universitaria. Undécima edición. Editorial Pearson.

Solución

a. Utilizando $E = E_0 e^{-t/\tau}$ de modo que $E = \frac{1}{2}E_0$. Igualamos la energía de la nota pulsada en el tiempo t = 4 segundos con la mitad de su energía original.

$$\frac{1}{2}E_0 = E_0 e^{-4/\tau} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-4/\tau}$$

Tomando logaritmos neperianos en la expresión anterior, despejamos τ.

$$\ln\frac{1}{2} = \frac{-4\,seg}{\tau} \rightarrow \tau = \frac{4\,seg}{\ln 2} = 5{,}77\,seg$$

b. Calculamos Q a partir de τ y ω_0:

$$Q = \omega_0\tau = 2\pi f\tau = 2\pi(262\,Hz)(5{,}77\,s) = 9{,}50\times10^3$$

12.4.11. Ejercicio

Un sistema masa – muelle amortiguado oscila con una frecuencia de $200\,Hz$. La constante de tiempo del sistema es 2,0 segundos. En tiempo t = 0, la amplitud de oscilación es 0,6 centímetros y la energía del sistema oscilante es $60\,\mathrm{J}$.

a. Cuáles son las amplitudes de oscilación para t = 2,0 segundos y t = 4 segundos.

b. Cuánta energía se disipa en el intervalo de 2,0 segundos.

12.4.12. Oscilaciones forzadas

"Para mantener en marcha un sistema amortiguado debemos ir suministrando energía al sistema. Cuando se lleva a cabo esto, se dice que el oscilador es forzado. Por ejemplo, al sentarse en un columpio y hacerlo oscilar, el suministro de energía se realiza moviendo el cuerpo y las piernas hacia adelante y hacia atrás, de forma que se convierte en un oscilador forzado. Si se introduce energía en el sistema a un ritmo mayor del que se disipa, la energía aumenta con el tiempo, lo cual se aprecia por un aumento de la amplitud del movimiento. Si la energía se introduce al mismo ritmo que se disipa, la amplitud permanece constante con el tiempo, en este caso se dice que el oscilador está en estado estacionario”[37].

Si la frecuencia impulsora es aproximadamente igual a la frecuencia natural del sistema, éste oscilará con una amplitud relativamente grande.

El hecho de que haya un pico de amplitud a frecuencias impulsoras cercanas a la frecuencia natural del sistema se denomina **resonancia.**

Ahora, para un amortiguamiento relativamente pequeño, se demuestra que el cociente entre la anchura de resonancia y la frecuencia de resonancia es igual al valor del factor Q.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

Por lo tanto, el factor Q es una medida directa de la agudeza de la resonancia.

La amplitud de un oscilador impulsado viene dado por la formula:

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$$

Ejercicio resuelto

Un objeto de masa 1,5 kilogramos situado sobre un muelle de constante de fuerza $600\ N/m$ pierde el 3% de su energía en cada ciclo. El sistema viene impulsado por una fuerza sinusoidal con un valor máximo de $F_0 = 0,5\ N$.

a. Cuál es el valor de Q para este sistema

b. Cuál es la frecuencia angular de resonancia

c. Si la frecuencia impulsadora varía, cuál es la anchura de la resonancia

d. Cuál es la amplitud de la resonancia

---

[37] Young Freedman. Física Universitaria. Undécima edición. Editorial Pearson.

Solución

a. El amortiguamiento es débil, entonces relacionamos Q con la pérdida de energía usando la expresión.

$$Q = \frac{2\pi}{(|\Delta E|/E)_{Ciclo}} = \frac{2\pi}{0,03} = 209$$

b. Relacionamos la frecuencia de resonancia con la frecuencia natural del sistema.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20\,\text{rad/s}$$

c. Ahora relacionamos la anchura de la resonancia $\Delta\omega$ con Q:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = 0{,}0957\,\text{rad/s}$$

d. Hay que aplicar $\omega = \omega_0$ para el cálculo de $A = \frac{F_0}{\sqrt{(m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$ en la resonancia.

$$A(\omega_0) = \frac{F_0}{b\omega_0}$$

Debemos relacionar la constante de amortiguamiento b con Q a través de la expresión:

$$b = \frac{m\omega_0}{Q} = 0{,}144\,\text{kg/s}$$

Ahora si podemos reemplazar $A(\omega_0) = \frac{F_0}{b\omega_0}$ quedando como resultado:

$$A(\omega_0) = \frac{F_0}{b\omega_0} = 17{,}4\,\text{cm}$$

12.4.13. Ejercicio

Un oscilador amortiguado pierde el 3.5 % durante su energía durante cada ciclo.

a. Cuánto ciclos han de transcurrir antes de que se disipe la mitad de su energía
b. Cuál es el factor Q
c. Si la frecuencia natural es de $100\ \text{Hz}$, cuál es la anchura de la curva de resonancia cuando el oscilador se ve forzado exteriormente

12.5.PRUEBA FINAL

Las siguientes preguntas se refieren a la siguiente información: Un oscilador armónico tiene por velocidad máxima $10\ cm/s$ **y por aceleración máxima** $200\ cm/s^2$ **.**

- El valor para la frecuencia angular es:

a. $\omega = 20\ rad/s$ b. $\omega = 40\ rad/s$ c. $\omega = 60\ rad/s$ d. $\omega = 10\ rad/s$

- El valor de la amplitud en el oscilador armónico equivale a:

a. $A = 0{,}1\,cm$ b. $A = 0{,}5\ cm$ c. $A = 0{,}3\ cm$ d. $A = 0{,}8\ cm$

- La ecuación del movimiento de este oscilador es:

a. $x = 0{,}5\,Cos(10t)$

b. $x = 0{,}2\,Cos(10t)$

c. $x = 10\,Cos(10t)$

d. $x = 10\,Sen(10t)$

Las siguientes preguntas se refieren a la siguiente información: Un cuerpo de masa 2 kilogramos, suspendido de un resorte, oscila con un período de 1 segundo.

- El valor de la constante k del resorte anterior equivale a:

a. $40\ N/m$ b. $20\ N/m$ c. $80\ N/m$ d. $60\ N/m$ e. $30\ N/m$

- En el equilibrio, bajo la acción de esta fuerza, el resorte se alarga una distancia x de:

a. $1{,}2\ m$ b. $0{,}25\ m$ c. $0{,}8\ m$ d. $1{,}5\ m$ e. $3\ m$

Las siguientes preguntas se refieren a la siguiente información: Un cuerpo fijado a un resorte oscila con una amplitud de 0,5 metros y un período de π segundos. La energía cinética máxima del cuerpo es $0,25\ J$.

- Es correcto establecer que la masa del cuerpo es:

a. $0,25\ kg$ b. $0,5\ kg$ c. $1\ kg$ d. $2\ kg$ e. $5\ kg$

- La constante del resorte equivale a:

a. $0,2\ N/m$ b. $0,5\ N/m$ c. $1\ N/m$ d. $2\ N/m$ e. $5\ N/m$

- La energía total del sistema es:

a. $0,25\ J$ b. $0,5\ J$ c. $1\ J$ d. $2\ J$ e. $5\ J$

Las siguientes preguntas se refieren a la siguiente información: Sea un péndulo simple de longitud l y de período T, en un lugar en donde la aceleración de la gravedad es g.

- Si en el mismo lugar otro péndulo tiene un período 2T, es porque su longitud es:

a. $l/4$ b. $l/2$ c. l d. $2l$ e. $4l$

- Si en el mismo lugar otro péndulo tiene una longitud $4l$, su período es:

a. $T/4$ b. $T/2$ c. T d. $2T$ e. $4T$

- Si en distinto lugar, otro péndulo de igual longitud tiene un período $2T$, la aceleración de la gravedad es:

a. $g/4$ b. $g/2$ c. g d. $2g$ e. $4g$

Responda:

- Un péndulo simple tiene sobre la tierra un período T. El péndulo se transporta a un planeta que posee una aceleración de la gravedad cuatro veces mayor que la de la tierra. El período de este péndulo sobre el planeta es:

a. $T/4$ b. $T/2$ c. T d. $2T$ e. $4T$

- Una masa atada a un resorte tiene, sobre la tierra, un período T. Si se transporta el conjunto al planeta del problema anterior, el nuevo período de la masa es:

a. $T/4$ b. $T/2$ c. T d. $2T$ e. $4T$

Las siguientes preguntas se refieren a la siguiente información: Se aplica una fuerza $F = -8x$ a un cuerpo de masa 2 kilogramos, siendo x la posición en metros del cuerpo y F la fuerza en Newton.

- La frecuencia angular de este movimiento es:

a. $2\ rad/s$ b. $4\ rad/s$ c. $8\ rad/s$ d. $16\ rad/s$ e. $32\ rad/s$

- El período del movimiento anterior equivale a:

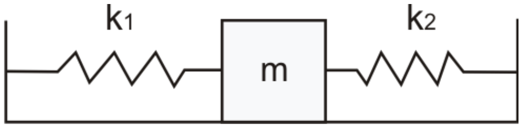
a. $1\ s$ b. $2\ s$ c. $4\ s$ d. $\pi\ s$ e. $2\pi\ s$

12.5.1. Actividad

Investiga la solución de los siguientes problemas, teniendo presente los conocimientos adquiridos a través de este módulo.

- Dos resortes están unidos a un bloque de masa m que puede deslizarse libremente sobre una superficie horizontal sin fricción, como se muestra en la figura. Demuestre que la frecuencia de oscilación del bloque es:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$



- Un resorte se estira 0.150 metros cuando se le cuelga una masa de 0.300 kilogramos. El resorte se estira una distancia adicional de 0.100 metros de su punto de equilibrio y luego se suelta. Determínese:

a. La constante del resorte K.

b. La amplitud de la oscilación.

c. La velocidad máxima.

d. La aceleración máxima de la masa.

e. El período y la frecuencia.

- Un punto material de masa 25 kilogramos describe un M.A.S de 10 centímetros de longitud y período igual a 1 segundo. En el instante inicial, la elongación es máxima. Calcular:

a. La velocidad máxima que puede alcanzar la citada masa.

b. El valor de la fuerza recuperadora a cabo de un tiempo igual a 0.125 segundos.

- Enunciar y explicar varios ejemplos donde se evidencie claramente el fenómeno de la resonancia.

13.BIBLIOGRAFÍA

PAUL TIPPENS. Física I. 3. Ed. México. McGraw-Hill, 2008.

GIANCOLI, Douglas C. Física I. 4. Ed. México: Prentice-Hall, 1997.

SERWAY, Raymond. Física.4. Ed. Mexico: McGraw Hill, 1996.

ROBERT RESNICK, DAVID HALLIDAY. Física. 4. Ed. México: CECSA, 1997.

MICHAEL VALERO. FÍSICA I y II. 4. Ed. Colombia: Norma, 2001.

BENSON, Harris. Física universitaria. 2. Ed. México: CECSA, 1999.

BLATT, Frank J. Fundamentos de física. 3 Vd. México: Prentice-Hall, 1995.

WILSON, Jerry D. Física con aplicaciones. 2 Ed. México: McGraw-Hill, 1993

Young Freedman. Física Universitaria. Undécima edición. Editorial Pearson. 2006

Fuentes Digitales

http://lefmvespertino.usach.cl/animaciones.htm

http://www.unalmed.edu.co/~daristiz/virtual/laboratoriovirtual.htm