



FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES

Asignatura transversal

MATEMÁTICAS OPERATIVAS

Vicerrectoría de Educación a Distancia y Virtual

Este material es propiedad de Uniremington Corporación Universitaria,
para los estudiantes de Uniremington en todo el país.

2014

Uniremington Corporación Universitaria - Calle 51 No. 51-27
PBX: 322 10 00 Ext. 2701 - Fax: 513 78 92 - Edificio Uniremington
www.uniremington.edu.co - Medellín - Colombia

CRÉDITOS



El módulo de estudio de la asignaturatrasversal Matemáticas Operativas es propiedad de la Corporación Universitaria Remington. Las imágenes fueron tomadas de diferentes fuentes que se relacionan en los derechos de autor y las citas en la bibliografía. El contenido del módulo está protegido por las leyes de derechos de autor que rigen al país.

Este material tiene fines educativos y no puede usarse con propósitos económicos o comerciales.

AUTOR

Pablo Emilio Botero Tobón

pbotero@uniremington.edu.co

Nota: el autor certificó (de manera verbal o escrita) No haber incurrido en fraude científico, plagio o vicios de autoría; en caso contrario eximió de toda responsabilidad a la Corporación Universitaria Remington, y se declaró como el único responsable.

Actualizaciones: fueron creadas a través de talleres didácticos de entrenamiento, ejercicios de aprendizaje, pistas de aprendizaje, mapa conceptual y pruebas iniciales

RESPONSABLES

Hernan Alberto Cuervo Colorado

Decano facultad de ciencias empresariales

hcuervo@uniremington.edu.co

Eduardo Alfredo Castillo Builes

Vicerrector modalidad distancia y virtual

ecastillo@uniremington.edu.co

Carlos Alberto Ocampo Quintero

Coordinador CUR-Virtual

cocampo@uniremington.edu.co



UNIREMINGTON®
CORPORACIÓN UNIVERSITARIA
RES. 2661 MEN JUNIO 21 DE 1996

Vicerrectoría de Educación a Distancia Virtual
Facultad de Ciencias Empresariales
Matemáticas Operativas

GRUPO DE APOYO

Personal de la Unidad CUR-Virtual

EDICIÓN Y MONTAJE

Primera versión. Febrero de 2011. Segunda versión Marzo 2012

Uniremington Corporación Universitaria - Calle 51 No. 51-27
PBX: 322 10 00 Ext. 2701 - Fax: 513 78 92 - Edificio Uniremington
www.uniremington.edu.co - Medellín - Colombia



UNIREMINGTON®
CORPORACIÓN UNIVERSITARIA
RES. 2661 MEN JUNIO 21 DE 1996

Vicerrectoría de Educación a Distancia Virtual
Facultad de Ciencias Empresariales
Matemáticas Operativas

Derechos Reservados



Esta obra es publicada bajo la licencia Creative Commons. Reconocimiento-No Comercial-Compartir Igual 2.5 Colombia.

Uniremington Corporación Universitaria - Calle 51 No. 51-27
PBX: 322 10 00 Ext. 2701 - Fax: 513 78 92 - Edificio Uniremington
www.uniremington.edu.co - Medellín - Colombia

TABLA DE CONTENIDO

1.	MAPA DE LA ASIGNATURA	6
2.	UNIDAD 1 MATEMÁTICAS OPERATIVAS	7
2.1.	Mapa Conceptual.....	7
2.2.	Tema 2 Conceptos Previos.....	7
2.3.	Tema 3 Potenciación radicación y racionalización	39
3.	UNIDAD 2 POLINOMIOS	57
3.1.	Tema 1: Polinomios Algebraicos.....	59
3.2.	Tema 2: Productos Notables.....	66
3.3.	Tema 3: Factorización.....	83
3.4.	Tema 4: Fracciones Algebraicas.....	105
4.	UNIDAD 3 SOLUCIÓN DE ECUACIONES E INECUACIONES.....	114
4.1.	Tema 1: Ecuaciones con una incógnita	115
4.2.	Tema 2: Desigualdades e inecuaciones.....	159
5.	UNIDAD 4 CONCEPTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA.....	203
5.1.	Tema 1: Línea Recta.....	204
5.2.	Tema 2: Ecuaciones de la línea recta.....	205
5.3.	Tema 3: Pendiente de una línea recta	207
5.4.	Tema 4: Aplicaciones del modelo lineal.....	228
6.	PISTAS DE APRENDIZAJE	237
7.	GLOSARIO	238
8.	BIBLIOGRAFÍA	239

1. MAPA DE LA ASIGNATURA

MATEMÁTICAS OPERATIVAS



GENERAL DEL MÓDULO

Con este módulo se pretende entregar al estudiante las herramientas necesarias que le permitan desenvolverse de forma eficiente en todas las áreas del conocimiento.



OBJETIVO GENERAL

Construir, a través de un lenguaje matemático simple, modelos matemáticos que les permitan la explicación de los fenómenos cotidianos, generando una conciencia del trabajo en equipo bajo la firme convicción de responsabilidad y respeto, para el afianzamiento de las fortalezas y superación de las debilidades, capacitando al estudiante para el uso de los conceptos del álgebra en situaciones problemáticas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Realizar adecuadamente operaciones con números fraccionarios, las leyes de potenciación y radicación, operaciones con polinomios, la factorización y las fracciones algebraicas, facilitando así, trabajos posteriores en el área de las matemáticas.
- Manejar correctamente las relaciones matemáticas que involucren una o dos variables, permitiendo el análisis y solución de una situación específica dada.
- Analizar el modelo lineal, a través de la representación de situaciones problemáticas mediante el lenguaje matemático, facilitando de esta manera la manipulación matemática, soluciones generales, no particulares y realizando su representación gráfica.



Unidad 1

Matemáticas
Operativas.



Unidad 2

Polinomios



Unidad 3

Solución de
ecuaciones e
inecuaciones

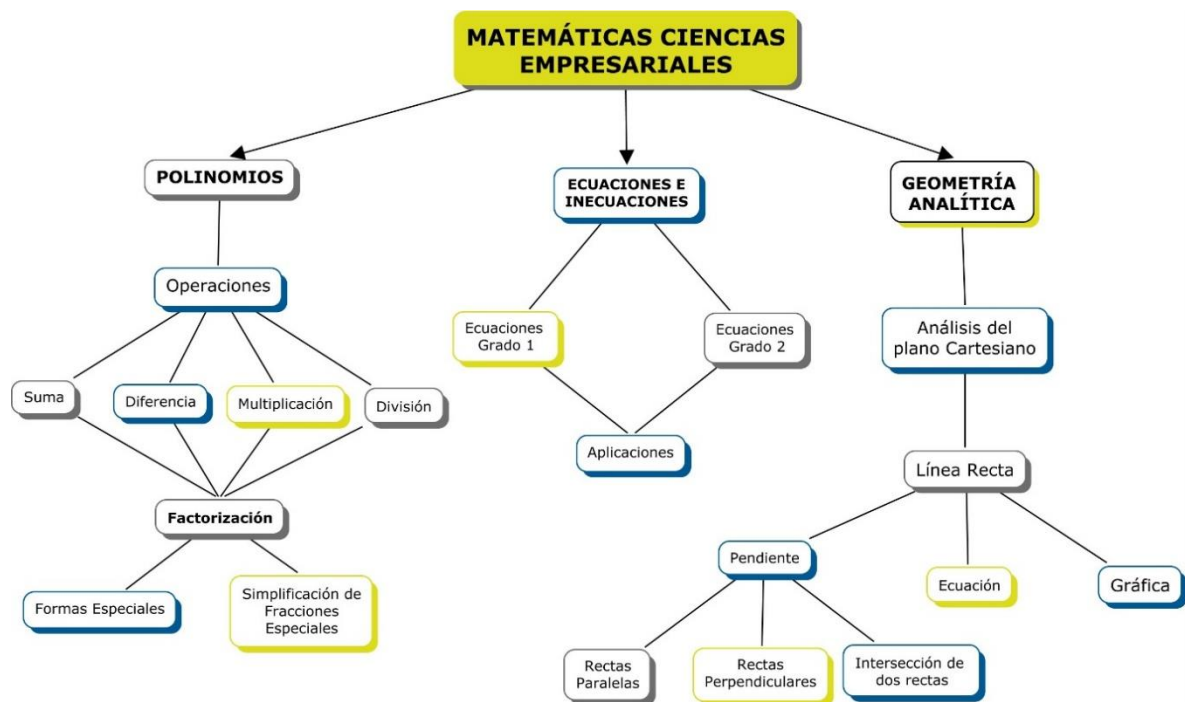


Unidad 4

Conceptos básicos de
geometría analítica

2. UNIDAD 1 MATEMÁTICAS OPERATIVAS

2.1. Mapa Conceptual



2.2. Tema 2 Conceptos Previos

A continuación del mapa conceptual se dieron las definiciones de cada uno de los conjuntos numéricos, ahora presentaremos un breve resumen de los mismos:

- **Campos numéricos**

- **Números dígitos:** conjunto compuesto por los números con los cuales se forman los demás números. Por lo tanto los números dígitos están formados por los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. A estos números se les asigna la letra D.
- **Números naturales:** conjunto formado por todos los enteros positivos. A estos números se les asigna la letra N. Son los números que utilizamos para contar.

Tomado de (<http://www.youtube.com/watch?v=QqSy17-8Wsg&feature=fwrel>)

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots\}$$

- **Números enteros:** conjunto formado por los enteros positivos, enteros negativos y el cero. A estos números se les asigna la letra Z. (http://www.youtube.com/watch?v=Vtd8_XmJPE4)

$$Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$$

Nota: $N = Z^+$

- **Números racionales:** un número racional es todo número que se pueda escribir como un cociente entre dos números enteros, con el denominador diferente de cero.
(<http://www.youtube.com/watch?v=TAZcU5JUd0s>).

Los matemáticos le asignaron la letra Q. De tal manera que la definición matemática de los números racionales es:

$$Q = \frac{p}{q} \text{ Donde } p \text{ y } q \text{ son números enteros y } q \text{ no puede ser cero } (q \neq 0).$$

A los números racionales pertenecen:



- ✓ Todos los enteros.
- ✓ Todos los fraccionarios.
- ✓ **Los decimales finitos.**
 - Como 1.324 que tiene tres decimales.
 - Como 0.25 que tiene dos decimales.
 - Como 0.3 que tiene un decimal.
- ✓ **Los decimales infinitos periódicos.** Son aquellos que tienen infinitos decimales pero que todos o algunos se repiten con cierta secuencialmente.

Ejemplos:

5.3434343434... Se repite el tres y el cuatro.

3,5322222222... Se repite el dos.

0,023512512512... Se repite el cinco, el uno y el dos.

- ✓ **Los números mixtos:** un número mixto es un número que tiene una parte entera y una parte que es

un fraccionario. Es un número de la forma $a\frac{b}{c}$, donde a, b y c son números enteros $c \neq 0$.

Ejemplo: $3\frac{2}{7}, 4\frac{5}{8}, 8\frac{1}{2}$

- **Conversión de número mixto en fraccionario.**

PISTA DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta: para convertir un número mixto en fraccionario, el numerador del fraccionario que se obtendrá de forma:

- Multiplicando la parte entera por el denominador del número mixto y sumándole al resultado el numerador,
- El denominador del fraccionario es el mismo denominador del mixto.

Es decir, se debe aplicar la siguiente igualdad.

$$a \frac{b}{c} = \frac{a * c + b}{c}$$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Convierta los siguientes números mixtos en números fraccionarios:

$$a. 7 \frac{2}{3} = \frac{7 * 3 + 2}{3} = \frac{21 + 2}{3} = \frac{23}{3}$$

$$b. 2 \frac{1}{5} = \frac{2 * 5 + 1}{5} = \frac{10 + 1}{5} = \frac{11}{5}$$

$$c. 4 \frac{6}{11} = \frac{4 * 11 + 6}{11} = \frac{44 + 6}{11} = \frac{50}{11}$$

$$d. -3 \frac{4}{7} = - \frac{3 * 7 + 4}{7} = - \frac{21 + 4}{7} = - \frac{25}{7}$$

○ **Conversión de fraccionario en número mixto**

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga presente: un número mixto es el resultado de efectuar la división indicada en una fracción impropia.

- El numerador sea mayor que el denominador, es decir, que **el fraccionario sea impropio, esto es : $\text{numerador} > \text{denominador}$.**
- Para convertir un fraccionario a mixto, se divide el numerador del fraccionario entre su denominador, el cociente de esta división pasará a ser la parte entera del mixto, y
- El residuo pasará a ser su numerador y el denominador será el mismo del fraccionario.

Si $\frac{a}{b}$ es una fracción impropia ($a > b$), al expresarla en forma de número mixto:

$$\frac{a}{b} = (\text{Cociente de } \frac{a}{b}) (\frac{\text{RESIDUO}}{\text{DIVISOR}})$$

EJEMPLO: convertir $\frac{17}{3}$ en número mixto:

DIVIDENDO (D): 17	DIVISOR (d): 3
RESIDUO (R): 2	COCIENTE (C): 5

El número mixto quedaría: $\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$

Traer a la memoria: el cociente es el resultado de dividir el dividendo por el divisor ($\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}}$).

Si al efectuar la división el residuo es cero (división exacta), quiere decir que tenemos como resultado un número entero, esto es: si nos piden convertir la fracción impropia $\frac{20}{5}$ en número mixto, tendríamos:

$$\frac{20(\text{Dividendo})}{5(\text{Divisor})} = 4(\text{cociente}) \frac{0(\text{Residuo})}{5(\text{divisor})} = 4 \in \mathbb{Z}$$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Convierta las siguientes fracciones impropias en números mixtos:

a. $\frac{21}{4}$

Procedimiento

1. $21 \div 4 = 5$ (Parte entera del número mixto).
2. El residuo de la división es 1.
3. 4 sería el denominador de la parte fraccionaria del número mixto.

Por lo tanto:

$$\frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$$

PISTA DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta: Se puede comprobar la validez de este resultado convirtiendo el mixto a fraccionario.

$$5\frac{1}{4} = \frac{5 * 4 + 1}{4} = \frac{20 + 1}{4} = \frac{21}{4}$$

b. Convertir $\frac{13}{5}$ en número mixto.

Procedimiento

1. $13 \div 5 = 2$ (Parte entera del número mixto).
2. El residuo de la división es 3.
3. 5 sería el denominador de la parte fraccionaria del número mixto.

Entonces:

$$\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$$

C. Convertir $\frac{5}{6}$ en número mixto.

d. Procedimiento:

No es posible, ya que el numerador (a) **es menor** que el denominador (b): ($a < b$)

- **Números irracionales**

Un número irracional es todo número que no se puede escribir como un cociente entre dos números enteros (<http://www.youtube.com/watch?v=WBsdElfeVfw>). Podemos ver que un número no puede ser racional e irracional al mismo tiempo, o sea si es racional no puede ser irracional, o lo contrario, si es irracional no puede ser racional. A los irracionales los matemáticos le asignaron la letra H o la Q'.

A los irracionales pertenecen las raíces reales no exactas y los decimales infinitos no periódicos. Son ejemplo de estos números:

$$\sqrt{5}, \sqrt[5]{28}, 2,5732596451...$$

- **Números decimales infinitos no periódicos:** en estos números sus cifras decimales no se repiten con ningún tipo de periodicidad. Por ejemplo 4,25674136..., 0,0254785... . Estos números resultan de las raíces no exactas.

- **Números reales.** Están formados por la suma de los racionales más los irracionales. Son los números con los cuales vamos trabajar en este curso. Los matemáticos le asignaron la letra $\mathbb{R}$ (http://www.youtube.com/watch?v=fLpDD_mlk4o&feature=fvst). Todos los campos numéricos anteriores pertenecen a los números reales.
- **Números imaginarios:** a estos números pertenece la raíz par de todo número negativo. Se distinguen por la letra i . Por ejemplo $\sqrt{-4}$. Si dices que $\sqrt{-4} = 2$ cometes un error grave ya que no hay un número que multiplicado por sí mismo dos veces (y más general un número par de veces) de cómo resultado un número negativo.

Para solucionar este problema y poder operar con este tipo de números nacieron los números imaginarios en los cuales se definen las raíces pares de los números negativos:

$$\sqrt[n]{-1} = i, \text{ con, } n \in \text{los números pares}$$

Entonces: $\sqrt{-1} = i$, la raíz **par** de cualquier **número negativo** se puede escribir en términos de i . Por ejemplo:

$$\text{a. } \sqrt{-4} = \sqrt{-1 * 4} = \sqrt{4} * \sqrt{-1} = 2 * i = 2i$$

$$\text{b. } \sqrt{-25} = \sqrt{-1 * 25} = \sqrt{25} * \sqrt{-1} = 5 * i = 5i$$

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga presente: $\sqrt{a * b} = \sqrt{a} * \sqrt{b}$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $i \in \text{imaginarios}$
Entonces:

$$C = a \pm bi$$

- **Números complejos:** son aquellos que están conformados por la suma(resta) de una parte real y una parte imaginaria, se simbolizan por $\mathcal{C}$ y se expresan de la siguiente manera:
- **Ley de los signos**
- **Para la multiplicación y para la División**
(<http://www.youtube.com/watch?v=qHdUDPqyrxI>)

La ley de signos para la multiplicación dice que el producto de signos iguales tiene como resultado signo positivo y el producto de signos contrarios tiene como resultado signo negativo.

La ley de signos para la división se aplica igual que la ley de signos para la multiplicación.

Lo podemos ver en el siguiente cuadro.

LEY DE SIGNOS			
MULTIPLICACIÓN		DIVISIÓN	
$(+) * (+)$	+	$\frac{(+)}{(+)}$	+
$(-) * (-)$	+	$\frac{(-)}{(-)}$	+
$(+) * (-)$	-	$\frac{(+)}{(-)}$	-
$(-) * (+)$	-	$\frac{(-)}{(+)}$	-

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

- $(-3) * (2) = -6$
- $(-5)(-4) = 20$



- $\frac{(-3)}{(6)} = -\frac{1}{2}$
- $\frac{(10)}{(-5)} = -\frac{2}{1} = -2$
- $\frac{(-12)}{(-8)} = \frac{12}{8} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
- $\frac{28}{36} = \frac{7}{9}$

- **Propiedad de los signos para la suma.**

La propiedad de los signos para la suma dice que:

- ✓ **Signos iguales** se suman y se conserva el signo que tienen los números, y
- ✓ **Signos contrarios** se restan y se conserva el signo del número mayor.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

- $3 + 5 = +8$
- $-5 - 4 = -9$
- $-2 + 1 = -1$
- $-70 + 40 = -30$



- $b - 6b = -5b$
- $5 - 2 = +3$
- $3 - 7 = -4$
- $-7 + 10 = +3$
- $36a + 50a = +86a$
- $301z - 520z = -219z$

○ **Valor absoluto**

El valor absoluto de un número a , se expresa como $|a|$, representa la distancia del número a al número cero, es por esta razón que el valor absoluto de cualquier número es positivo.
(<http://www.youtube.com/watch?v=4mSL7-FezoA&feature=relmfu>)

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

- $|3| = 3$
- $|-2| = 2$
- $\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$
- $7 + |-2| = 7 + 2 = 9$
- $|3 - (5 * 2) + 1| = |3 - 10 + 1| = |-6| = 6$

Algunas propiedades de los números reales	
LEY CONMUTATIVA	$\begin{cases} a + b = b + a & \text{Suma} \\ ab = ba & \text{Producto} \end{cases}$
LEY DISTRIBUTIVA	$a(b + c) = ab + ac$
LEY ASOCIATIVA	$\begin{cases} a + (b + c) = (a + b) + c & \text{Suma} \\ a(bc) = (ab)c & \text{Multiplicación} \end{cases}$
LEY DEL MÓDULO	✓ PARA LA SUMA: el número real 0 es llamado el módulo de la suma, ya que para todo número real a se cumple que: $a + 0 = 0 + a = a$ ✓ PARA LA MULTIPLICACIÓN: el número real 1 es llamado el módulo de la multiplicación, ya que para todo número real a, se cumple: $a * 1 = 1 * a = a$
LEY DEL INVERSO	a. PARA LA SUMA: para todo número real a existe un único número real (llamado inverso aditivo de a o negativo de a), representado por -a, de tal manera que: $a + (-a) = -a + a = 0$ b. PARA LA MULTIPLICACIÓN: para todo número real a ≠ 0 existe un único número real (llamado recíproco o inverso multiplicativo de a, representado por $\frac{1}{a}$, de tal manera que: $a * \frac{1}{a} = \frac{1}{a} * a = 1$

DIVISIÓN DE CERO Y DIVISIÓN ENTRE CERO	
$0/b$ con $b \neq 0$ y $b \in Re$	$= 0$
$0/0$	ES INDETERMINADO (No se acepta como respuesta pero hay diferentes formas de eliminarlo que se verán más adelante).
$a/0$ con $a \neq 0$ y $a \in Re$	ES INDEFINIDO o lo que es lo mismo ∞ (infinito), siendo $+\infty$ cuando a es positivo y $-\infty$ cuando a es negativo .

- **Signos de agrupación**

Los signos de agrupación se emplean para indicar que las cantidades encerradas en ellos deben considerarse como **un todo**, o sea, como una sola cantidad; por esto siempre se deben efectuar primero las operaciones indicadas dentro de los signos de agrupación. Por ejemplo en la siguiente operación.

$3(5 - 2)$ Primero se debe efectuar la operación dentro del paréntesis (cinco menos dos) y luego efectuar la multiplicación por tres.

$$3(5 - 2) = 3(3) = 3 * 3 = 9$$

Los signos de agrupación son de cuatro clases:

SIGNO DE AGRUPACIÓN	NOMBRE
()	Paréntesis ordinario o paréntesis.
[]	Paréntesis angular o corchete.
{ }	Llaves.
—	Vínculo o barra.

La forma en que se emplean los signos de agrupación es por lo general la siguiente:

$\{ [()] \}$: Llave, paréntesis, corchete	
$\longleftrightarrow$	
Nota: Las operaciones se deben efectuar de adentro hacia fuera , como lo indican las flechas.	

- **Prioridad en las operaciones**

Cuando se efectúan operaciones aritméticas o algebraicas se debe tener el siguiente orden.

Nota: tenga en cuenta que cuando hay signos de agrupación se debe desarrollar primero las operaciones que hay dentro de ellos.

1. **Potencias o exponentes.**
2. **Multiplikaciones y divisiones.**
3. **Sumas y restas.**

(<http://www.youtube.com/watch?v=lzBhMmg-H8I&feature=fvst>),
(<http://www.youtube.com/watch?v=JfduXbPZWAA&feature=related>).

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Resuelva: $3 * 4 + 5$

Procedimiento

Primero se efectúa la multiplicación $3 * 4 = 12$ y luego la suma o sea $12 + 5 = 17$, en general
 $3 * 4 + 5 = 12 + 5 = 17$

2. Resuelva: $3 * (4 + 5)$

Procedimiento

Primero se efectúa lo que tenemos dentro del paréntesis.

$$3 * (4 + 5) = 3 * (9) = 3 * 9 = 27$$

3. Resuelva:

$$5 + 20 \div (18 - 2 * 4)$$

Procedimiento

$$5 + 20 \div (18 - 2 * 4) = 5 + 20 \div (18 - 8) = 5 + 20 \div (10) = 5 + 20 \div 10 = 5 + 2 = 7$$

Primero efectúo todo lo del paréntesis empezando por la multiplicación de $2 * 4 = 8$ luego $18 - 8 = 10$, este es el resultado del paréntesis. Queda $5 + 20 \div 10$

Se debe efectuar primero la división $20 \div 10 = 2$ quedando $5 + 2$ por último

Se efectúa esta suma $5 + 2 = 7$.

4. Encuentre el resultado de:

$$10 - 3\{4 + 5[7 - 4(4)]\}$$

Procedimiento

- a. Se elimina primero el paréntesis (rojo), por ser el más interno (Recuerde que si entre el signo de agrupación y el número no hay un signo, se indica una multiplicación):

$$\begin{aligned} 10 - 3\{4 + 5[7 - 4(4)]\} &= 10 - 3\{4 + 5[7 - 4 * 4]\} = \\ 10 - 3\{4 + 5[7 - 16]\} &= 10 - 3\{4 + 5[-9]\} \end{aligned}$$

- b. Se elimina el corchete (verde):

$$10 - 3\{4 + 5[-9]\} = 10 - 3\{4 + 5 * -9\} \text{ (recuerde ley de signos al multiplicar).}$$

$$10 - 3\{4 - 45\}$$

c. Se elimina la llave (amarillo):

$$10 - 3\{4 - 45\} = 10 - 3\{-41\} = 10 - 3 * -41, \text{ se efectúa el producto indicado (recuerde que } - * - = +)$$

$$10 + 123 = 133$$

5. Encuentre el resultado de:

$$7 - \frac{15}{3 + 2}$$

Procedimiento:

a. Se resuelve la operación indicada en la fracción:

$$7 - \frac{15}{3 + 2} = 7 - \frac{15}{5}$$

b. Se simplifica la fracción y se efectúa la resta que queda indicada:

$$7 - \frac{15}{5} = 7 - 3 = 4$$

6. Encuentre el resultado de:

$$3^2 * 6 + 5$$

Procedimiento

- a. Se realiza la potencia : $(3^2 = 9)$

$$9 * 6 + 5$$

- b. Se realiza el producto ($9*6 = 54$) y luego la suma que queda indicada:

$$54 + 5 = 59$$

- **Mínimo común múltiplo m. c. m.**

El mínimo común múltiplo entre dos o más números es el menor número que los contiene exactamente.

Cuando se afirma que un número **a** contiene exactamente a un número **b** se quiere decir que si se divide el número **a** entre el número **b** el resultado será **un número entero**.
(http://www.youtube.com/watch?v=OsaX_lbhxNg)

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga presente: cuando se dice que el **m.c.m.** entre dos o más números es el menor número que los contiene exactamente, no se está afirmando que sea el menor de los números. De hecho el m.c.m. de dos o más números nunca será el menor de los números. Será el número que los contiene a todos en menor proporción.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Determine el m.c.m. entre **2 y 4**.
○ Si pensaste que es el número **2**:



Recuerda que: el m.c.m nunca será el número menor

- Si dijiste que es el número 4:

Estás en lo correcto

Ya que si dividimos:

$$\frac{4}{2} = 2 \in \mathbb{Z} \text{ (Número entero), y}$$

$$\frac{4}{4} = 1 \in \mathbb{Z} \text{ (Número entero)}$$

2. Determine el m.c.m. entre 6 y 4

- Si pensaste que es el número 12:

Estás en lo correcto

Ya que:

$$\frac{12}{6} = 2 \in \mathbb{Z}, \text{ y } \frac{12}{4} = 3 \in \mathbb{Z}$$

El 12 contiene 2 veces al número 6 y contiene 3 veces al número 4 y podemos ver que ambos son números enteros.

- Si pensaste que es el número **6**:

PISTA DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria: si dividimos el **6** entre el **4** el resultado no es un número entero.

- Si pensaste que es el número **24**:

PISTA DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta que: aunque el **24** contiene exactamente al **6** y al **4** no es el menor número que los contiene exactamente.

Por lo tanto:

El menor número que contiene exactamente al **6** y al **4** es el número **12**.

- ✓ **Método para determinar el m.c.m.**

Para hallar el Mínimo Común Múltiplo (m.c.m.) de dos o más números, se procede de la siguiente forma:

1. Se **Factoriza** o se **descompone** cada número como **un producto** de sus **factores primos**. Esto es dividir cada número primero por 2 luego por 3, por 5, por 7,... que son los números primos.
2. El **m.c.m.** resulta de **multiplicar los factores primos**, con su **mayor exponente**, sin repetirlos.

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Como tarea consulta cuál es la definición de los números primos y resalta con color amarillo, en el siguiente cuadro, los números primos entre 1 y 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2. Del mismo cuadro elabora una tabla con los factores de:

- 2:
- 3:
- 5:
- 7:

3. Define el carácter de divisibilidad de cada uno de los números anteriores, completa:

- Un número es divisible por 2 cuando:
- Un número es divisible por 3 cuando:
- Un número es divisible por 5 cuando:

- Un número es divisible por 7 cuando:

4. Determine el m.c.m. entre **10, 50, 70, 14, 20**.

Nota: Tome este ejercicio como modelo para que resuelva los que se le plantean más adelante

Procedimiento:

Puedes ver que ya no es tan fácil saber cuál es el m.c.m. de estos números por esto debemos describir un método para determinarlo.

- a. Se descomponen los números en sus factores primos:

$$10 = 2 * 5$$

$$50 = 2 * 5 * 5 = 2 * 5^2$$

$$70 = 2 * 5 * 7$$

$$14 = 2 * 7$$

$$20 = 2 * 2 * 5 = 2^2 * 5$$

- b. Se toman factores comunes y no comunes con el mayor exponente (sin repetir números):

$$\text{m.c.m.} = 2^2 * 5^2 * 7 = 4 * 25 * 7 = 700$$

- c. Solución:

El m.c.m de **10, 50, 70, 14, 20** es **700**

- d. Verifiquemos que al dividir 700 por cada uno de los números dados se obtenga un número entero:

$$\frac{700}{10} = 7 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{700}{50} = 14 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{700}{70} = 10 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{700}{14} = 50 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{700}{20} = 35 \in \mathbb{Z}$$

- e. Se concluye entonces que **700** es el m.c.m. y es el **menor número** que se deja dividir exactamente por los números dados.

Nota: Otra forma de obtener el m.c.m.

- Se listan los números como se muestra en el cuadro a continuación.
- Se divide cada uno de ellos por el menor número primo (en este caso es el 2) y se coloca el resultado debajo de cada uno de ellos.
- En caso de no ser divisible por dicho factor se coloca, en el cajón de abajo el mismo número.
- Se realizan tantas divisiones por el factor tantas veces como sea necesario.
- Una vez agotado el factor, se toma el siguiente número primo y se agota el proceso anterior.
- Cuando un número no tiene más divisiones se coloca el número 1 cuantas veces sea necesario.
- El m.c.m. se obtiene de multiplicar los factores primos que quedan indicados en la columna de la derecha.

NÚMEROS					FACTORES
10	50	70	14	20	2
5	25	35	7	10	2
5	25	35	7	5	5
1	5	7	7	1	5
1	1	7	7	1	7
1	1	1	1	1	
m.c.m.					2*2*5*5*7= 700

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

5. Determine el m.c.m. entre 36, 45, 40 y 6.

- PROCEDIMIENTO

a. Se descomponen los números en sus factores primos:

$$36 = 2 * 2 * 3 * 3 = 2^2 * 3^2$$

$$45 = 3 * 3 * 5 = 3^2 * 5$$

$$40 = 2 * 2 * 2 * 5 = 2^3 * 5$$

$$6 = 2 * 3$$

- b. Se toman factores comunes y no comunes con su mayor exponente
- Los únicos factores de estos números son el **2**, el **3** y el **5**, el mayor exponente de cada número:
 - Del número **2** es el exponente **3**,
 - Del **3** es el exponente **2**, y
 - Del **5** es el exponente **1**.

Por lo tanto: el m.c.m. es:

$$2^3 * 3^2 * 5 = 8 * 9 * 5 = 360$$

• **Otra forma:**

NÚMEROS				FACTORES
36	45	40	6	2
18	45	20	3	2
9	45	10	3	2
9	45	5	3	3
3	15	5	1	3
1	5	5	1	5
1	1	1	1	
m.c.m.				$2^3 * 2^2 * 3^2 * 5 =$ 360

6. Determine el m.c.m. entre **44, 48, 66 y 18**.

• **Procedimiento:**

6.1 Se descomponen los números en sus factores primos:

$$44 = 2 * 2 * 11 = 2^2 * 11$$

$$48 = 2 * 2 * 2 * 2 * 3 = 2^4 * 3$$

$$66 = 2 * 3 * 11$$

$$18 = 2 * 3 * 3 = 2 * 3^2$$

6.2 Se toman factores comunes y no comunes con su mayor exponente:

- Del número **2** es el exponente **4**.
- Del número **3** es el exponente **2**.
- Del número **11** es el exponente **1**.

6.3 Por lo tanto el m.c.m es:

$$2^4 * 3^2 * 11 = 16 * 9 * 11 = 1584$$

- Otra forma:

NÚMEROS				FACTORES
44	48	66	18	2
22	24	33	9	2
11	12	33	9	2
11	6	33	9	2
11	3	33	9	3
11	1	11	3	3
11	1	11	1	11
1	1	1	1	
m.c.m.				$2^4 * 3^2 * 11 =$ $16 * 9 * 11 = 1584$

- Números fraccionarios

Concepto de fraccionario: a continuación se presenta un concepto muy general sin profundizar mucho acerca del tema.

Un número fraccionario es todo número de la forma: $\frac{p}{q}$, donde $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$

El número **p** se llama **numerador** y el número **q** se llama **denominador**.

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga en cuenta que: el signo de un fraccionario puede ir en el medio, en el numerador o en el denominador; esto es:

$$-\frac{p}{q} = \frac{-p}{q} = \frac{p}{-q}$$

Nota: Aplicando la ley de los signos para la división se justifica lo anterior.

- **Clases de fraccionarios:**

- **Fracción propia:** Es aquella donde el numerador es menor que el denominador.

Ejemplo:

a. $\frac{3}{5}$ ($3 < 5$)

b. $\frac{7}{9}$ ($7 < 9$)

- **Fracción impropia:** Es aquella donde el numerador es mayor que el denominador, estos fraccionarios se pueden convertir a número mixto.

Ejemplo:

a. $\frac{9}{8}$ ($9 > 8$)

b. $\frac{7}{5}$ ($7 > 5$)

<http://www.youtube.com/watch?v=S1vm9Mp2YWY&feature=related>

<http://www.youtube.com/watch?v=FrmL5gldBjA&feature=related>

○ **Operaciones con fraccionarios:**

- **Multipliación:** se debe multiplicar numeradores entre sí y denominadores entre sí. Recuerde que primero se debe efectuar la ley de signos y posteriormente simplificar si es necesario.

(<http://www.youtube.com/watch?v=x1-9xugvcm8Entonces>)

De manera general:

$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a * c}{b * d} \quad b \neq 0 \wedge d \neq 0$	a y c: Numeradores b y d: Denominadores
--	--

EJERCICIO DE APRENDIZAJE

$$\frac{2}{3} * \frac{5}{7} = \frac{2 * 5}{3 * 7} = \frac{10}{21}$$

$$\frac{-14}{9} * \frac{6}{35} = -\frac{4}{15}$$

- **División:** se invierte el fraccionario divisor y luego se multiplica.

(http://www.youtube.com/watch?v=va9eoz7q_vQ&feature=fwwrel)

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a * d}{b * c} \quad c \neq 0, \quad b \neq 0 \wedge d \neq 0$	a y c: Numeradores b y d: Denominadores
$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c} = \frac{a * d}{b * c}; \text{ con } b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$	

EJERCICIO DE APRENDIZAJE

$$a. \frac{6}{5} \div \frac{-2}{3} = \frac{6}{5} * \frac{3}{-2} = \frac{18}{-10} = -\frac{18}{10} = -\frac{9}{5}$$

$$b. \frac{10}{3} \div \frac{5}{4} = \frac{10}{3} * \frac{4}{5} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

También se puede realizar de la siguiente manera:

$$\frac{10}{3} \div \frac{5}{4} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{5}{4}} = \frac{10 * 4}{3 * 5} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

- **Suma y resta:** para sumar o restar números fraccionarios se presentan dos casos. Fraccionarios de igual denominador y fraccionarios de diferente denominador.
- ✓ **Suma (resta) de fraccionarios de igual denominador:** se deja el mismo denominador y se suman (y/o restan) los numeradores.

EJERCICIO DE APRENDIZAJE

$$a. \frac{3}{7} + \frac{5}{7} - \frac{10}{7} = \frac{3 + 5 - 10}{7} = -\frac{2}{7}$$

Nota: Se coloca el mismo denominador **7**, se suman y/o restan los numeradores (como esté indicado en la operación) y se simplifica la fracción resultante si es del caso.

$$b. \frac{-9}{5} + \frac{16}{5} - \frac{3}{5} = \frac{-9 + 16 - 3}{5} = \frac{4}{5}$$

$$c. \frac{13}{x} - \frac{25}{x} + \frac{4}{x} + \frac{28}{x} = \frac{13 - 25 + 4 + 28}{x} = \frac{20}{x}$$

- ✓ **Suma (resta) de fraccionarios de diferente denominador:** inicialmente fraccionarios de diferente denominador no se pueden sumar de forma directa; para poderlos sumar se deben llevar a un denominador común, dicho denominador común es el m.c.m. de los denominadores de los fraccionarios a sumar. En realidad lo que se hace es que se amplifican todos los fraccionarios, de tal manera que el denominador común para todos sea el m.c.m. de sus denominadores.

El procedimiento a efectuar es el siguiente:

1. Halle el **m.c.m.** de los **denominadores**.
2. El **m.c.m.** será el **denominador común** para todos los fraccionarios.
3. Como se cambió el denominador, también se deben cambiar los numeradores de cada fraccionario. Para cada fraccionario **el nuevo numerador** se obtiene al **dividir el m.c.m. por el denominador de cada fracción** y el resultado **multiplicarlo** por el respectivo numerador.
4. Después de esto se procede como en el caso anterior.

(<http://www.youtube.com/watch?v=1ktyVZthSX4&feature=fvsr>)

EJERCICIO DE APRENDIZAJE

Realizar la siguiente operación entre fraccionarios:

$$\frac{7}{5} - \frac{4}{3} + \frac{10}{9}$$

Procedimiento:

- a. Se halla el m.c.m. de los denominadores:

NÚMEROS			FACTORES
5	3	9	3
5	1	3	3
5	1	1	5
1	1	1	
m.c.m			3*3*5 = 45

El m.c.m. de los denominadores (del 5, el 3 y del 9) es el 45. Esto es m.c.m. = 45.

- b. Ahora debemos transformar cada fraccionario de manera que todos queden con 45 como denominador, realicemos cada fraccionario por separado:

$$\bullet \quad \frac{7}{5} = \frac{\frac{45}{5} \cdot 7}{45} = \frac{9 \cdot 7}{45} = \frac{63}{45},$$

El m.c.m. se divide por denominador y se multiplica por el respectivo numerador, lo mismo se hace con cada una de las fracciones.

$$\bullet \quad \frac{4}{3} = \frac{\frac{45}{3} \cdot 4}{45} = \frac{15 \cdot 4}{45} = \frac{60}{45}$$

$$\bullet \quad \frac{10}{9} = \frac{\frac{45}{9} \cdot 10}{45} = \frac{5 \cdot 10}{45} = \frac{50}{45}$$

- c. Entonces:

$$\frac{7}{5} - \frac{4}{3} + \frac{10}{9} = \frac{63}{45} - \frac{60}{45} + \frac{50}{45}, \text{ como ya tienen el mismo denominador:}$$

$$\frac{63}{45} - \frac{60}{45} + \frac{50}{45} = \frac{63 - 60 + 50}{45} = \frac{53}{45}$$

Realizar la siguiente operación entre fraccionarios:

$$\frac{3}{4} - \frac{7}{10} - \frac{5}{8}$$

Procedimiento:

- a. Se halla el m.c.m. de los denominadores:

NÚMEROS			FACTORES
4	10	8	2
2	5	4	2
1	5	2	2
1	5	1	5
1	1	1	
m.c.m.			$2*2*2*5 = 40$

El m.c.m. de los denominadores (del 4, el 10 y del 8) es el 40. Esto es m.c.m.= 40.

- b. Ahora se debe transformar cada fraccionario de manera que todos queden con 40 como denominador, realicemos cada fraccionario por separado

$$\bullet \quad \frac{3}{4} = \frac{\frac{40}{4} * 3}{40} = \frac{10 * 3}{40} = \frac{30}{40}$$

$$\bullet \quad \frac{7}{10} = \frac{\frac{40}{10} * 7}{40} = \frac{4 * 7}{40} = \frac{28}{40}$$



$$\bullet \quad \frac{5}{8} = \frac{\frac{40}{8} \cdot 5}{40} = \frac{5 \cdot 5}{40} = \frac{25}{40}$$

c. Se realiza la operación indicada (suma - resta) de fracciones con el mismo denominador

$$\frac{7}{5} - \frac{4}{3} + \frac{10}{9} = \frac{30}{40} - \frac{28}{40} - \frac{25}{40} = \frac{30 - 28 - 25}{40} = -\frac{23}{40}$$

Realizar la siguiente operación entre fraccionarios:

$$\left(\frac{3}{2} \div \frac{5}{4}\right) - \left(\frac{7}{3} * \frac{1}{2}\right)$$

Procedimiento:

- a. En estos ejercicios primero se debe efectuar las operaciones indicadas dentro de los signos de agrupación:

$$\left(\frac{3}{2} \div \frac{5}{4}\right) - \left(\frac{7}{3} * \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} * \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{7}{3} * \frac{1}{2}\right) =$$

$$\left(\frac{3*4}{2*5}\right) - \left(\frac{7*1}{3*2}\right) = \left(\frac{12}{10}\right) - \left(\frac{7}{6}\right), \text{ simplificando:}$$

$$\left(\frac{6}{5}\right) - \left(\frac{7}{6}\right)$$

- b. Se realiza la diferencia indicada de fracciones:

$\frac{6}{5} - \frac{7}{6}$ El m.c.m. de 5 y 6 es:

NÚMEROS		FACTORES
5	6	2
5	3	3
5	1	5
1	1	
m.c.m.		$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

c. Ahora se debe transformar cada fraccionario de manera que todos queden con 40 como denominador:

$$\frac{6}{5} - \frac{7}{6} = \frac{\frac{30}{5} \cdot 6}{30} - \frac{\frac{30}{6} \cdot 7}{30} = \frac{6 \cdot 6}{30} - \frac{5 \cdot 7}{30} = \frac{36}{30} - \frac{35}{30}$$

d. Como tienen el mismo denominador:

$$\frac{36}{30} - \frac{35}{30} = \frac{36 - 35}{30} = \frac{1}{30}$$

2.3. Tema 3 Potenciación radicación y racionalización

- Definiciones y Conceptos

- **Potenciación:** la definición de potencia está relacionada con la definición de exponente, pero entendiendo como potencia aquella que está formada de una **base** (número que se repite) y un **exponente** (veces que se repite el número)

base^{*exponente*}

Esto es, potenciar significa multiplicar por sí misma la base las veces que indica el exponente, por ejemplo:

$$2^5$$

Dónde:

- 7. **2 es la base** (Número que se repite como factor), y
- 8. **5 es el exponente** (número de veces que se repite el 2 como factor).

Quedaría entonces: $2^5 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 32$

Observe a continuación el significado de algunas expresiones:

- $x^n = x * x * x * x \dots x$: Quiere decir multiplicar x por sí misma n veces.
- $3^4 = 3 * 3 * 3 * 3 = 81$
- $\frac{1}{x^n} = \frac{1}{x * x * x * x \dots}$ **con $x \neq 0$**
- $\frac{1}{5^3} = \frac{1}{5 * 5 * 5}$

NOTA: el **exponente negativo** no significa que la **cantidad sea negativa o positiva**; lo anterior quiere decir que exponente negativo en el numerador significa que se debe cambiar la base para el denominador y cambiarle de signo al exponente; y el exponente negativo en el denominador, significa que se debe cambiar la base al numerador y cambiando el signo al exponente.

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{y} \quad \frac{1}{x^{-n}} = x^n, \text{ con } x \neq 0$$

(<http://www.youtube.com/watch?v=VGyA5VX89Fw&feature=related>)

(<http://www.youtube.com/watch?v=bTRsnEOtgtg>)



Resumiendo, exponente negativo significa **intercambiar** la base entre numerador y denominador y cambiarle el signo al exponente.

$$✓ \quad 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{7*7} = \frac{1}{49}$$

$$✓ \quad \frac{1}{5^{-6}} = 5^6 = 5 * 5 * 5 * 5 * 5 * 5 = 15.625$$

$$✓ \quad 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$✓ \quad (2x)^{-3} = \frac{1}{(2x)^3} = \frac{1}{2x*2x*2x} = \frac{1}{8x^3}$$

Nota: $(-x)^n \neq -x^n$

$$• \quad (-2)^2 \neq -2^2$$

$$• \quad (-2)^2 = (-2) * (-2) = 4$$

$$• \quad -2^2 = -(2) * (2) = -4$$

$$• \quad 4 \neq -4$$

• Signo de x^n :

$$x^n \left\{ \begin{array}{l} \text{Es } \textbf{positivo} \text{ si } \textbf{n es par}, \text{ sin importar el signo} \\ \text{de la base} \\ \text{Es } \textbf{negativo} \text{ si } \textbf{n es impar} \text{ y la base es negativa} \end{array} \right\}$$

Ejemplos

a. $(-3)^4$:



- ✓ Sin efectuar la operación se sabe que el resultado es positivo porque el exponente es par.
- ✓ Realizando la operación se tiene:

$$(-3)^4 = (-3) * (-3) * (-3) * (-3) = 81$$

Nota: No confundir $(-3)^4$ Con -3^4 En el primer caso estamos elevando una base negativa a una potencia par, por lo tanto, el resultado es positivo (**81**), en el segundo caso estamos elevando una base positiva a un exponente par y luego multiplicamos el resultado por **(-1)**, por lo tanto el resultado es negativo (**-81**); esta expresión significa: $-1 * 3^4$.

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga presente que: En términos generales $(-x)^n$ no siempre es lo mismo que $-x^n$.

Por ejemplo cual será el resultado de $(-5)^{-3}$.

Procedimiento:

Sin efectuar la operación sabemos que el resultado es **negativo** porque la **base es negativa** y el **exponente es impar**, comprobemos la afirmación anterior efectuando la operación:

$$(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{(-5) * (-5) * (-5)} = \frac{1}{-125} = -\frac{1}{125}$$

PISTA DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria que: Todo número (diferente de cero) elevado al exponente **cero** es igual a **1**, esto es:

$$x^0 = 1, \text{ siempre que } x \neq 0$$

Nota: Se entiende **potencia cero** como una cantidad dividida por sí misma, por eso el resultado es uno.

Tener en cuenta que : para dividir cantidades que tengan la misma base, se coloca la misma base y se restan los exponentes

- **Radicación:** es una operación **contraria a la potenciación**, lo que se busca en este caso es encontrar la base. (<http://www.youtube.com/watch?v=ZWzhMm5aRHw>)

Sí, $2^3 = 8$ entonces, también es cierto que $\sqrt[3]{8} = 2$

En términos generales,

$$a^n = X \rightarrow \sqrt[n]{X} = a.$$

La expresión: $\sqrt[n]{x}$ se llama **radical**, la n se llama índice o raíz y la x se llama radicando (pero también la podemos llamar base). $n \neq 0$

Signo de $\sqrt[n]{X}$. (Todo lo que vamos a afirmar es sólo para la raíz principal).

$$\sqrt[n]{X} \left\{ \begin{array}{l} \text{Positivo, si } x \text{ es positivo} \\ \text{Negativo, si } x \text{ es negativo y } n \text{ es impar} \\ \text{No está definido, si } x \text{ es negativo y } n \text{ es par} \end{array} \right\}$$

PISTA DE APRENDIZAJE

Tener presente: **NOTA:** en términos generales y para facilitar su manipulación matemática, **un radical**, se puede convertir en **una potencia** con **exponente fraccionario**, donde **la base es el radicando** (la x) y el **exponente** es **un número fraccionario** cuyo **numerador** es el **exponente del radicando** y el **denominador** es el **índice radical**, así:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}, \text{ con } n \neq 0$$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

➤ Cuando se da en forma de raíz:

a. $\sqrt[7]{x^2} = x^{2/7}$

b. $\sqrt{x} = x^{1/2}$

c. $\sqrt[5]{(6x-1)} = (6x-1)^{\frac{1}{5}}$

d. $\sqrt[3]{2x} = (2x)^{1/3}$

e. $2\sqrt[3]{x} = 2x^{1/3}$

➤ En caso contrario, si nos dan un exponente fraccionario:

a. $x^{7/4} = \sqrt[4]{x^7}$

b. $5y^{3/7} - 9 = 5\sqrt[7]{y^3} - 9$

- **Propiedades de la potenciación**

Nota 1: si hay radicales, para aplicar estas propiedades, una buena acción es convertir el radical a potencia con exponente fraccionario, el resultado final se debe dar en raíz.

Nota 2: el resultado final se debe expresar con exponentes positivos.

1. Para **multiplicar** cantidades (sean números, variables o polinomios) de **bases iguales**, se escribe **la misma base** y se **suman los exponentes**.

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

(<http://www.youtube.com/watch?v=ZLEmQNFwuqY>)

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

a. $\sqrt[m]{x} + \sqrt[n]{x} = x^{1/m} + x^{1/n} = x^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$

b. $3^2 * 3^3 * 3^5 = 3^{2+3+5} = 3^{10}$

c. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x} = x^{\frac{2}{3}} + x^{1/4} = x^{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}} = x^{8+3/12} = x^{11/12}$, se da

La respuesta en forma de radical:

$$x^{11/12} = \sqrt[12]{x^{11}}$$

2. Para **dividir** cantidades (sean números, variables o polinomios) de **bases iguales**, se escribe **la misma base** y se **restan los exponentes**.

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, \text{ con } x \neq 0$$

(http://www.youtube.com/watch?v=m1wF_YoN1Uc)

PISTA DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria: si la expresión está en forma de raíz, se debe expresar en forma de exponente fraccionario y su respuesta en forma de raíz.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

A. $\frac{5^{16}}{5^{14}} = 5^{16-14} = 5^2$

B. $\frac{4^3}{4^8} = 4^{3-8} = 4^{-5}$, se debe expresar con exponente positivo, quedaría: $\frac{1}{4^5}$

C. $\frac{\sqrt[7]{y^5}}{\sqrt[2]{y}} = \frac{y^{5/7}}{y^{1/2}} = y^{5/7 - 1/2} = y^{10-7/14} = y^{3/14} = \sqrt[14]{y^3}$

3. Para **eleva una Potencia a un exponente**, se escribe **la base de la potencia** y **se multiplican los exponentes**.

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

(<http://www.youtube.com/watch?v=9QfWuEOystA>)

NOTA: cuando se habla de **raíz de raíz** : $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}$, se **multiplican los índices radicales entre sí**, es decir:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

$$1. (x^2)^3 = x^{2 \cdot 3} = x^6$$

$$2. \sqrt[2]{\sqrt[5]{x^3}} = \sqrt[2 \cdot 5]{x^3} = \sqrt[10]{x^3},$$

Al expresarlo como **exponente fraccionario**, quedaría:

$$x^{\frac{3}{10}}$$

$$3. \frac{25^3}{5^n} * 5, \text{ pero } 25 = 5^2, \text{ entonces:}$$

$\frac{25^3}{5^n} * 5 = \frac{(5^2)^3}{5^n} * 5 = \frac{5^{2 \cdot 3}}{5^n} * 5$, multiplicando **exponentes** aplicando **las propiedades** correspondientes se tiene:

$$5^6 * 5^1 * 5^{-n} = 5^{6+1} 5^{-n} = 5^7 * 5^{-n} = 5^{7-n}$$

Propiedad distributiva del producto o multiplicación: cuando se tiene un **producto** o **multiplicación** elevada a un **exponente**, se **eleva** cada factor a dicho **exponente**, así:

$$(x * y)^n = x^n * y^n, \text{ se da en ambos sentidos } x^n * y^n = (x * y)^n$$

También se cumple para **la raíz de un producto**:

$$\sqrt[n]{x * y} = \sqrt[n]{x} * \sqrt[n]{y}, \text{ se cumple } \sqrt[n]{x} * \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x * y}$$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

$$1. (5 * 4)^2 = 5^2 * 4^2 = 25 * 16 = 400$$

$$2. \sqrt{18} = \sqrt{9 * 2} = \sqrt{9} * \sqrt{2} = \sqrt{3^2} * \sqrt{2} = 3 * \sqrt{2}$$

Nota: para realizar este tipo de ejercicios, recuerde descomponer el respectivo número en sus factores primos y expresarlo en forma de potencia.

$$3. (2x)^5 = 2^5 * x^5 = 32 * x^5$$

4. **Actividad:** $\sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{y^5}$: de acuerdo a la propiedad ¿cómo quedaría el ejercicio?, de ser posible expresa tu respuesta con exponente fraccionario.

Propiedad distributiva del cociente o división: cuando se tiene un cociente o una división elevada a un **exponente** o está bajo una **misma raíz**, se **eleva** (o se le **extrae la raíz**, si es del caso) el **numerador** y el **denominador** a dicho **exponente** (o dicha **raíz**), esto es:

$$1. \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad \sigma \quad \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n, \text{ con } y \neq 0$$

$$2. \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}, \text{ con } y \neq 0$$

EJERCICIO DE APRENDIZAJE

Explica detalladamente, en cada uno de los ejemplos siguientes, el proceso llevado a cabo e indica qué propiedad se aplicó en cada uno de los pasos desarrollados.

1. $\left(\frac{5}{3}\right)^3$, se elevan el numerador y el denominador al exponente indicado (3), quedaría

$\frac{5^3}{3^3}$ desarrollando las potencias indicadas, se tiene:

$$\frac{5 * 5 * 5}{3 * 3 * 3} = \frac{125}{27}$$

2. $\sqrt[6]{\frac{x}{7}} = \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{7}}$ se expresa tanto el numerador como el denominador en la raíz indicada (6).
3. $\frac{(2x^3 y^4)^3}{(6x^2 y)^5}$, se aplica la propiedad distributiva, tanto en el numerador como en el denominador de la fracción:

$\frac{(2)^3 (x^3)^3 (y^4)^3}{(6)^5 (x^2)^5 (y^1)^5}$, multiplicando exponentes en el numerador y en el denominador de la fracción, tenemos:

$\frac{2^3 x^{3*3} y^{4*3}}{6^5 x^{2*5} y^{1*5}} = \frac{2^3 x^9 y^{12}}{6^5 x^{10} y^5}$, aplicando las propiedades correspondientes a la potenciación y conociendo que $6=2*3$, tenemos:

$$\frac{2^3 x^9 y^{12}}{(2*3)^5 x^{10} y^5} = \frac{2^3 x^9 y^{12}}{2^5 * 3^5 x^{10} y^5} = \frac{2^{3-5} x^{9-10} y^{12-5}}{3^5} =$$

$\frac{2^{-2} x^{-1} y^7}{3^5}$, expresando con exponentes positivos obtenemos como solución:

$$\frac{y^7}{2^2 3^2 x^1} = \frac{y^7}{2^2 * 3^2 x}$$

Para profundizar sobre el tema anterior, visite la siguiente página:

<http://www.youtube.com/watch?v=7gmZQP4cn1U&feature=related>

○ Racionalización

Racionalizar consiste en **eliminar los radicales** de una expresión matemática. Dicha eliminación de radicales se puede hacer en el **denominador** o en el **numerador**, según se especifique o según sea la necesidad.

Para poder eliminar el radical se debe **multiplicar** toda la expresión que contiene el radical por **la unidad** expresada de **una manera especial** (una cantidad dividida por sí misma, es igual a la unidad, siendo la cantidad diferente de cero).

$$\text{Recuerda: } \frac{x}{x} = 1, \text{ cuando } x \neq 0$$

○ **Racionalización de monomios:**

Se debe indicar multiplicación y división de la expresión a racionalizar: por la **misma raíz** con **la misma base**.

NOTA 1: para hallar el exponente de la base, se hace la siguiente pregunta. ¿Cuánto le falta a la base anterior para ser igual a la raíz?

NOTA 2: numeradores, sólo se efectúa la multiplicación de numeradores.

NOTA 3: si se racionalizan denominadores, sólo se efectúa la multiplicación de denominadores.

(<http://www.youtube.com/watch?v=LVNth46dPfU>)

Ejercicios de Aprendizaje

Racionalice las siguientes fracciones:

a. $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

Procedimiento

Racionalizamos el denominador, multiplicando el numerador y el denominador de la fracción por $\sqrt[3]{x^2}$, o sea x^2 es la cantidad que le falta a x para ser **un cubo perfecto** y así obtener su raíz exacta, entonces:

$\frac{2}{\sqrt[3]{x}} * \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$ Efectuando el producto indicado y simplificando, tenemos:

$$\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x * x^2}} = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{x^{\frac{3}{3}}} = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

b. $\frac{10}{\sqrt[5]{2x}}$

Procedimiento

Racionalizamos el denominador, multiplicando el numerador y el denominador de la fracción por $\sqrt[5]{(2x)^4}$, o sea $(2x)^4$ es la cantidad que le falta a $2x$ para obtener su raíz exacta, entonces:

$\frac{10}{\sqrt[5]{2x}} * \frac{\sqrt[5]{(2x)^4}}{\sqrt[5]{(2x)^4}}$ Efectuando el producto indicado y simplificando, tenemos:

$$\frac{10\sqrt[5]{(2x)^4}}{\sqrt[5]{(2x) * (2x)^4}} = \frac{10\sqrt[5]{(2x)^4}}{\sqrt[5]{(2x)^5}} = \frac{10\sqrt[5]{(2x)^4}}{(2x)^{\frac{5}{5}}} = \frac{10\sqrt[5]{(2x)^4}}{(2x)} = \frac{5\sqrt[5]{2^4 x^4}}{x} = \frac{5\sqrt[5]{16x^4}}{x}$$

Nota: en ambos casos (a y b) desaparecieron los radicales del denominador.

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga presente: en la raíz $\sqrt[n]{x^n}$, $n < m$ no se puede sacar raíz a la potencia.

C. $\frac{\sqrt{x}}{z}$

Procedimiento

Racionalizamos el numerador, multiplicando el numerador y el denominador de la fracción por $\sqrt{x}$, o sea x es la cantidad que le falta a z para ser **un cuadrado perfecto** y así obtener su raíz exacta, entonces:

$\frac{\sqrt{x}}{z} * \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ Efectuando el producto indicado y simplificando, tenemos:

$$\frac{\sqrt{x} * \sqrt{x}}{z \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x^2}}{z \sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{2}{2}}}{z \sqrt{x}} = \frac{x}{z \sqrt{x}}$$

D. $\sqrt[7]{x^4}$

Procedimiento

Racionalizamos el numerador, multiplicando el numerador y el denominador (en este caso es 1) de la fracción por $\sqrt[7]{x^3}$, o sea x^3 es la cantidad que le falta a x^4 para ser **una** raíz exacta, entonces:

$\sqrt[7]{x^4} * \frac{\sqrt[7]{x^3}}{\sqrt[7]{x^3}}$ Efectuando el producto indicado y simplificando, tenemos:

$$\frac{\sqrt[7]{x^3 * x^4}}{\sqrt[7]{x^3}} = \frac{\sqrt[7]{x^7}}{\sqrt[7]{x^3}} = \frac{x^{\frac{7}{7}}}{\sqrt[7]{x^3}} = \frac{x}{\sqrt[7]{x^3}}$$

Nota: en ambos casos (c y d) desaparecieron los radicales del numerador.

Nota: en ambos casos desaparecieron los radicales del numerador.

- **Racionalización de binomios con raíz cuadrada:**

Se debe indicar multiplicación y división de toda la expresión por la conjugada de la expresión a racionalizar.

La conjugada de un binomio es el mismo binomio pero con el signo intermedio cambiado. Por ejemplo la conjugada de

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \text{ es } \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

Ejemplos

La conjugada de $\sqrt{3} - z$ es $\sqrt{3} + z$

La conjugada de $5 - 2\sqrt{5x}$ es $5 + 2\sqrt{5x}$

Cuando se multiplica un binomio por su conjugada, el resultado es igual a la primera cantidad elevada al cuadrado menos la segunda cantidad elevada al cuadrado. En otras palabras, siempre buscaremos una diferencia de cuadrados, así:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y}) * (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = x - y$$

Nota: se puede observar que cuando se multiplica un binomio por su **conjugada** desaparecen los radicales.

(<http://www.youtube.com/watch?v=v5MUqiblORc&feature=related>)

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Racionalice las siguientes fracciones:

a. $\frac{5}{3 - \sqrt{2}}$

Procedimiento:

1. Se determina la conjugada, en este caso, del denominador: La conjugada de:

$3 - \sqrt{2}$ Es $3 + \sqrt{2}$

2. Se multiplica el numerador y el denominador de la fracción por dicha conjugada:

$$\frac{5}{3 - \sqrt{2}} * \frac{3 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = \frac{5 * (3 + \sqrt{2})}{3 - \sqrt{2} * 3 + \sqrt{2}}$$

3. En el denominador obtenemos una diferencia de cuadrados:

$$\frac{5 * (3 + \sqrt{2})}{(3)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{5 * (3 + \sqrt{2})}{9 - 2} =$$

4. Simplificando, obtenemos como solución: $\frac{5 * (3 + \sqrt{2})}{7}$

b. $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$

Procedimiento

1. Se determina la conjugada, en este caso, del denominador: La conjugada de:

$\sqrt{x} + 1$ Es $\sqrt{x} - 1$

2. Se multiplica el numerador y el denominador de la fracción por dicha conjugada:

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} * \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1) * (\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1) * (\sqrt{x}-1)} =$$

3. En el denominador obtenemos una diferencia de cuadrados:

$$\frac{(x-1) * (\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^2 - (1)^2} = \frac{(x-1) * (\sqrt{x}-1)}{x-1} =$$

4. Simplificando, obtenemos como solución: $\sqrt{x} - 1$

c $\frac{9}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}$

Procedimiento:

1. Se determina la conjugada, en este caso, del denominador: La conjugada de:

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} \text{ Es } \sqrt{2} - \sqrt{5}$$

2. Se multiplica el numerador y el denominador de la fracción por dicha conjugada:

$$\frac{9}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} * \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{9 * (\sqrt{2} - \sqrt{5})}{(\sqrt{2} + \sqrt{5}) * (\sqrt{2} - \sqrt{5})}$$

3. En el denominador obtenemos una diferencia de cuadrados:

$$\frac{9 * (\sqrt{2} - \sqrt{5})}{(\sqrt{2^2}) - \sqrt{5^2}}$$



4. Simplificando, obtenemos como solución:

$$5. \frac{9 * (\sqrt{2} - \sqrt{5})}{2 - 5} = - \frac{9 * (\sqrt{2} - \sqrt{5})}{3} = -3 * (\sqrt{2} - \sqrt{5})$$

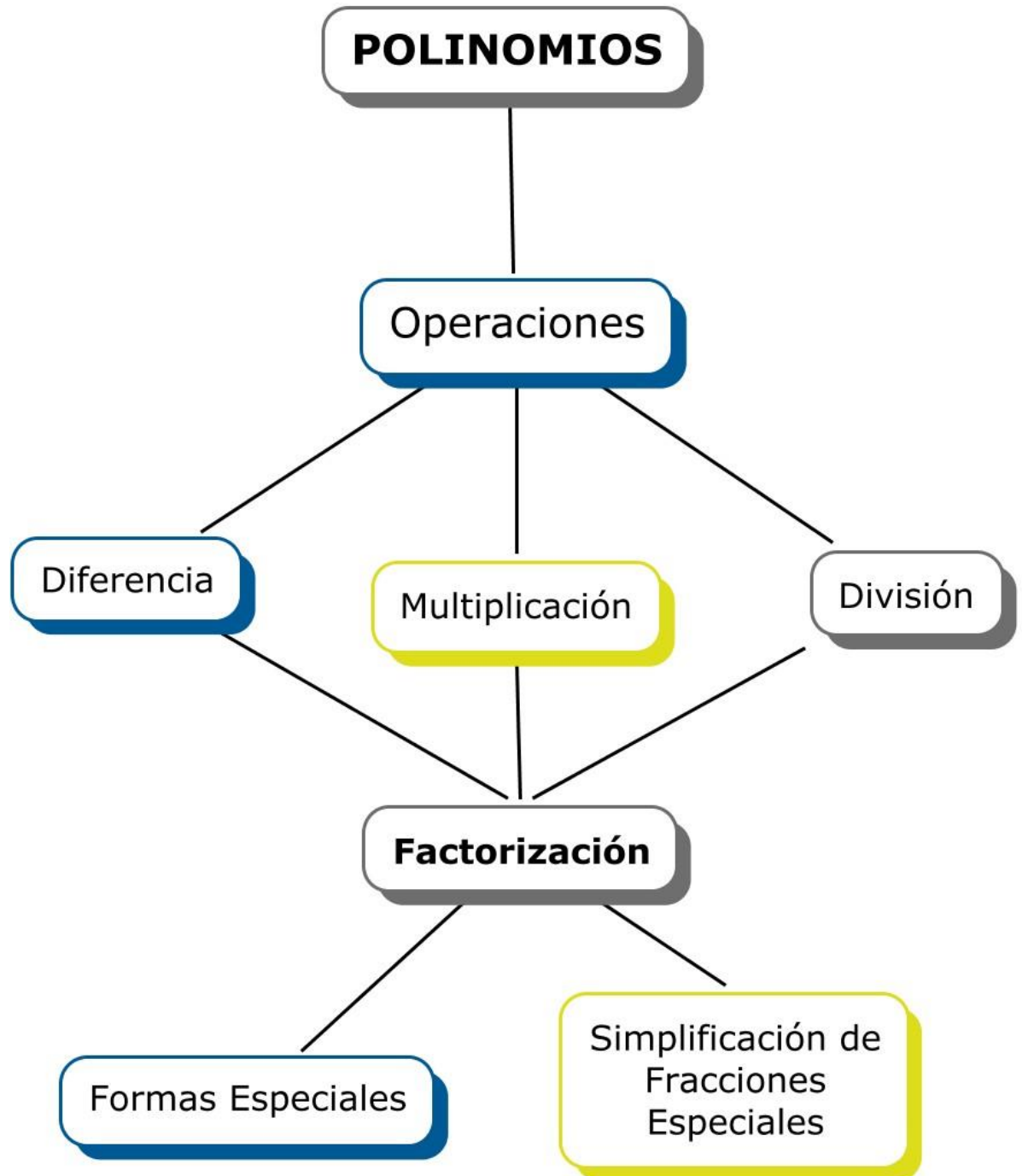
6. Multiplicando por el signo menos, también se puede expresar como:

$$3 * (\sqrt{5} - \sqrt{2})$$

Se puede ver que en todos los ejemplos desaparecieron los radicales del denominador



3. UNIDAD 2 POLINOMIOS





- **Conceptos**

- **Término algebraico:** un término algebraico es una expresión que se compone de un:



Por ejemplo en el término algebraico:

$$7x^5$$

ELEMENTO	NOMBRE	CARACTERÍSTICA
+	Signo	Se encuentra siempre a la izquierda del término. Indica si el término es positivo o si el término es negativo ; en algunos casos cuando el signo es positivo dicho signo no se coloca .
7	Coeficiente	Es el número que acompaña a la base (parte literal). El coeficiente indica las veces que se toma la base como sumando . Cuando el coeficiente es el número 1 , en la mayoría de las veces no se coloca .
x	Parte literal	Por lo general se toma cualquier letra de alfabeto , las más utilizadas son: a, b, c, x, y, z
5	Exponente	Indica las veces que se toma la base como factor (las veces que se multiplica la base por sí misma). Cuando el exponente es el número 1 no va escrito .

3.1. Tema 1: Polinomios Algebraicos

- Expresión algebraica

Una **expresión algebraica** es una combinación de **letras**, **números** y **signos** de **operaciones**. Las **letras** suelen representar **cantidades desconocidas** y se denominan **variables** o **incógnitas**. Las expresiones algebraicas nos permiten **traducir al lenguaje matemático** expresiones del lenguaje habitual.

Tomado de maralboran.org/wikipedia/index.php/Expresiones_algebraicas

- Clasificación de las expresiones algebraicas.

NOMBRE	DEFINICIÓN	SUBCLASIFICACIÓN	EJEMPLOS
MONOMIOS	Es una expresión algebraica que consta de un solo término		$3x^4$ $-10ax^2y^3z$
POLINOMIOS	Son expresiones algebraicas compuestas de dos o más términos.	Se clasifican a su vez en Binomios: es un polinomio que consta de dos términos: Trinomio: es un polinomio que consta de tres términos. Nota: los demás polinomios se clasifican de acuerdo al número de términos que tengan, si son 4 se llama polinomio de 4 términos y así sucesivamente.	$2x - y$ $a + b$ $\frac{2x}{3} - y^2z$, son binomios. $x^2 - 3y^4 + 5$ $x + y + z$ Son trinomios $5x^2 - \frac{4y}{5} - \frac{2a}{3}$

- **Términos semejantes:**

Dos o más términos son **semejantes** cuando:

- Tienen la **misma parte literal**, es decir tienen las mismas letras, y
- Las letras tienen los **mismos exponentes**.

Ejemplos:

$2a$ y $-a$	Son semejantes, tienen la misma letra (a) y el mismo exponente (1)
$-2bz$ y $56bz$	Son semejantes, tienen las mismas letras (b y z) y el mismo exponente (1) .
$-5a^3b^2$ y $-8a^2b^3$	No son semejantes , tienen las mismas letras (a y b) pero diferente exponente: a tiene 3 y 2; b tiene 2 y 3.

ACTIVIDAD: consulta como se reducen **términos semejantes** y realiza 4 ejercicios.

- **Operaciones con polinomios.**

- **Suma de polinomios:**

Para sumar dos o más polinomios se procede de la siguiente manera:

- Para los **términos semejantes se suman los coeficientes**. La base pasa al resultado igual; quiere decir que pasa al resultado con el mismo exponente.
- Términos **no semejantes** pasan al resultado **igual**.
- Algunos veces se recomienda **colocar los polinomios uno debajo del otro** de manera que los **términos semejantes queden en columna** permitiendo una mejor visión de los mismos.

(<http://www.youtube.com/watch?v=oSTi6Mxqj8M>)

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Sume: $7a - 5b + 5c - d$, $-2b + 2c - 4d$ y $-3a + 15b - 3c$

SOLUCIÓN: en el siguiente esquema encontrarás organizados los términos semejantes y las operaciones indicadas.

POLINOMIOS	SIGNO	TÉRMINO SEMEJANTE	SIGNO	TÉRMINO SEMEJANTE	SIGNO	TÉRMINO SEMEJANTE	SIGNO	TÉRMINO SEMEJANTE
SUMANDO		7a	-	5b	+	5c	-	d
SUMANDO			-	2b	+	2c	-	4d
SUMANDO	-	3a	+	15b	-	3c		
RESULTADO		4a	+	8b	+	4c	-	5d

2. Sume: $\frac{1}{4}x^3 + 3y^3 - \frac{2}{15}x^2y - 4$, $-\frac{3}{10}x^2y + \frac{13}{4}xy^2 - \frac{1}{7}y^3$, $-\frac{1}{12}y^3 + \frac{1}{18}xy^2 - 5$

POLINOMIO1	SIGNO	TÉRMINO SEMEJANTE	SIGNO	TÉRMINO SEMEJANTE	SIGNO	TÉRMINO SEMEJANTE	SIGNO	TÉRMINO SEMEJANTE	TÉRMINO SEMEJANTE
SUMANDO		$\frac{1}{4}x^3$	-	$\frac{2}{15}x^2y$			+	$3y^3$	- 4
SUMANDO			-	$\frac{3}{10}x^2y$	+	$\frac{13}{4}xy^2$	-	$\frac{1}{7}y^3$	
SUMANDO					+	$\frac{1}{18}xy^2$	-	$\frac{1}{12}y^3$	- 5
RESULTADO		$\frac{1}{4}x^3$	-	$\frac{13}{30}x^2y$	+	$\frac{119}{36}xy^2$	+	$\frac{233}{12}y^3$	- 9

○ **Diferencia de polinomios:**

Para restar polinomios se debe **cambiar el signo** a todos los términos del polinomio a restar (el **polinomio sustraendo**) y luego se procede como en la suma.

(<http://www.youtube.com/watch?v=V3j9rkFYnFY>)

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. De: $4x - 22y + z$ **reste:** $7x + 5z - 6$

En esta operación se tiene:

$4x - 22y + z$: **Minuendo**

$7x + 5z - 6$: **Sustraendo**

Recuerda: Minuendo - sustraendo = Diferencia

La resta quedaría indicada de la siguiente manera:

$$4x - 22y + z - (7x + 5z - 6)$$

Recuerde: El signo menos cambia todos los signos bajo el paréntesis.

Por lo tanto: $4x - 22y + z - (7x + 5z - 6) = 4x - 22y + z - 7x - 5z + 6$, simplificando términos semejantes el resultado sería:

$$-3x - 22y - 4z + 6$$

2. realizar el ejercicio siguiente de la misma forma que se realizó el anterior ejemplo:

Restar: $-a^2x + 6 - 5ax^2 - x^3$ de: $14a^3 + 8a^2x + 7ax^2 - 4$

Solución: Realizar el procedimiento, justificando cada paso, **RECUERDE QUE DEBE IDENTIFICAR** el Minuendo y el Sustraendo en el ejercicio.

○ **Multiplicación de polinomios:**

En la multiplicación de polinomios se presentan tres casos:

1. MONOMIO MULTIPLICADO POR MONOMIO

Al multiplicar **monomio** por **monomio** se deben tener en cuenta:

1. **Ley de signos.** Recuerde producto de signos iguales el resultado es positivo y producto de signos diferentes el resultado es negativo.
2. Se multiplican **coeficientes** entre sí.
3. **Letras comunes**, se pone **la misma letra** y se **suman** los **exponentes**.
4. **Letras no comunes**, pasan **al resultado igual**.
5. En la **respuesta final las letras** deben ir en **orden alfabético**. $2ba = 2ab$.

Ejemplo 1:

Factor	signo	factor	Signos y coeficientes	potencias	Resultado final
$-3x^2y^3$	*	$5x^4yz^3$	$-3 \cdot 5$	$x^{2+4}y^{3+1}z^3$	$-15x^6y^4z^3$
$\frac{5}{4}abc$	*	$\frac{2}{3}b^5c^7$	$\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3}$	$ab^{1+5}c^{1+7}$	$\frac{5}{6}ab^6c^8$ Recuerde simplificar los fraccionarios
Actividad: realizar los siguientes productos, teniendo como modelo los anteriores, Recuerda simplificar y expresar la respuesta con exponentes positivos.					
$-\frac{3}{5}x^{-1}y^{-3}z^{-4}$	*	$\frac{25}{9}x^3y^{-5}z^{-7}$			
$-3m^3n^5p^{-2}$	*	$-6m^{-1}n^{-3}p^6$			
$\frac{5}{6}a^2b^2c^{-2}$	*	$\frac{12}{25}a^{-2}b^{-2}c^2$			
$\frac{15}{11}s^{-1}p^{-1}q^{-1}$	*	$\frac{22}{45}s^{-1}p^{-2}q^{-3}$			

2. MONOMIO MULTIPLICADO POR POLINOMIO O POLINOMIO MULTIPLICADO POR MONOMIO

El **monomio** debe **multiplicar** todos los términos del **polinomio** siguiendo las leyes anteriores.

Recuerde: propiedad distributiva del producto respecto a la suma:

$$a * (b + c + d) = a*b + a*c + a*d$$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

$$\begin{aligned}
 1. \quad & 7xy^2(5x - 6y + 7) = 7xy^2 * 5x - 7xy^2 * 6y + 7xy^2 * 7 = 35x^2y^2 - 42xy^3 + 49xy^2 \\
 & (5z - 7y + 2xyz) * (-2x^3yz^3) = 5z * (-2x^3yz^3) - 7y * (-2x^3yz^3) + 2xyz * (-2x^3yz^3) \\
 2. \quad & = -10x^3yz^4 + 14x^3y^2z^3 - 4x^4y^2z^4
 \end{aligned}$$

3. POLINOMIO MULTIPLICADO POR POLINOMIO

Todos los términos de un polinomio deben multiplicar a todos los términos del otro polinomio, siguiendo las leyes del caso monomio multiplicado por monomio teniendo en cuenta la ley de signos y la reducción de términos semejantes, esto es:

$$(a + b) * (c * d) = a*c + b*d + b*c + b*d$$

(<http://www.youtube.com/watch?v=ZzbQ6rahZ24&feature=fvst>)

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

$$1. (6x - 3)(2x + 4) = 12x^2 + 24x - 6x - 12 = 12x^2 + 18x - 12$$

$$2. (3x + 7)(5 - x) = 15x - 3x^2 + 35 - 7x = -3x^2 + 8x + 35$$

NOTA: En la multiplicación de **polinomio por polinomio** se presentan algunos **casos particulares**, denominados **productos notables**.

3.2. Tema 2: Productos Notables

- PRODUCTOS NOTABLES**

Los productos notables, son fórmulas que permiten efectuar la multiplicación de polinomio por polinomio, por simple inspección. Algunos de los productos notables son:

PRODUCTO	PRODUCTO NOTABLE	DESARROLLO	DESCRIPCIÓN
$(x + y) * (x + y)$	$(x + y)^2$ Suma elevada al cuadrado.	$x^2 + 2xy + y^2$	El cuadrado del primer término, más (+) el doble producto del primer término por el segundo, más (+) el cuadrado del segundo término.
$(x - y) * (x - y)$	$(x - y)^2$ Diferencia elevada al cuadrado.	$x^2 - 2xy + y^2$	El cuadrado del primer término, menos (-) el doble producto del primer término por el segundo, más (+) el cuadrado del segundo término.
$(x + y) * (x - y)$	Diferencia de cuadrados.	$x^2 - y^2$	Cuadrado del primer término, menos (-) el cuadrado del segundo.
$(x + y) * (x + y) * (x + y)$	$(x + y)^3$ Suma elevada al cubo.	$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$	El cubo del primer término, más (+)



			tres veces el cuadrado del primer término por el segundo, más (+) tres veces el primer término por el cuadrado del segundo, más (+) el cubo del segundo término Nota: (Todos los términos son positivos).
$(x - y) \cdot (x - y) \cdot (x - y)$	$(x - y)^3$ Diferencia elevada al cubo.	$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$	El cubo del primer término, menos (-) tres veces el cuadrado del primer término por el segundo, más (+) tres veces el primer término por el cuadrado del segundo, menos (-) el cubo del segundo término Nota: (Los signos de los términos van alternos, empezando por más (+)).

Véase los siguientes videos sobre el tema en la dirección:

<http://www.youtube.com/watch?v=AEAedJ7Jc8I>

http://www.youtube.com/watch?v=_aellSpAMKY

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

De acuerdo al cuadro de productos notables realizado, efectuar:

$$1. (5x - 2)^2 = (5x)^2 - 2(5x)(2) + (2)^2 = 25x^2 - 20x + 4$$

$$2. (3 - 2x)^3 = (3)^3 - 3(3)^2(2x) + 3(3)(2x)^2 - (2x)^3 = 27 - 54x + 36x^2 - 8x^3$$

$$3. (3x + 4)(3x - 4) = (3x)^2 - (4)^2 = 9x^2 - 16$$

- **Triángulo de pascal**

Se utiliza para expandir un binomio elevado a la n : $(a + b)^n \vee (a - b)^n$ donde n es un **entero positivo**.

GENERALIDADES

El triángulo en su parte superior empieza con 1 y 1, en los extremos siempre se escribe el número 1, los números centrales se forman sumando dos números seguidos.

La **primera fila** del triángulo corresponde a la expansión del binomio:.....

$$(a \pm b)^1$$

La **segunda fila** corresponde a los coeficientes de la expansión del binomio

$$(a \pm b)^2$$

La **tercera** **fila** a:.....

$$(a \pm b)^3$$

La **cuarta** **fila** a:.....

$$(a \pm b)^4$$

La **quinta** **fila** a:.....

$$(a \pm b)^5$$

Y así sucesivamente.

El término a empieza con el exponente n y va disminuyendo hasta cero
El termino b empieza con el exponente cero y va aumentando hasta que el exponente es n .
Si el signo entre ambos términos es positivo , todos los signos del polinomio resultante son positivos .
Si el signo entre ambos términos es negativo , los signos se van intercambiando empezando por +

							1								n=0
						1		1							n=1
				1		2		1							n=2
			1		3		3		1						n=3
		1		4		6		4		1					n=4
	1		5		10		10		5		1				n=5
	1		6		15		20		15		6		1		n=6
1		7		21		35		35		21		7		1	n=7

Véase el video en: <http://www.youtube.com/watch?v=iQF93rRX9GU>

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Expanda los siguientes binomios:

Q

$$1. (X - 2)^4 = X^4 - 4 * X^3 * 2 + 6 * X^2 * 2^2 - 4 * X * 2^3 + 2^4$$

Nota: en el ejemplo $n = 4$ (Se resaltan los coeficientes en rojo, el primero y el último término tienen como coeficiente el 1).

$$2. (x - 2)^4 = x^4 - 4 * x^3 * 2 + 6 * x^2 * 2^2 - 4 * x * 2^3 + 2^4$$

$$3. (5x - 3)^5 = (5x)^5 - 5 * (5x)^4 * 3 + 10 * (5x)^3 * 3^2 - 10 * (5x)^2 * 3^3 + 5 * (5x)^1 * 3^4 - 3^5 .$$

$$3125x^5 - 9375x^4 + 11250x^3 - 6750x^2 + 2025x - 243$$

- **División entre polinomios:**

En la división de polinomios se presentan tres casos:

- **MONOMIO DIVIDIDO MONOMIO:**

Para dividir monomio entre monomio, se debe tener en cuenta:

1. Ley de signos.
2. Se dividen coeficientes entre sí.
3. Letras comunes. División de letras iguales, se deja la misma letra y se restan los exponentes.
4. Letras no comunes, pasan al resultado igual.
NOTA: se acostumbra dar los resultados siempre con exponentes positivos.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1.

Monomio	÷	Monomio	=	Cociente	=	operaciones	Simplificando	Exponentes positivos
$((3x^2 y))$	÷	$(- 6xy^4)$	=	$\frac{3x^2 y}{-6xy^4}$	=	$-\frac{3}{6}x^{2-1}y^{1-4}$	$-\frac{1}{2}x^1y^{-3}$	$-\frac{x}{2y^3}$

2. realiza el siguiente ejercicio de la forma indicada anteriormente:

$$(7ax^3y) \div (5axz) = \frac{7ax^3y}{5axz} = \frac{7a^{1-1}x^{3-1}y}{5z} = \frac{7a^0x^2y}{5z} = \frac{7x^2y}{5z}$$

Monomio	÷	Monomio	=	Cociente	=	operaciones	Simplificando	Exponentes positivos
	÷		=		=			

○ POLINOMIO DIVIDIDO MONOMIO:

El monomio debe dividir a todos los términos del polinomio siguiendo las leyes del caso anterior, en otras palabras, se dividen todos y cada uno de los términos del polinomio por el monomio determinado.

Ejercicio de Aprendizaje

$$(30xy - 60ax^2 + 35axy) \div (-10xz) = \frac{30xy - 60ax^2 + 35axy}{-10xz} = \frac{30xy}{-10xz} - \frac{60ax^2}{-10xz} + \frac{35axy}{-10xz} =$$

$$-\frac{3y}{z} + \frac{6ax}{z} - \frac{7ay}{2z}$$

○ **POLINOMIO DIVIDIDO POLINOMIO (MONOMIO DIVIDIDO POLINOMIO):**

Se pretende dividir un polinomio $P(x)$ entre un polinomio $Q(x)$. Esta división es posible, siempre que el grado de $P(x)$ sea mayor que el grado de $Q(x)$. El grado de un polinomio se refiere al máximo exponente que tiene la variable.

Para efectuar esta división se presentan varias formas; sólo vamos a estudiar dos de ellas: La división larga (o división tradicional) y la división sintética.

POLINOMIO DIVIDIDO POLINOMIO: MÉTODO DIVISIÓN LARGA (O TRADICIONAL).

(<http://www.youtube.com/watch?v=thtodef4hcvE>),

(<http://www.youtube.com/watch?v=k9R4RVDpoQg&feature=related>)

Se explica el método con el siguiente ejemplo:

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Efectúe la siguiente división: $\frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{2x + 1}$

SOLUCIÓN

PASOS PARA EFECTUAR LA DIVISIÓN $\frac{P(x)}{Q(x)}$

1. Se ordena y se completa con ceros el polinomio $P(x)$. $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 0x + 1$
2. Si es necesario también se ordena el polinomio $Q(x)$
3. Se divide el primer término de $P(x)$ entre el primer término de $Q(x)$, El resultado es el primer término de $C(x)$. $\frac{2x^3}{2x} = x^2$

4. Se multiplica el valor anterior por $Q(x)$ y el resultado se resta de $P(x)$ (restar quiere decir, cambie de signo y efectúe la operación indicada). $x^2 * (2x + 1) = 2x^3 + x^2$; como hay que cambiarle de signo, queda: $-2x^3 - x^2$. Esto es lo que pusimos en la segunda fila. Debemos efectuar la operación indicada.
5. Al hacer la resta, resulta un nuevo $P(x)$ igual a $(2x^2 + 0x + 1)$, esto es lo que aparece en la tercera fila; dividimos, el primer término del nuevo $P(x)$ entre el primer término de $Q(x)$, el resultado es el segundo término de $C(x)$. $\frac{2x^2}{2x} = x$
6. Se procede como en el paso 4 hasta que el residuo sea cero o hasta que el grado del nuevo $P(x)$ sea menor que el grado de $Q(x)$.
7. La respuesta de la división se debe dar como: $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 + 3x^2 + 0x + 1 & 2x + 1 \\
 -2x^3 - x^2 & x^2 + x - \frac{1}{2} \\
 \hline
 +2x^2 + 0x + 1 & \\
 -2x^2 - x & \\
 \hline
 -x + 1 & \\
 x + \frac{1}{2} & \\
 \hline
 +\frac{3}{2} &
 \end{array}$$

$$C(x) = x^2 + x - \frac{1}{2}, \quad R(x) = \frac{3}{2}, \quad Q(x) = 2x + 1$$

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{2x + 1} = x^2 + x - \frac{1}{2} + \frac{3/2}{2x + 1}$$

2. Efectúe la división: $(x^2 - 6x + 5) \div (x + 7)$



SOLUCIÓN

$$\begin{array}{r}
 x^2 \qquad -6x \qquad +5 \\
 -x^2 \qquad -7x \\
 \hline
 0 \qquad -13x \qquad +5 \\
 \qquad 13x \qquad +91 \\
 \hline
 \qquad 0 \qquad 96
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} x+7 \\ x-13 = C(x) \end{array} \right.$$

$$= R(x)$$

La respuesta es: $x - 13 + \frac{96}{x+7}$

3. Efectúe la división: $\frac{x^3}{5x-2}$

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{r}
 x^3 \quad +0x^2 \quad +0x \quad +0 \\
 -x^3 \quad +\frac{2}{5}x^2 \\
 \hline
 0 \quad \frac{2}{5}x^2 \quad +0x \\
 \qquad -\frac{2}{5}x^2 \quad +\frac{4}{25}x \\
 \hline
 \qquad 0 \quad \frac{4}{25}x \quad +0 \\
 \qquad \qquad -\frac{4}{25}x \quad +\frac{8}{125} \\
 \hline
 \qquad \qquad 0 \quad \frac{8}{125}
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} 5x-2 \\ \frac{x^2}{5} + \frac{2}{25}x + \frac{4}{125} = c(x) \end{array} \right.$$

$$= R(x)$$

$$\frac{x^3}{5x-2} = \frac{x^2}{5} + \frac{2x}{25} + \frac{4}{125} + \frac{8/125}{5x-2}$$

POLINOMIO DIVIDIDO POLINOMIO METODO: DIVISIÓN SINTÉTICA.

<http://www.youtube.com/watch?v=U1JHC5JCws4>

<http://www.youtube.com/watch?v=1iB3hqc8qQ&feature=related>

<http://www.youtube.com/watch?v=vcGzSwfl26g&feature=related>

Es un método abreviado que permite dividir un polinomio $P(x)$ entre un polinomio $Q(x)$; siempre que el polinomio $Q(x)$ sea un binomio lineal. Lineal quiere decir que el exponente de la variable sea 1.



Es decir $Q(x)$ debe presentar la siguiente forma: $Q(x) = bx + a$

El procedimiento es el siguiente.

PASOS PARA EFECTUAR LA DIVISIÓN:

- Si es necesario completamos y ordenamos el polinomio $P(x)$.
- Colocamos los coeficientes de $P(x)$ en fila, es decir, uno a continuación del otro en forma horizontal.
- En la parte izquierda de la fila colocamos el número $-a/b$. Que resulta de resolver la ecuación $Q(x)=0$, es decir de solucionar $bx + a = 0$. Al solucionar, resulta $x = -a / b$
- Dejamos una fila en blanco y debajo de esta fila trazamos una línea horizontal.
- Se baja el primer coeficiente a una tercera fila.
- Se multiplica por $-a / b$, el resultado se coloca en la segunda fila debajo del segundo coeficiente y efectuamos la operación que quede indicada.
- El resultado anterior lo multiplicamos por $-a / b$, el resultado se coloca en la segunda fila debajo del tercer coeficiente; se efectúa la operación indicada. Se repite el proceso hasta el último coeficiente.
- El último número de la tercera fila corresponde al residuo.
- Los demás números de la tercera fila son los coeficientes de $C(x)$ que tendrá un grado menor que $P(x)$ y estará ordenado en forma descendente. Todos los términos de $C(x)$ se deben dividir entre b (este es el número que acompaña a la x).
- Debemos dar la respuesta como: $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Efectúe por división sintética: $\frac{-2x^3 - 1 + 3x^5 + 4x^2}{x + 2}$

Ordenando y completando queda: $P(x) = 3x^5 + 0x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 0x - 1$

El número $-a/b$ resulta de solucionar la ecuación:

$x + 2 = 0$, $x = -2$, es decir, $-a/b = -2$

Los números de la primera fila (Fila #1) corresponden a los coeficientes de $P(x)$. El primer número es el 3, que es el coeficiente de x^5 . El segundo número es el cero, que es el coeficiente de x^4 . El tercer número es -2 , que es el coeficiente de x^3 . El cuarto número es el 4, que es el coeficiente de x^2 . El quinto número es el cero, que es el coeficiente de x y el quinto número es -1 , que es el término independiente.

Los números de la segunda fila (Fila #2) se obtienen de la siguiente manera:

El número -6 resulta de multiplicar $-2 * 3$ (3 primer número de la tercera fila).

Al sumar 0 con -6 el resultado es -6 (segundos números de la tercera fila).

El número 12 resulta de multiplicar $-2*(-6)$ (Segundo número de la tercera fila).

Al sumar -2 con 12 el resultado es 10 (tercer número de la tercera fila).

El número -20 resulta de multiplicar $-2 * 10$ (tercer número de la tercera fila).

Al sumar 4 con -20 , el resultado es -16 (Cuarto número de la tercera fila).

Y así sucesivamente.

-2	3	0	-2	4	0	-1	← Fila #1
		-6	12	-20	32	-64	← Fila #2
	3	-6	10	-16	32	-65=R(x)	← Fila #3

El primer número de la tercera fila (el número 3) corresponde al primer coeficiente de $C(x)$, que debe empezar en grado cuatro (debe empezar en x^4). El segundo número de la tercera fila corresponde al segundo coeficiente de $C(x)$ y debe tener grado tres, etc. **Todos los coeficientes de $c(x)$ al dividirlos entre uno quedan iguales.**

$$C(x) = 3x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 16x + 32$$

El último número de la tercera fila (-65) corresponde al residuo. $R(x) = -65$

Entonces la respuesta se debe dar como:

$$\frac{-2x^3 - 1 + 3x^5 + 4x^2}{x + 2} = 3x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 16x + 32 + \frac{-65}{x + 2}$$

2. Efectúe por división sintética: $(4x^3 - 2x^2 + 3x + 2) \div (2x + 1)$

Ambos polinomios están ordenados y completos.

- a / b = -1/2 Recuerde que resulta de solucionar la ecuación: $2x + 1 = 0$

$$2x = -1, x = -1/2$$

-1/2	4	-2	3	2
		-2	2	-5/2
	4	-4	5	-1/2=R(x)
	4/2=2	-4/2=-2	5/2= 5/2	

Los números 4, -4 y -1 son los coeficientes de $C(x)$ y cada uno lo dividimos entre **b**, para este caso los dividimos entre 2, ya que **b = 2**.



Entonces: $C(x) = 2x^2 - 2x + \frac{5}{2}$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 2x^2 - 2x + \frac{5}{2} + \frac{-1/2}{2x+1}$$

3. Efectúe por división sintética: $(3x - 5 + 2x^2) \div (-5 + x)$

Ordenando queda: $P(x) = 2x^2 + 3x - 5$
 $Q(x) = x - 5$

El número - **a / b** resulta de solucionar la ecuación: $x - 5 = 0$, $x = 5$; es decir - **a / b = 5**

5	2	3	-5
		10	65
	2	13	60=R(x)

$$C(x) = 2x + 13$$

$$\frac{2x^2 + 3x - 5}{x - 5} = 2x + 13 + \frac{60}{x - 5}$$

4. Efectúe por división sintética: $\left(3x^2 + 2x^4 - 3x + \frac{22}{81}\right) \div (3x - 2)$

Ordenando y completando queda: $P(x) = 2x^4 + 0x^3 + 3x^2 - 3x + \frac{22}{81}$

$3x - 2 = 0$, $3x = 2$, $x = 2/3$.

2/3	2	0	3	-3	22/81
		4/3	8/9	70/27	-22/81
	2	4/3	35/9	-11/27	0=R(x)
÷ 3	2/3	(4/3)/3=4/9	(35/9)/3=35/27	(-11/27)/3=-11/81	

7

$$C(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{35}{27}x - \frac{11}{81}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{35}{27}x - \frac{11}{81} + \frac{0}{3x-2} = \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{35}{27}x - \frac{11}{81}$$

TEOREMA DEL RESIDUO

El teorema del residuo permite determinar el residuo sin necesidad de hacer la división.

El residuo de la división de un polinomio $P(x)$ entre un binomio $Q(x) = bx + a$ siempre corresponde al valor numérico que toma el polinomio $P(x)$ para $x = -\frac{a}{b}$, es decir, $R(x) = P(-a/b)$. Siempre que **b** no sea igual a cero. El número $-a/b$ se obtiene de la misma manera que para la división sintética.

Procedimiento:

1. Solucione la ecuación que resulta al hacer $Q(x) = 0$, Es decir $bx + a = 0$. La solución es $x = -a/b$.
2. Reemplace el valor anterior en el polinomio $P(x)$. Es decir calcule: $P(x = -a/b)$
3. El resultado de dicho reemplazo es el residuo, es decir: $R(x) = P(x = -a/b)$

Para profundizar a cerca del teorema del residuo puede consultar las siguientes páginas:

<http://www.youtube.com/watch?v=gDas3d6beVU>

<http://www.youtube.com/watch?v=qd7o3cm0UCo&feature=related>

<http://www.youtube.com/watch?v=8a4KrNkFR6M&feature=related>

TEOREMA DEL FACTOR

El teorema del factor permite determinar cuándo un polinomio $P(x)$ **es divisible** entre un polinomio $Q(x)$, es decir cuando esta división es exacta.

Esto se presenta cuando **el residuo de esta división es igual a cero**: $R(x) = 0$

El polinomio $Q(x) = ax + b$ es un factor de un polinomio $P(x)$ si el residuo que resulta de la división $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es igual a cero

Si $R(x) = 0$, Tenemos que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{0}{Q(x)} \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x)$$

Por lo tanto, podemos decir que:

$$P(x) = C(x) * Q(x)$$

Ejercicio de Aprendizaje

Determine si $Q(x) = x + 1$ es un factor de $P(x) = x^4 - 5x^2 + 6x - 1$

Para poder determinar esto, debemos hallar el residuo de la división $\frac{P(x)}{Q(x)}$, si este es igual a cero, es

porque $Q(x) = x + 1$ es un factor de $P(x)$

$$Q(x) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$R(x) = P(x = -1) = (-1)^4 - 5(-1)^2 + 6(-1) - 1 = -11$$

Como $R(x) \neq 0$, $Q(x) = x + 1$ no es factor de $P(x) = x^4 - 5x^2 + 6x - 1$.

NOTA: El teorema del residuo permite determinar rápidamente cuando un polinomio $P(x)$ es divisible exactamente entre un binomio $Q(x) = b x - a$. Esto se cumple cuando el **residuo es nulo**, es decir, si $R(x) = P(a/b) = 0$. En consecuencia $Q(x)$ es un factor de $P(x)$. En este caso el otro factor se obtiene efectuando la división y será $C(x)$.

Ejercicios de Aprendizaje

1. Determine si el polinomio $x^2 - x - 6$ tiene como factor a $x + 3$, si es así determine el otro factor.

$$R(x) = P(-3) = (-3)^2 - (-3) - 6 = 9 + 3 - 6 = 6$$

Como el residuo es diferente de cero $x + 3$ no es factor de dicho polinomio.

2. Determine si el polinomio $P(x) = 2x^2 + x - 1$ es factorizable por $x + 1$. Encuentre la factorización.

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1, \quad R(x) = P(-1) = 2(-1)^2 + (-1) - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$$

Como el residuo es cero podemos afirmar que $x + 1$ es un factor del polinomio $P(x)$, para encontrar el otro factor debemos efectuar la división.

-1	2	1	-1
		-2	1
	2	-1	$0 = R(x)$

$C(x) = 2x - 1$. Este es el otro factor. Entonces, $P(x)$ factorizado queda:

$$2x^2 + x - 1 = (x + 1) * (2x - 1)$$

Puede profundizar sobre el teorema del factor en la siguiente página:

<http://www.youtube.com/watch?v=4M5TrlmpFjk>

PISTAS DE APRENDIZAJE**Traer a la memoria:**

- ✓ **El teorema del residuo** : Permite determinar rápidamente cuando un polinomio $P(x)$ es divisible exactamente entre un binomio $Q(x)=b x -a$. Esto se cumple cuando el **residuo es nulo**, es decir, si $R(x) = P(a / b) = 0$. En consecuencia $Q(x)$ es un factor de $P(x)$. En este caso el otro factor se obtiene efectuando la división y será $C(x)$.

3.3. Tema 3: Factorización

- **Definición de factorización**

Es una transformación de sumas y/o restas en productos equivalentes. La factorización es un proceso inverso a la multiplicación de polinomios. Lo que se busca es que dado un polinomio convertirlo en una expresión equivalente, pero escrita como un producto o multiplicación indicada de sus factores primos. (<http://www.youtube.com/watch?v=Mv6kHJE1cHc>)

A continuación se describe la forma de factorizar algunas expresiones.

- **Algunos casos de factorización**

➤ FACTOR COMÚN:

Siempre que se factorice se debe evaluar primero este caso.

El factor común es una cantidad que se encuentra presente en todos los términos de la expresión a factorizar. El factor común resulta de tomar **letras y números** comunes con su **menor exponente**.

Sé factoriza por factor común cuando se coloca el factor común fuera de un paréntesis y dentro del paréntesis se colocan todos los términos del polinomio divididos previamente entre el factor común.

(<http://www.youtube.com/watch?v=wJY5qY-xYvk&feature=related>)

Ejercicios de Aprendizaje

Factorice las siguientes expresiones:

1. $a^2 + 5a$

SOLUCIÓN

Se puede ver que **a** se encuentra en ambos términos, se debe tomar con el menor exponente; por lo tanto **el factor común es a**. Debemos colocar a la letra **a** fuera de un paréntesis y dentro del paréntesis lo que resulta cuando se divide $a^2/a = a$ y lo que resulta cuando se divide $a/a = 1$. La factorización queda.
 $a(a + 5)$

Esquemáticamente:

Polinomio	Factor común	Dividimos a^2 por a	Dividimos 5a por a	Queda factorizado	En general
$a^2 + 5a$	a	$\frac{a^2}{a} = a$	$\frac{5a}{a} = 5$	$a(a + 5)$	$a^2 + 5a = a(a + 5)$



2. $12m^2n + 24m^3n^2 - 36m^4n^3$

SOLUCIÓN

Para determinar el (o los) números comunes, estos se deben escribir en factores primos:

NÚMERO	DESCOMPOSICIÓN	FACTORES PRIMOS
12	$2 * 2 * 3$	$2^2 * 3$
24	$2 * 2 * 2 * 3$	$2^3 * 3$
36	$2 * 2 * 3 * 3$	$2^2 * 3^2$

- El factor común numérico sería: $2^2 * 3 = 12$
- El factor común literal sería: m^2n
- Factor común, entonces: $12m^2n$

Realizando la factorización:

En el polinomio: $12m^2n + 24m^3n^2 - 36m^4n^3$, se divide cada término por el factor común $12m^2n$:

$$12m^2n + 24m^3n^2 - 36m^4n^3$$

$\frac{12m^2n}{12m^2n} + \frac{24m^3n^2}{12m^2n} - \frac{36m^4n^3}{12m^2n}$, simplificando los coeficientes y restando exponentes, tenemos:

$12m^2n(1 + 2mn - 3m^2n^2)$, por lo tanto:

$$12m^2n + 24m^3n^2 - 36m^4n^3 = 12m^2n(1 + 2mn - 3m^2n^2)$$

3. Factorice el siguiente polinomio, indicando paso a paso el proceso realizado (tome como guía los ejemplos anteriores).

$$6ax^2 - 9a^3bx + 10a^5b^2z \quad R: a(6x^2 - 9a^2bx + 10a^4b^2z)$$

➤ **FACTOR COMÚN POR AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS:**

En este método los términos del polinomio a factorizar se deben agrupar de tal manera que permitan sacar un factor común diferente a cada grupo y posteriormente volver a sacar otro factor común a la expresión resultante (si es posible).

(<http://www.youtube.com/watch?v=ARiWxubJRPg&feature=related>)

<http://www.youtube.com/watch?v=W3sZFxZSEAo&feature=related>

Ejercicios de Aprendizaje

1. Factorice.

$$2x^2 - 3xy - 4x + 6y$$

SOLUCIÓN

Como no hay factor común en todos los términos, se pueden agrupar de la siguiente manera:

$$(2x^2 - 4x) - (3xy - 6y)$$

Recuerde: cuando se precede un paréntesis del signo menos los términos involucrados en él cambian de signo.

Ahora factorizando cada grupo por separado:

Factor común del primer paréntesis: $2x$

En el primer paréntesis, dividiendo por $2x$:

$$\frac{2x^2}{2x} - \frac{4x}{2x} = (x - 2)$$

Factor común del segundo paréntesis: $3y$

En el segundo paréntesis, dividiendo por $3y$:

$$\frac{3xy}{3y} - \frac{6y}{3y} = (x - 2)$$

Queda entonces de la siguiente manera:

$2x(x - 2) - 3y(x - 2)$, analizando el resultado obtenido, observamos que hay un factor común polinomio: $(x - 2)$, se divide cada término entre el factor común, de la siguiente manera:

$$\frac{2x(x-2)}{(x-2)} - \frac{3y(x-2)}{(x-2)} = (x - 2)(2x - 3y)$$

Por lo tanto:

$$2x^2 - 3xy - 4x + 6y = (x - 2)(2x - 3y)$$

➤ FACTORIZACIÓN DE BINOMIOS:

En la factorización de binomios se presentan varias posibilidades

➤ DIFERENCIA DE CUADRADOS:

Una diferencia de cuadrados se identifica de la siguiente manera:

- Hay dos términos.
- Los términos están separados por signo menos.
- Los coeficientes tienen raíz cuadrada (raíz cuadrada exacta, si vamos a factorizar en el campo de los números enteros).
- Los exponentes son pares.

En forma esquemática: $x^n - y^n$

con n número par (2, 4, 6, ...)

Regla para factorizar una diferencia de cuadrados:

Nota: evalúe primero si existe un factor común, si no existe proceda de la siguiente manera:

1. La diferencia de cuadrados se factoriza como el producto de dos paréntesis (dos factores).
2. En cada paréntesis se coloca la raíz cuadrada del primer término y la raíz cuadrada del segundo término, en un paréntesis separados por el signo + (más) y en el otro paréntesis separados por el signo - (menos). Esto es:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = (x - y)(x + y)$$

En general: una diferencia de cuadrados es igual al producto de la suma de sus raíces cuadradas, multiplicado por la diferencia de las mismas.

<http://www.youtube.com/watch?v=lgWqGDV1qKE>

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Factorice:

$$16x^2 - 25y^4$$

SOLUCIÓN:

No hay factor común, pero podemos ver que el binomio corresponde a una diferencia de cuadrados: **16** y **25** tienen raíz cuadrada, el exponente de **x** y el exponente de **y** son **pares**.

Analicemos:

$$\sqrt{16x^2} = 4x$$

$$\sqrt{25y^4} = 5y^2, \text{ entonces:}$$

$$16x^2 - 25y^4 = (4x + 5y^2)(4x - 5y^2)$$

2. Teniendo como base el ejemplo 1, realiza los siguientes ejercicios, describiendo el proceso realizado:

a. $100 - x^2y^6$

b. $8x^6 - 50y^{12}$

Nota: observe que 8 y 50 no son cuadrados perfectos, esto, es, no tienen raíz cuadrada exacta en los números enteros. ¿Qué debes hacer primero? Recuerda la regla para factorizar una Diferencia de Cuadrados, si no te acuerdas, revísala.

c. $x^4 - 16$

d. $\frac{16}{49}x^4 - \frac{64}{9}y^4z^2$

NOTA: SUMA DE CUADRADOS: una suma de cuadrados no es factorizable en los números enteros por este método.

- Una suma de cuadrados se identifica de la siguiente manera:
- Hay dos términos.
- Los términos están separados por signo más.
- Los coeficientes tienen raíz cuadrada.
- Los exponentes son pares.

Ejemplo 2:

$$x^4 + y^4$$

SOLUCIÓN:

No hay factor común y no se puede factorizar en los números enteros por ser una suma de cuadrados, pero si es posible factorizarlo en el campo de los números Reales.

➤ SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS:

Una diferencia o una suma de cubos se identifican de la siguiente manera:

- Hay dos términos.
- Los términos están separados por signo más (cuando es suma de cubos) o por signo menos (cuando es diferencia de cubos).
- Los coeficientes tienen raíz cúbica.
- Los exponentes son divisibles entre tres.

Regla para factorizar una diferencia o una suma de cubos:

1. Evalúe primero factor común.
2. Se factoriza como el producto de dos paréntesis (dos factores).
3. **En el primer paréntesis:** se coloca la raíz cúbica del primer término y la raíz cúbica del segundo término separadas por el mismo signo. Si es suma de cubos el signo que los separa es **más**, si es diferencia de cubos el signo que los separa es **menos**.

4. **En el segundo paréntesis:**

- Si es $(a + b)^3$: se coloca el cuadrado de la primera raíz cúbica **menos** el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz cúbica. El segundo paréntesis no es factorizable, así:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Escriba aquí la ecuación.

$$(a + b)^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

- Si es $(a - b)^3$: se coloca el cuadrado de la primera raíz cúbica **más** el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz cúbica así:



$$(a - b)^3 = (a + b)(a^2 + ab + b^2)$$

En general:

$$(a \pm b)^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

Nota: el segundo paréntesis no es factorizable.

<http://www.youtube.com/watch?v=DjW6Az8huBI>

<http://www.youtube.com/watch?v=LZE5eWFeAo4&feature=related>

EJERCICIO DE APRENDIZAJE

Factorice el siguiente polinomio:

$$8x^6 - y^6$$

No hay factor común. Este binomio corresponde a una diferencia de cubos: 8 tiene raíz cúbica, el exponente de **x** es divisible entre tres y el exponente de **y** es divisible entre tres, entonces:

- $\sqrt[3]{8x^6} = \sqrt[3]{2^3x^6} = \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{x^6} = 2^{\frac{3}{3}}x^{\frac{6}{3}} = 2x^2$
- $\sqrt[3]{y^{12}} = y^{\frac{12}{3}} = y^4$, entonces,

$$8x^6 - y^{12} = (2x^2 - y^4) * [(2x^2)^2 + (2x^2)(y^4) + (y^4)^2] = \\ (2x^2 - y^4)(4x^4 + 2x^2y^4 + y^8)$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO:

Factoriza los siguientes polinomios, teniendo como base el ejemplo anterior y la respectiva teoría:

- $343x^3 + 512y^6$

Solución:

- $5x^3 + 135$

Solución:

<http://www.youtube.com/watch?v=rpyqgjurQbc>

➤ FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS:

- **TRINOMIO DE LA FORMA:** $x^2 + bx + c$:

Se puede ver que en este trinomio el coeficiente de x^2 es uno, También que la variable del término del medio es la $\sqrt{\quad}$ del primer término, si no es así, este método no se puede utilizar.

Un trinomio de este tipo se factoriza como: $x^2 + bx + c = (x + d)(x + e)$

<http://www.youtube.com/watch?v=fmPpfc2B9oc>

Los pasos para efectuar la factorización son los siguientes:

1. Evalúe primero factor común.
2. Se ordena el trinomio en forma descendente.
3. Si el primer término es negativo, se debe factorizar el signo menos.
4. El trinomio se factoriza como el producto de dos paréntesis.

5. En cada paréntesis se escribe la raíz cuadrada del primer término del trinomio y se buscan dos números que cumplan las siguientes condiciones: que al multiplicarlos den el tercer término del trinomio ($m \cdot n = c$) y que al sumarlos den el coeficiente del término del medio ($m + n = b$).

En general

$$x^2 + bx + c = (x + m) \cdot (x + n)$$

Dónde:

$$m + n = b$$

$$m \cdot n = c$$

El signo del segundo término va en el primer paréntesis, en este caso es +.

En el segundo paréntesis (entre x y n) va el producto del signo del segundo término por el signo del tercer término, en este caso es $+ \cdot + = +$

Factorice.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE:

Factorice el siguiente polinomio:

1. $x^2 + 5x + 6$

SOLUCIÓN: obtenemos la raíz cuadrada del primer término:

$$\sqrt{x^2} = x, \text{ se coloca en ambos paréntesis}$$

Se debe buscar dos números (**m y n**) que al multiplicarlos (**m*n**) de cómo resultado el número **6** y que al sumarlos (**m + n**) dé como resultado el número 5. Después de descomponer el 6 en sus factores primos, tenemos: $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$, por lo tanto dichos números son +2 y +3, ya que **$2 \cdot 3 = 6$** y **$2 + 3 = 5$** , cumplen ambas condiciones. Entonces la factorización queda:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$$

Factoriza el siguiente trinomio, mostrando paso a paso su desarrollo:

2. $x^2 - 7x + 12$,

Solución

Se deben buscar dos números (m y n) que sumados o restados ($m + n$ o $m - n$) dé como resultado el número **-7** y multiplicados ($m * n$) dé como resultado **12**.

Descomponemos el número 12 en sus factores primos: $12 = 1 * 2 * 2 * 3 = 1 * 2^2 * 3 = 4 * 3$

Los números buscados son 3 y 4:

$$\begin{aligned} -3 - 4 &= -7 \\ (-3) * (-4) &= 12 \end{aligned}$$

Obtenemos la raíz cuadrada del término cuadrático:

$\sqrt{x^2} = x$, se coloca en ambos paréntesis; en el primer paréntesis va el signo del segundo término, o sea menos **(-)**, en el segundo paréntesis va el producto del signo del segundo término por el signo del tercer término, **(-)* (+) = -**

$$(x - 4) * (x - 3)$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

En los siguientes ejercicios encontrarás la solución de cada uno de ellos, pero debes realizar el proceso indicado anteriormente y verificar si las respuestas son correctas, en caso contrario deben corregirse:



1. $x^2 + 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$

Solución:

2. $x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2)$

Solución:

3. $x^4 - 5x^2 - 50 = (x^2 - 10)(x^2 + 5)$

Solución:

4. $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2$

Solución:

5. $x^2 - 14x + 49 = (x - 7)(x + 7)$

Solución:

➤ **TRINOMIO DE LA FORMA:**

$$ax^2 + bx + c$$

Se puede ver que en este trinomio el coeficiente de x^2 es diferente de uno ($a \neq 1$), es un número $a \in \mathbb{Z}^+$.

Para factorizar un trinomio de esta forma se debe completar el cuadrado del primer término, esto se logra multiplicando y dividiendo todo el trinomio por a .

Pasos para efectuar la factorización:

1. Se debe indicar la multiplicación y la división por **el número a** . No simplifique en este paso.
2. Se efectúa la multiplicación en el primero y en el tercer término, para el segundo término la multiplicación se debe dejar indicada como **$b(ax)$** . No simplifique en este paso.
3. Se factoriza como en el caso anterior. Todavía no se simplifica.
4. Después de esto se debe factorizar por factor común en uno o en ambos paréntesis. Ahora si se simplifica.

<http://www.youtube.com/watch?v=Ltae-lmPBPY&feature=related>

Factorice:

Ejercicio de aprendizaje:

Factorice el siguiente polinomio

$$6x^2 - 7x - 3$$

SOLUCIÓN

Nota: se debe multiplicar y dividir todo el trinomio por el coeficiente de x^2 en este caso por el número 6.

$$6x^2 - 7x - 3 = \frac{6}{6}(6x^2 - 7x - 3) = \frac{36x^2 - 7(6x) - 18}{6}$$

Recuerde: la multiplicación se efectúa sólo para el **primer y el tercer término**, en el segundo se debe dejar indicada como **b (ax)** por esto quedó indicado **-7(6x)**. Recuerde también que en este paso no se simplifica.

Después de esto se factoriza como en el caso anterior:

$\sqrt{36x^2} = 6x$, se coloca en cada paréntesis.

Se necesitan dos números que al sumarlos o restarlos dé como resultado el número -7 y al multiplicarlos dé como resultado el número -18.

Se descompone el número 18 en sus factores primos: $18 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3^2$.

Los números son 9 y 2, pero quedarían -9 y +2:

$$\begin{array}{l} -9 + 2 = -7, \text{ y} \\ (-9) \cdot (+2) = -18 \end{array}$$

$$\frac{36x^2}{6} - \frac{7(6x)}{6} - \frac{18}{6} = \frac{(6x-9) \cdot (6x+2)}{6}$$

Debe factorizar por factor común, bien sea en uno o en ambos paréntesis, en este caso, en el primer paréntesis es **3** y en el segundo es **2**, queda entonces:

$$\frac{(6x-9) \cdot (6x+2)}{6} = \frac{3(2x-3) \cdot 2(3x+1)}{6}, \text{ simplificando quedaría}$$

$(2x - 3) \cdot (3x + 1)$, entonces

$$6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3) \cdot (3x + 1)$$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO:

Teniendo como modelo el ejemplo realizado, efectúe los siguientes ejercicios justificando cada uno de los procesos realizados.

1. $20z^2 + z - 1$

Solución:

2. $-3x + 20 - 9x^2$

Solución:

3. $4x^2 - 12x + 9 \quad R: (2x - 3)^2$

Solución:

4. $10x^8 + 29x^4 + 10 \quad R: (2x^4 + 5)(5x^4 + 2)$

Solución:

➤ **Factorización por evaluación.**

Este método utiliza el teorema del residuo y la división entre polinomios.

El teorema del residuo permite determinar el factor $Q(x)$, y la división entre polinomios permite determinar el factor $C(x)$.

El teorema del residuo permite determinar rápidamente cuando un polinomio $P(x)$ es divisible exactamente entre un binomio $Q(x) = x - a$. Esto se cumple cuando el residuo es nulo, es decir,

si $R(x) = P(x - a) = 0$. En consecuencia $Q(x)$ es un factor de $P(x)$. En este caso el otro factor se obtiene efectuando la división y será $C(x)$.

En otras palabras, al reemplazar por uno de los factores primos del término independiente, se obtiene cero como residuo, decimos que en ese valor hay un factor de dicho polinomio.

Este método es práctico utilizarlo cuando es necesario factorizar polinomios de grado tres o superior y ninguno de los otros métodos conocidos funciona.

Pasos para desarrollar el método:

1. Determinar los posibles valores de x que hagan **cero el residuo**. Estos números se buscan en $P(x)$. Son los factores primos del término independiente de $P(x)$ (el término o número que no tiene x).
2. Evaluamos el residuo con estos números tomando uno a la vez.
3. Sí para $x = a$, $R(x - a) = 0$, es porque $Q(x) = x - a$ es un factor de $P(x)$.
4. El otro factor se obtiene efectuando la división y es $C(x)$. De tal manera que $P(x) = C(x) \cdot Q(x)$.

<http://www.youtube.com/watch?v=make3btRQ2Q>

<http://www.youtube.com/watch?v=MbZ4ryVbL2M&feature=related>

EJERCICIO DE APRENDIZAJE

Factorice: $x^3 + 2x^2 - x - 2$ Tomado de (Baldor, 1996).

SOLUCIÓN

Los factores primos de 2 son:

$$\pm 1, \pm 2.$$

Entonces los posibles factores de $P(x)$ son:

Factores primos	para	Posibles factores
$x = 2$	$\rightarrow$	$x - 2$
$x = -2$	$\rightarrow$	$x + 2$
$x = 1$	$\rightarrow$	$x - 1$
$x = -1$	$\rightarrow$	$x + 1$

Nota: tomamos los factores primos y empezamos a reemplazar cada uno de ellos en $P(x)$, hasta encontrar el cero como residuo, para ir determinando los factores de dicho polinomio

Para $x - 2$ es decir con $x = 2$, utilizamos el teorema del residuo:

$$R(x) = P(2) = (2^3) + 2(2^2) - (2) - 2 = 8 + 8 - 2 - 2 = 12 \neq 0, \text{ por lo tanto } x = 2 \text{ o } Q(X) = x - 2 \text{ no es un factor del polinomio } P(x).$$

Reemplacemos con otro factor primo:

Para $x - 1$, es decir con $x = 1$.

$$R(x) = P(1) = (1)^3 + 2(1)^2 - (1) - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0, \text{ como el residuo es cero quiere decir que } Q(x) = x - 1, \text{ es un factor del polinomio } P(X).$$

Ya se obtuvo un factor del polinomio $P(x)$, se efectúa la división sintética para hallar el otro factor.

Nota: recuerda los pasos a seguir en este tipo de división, en caso contrario, repasa el tema nuevamente, consultando el tema en el capítulo 1.3, operaciones con polinomios, de este mismo módulo

1	1	2	-1	-2
		1	3	2
	1	3	2	0=R(x)

Luego de efectuar la división se obtuvo como cociente:

$$C(x) = 1x^2 + 3x + 2 = x^2 + 3x + 2$$

Sabemos que $P(x) = Q(x) * C(x)$, entonces:

$$P(x) = (x - 1) * (x^2 + 3x + 2)$$

Factorizando: $(x^2 + 3x + 2)$, trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, resulta:

$$(x^2 + 3x + 2) = (x + 2) * (x + 1)$$

Concluimos entonces que:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1) * (x + 2) * (x + 1)$$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Factorice: $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

SOLUCIÓN: en el desarrollo del ejercicio encontrarás algunos interrogantes y espacios en colores que debes diligenciar justificando tu respuesta.

Los factores de **12** son: $\pm(1,2,3,4,6,12)$

Factores primos	para	Posibles factores
$x = 1$	$\rightarrow$	$x - 1$
	$\rightarrow$	$x + 1$
$x = 2$	$\rightarrow$	$x - 2$
$x = -2$	$\rightarrow$	
$X = 3$		$X - 3$
	$\rightarrow$	$X + 3$
$X = 4$	$\rightarrow$	$X - 4$
$X = -4$	$\rightarrow$	
$X = 6$	$\rightarrow$	$X - 6$
$X = -6$	$\rightarrow$	
	$\rightarrow$	$X - 12$
$X = -12$	$\rightarrow$	$X + 12$

➤ Prueba para $x - 1$, es decir para $x = 1$

$$p(1) = (1)^3 - 3(1)^2 - 4(1) + 12 = 1 - 3 - 4 + 12 = 6$$

El residuo es $6 \neq 0$, por lo tanto, $x - 1$ no es factor del polinomio $P(x)$

➤ Prueba para $x+1$, es decir para _____

$$p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 4(-1) + 12 = -1 - 3 + 4 + 12 = 12$$

El residuo es $12 \neq 0$, $(x + 1)$ no es factor del polinomio $P(x)$.

➤ Prueba para _____, es decir para $x = 2$

$$p(2) = (2)^3 - 3(2)^2 - 4(2) + 12 = 8 - 12 - 8 + 12 = 0$$

Como **el residuo es cero**, quiere decir que **$x-2$** es un factor del polinomio $P(x)$.

Haciendo la división se encuentra el otro factor.

2	1	<u> ?</u>	-4	12
		2	-2	-12
	1	-1	<u> ?</u>	0=R(x)

El otro factor es: $1x^2 - 1x - 6 = x^2 - x - 6$

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2) * (x^2 - x - 6), \text{ pero}$$

$$x^2 - x - 6 = (x - ?) * (x + ?), \text{ entonces:}$$

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2) * (x - ?) * (x + ?)$$

Nota:

Con $x = -2$, o sea, $x + 2 = 0$

X $= 3$, o sea, $x - 3 = 0$

También se podría haber reemplazado y obtendríamos como residuo cero, como lo muestra la solución, también son factores de $P(x)$.

3.4. Tema 4: Fracciones Algebraicas

- **Simplificación de Fracciones Algebraicas**

Cuando se efectúan operaciones con expresiones racionales, la factorización juega un papel muy importante, ya que le ayuda a simplificar la operación y a economizar pasos para que las operaciones entre ellos se hagan más fáciles. Observe inicialmente algunas simplificaciones de expresiones algebraicas racionales.

<http://www.youtube.com/watch?v=KG12HptTW9w>

<http://www.youtube.com/watch?v=OHzsVRhvhOY&feature=related>

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Simplifique

$$\frac{x^2 - 9}{2x - 6}$$

Solución:

Nota: se debe factorizar todo aquello que se pueda factorizar, tanto en el numerador como en el denominador.

Factorizando:

En el numerador: tenemos una diferencia de cuadrados (recuerda las formas de factorización):

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

En el denominador: tenemos un factor común numérico:

$$2x - 6 = 2(x - 3),$$

La fracción quedaría:

$\frac{x^2 - 9}{2x - 6} = \frac{(x + 3) \cdot (x - 3)}{2(x - 3)}$, simplificando (dividiendo numerador y denominador por la misma expresión $x - 3$, tenemos:

$$\frac{x^2 - 9}{2x - 6} = \frac{(x + 3)}{2}$$

2. Simplifique la siguiente fracción algebraica, complete el ejercicio diligenciando los espacios en blanco o con un interrogante:

$$\frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 6n + 8}$$

Solución: tanto en el numerador como en el denominador tenemos trinomios de la forma:

$x^2 + ? + ?$, por lo tanto:

$$\frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 6n + 8} = \frac{(n + ?) \cdot (n + ?)}{(n + ?) \cdot (n + ?)} = \frac{(n + 3) \cdot ?}{(n + 2) \cdot ?}$$

¿Sí será válida esta respuesta? Si no lo es ¿cuál sería la respuesta correcta?

3. Simplifique la siguiente fracción algebraica, justificando cada uno de los procedimientos realizados:

$$(h^2 - 2h + 1) * \frac{(h+1)}{(h^3-1)}$$

Solución:

Recuerda: se factoriza el numerador y el denominador y se simplifica.

Enlaces para fracciones algebraicas.

<http://www.youtube.com/watch?v=hKklEPscYPY>

<http://www.youtube.com/watch?v=AzNDxSL2uYs&feature=fvst>

<http://www.youtube.com/watch?v=a27qaZRyJL0&feature=related>

http://www.youtube.com/watch?v=evNxP_OKGos&feature=related

Operaciones con fracciones algebraicas

➤ Suma y resta

Para realizar una suma o diferencia de fracciones algebraicas, se debe buscar el **mínimo común múltiplo** de los denominadores, como son expresiones algebraicas éstas se deben factorizar, tomando luego expresiones comunes y no comunes con el mayor exponente

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Combine y simplifique:

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x^2+4x+4} \text{ (Zill \& M, 1992)}$$

SOLUCIÓN

Tomamos los denominadores y los Factorizamos para hallar el **Mínimo Común Múltiplo**:

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2); \text{Diferencia de cuadrados.}$$

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(x + 2) = (x + 2)^2 \text{ trinomio de la forma } x^2 + bx + c$$

Mínimo Común Múltiplo: m.c.m:

Factores comunes con mayor exponente: $(x + 2)^2$

Factores no comunes: $(x - 2)$

Mínimo Común Múltiplo: $(x + 2)^2 * (x - 2)$

$$\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{1}{x^2 + 4x + 4} = \frac{x}{(x + 2)(x - 2)} + \frac{1}{(x + 2)^2} =$$

PISTAS DE APRENDIZAJE

Recuerde: el m.c.m se divide por cada denominador y el resultado se multiplica por el respectivo numerador.

$$\frac{x(x + 2) + 1(x - 2)}{(x + 2)^2(x - 2)} = \frac{x^2 + 2x + x - 2}{(x + 2)^2(x - 2)} = \frac{x^2 + 3x - 2}{(x + 2)^2(x - 2)}$$

$2x + x$ **Términos semejantes.**

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

2. Resuelva la siguiente operación de fracciones algebraicas teniendo como referencia el ejercicio realizado y completando los espacios en blanco o con interrogantes:

$$\frac{2}{3x-3} - \frac{5x}{x+1} + \frac{x-3}{x-1}$$

Solución: tomamos los denominadores los Factorizamos y hallamos el m.c.m:

$$3x - 3 = 3(?) - 1)$$

$$x + 1 = x + 1$$

$$x - 1 = x - 1$$

m.c.m:

$3(?) - 1)(x + 1)$, entonces:

$$\frac{2}{3x-3} - \frac{5x}{x+1} + \frac{x-3}{x-1} = \frac{2}{3(?) - 1)} - \frac{5x}{x+1} + \frac{x-3}{x-1} =$$

$$\frac{2(?) - 5x(?) - (x-3)(x+1)}{3(?) - 1)(x+1)}$$

Efectuando los productos indicados, tenemos:

$$\frac{2x + 2 - ?x^2 + 15x + 3x^2 - 6x - 9}{3(?) - 1)(x+1)} = \frac{-12x^2 + ?x - 7}{3(?) - 1)(x+1)}$$

➤ **Multipliación de fracciones algebraicas**

Para multiplicar fracciones algebraicas se sigue el mismo procedimiento que para multiplicar fraccionarios, es decir se multiplican numeradores entre sí y denominadores entre sí, pero como son polinomios, para abreviar el proceso, se **factoriza** y luego se simplifica.

EJERCICIO DE APRENDIZAJE:

$$\frac{3x-1}{x+2} * \frac{x^2+4x+4}{3x^2-7x+2} =$$

Factorizamos el numerador y el denominador de cada una de las fracciones:

➤ $3x - 1 = 3x - 1$

➤ $x + 2 = x + 2$

➤ $x^2 + 4x + 4 = (x + 2) * (x + 2) = (x + 2)^2$

$3x^2 - 7x + 2 = \frac{9x^2 - 7(3x) + 6}{3}$, recuerde que es un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, por lo tanto se multiplica y se divide por a, en este caso 3.

$\frac{(3x-6)*(3x-1)}{3} = \frac{3(x-2)*(3x-1)}{3}$, dividiendo el numerador y el denominador por 3, tenemos que:

➤ $3x^2 - 7x + 2 = (x - 2) * (3x - 1)$

$$\frac{3x-1}{x+2} * \frac{x^2+4x+4}{3x^2-7x+2} = \frac{3x-1}{x+2} * \frac{(x+2)^2}{(x-2)*(3x-1)} \text{ simplificando:}$$

$$\frac{3x-1}{x+2} * \frac{x^2+4x+4}{3x^2-7x+2} = \frac{x+2}{(x-2)}$$

➤ DIVISIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Para dividir fracciones algebraicas se sigue el mismo procedimiento que para multiplicar fraccionarios, es decir se invierte la fracción divisora y se procede de la misma forma que en la multiplicación, pero como son polinomios, para abreviar el proceso, se **factoriza** y luego se simplifica.

En general: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c}$, se invirtió el divisor $\frac{c}{d}$

Nota: en caso de que sean varias fracciones divisoras, todas se invierten:

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \div \frac{m}{n} \div \frac{p}{q} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c} * \frac{n}{m} * \frac{q}{p}$, nótese que se invirtieron todos los divisores y se expresaron en forma de multiplicación.

EJERCICIO DE APRENDIZAJE:

$\frac{x^2-16}{x-3} \div \frac{x+4}{x^2-9}$, se invierte el divisor y expresamos la división en forma de multiplicación

$\frac{x^2-16}{x-3} * \frac{x^2-9}{x+4} = \frac{(x+4)*(x-4)}{x-3} * \frac{(x+3)*(x-3)}{x+4}$, simplificamos,

Entonces: $\frac{x^2-16}{x-3} \div \frac{x+4}{x^2-9} = (x-4)*(x+3)$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Escriba con sus propias palabras el significado de fracción algebraica.



2. Verifica, a través del proceso adecuado, si los siguientes ejercicios tienen como resultado el indicado, en caso contrario, encuentra el verdadero resultado.

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x - 1}{x + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{9x^2 - 30x + 25}{9x^2 - 25} = \frac{3x + 5}{3x - 5}$$

3. En la solución del siguiente ejercicio el autor obtuvo dos respuestas ¿serán válidas las dos? O ¿una de ellas? ¿Cuál? ¿Por qué?, si no es ninguna de ellas ¿podrías indicar cuál es, realizando el proceso y justificando cada uno de los procesos?

$$\frac{x-5}{x^2-2x-8} + \frac{7}{x-4} - \frac{x+1}{x+2}$$

➤ **Respuesta 1:**

$$\frac{-(x^2 - 11x + 15)}{(x - 4) * (x + 2)}$$

➤ **Respuesta 2:**

$$\frac{x^2 - 11x + 15}{(4 - x) * (x + 2)}$$

- **Respuesta 3:** En caso de no ser ninguna de las anteriores, cuál sería la correcta, justifica tu respuesta a través del proceso adecuado.



8.1 ¿Es posible factorizar en los números enteros el siguiente polinomio?

$x^2 - 11x + 15$, de ser posible ¿Cómo quedaría?

8.2 En el siguiente ejercicio el autor da tres opciones de respuesta, ¿cuál sería la correcta? justifica tu respuesta realizando el proceso adecuado.

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x - 3} \div \frac{x + 4}{x^2 2x - 15}$$

➤ **Respuesta 1:** $\frac{x+5}{x+1}$

➤ **Respuesta 2:** $\frac{x+1}{x+5}$

➤ **Respuesta 3:** $(x + 1) * (x + 5)$

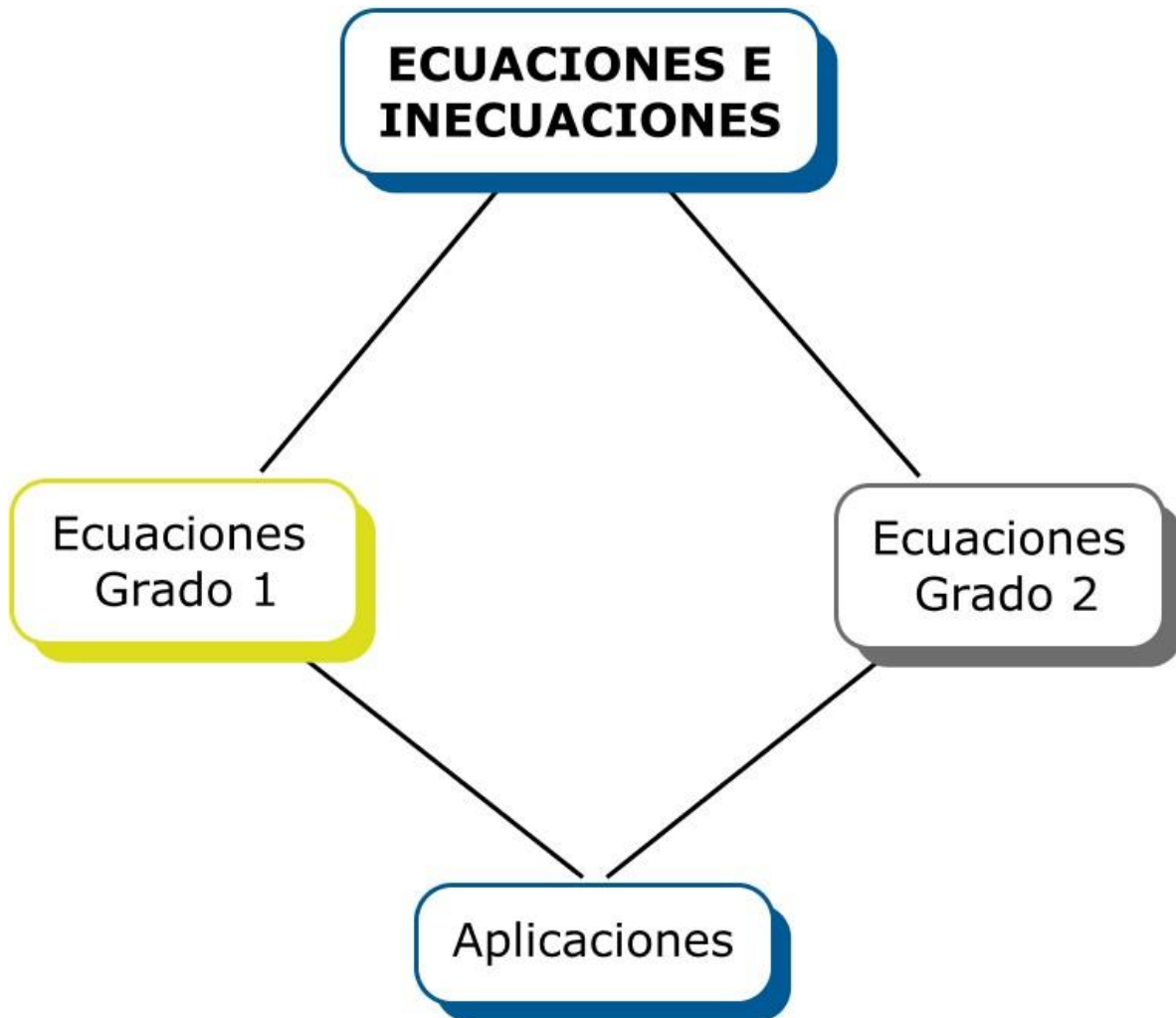


4. UNIDAD 3 SOLUCIÓN DE ECUACIONES E INECUACIONES

Ecua^on lineal

$$\frac{3x^0+1}{6x^0+2} = \frac{2x^0+5}{4x^0-13}$$
$$(3x+1)(4x-13) = (2x+5)(6x-2)$$
$$12x^2 - 39x + 4x - 13 =$$
$$12x^2 - 4x + 30x - 10$$
$$12x^2 - 2$$

<http://www.youtube.com/watch?v=0Ou74gE2M1I>



4.1. Tema 1: Ecuaciones con una incógnita

- **ECUACIÓN:** es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas **incógnitas o variables**. La ecuación sólo es válida o es verdadera para ciertos valores de la incógnita.

Ejemplo:

$5x+2=17$, es una ecuación, porque es una igualdad en la que hay una incógnita o variable, que es la x , esta igualdad sólo es verdadera para $x = 3$.

Si reemplazamos la x por tres en la ecuación resulta una igualdad verdadera.

$$5(3) + 2 = 17$$

$$17 = 17$$

Que es **verdadero**. Si reemplazamos a x por **un valor diferente** de tres resulta una **igualdad falsa**.

Ejemplo:

La igualdad $y^2 - 5y = -6$ es una ecuación, porque es una igualdad con una incógnita sólo se cumple **para $y = 2$ e $y = 3$**

La incógnita o variable se representa por las últimas letras del alfabeto: x, y, z, u, v, w .

➤ Grado de una ecuación polinómica

El grado de una ecuación polinómica lo determina el mayor exponente que tiene la incógnita o variable dentro de la ecuación.

ECUACIÓN	MAYOR EXPONENTE	GRADO
$3x - 7 = 8$	Uno	Grado uno o lineal
$7x^5 + 6x^2 + 8 = 3x$	Cinco	Cinco
$x^2 + 1 = 0$	Dos	Grado dos o cuadrática

➤ Raíces o soluciones de una ecuación

Son los valores de las incógnitas (o variables) que satisfacen la ecuación, es decir, al reemplazar las raíces en la ecuación, el resultado es una igualdad verdadera. Por ejemplo: en la ecuación $5x - 6 = 3x + 8$, la raíz o solución de la ecuación es $x = 7$ porque si reemplazamos a x por 7 en la ecuación resulta una igualdad verdadera: $5(7) - 6 = 3(7) + 8$, resulta $29 = 29$ que es verdadero.

RESOLVER UNA ECUACIÓN: consiste en encontrar las raíces o soluciones de la ecuación. Una ecuación tiene como máximo tantas raíces como el grado de la ecuación.

Nota: si en el proceso de solución de una ecuación o de un sistema de ecuaciones **se anula la variable** y se llega a **una igualdad falsa**, esto quiere decir que la ecuación **no tiene solución**.

Ejemplo:

$$-3 + 5x - 5x = 2 + 7 \rightarrow -3 = 9 \text{ es Falso}$$

Sería una proposición **falsa**, por lo tanto la ecuación **no tiene solución**.

Nota: si en el proceso de solución de una ecuación o de un sistema de ecuaciones **se anula la variable** y se llega a **una igualdad verdadera**, en este caso se tiene **una identidad**, quiere decir que la ecuación cumple para cualquier valor de la variable, esto quiere decir que la ecuación tiene **infinitas soluciones**.

Ejemplo:

$$6x^2 - 7 - 6x^2 = 3 - 10 \rightarrow -7 = -7 \text{ es verdadero}$$

Sería una proposición **verdadera**, quiere decir, entonces, que la ecuación tiene **infinitas soluciones**.

Propiedades de las ecuaciones

1. Sí se suma o se resta una misma cantidad en ambos lados de la ecuación, la igualdad subsiste.
2. La ecuación $3x + 5 = 2x + 9$ sólo es válida para $x = 4$. Sí sumamos o restamos una misma cantidad, obtendremos una igualdad verdadera.
3. Sí se multiplica o se divide en ambos lados de una ecuación por una misma cantidad, diferente de cero, la igualdad subsiste.
4. Sí los dos lados de una ecuación se elevan a una misma potencia o si a los dos lados se extrae una misma raíz, la igualdad subsiste.

NOTA:

Estas propiedades son las que permiten solucionar o encontrar las raíces de una ecuación, para ello se deben aplicar correctamente dichas propiedades.

Ejercicio de Aprendizaje

Para la ecuación $3x - 5 = x + 3$, efectúe las siguientes operaciones (en ambos lados)

Suma 5. $3x - 5 + 5 = x + 3 + 5$

Queda, entonces: $3x = x + 8$

Al resultado réstele x. $3x - x = x + 8 - x$

El resultado sería: $2x = 8$

Divídalo entre 2: $\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$

Obtenemos: $x = 4$

Se puede ver que resulta $x = 4$ que es la raíz o solución de la ecuación.

➤ **Solución de ecuaciones con una incógnita**

- **Solución de ecuaciones lineales con una incógnita**

Una ecuación es lineal cuando el máximo exponente de la variable es uno.

Una ecuación lineal con una incógnita puede tener una solución o ninguna.

Para solucionar **ecuaciones lineales** se sugieren los siguientes pasos:

1. Si es necesario efectúe previamente operaciones indicadas. Si hay fraccionarios multiplique toda la ecuación por el **m.c.m.** de los denominadores.
2. **Agrupe términos semejantes:** consiste en ubicar en un lado de la ecuación las cantidades que contengan a la variable y en el lado contrario las cantidades que no la contengan. Para ello aplicamos la primera propiedad de las ecuaciones (sume o reste una misma cantidad).
3. Efectúe operaciones.
4. Elimine los coeficientes que acompañen a la variable. Para ello aplicamos la segunda propiedad de las ecuaciones (multiplique o divida por una misma cantidad). El término o lado donde está la variable tiene que quedar positivo.

(<http://www.youtube.com/watch?v=YRleGCexlcs>),

(http://www.youtube.com/watch?v=zdeqL0d_Hgs&feature=related)

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Solucione las siguientes ecuaciones lineales.

$$1. \quad 3x - 2x + 1 = 7x - 3 + 5x - x + 24.$$

Efectuamos operaciones en ambos lados, reduciendo términos semejantes:

$$x + 1 = 11x + 21$$

Agrupando términos semejantes:

$$x - 11x = 21 - 1 \quad \leftrightarrow \quad -10x = 20$$

Dividiendo entre **-10** en ambos lados de la ecuación:

$$\frac{-10x}{-10} = \frac{20}{-10}$$

Queda entonces:

$$X = -2$$

Nota: verificando este resultado en la ecuación original, obtenemos una identidad, reemplacemos $x = -2$:

$$3x - 2x + 1 = 7x - 3 + 5x - x + 24.$$

$$3(-2) - 2(-2) + 1 = 7(-2) - 3 + 5(-2) - (-2) + 24.$$

$$-6 + 4 + 1 = -14 - 3 - 10 + 2 + 24$$

$$-1 = -1$$

Que corresponde a una identidad.

$$2. \quad \frac{4x}{3} - \frac{5}{2} = \frac{8}{3}x + 2$$

Nota: para eliminar los denominadores (y así evitar los fraccionarios) multiplique toda la ecuación por el m.c.m. de los denominadores:

El m.c.m de los denominadores es el **6**:

$$6 \cdot \frac{4x}{3} - 6 \cdot \frac{5}{2} = 6 \cdot \frac{8}{3}x + 6 \cdot 2$$

○ Simplificando:

$$2 \cdot 4x - 3 \cdot 5 = 2 \cdot 8x + 6 \cdot 2$$

- Multiplicando:

$$8x - 15 = 16x + 12$$

- Agrupando términos semejantes:

$$8x - 16x = 12 + 15$$

- Reduciendo términos semejantes:
- Eliminando el -8 de la x :

$-8x = 27$, dividiendo a ambos lados por -8 :

$$\frac{-8x}{-8} = \frac{27}{-8} \leftrightarrow x = \frac{27}{-8} \rightarrow x = -\frac{27}{8}$$

Actividad del ejercicio: reemplacemos este valor de x en la ecuación original y comprobemos que es una identidad.

3. $3x - 7 = 3x + 5$.

- Agrupando términos semejantes: $3x - 3x = 5 + 7$
- Reduciendo términos semejantes: $0 = 12$
- Se anula la variable y resulta una igualdad falsa, quiere decir que la **ecuación no tiene solución**.

4. $5(2x-3) - 8(x-2) = 3(x-5) + 6$.

$$10x - 15 - 8x + 16 = 3x - 15 + 6 \Leftrightarrow 2x + 1 = 3x - 9 \Leftrightarrow 2x - 3x = -9 - 1 \Leftrightarrow -x = -10$$

Multiplicando por -1 , queda: $x = 10$

Actividad del ejercicio: reemplacemos este valor de x en la ecuación original y comprobemos que es una identidad.

5. $4x - 2 = 8x - 4$.

$$4x - 8x = -4 + 2 \Leftrightarrow -4x = -2 \Leftrightarrow x = -2 / -4 \Leftrightarrow x = 1/2$$

Actividad del ejercicio: reemplacemos este valor de x en la ecuación original y comprobemos que es una identidad.

6. $\frac{5x+4}{3} - \frac{7-2x}{2} = \frac{3-x}{4} - \frac{1+x}{3}$. Multiplique por el m.c.m. de los denominadores.

$$12 * \left(\frac{5x+4}{3} \right) - 12 * \left(\frac{7-2x}{2} \right) = 12 * \left(\frac{3-x}{4} \right) - 12 * \left(\frac{1+x}{3} \right) \Rightarrow 4(5x+4) - 6(7-2x) = 3(3-x) - 4(1+x)$$

$$20x + 16 - 42 + 12x = 9 - 3x - 4 - 4x \Leftrightarrow 32x - 26 = -7x + 5 \Leftrightarrow 32x + 7x = 5 + 26 \Leftrightarrow 39x = 31$$

$$x = 31/39$$

Actividad del ejercicio: reemplacemos este valor de x en la ecuación original y comprobemos que es una identidad.

- **Solución de ecuaciones de segundo grado**

Una ecuación de segundo grado es toda ecuación en la cual, una vez simplificada, el mayor exponente de la incógnita es dos. Es toda ecuación de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ Donde a , b y c son constantes con $a \neq 0$.

Para solucionar una ecuación de este tipo existen varios métodos:

Método por factorización para solucionar una ecuación de segundo grado.

Este método también se utiliza para solucionar ecuaciones de grado tres o superior.

(<http://www.youtube.com/watch?v=FTAyKcWFnY&feature=fvsrc>)

PASOS PARA DESARROLLAR EL MÉTODO:

1. Se debe igualar la ecuación a cero.
2. Después de efectuar operaciones se debe factorizar la expresión resultante.
3. Cada factor que contenga a la variable se debe igualar a cero. Por cada factor resulta una ecuación lineal.
4. Solucionamos cada ecuación.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Solucione las siguientes ecuaciones por factorización:

1. $x^2 - 10x = 75$
 - Igualando a cero: $x^2 - 10x - 75 = 0$
 - Factorizando: $(x - 15) * (x + 5) = 0$
 - Igualando cada factor a cero: $(x - 15)$ y $(x + 5)$
 $(x - 15) = 0$
 $(x + 5) = 0$
 - Solucionando cada ecuación por separado:
 $x - 15 = 0 \leftrightarrow x = 15$
 $x + 5 = 0 \leftrightarrow x = -5$



- Las raíces de la ecuación son: $x = 15$ y $x = -5$

$$x = 15 \text{ y } x = -5$$

- Reemplacemos estos valores en la ecuación original para verificar su validez:

$$\text{Con } x = 15$$

$$15^2 - 10 * 15 = 75$$

$$225 - 150 = 75$$

$75 = 75$ (es una identidad, por lo tanto $x = 15$ es una solución real para la ecuación).

$$\text{Con } x = -5$$

$$(-5)^2 - 10 * (-5) = 75$$

$$25 + 50 = 75$$

$75 = 75$ (es una identidad, por lo tanto $x = -5$ es una solución real para la ecuación).

$$2. \quad 2x^2 + 5x - 3$$

- Igualando a cero:

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

- Factorizando:

$$\frac{2}{2}(2x^2 + 5x - 3) = 0$$

$$\frac{4x^2 + 5(2x) - 6}{2} = 0 \rightarrow \frac{(2x+6)*(2x-1)}{2} \rightarrow \frac{2(x+3)*(2x-1)}{2}, \text{ simplificando: } (x+3) * (2x-1) = 0$$



- Igualando cada factor a cero cada factor:

$$(x + 3) = 0 \text{ y } (2x - 1) = 0$$

- Solucionando cada ecuación por separado:

$$(x + 3) = 0 \rightarrow x = -3$$

$$(2x - 1) = 0 \rightarrow (x = \frac{1}{2})$$

- Las raíces de la ecuación son: $x = -3$ y $x = \frac{1}{2}$

$$x = -3 \text{ y } x = \frac{1}{2}$$

1. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$, es una ecuación de grado 4, por lo tanto, la ecuación tiene 4 raíces.

Solución: como ya está igualada a cero, procedemos a factorizar.

- Factorizando:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 = (x^2 - 9) * (x^2 - 4) = 0 \rightarrow$$

$$(x + 3) * (x - 3) * (x + 2) * (x - 2) = 0$$

- **Método de completar un trinomio cuadrado perfecto a partir del trinomio de la forma**

$$x^2 \pm bx \pm c = 0$$

Para desarrollar este método se procede de la siguiente manera:

1. Se debe aislar el término independiente c , esto es, el término que no tenga la incógnita se debe dejar a un lado de la ecuación y los términos que la contengan se deben dejar en el lado contrario, así: $x^2 \pm bx = \pm c$
2. En caso de que la ecuación sea de la forma $ax^2 \pm bx \pm c = 0$, **con $a \neq 1$** se debe normalizar, dividiendo toda la ecuación entre a , el coeficiente de x^2 .
3. Se debe sumar a toda la ecuación el número que acompaña a la variable lineal dividido entre dos y el resultado elevado al cuadrado. Sólo efectuamos la operación en el lado izquierdo, en el lado derecho de la ecuación no.
4. El lado derecho de la ecuación siempre lo factorizamos como un paréntesis elevado a la dos.
5. Dentro del paréntesis colocamos la raíz cuadrada del primer término y la raíz cuadrada del tercer término separadas por el signo del término del medio.
6. Para eliminar el exponente dos del paréntesis extraemos raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación. Recuerde que cuando extraemos raíz cuadrada esta tiene dos signos uno positivo y otro negativo.
7. Resulta una ecuación lineal y la solucionamos. En la solución debemos utilizar ambos signos, uno a la vez, dando como solución dos valores.

(<http://www.youtube.com/watch?v=at8YGH8jl8k&feature=fvsr>)

EJERCICIO DE APRENDIZAJE:

1. Solucione la siguiente ecuación por completación: $4x^2 + 3x - 22 = 0$



- Aislando el término independiente (el 22):

$$4x^2 + 3x = 22$$

- Dividiendo todos los términos de la ecuación entre 4:

$$\frac{4x^2}{4} + \frac{3x}{4} = \frac{22}{4}$$

- Simplificando:

$$x^2 + \frac{3x}{4} = \frac{11}{2}$$

- El coeficiente de x se divide entre dos y se eleva al cuadrado:

$$\left(\frac{3}{4} \div 2\right)^2 = \left(\frac{3}{4 \cdot 2}\right)^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

- Este valor se suma en ambos lados de la ecuación y se realizan las operaciones indicadas:

$$x^2 + \frac{3x}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{11}{2} + \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{3x}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{11}{2} + \frac{9}{64}$$

$$x^2 + \frac{3x}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{352+9}{64}$$

$$x^2 + \frac{3x}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{361}{64}$$



- Factorizando el lado izquierdo de la ecuación (que ya es un trinomio cuadrado perfecto), tenemos:

$$\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{361}{64}$$

- Raíz cuadrada en ambos lados:

$$\sqrt{\left(x + \frac{3}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{361}{64}}$$

$$x + \frac{3}{8} = \pm \frac{19}{8}$$

- Despejando la x:

$$X = \pm \frac{19}{8} - \frac{3}{8} \text{ tenemos entonces:}$$

- Con el signo + (más)

$$X = \frac{19}{8} - \frac{3}{8} = \frac{16}{8} \rightarrow X = 2$$

- Con el signo - (menos)

$$X = -\frac{19}{8} - \frac{3}{8} = -\frac{22}{8} \rightarrow X = -\frac{11}{4}$$



- Las raíces de la ecuación son:

$$X = 2 \text{ y } X = -\frac{11}{4}$$

$$2. \quad 2x^2 + 7x - 4 = 0$$

- Las raíces de la ecuación son:

Después de realizar tu proceso debes obtener las siguientes raíces:

$$x = -4 \text{ y } x = \frac{1}{2}$$

$$3. \quad ax^2 + bx + c = 0$$

SOLUCIÓN:

- Aislado el término independiente (la **c**): $ax^2 + bx = -c$

- Dividiendo todos los términos de la ecuación entre 2:

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

Simplificando:

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

- El coeficiente de x se divide entre dos y se eleva al cuadrado:

$$\frac{bx}{a} \div 2 = \frac{bx}{2a} \text{ se eleva al cuadrado } \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$



- Este valor se suma en ambos lados de la ecuación y se realizan las operaciones indicadas:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

- Factorizando el lado izquierdo de la ecuación (que ya es un trinomio cuadrado perfecto), tenemos:

$$x + \frac{b}{2a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

- Raíz cuadrada en ambos lados: $\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \text{ Se busca el m.c.m que es } 4a^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ como tienen el mismo denominador}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

- Despejando la x:

- **Con el signo + (más)**

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

- **Con el signo - (menos)**

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Las raíces de la ecuación son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- **Método por fórmula general.**

Una ecuación de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ Tiene la siguiente solución, obtenida por el proceso de demostración del ejercicio inmediatamente anterior:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para utilizar este método, se sugiere el siguiente procedimiento:

1. Iguale la ecuación a cero.
2. Identifique los coeficientes a es el coeficiente o número que acompaña a x^2 , b es el coeficiente o número que acompaña a la x y c es el término independiente.
3. Reemplace los valores de a , b , y c en la fórmula general y resuelva.

(<http://www.youtube.com/watch?v=187VcMix00Y>)

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando la fórmula general:

1. $3x^2 - 2x = 4$

Solución:

- Igualando la ecuación a cero:

$$3x^2 - 2x - 4 = 0$$

- Obtenemos los coeficientes:

a	=	3
b	=	-2
c	=	-4

- Reemplazamos estos valores en la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3) * (-4)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+48}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{2 \pm 7.21...}{6}$$

$$x_1 = \frac{2 + 7.21...}{6} \rightarrow x_1 = 1.535...$$



$$x_2 = \frac{2 - 7.21...}{6} \rightarrow x_2 = -0.868...$$

- Las raíces son:

$$x_1 = 1.535... \text{ y } x_2 = -0.868...$$

- Actividad:** reemplazar estas raíces en la ecuación original para que verifique su validez.

$$2. 9x^2 + 16 = 24x$$

- Igualando la ecuación a cero:**

$$9x^2 - 24x + 16 = 0$$

- Obtenemos los coeficientes:**

a	=	9
b	=	-24
c	=	16

- Reemplazamos estos valores en la fórmula general:**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(9) * (16)}}{2(9)}$$



$$x = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 576}}{18} = \frac{24 \pm \sqrt{0}}{18} = \frac{24 \pm 0}{18}$$

$$x_1 = \frac{24 + 0}{18} \rightarrow x_1 = \frac{24}{18} \rightarrow x_1 = \frac{4}{3}$$

- La raíz es:

$$x_1 = \frac{4}{3}$$

Nota: es una ecuación cuadrática y debe tener dos raíces, pero como sumamos y restamos la misma raíz (cero), obtenemos el mismo resultado.

- Reemplazamos estos valores en la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(i?) \pm \sqrt{(i?)^2 - 4(i?) * (i?)}}{2(i?)}$$

$$x = \frac{i? \pm \sqrt{i? + i?}}{i?} = \frac{i? \pm \sqrt{i?}}{i?} = \frac{i? \pm i?}{i?}$$

$$x_1 = \frac{i? + i?}{i?} \rightarrow x_1 = i?$$

$$x_2 = \frac{i? - i?}{i?} \rightarrow x_2 = -i?$$

- Las raíces son:

$$x_1 = i? \text{ y } x_2 = -i?$$

- **Solución de ecuaciones racionales**

Una ecuación racional es una ecuación que presenta variable en el denominador. Por ejemplo:

$$\frac{5x}{2x-3} + 8 = \frac{3}{x}$$

El tipo de ecuaciones racionales, que vamos a solucionar, nos va a conducir a ecuaciones o lineales o polinómicas.

Para solucionar estas ecuaciones se sugieren los siguientes pasos:

1. Para eliminar los denominadores, se debe multiplicar toda la ecuación por el m.c.m. de los denominadores. Tenga en cuenta que para determinar el m.c.m. de los denominadores, hay que factorizar (si es posible) dichos denominadores previamente.
2. Simplifique. En este paso deben desaparecer los denominadores.
3. Efectúe las operaciones indicadas.
4. Resulta una ecuación lineal o resulta una ecuación cuadrática; la solucionamos por cualquiera de los métodos conocidos.
5. Se debe comprobar que el valor obtenido no de división entre cero. Para ello reemplazamos el (los) valor (es) obtenido en la ecuación original (sólo en los denominadores); si nos da una división entre cero, este valor no es solución de la ecuación.

(http://www.youtube.com/watch?v=_dDxLkkLIWc&feature=related),

(<http://www.youtube.com/watch?v=atuj8bw2Of0>)

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Solucione las siguientes ecuaciones:

$$1. \frac{5}{x-4} = \frac{6}{x-3} \text{ (Haeussler, 1997)}$$

SOLUCIÓN:

- El m.c.m. de los denominadores es: $(x-4) * (x-3)$

- Indicando multiplicación por: $(x-4) * (x-3)$

$$(x-4) * (x-3) * \frac{5}{x-4} = (x-4) * (x-3) * \frac{6}{x-3}$$

- Simplificando, se simplifican factores iguales (mismo color):

$$(x-3) * 5 = (x-4) * 6$$

Realizando las operaciones indicadas: $5x - 15 = 6x - 24$. Resulta una ecuación lineal.

- Solucionando la ecuación lineal:

$$5x - 6x = 24 + 15 \leftrightarrow -x = -9, \text{ multiplicando por } -1 \text{ ambos lados de la ecuación: } x = 9$$

Prueba: $\frac{5}{9-4} = \frac{6}{9-3} \leftrightarrow \frac{5}{5} = \frac{6}{6} \leftrightarrow \underline{1=1}$, una identidad que demuestra la validez de la raíz obtenida. $X = 9$.

$$2. \frac{3x+4}{x+2} - \frac{3x-5}{x-4} = \frac{12}{x^2-2x-8} \text{ (Haeussler, 1997)}$$



- Factorizando denominadores: $\frac{3x+4}{x+2} - \frac{3x-5}{x-4} = \frac{12}{(x-4)*(x+2)}$
- El m.c.m. de los denominadores es: $(x-4) * (x+2)$
- Indicando multiplicación por el m.c.m.:

$$(x-4) * (x+2) * \frac{3x+4}{x+2} - (x-4) * (x+2) * \frac{3x-5}{x-4} = (x-4) * (x+2) * \frac{12}{(x-4)*(x+2)}$$

- Se simplifican factores iguales (mismo color):

$$(x-4) * (3x+4) - (x+2) * (3x-5) = 12$$

- Efectuando los productos indicados:

$$3x^2 + 4x - 12x - 16 - (3x^2 - 5x + 6x - 10) = 12$$

- Reduciendo términos semejantes:

$$3x^2 - 8x - 16 - 3x^2 + 5x - 6x + 10 = 12 \leftrightarrow -9x - 6 = 12$$

- Resultó una ecuación lineal: $-9x - 6 = 12$
- Solucionando la ecuación: $-9x - 6 = 12 \leftrightarrow -9x = 12 + 6$

$$-9x = 18 \rightarrow x = \frac{18}{-9} \rightarrow x = -2$$



- Realizando la prueba:

$$\frac{3 * (-2) + 4}{(-2) + 2} - \frac{3 * (-2) - 5}{-2 - 4} = \frac{12}{(-2)^2 - (-2) - 8} \rightarrow \frac{-6 + 4}{0} - \frac{-6 - 5}{-6} = \frac{12}{4 + 4 - 8}$$

$$\frac{-6 + 4}{0} - \frac{-6 - 5}{-6} = \frac{12}{0}$$

- Como resultó **cero en el denominador, la ecuación no tiene solución.**

- **Solución de ecuaciones irracionales**

Una ecuación irracional es una ecuación que presenta variable dentro de una raíz. Por ejemplo:
 $5x - \sqrt{x} = 10$ El tipo de ecuaciones irracionales que vamos a estudiar nos lleva a ecuaciones lineales o a ecuaciones cuadráticas.

Para solucionar este tipo de ecuaciones se sugieren los siguientes pasos:

1. Se debe despejar la raíz o una de las raíces.
2. Efectúe operaciones.
3. Para eliminar la raíz, eleve a ambos lados de la ecuación a un exponente igual a la raíz.
4. Efectúe operaciones.
5. Resulta o una ecuación lineal, o una ecuación cuadrática, si solucionamos por cualquiera de los métodos conocidos.
6. Se debe comprobar la solución reemplazando en la ecuación original. Si al reemplazar resulta una igualdad falsa, dicho valor, por el cual se reemplazó, no es solución de la ecuación.

(<http://www.youtube.com/watch?v=jzLU9VmW06U>), (<http://www.youtube.com/watch?v=iemp4Dg8Vos>)

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE:

Solucione las siguientes ecuaciones Irracionales.

1. $\sqrt{x+1} + 3 - x = x - 5$

SOLUCIÓN

- Despejando la raíz:

$$\sqrt{x-1} = x - 5 - 3 + x \rightarrow \sqrt{x-1} = 2x - 8$$

- Elevando en ambos lados de la ecuación a potencia dos:

$$(\sqrt{x-1})^2 = (2x-8)^2$$

- Simplificando y resolviendo el producto notable:

$$x-1 = (2x)^2 - 2(2x)(8) + 8^2 \leftrightarrow x-1 = 4x^2 - 32x + 64$$

- Solucionando la ecuación cuadrática que resulta:

$$0 = 4x^2 - 32x + 64 - x + 1 \leftrightarrow 0 = 4x^2 - 33x + 65$$

$$4x^2 - 33x + 65 = 0$$

Factorizando:

$$\frac{4}{4}(4x^2 - 33x + 65) = 0 \leftrightarrow \frac{16x^2 - 33(4x) + 260}{4} = 0$$

$$\frac{(4x-20)(4x-13)}{4} = 0,$$

Sacando 4 como factor común en el primer paréntesis, tenemos:

$$\frac{4(x-5)(4x-13)}{4} = 0,$$

- Simplificando:

$$(x-5)(4x-13) = 0$$

- Se iguala cada factor a cero:

$$(x-5) = 0 \text{ De donde } x = 5$$

$$(4x-13) = 0 \text{ De donde } x = \frac{13}{4}$$

- Raíces: $x = 5$ y $x = \frac{13}{4}$

• PRUEBA

$$\circ \quad x = \frac{13}{4}$$

$$\circ \quad \sqrt{\frac{13}{4} - 1} + 3 - \frac{13}{4} = \frac{13}{4} - 5 \leftrightarrow \sqrt{\frac{13-4}{4}} + \frac{12}{4} - \frac{13}{4} = \frac{13-20}{4}$$

$$\sqrt{\frac{9}{4}} - \frac{1}{4} = -\frac{7}{4} \leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{7}{4} \leftrightarrow \frac{6-1}{4} = -\frac{7}{4} \leftrightarrow \frac{5}{4} = -\frac{7}{4}, \text{ pero}$$

$$\frac{5}{4} \neq -\frac{7}{4}$$

No es una identidad, es una proposición falsa, por lo tanto: $\frac{13}{4}$ no es solución para la ecuación.

○ $X = 5$

$$\sqrt{5-1} + 3 - 5 = 5 - 5$$

$$\sqrt{4} - 2 = 0 \leftrightarrow 2 - 2 = 0$$

$0 = 0$, es una identidad, por lo tanto es una proposición verdadera y -5 es una raíz solución para la ecuación dada y es la única que tiene la misma.

$$2. \sqrt{y-3} - \sqrt{y} = -3 \text{ (Haeussler, 1997)}$$

SOLUCIÓN:

a. Despejando la raíz más compleja:

$$\sqrt{y-3} = \sqrt{y} - 3$$

b. Elevando al cuadrado:

$$\sqrt{(y-3)^2} = (\sqrt{y} - 3)^2$$

c. Eliminando la raíz y desarrollando el producto notable $(a - b)^2$ resulta:



$$y - 3 = (\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{y}(3) + (3^2), \text{ efectuando operaciones}$$
$$y - 3 = y - 6\sqrt{y} + 9$$

$$(6\sqrt{y})^2 = 12$$

d. Despejando el radical:

$$6\sqrt{y} = y + 9 - y + 3, \text{ reduciendo términos semejantes:}$$

$$6\sqrt{y} = 12$$

Nota: nos queda otra raíz, por lo tanto, debemos elevar al cuadrado nuevamente, (Esta operación se realiza tantas veces como raíces se encuentren en el proceso).

$$6^2\sqrt{y^2} = 12^2, \text{ nos queda entonces:}$$

$$36y = 144, \text{ es una ecuación lineal}$$

e. Solucionando la ecuación lineal:

$$y = \frac{144}{36}$$

$$y = 4$$

PRUEBA: reemplazamos la ecuación original por:

$$y = 4$$

$$\sqrt{4-3} - \sqrt{4} = -3$$

$$\sqrt{1} - 2 = -3$$

$$1 - 2 = -3$$

$$-1 = -3,$$

Pero $-1 \neq -3$

Por lo tanto obtuvimos una proposición falsa, y $y = 4$, no es solución para la ecuación $\sqrt{y-3} - \sqrt{y} = -3$

La ecuación no tiene solución.

3. Resuelve la siguiente ecuación, teniendo como modelo los ejercicios anteriores y justificando cada uno de los procesos realizados:

$$3\sqrt{x+4} = x - 6$$

✓ **Valor Absoluto de un número real**

Recuerde que **valor absoluto** significa la distancia que hay desde un número hasta el cero, por ejemplo, si me muevo a la izquierda 5 metros, llego a la posición -5, sin embargo recorro 5 metros, si me muevo a la derecha 5 metros llego a la posición +5, también recorrí 5 metros; por lo tanto:

La distancia entre **0 y -5 es 5** y la distancia entre **0 y +5 es 5** es por esto que el valor absoluto de un número es siempre positivo.

$$-5 \leftarrow 0 \rightarrow +5$$

El valor absoluto de un número x se simboliza por: $|x|$ y está definido como:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Aplicando la definición tenemos que:

$$|3| = 3$$

$$|-8| = -(-8) = 8$$

Ecuaciones con Valor Absoluto:

Al solucionar ecuaciones con valor absoluto, se debe tener en cuenta su definición.

Si $|f(x)| = c$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $f(x) = +c$ y $f(x) = -c$

(http://www.youtube.com/watch?v=-UjvG5_aijs&feature=related)

(<http://www.youtube.com/watch?v=jEknI2qdvY>)

EJERCICIO DE APRENDIZAJE

Solucione la siguiente ecuación con valor absoluto:

1. $|x - 3| = 2$

- ✓ **Nota:** esta ecuación establece que $x - 3$, es un número que se encuentra a **2 unidades** del cero. Por lo tanto se deben plantear y solucionar las dos ecuaciones siguientes:

$$x - 3 = 2 \quad \vee \quad x - 3 = -2$$

- ✓ Se resuelve cada ecuación por separado:

a) $x - 3 = 2$



$$x = 2 + 3$$

$$x = 5$$

$$b) x - 3 = -2$$

$$x = -2 + 3$$

$$x = 1$$

✓ Realicemos la prueba:

$$x = 5$$

$$|x - 3| = 2$$

$$|5 - 3| = 2$$

$$|2| = 2$$

$$2 = 2$$

Es una **identidad**, por lo tanto, es una **proposición verdadera** y **5** es una solución para la ecuación dada.

$$x = 1$$

$$|x - 3| = 2$$

$$|1 - 3| = 2$$

$$|-2| = 2$$

$$2 = 2$$

Es una **identidad**, por lo tanto, es una **proposición verdadera** y **1** es una solución para la ecuación dada.

✓ Como ambas raíces cumplen la solución de la ecuación es:

$$x = 5 \text{ y } x = 1$$



2. $|7 - 3x| = 5$

Nota: esta ecuación establece que $7 - 3x$, es un número que se encuentra a **5 unidades** del cero. Por lo tanto se deben plantear y solucionar las dos ecuaciones siguientes:

$$7 - 3x = 5 \quad \vee \quad 7 - 3x = -5$$

a) $7 - 3x = 5$

$$- 3x = 5 - 7$$

$- 3x = -2$, multiplicamos por -1 ambos lados de la ecuación:

$3x = 2$, despejando x, tenemos

$$x = \frac{2}{3}$$

b) $7 - 3x = -5$

$$- 3x = -5 - 7$$

$- 3x = -12$ Multiplicamos por -1 ambos lados de la ecuación:

$3x = 12$ Despejando x, tenemos:

$$x = 4$$

➤ **Aplicación de las ecuaciones en la solución de problemas.**

Para solucionar problemas se sugiere la siguiente metodología:

Sugerencias para solucionar problemas de palabras.

1. Lea el problema cuidadosamente.
2. Relea el problema e identifique una cantidad desconocida que se necesita encontrar.
3. Si es posible, haga un diagrama.
4. Asigne una variable, digamos x , que represente la cantidad desconocida. (¡Escriba la definición de esta variable en su hoja!).
5. Si es posible, represente cualquier otra cantidad que haya en el problema en términos de x . (¡Escriba cada una de estas cantidades en su hoja!).
6. Escriba una ecuación (o inecuación) que exprese con precisión la relación descrita en el problema.
7. Solucione la ecuación (o inecuación).
8. Verifique que su respuesta concuerde con todas las condiciones planteadas en el problema. (Zill & Dewar, 1992)

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

➤ PROBLEMA NÚMERO 1

Una malla de alambre será colocada alrededor de un terreno rectangular de modo que el área cercada sea de 800 pies². Se sabe que el largo del terreno es el doble de su ancho. ¿Cuántos pies de malla serán utilizados? (Haeussler, 1997).

Solución.

- ✓ De acuerdo a las indicaciones dadas en las sugerencias, escribiremos con variables los datos del problema, esto es:

ELEMENTOS	VARIABLE	RELACIÓN DE LAS VARIABLES
ANCHO DEL TERRENO (desconocido)	X	X
LARGO DEL TERRENO (Dos veces el ancho)	Y	2X
ÁREA DEL TERRENO (Largo * ancho)	X * Y	800 <i>piés</i>²

- ✓ Elaboremos una gráfica que ilustre las condiciones del problema (véase la figura 1).

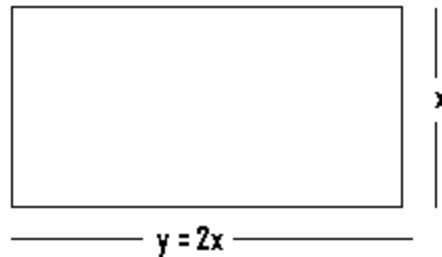


Figura 1. Figura para el problema 1.
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

- ✓ Sabemos que el Área de un rectángulo es:

$$A = \text{Base} * \text{Altura} \text{ o } A = \text{Largo} * \text{Ancho}$$

Entonces:

$$A_{\text{Rectángulo}} = x * y : \text{Ecuación 1}$$

Pero:

○ $y = 2x$

○ $A_{\text{Rectángulo}} = 800\text{piés}^2$

✓ Reemplazando estos valores en la ecuación 1, tenemos:

$$800\text{piés}^2 = x * 2x$$

✓ Obteniendo la ecuación:

$$2x^2 = 800\text{piés}^2$$

✓ Solucionando la ecuación cuadrática (utilizando cualquiera de los métodos vistos), se tiene que:

$$2x^2 = 800$$

$$2x^2 - 800 = 0 \rightarrow 2(x^2 - 400) = 0, \text{ dividiendo por 2 a ambos lados de la igualdad, tenemos:}$$

$$x^2 - 400 = 0, \text{ factorizando, } (x + 20) * (x - 20) = 0$$

Se iguala cada factor a cero:

$$(x + 20) = 0 \rightarrow x = -20$$

$$(x - 20) = 0 \rightarrow x = 20$$

Nota: el valor negativo se descarta porque no se puede hablar de una magnitud de medida negativa, por lo tanto, la solución sería:

$$X = 20$$

Ancho = 20 pies

Largo = $y = 2x = 2 \cdot 20 = 40$ pies

El total de malla a utilizar será de: **Ancho + largo + ancho + largo = $x + 2x + x + 2x = 6x$**

Por lo tanto la malla utilizada es: **$6x = 6 \cdot 20 \text{ pies} = 120 \text{ pies}$**

- PROBLEMA NÚMERO 2:**

Se compra un artículo en cierta cantidad de dinero y se vende ganando el 25% del precio de compra. Si el artículo fue vendido en \$40.775. Determine el precio de compra y el valor de la ganancia.

- ✓ De acuerdo a las indicaciones dadas en las sugerencias, escribiremos con variables los datos del problema, esto es:

ELEMENTOS	VARIABLES	RELACIÓN DE LAS VARIABLES
PRECIO DE COMPRA	X	X
GANANCIA	25% de X	$\frac{25}{100} \cdot X = 0,25X$
PRECIO DE VENTA	X + 25% de X	$X + 0,25X = 40.775$

SOLUCIÓN

- Cálculo del precio de compra:**

El **precio de venta** será igual al precio de compra(**x**) más la ganancia (**25% de $X = 0,25X$**). Se sabe que el precio de compra es igual a **\$40.775**. Resulta la siguiente ecuación:

✓ Planteamiento de la ecuación:

$$x + 0,25x = 40.775$$

✓ Reducción de términos semejantes:

$$1,25x = 40.775$$

$$x = \frac{40775}{1.25}$$

$$x = 32.620$$

El precio de compra es \$32.620

Actividad: realiza la prueba y verifica que el valor obtenido si cumpla con las condiciones de la ecuación planteada.

- **Cálculo de la ganancia:**

Ganancia = $0,25 x$, pero $x = 32.620$, entonces la ganancia es $0,25 * 32.620 = 8.156$

La
0 ganancia es de \$ 8.156

- **PROBLEMA NÚMERO 3**

Hace dos años John tenía cinco veces la edad de Bill. Ahora es 8 años mayor que Bill. Encuentre la edad actual de John.

- ✓ De acuerdo a las indicaciones dadas en las sugerencias, escribiremos con variables los datos del problema, esto es:

ELEMENTOS (NOMBRES)	VARIABLES (Edad actual)	RELACIÓN DE LAS VARIABLES (hace dos años)
JHON	X	$x - 2$
BILL	$X - 8$	$(x - 8) - 2 = x - 10$
RELACIÓN DE EDADES	x y $x - 8$	$X - 2 = 5 (x - 10)$

Solución: la cantidad desconocida que va a ser determinada es la edad actual de John, entonces asignamos:

$$x = \text{Edad actual de John}$$

- ✓ Luego podemos representar las otras cantidades del problema en términos de x :

$$x - 8 = \text{Edad actual de Bill.}$$

$$x - 2 = \text{Edad de John hace dos años}$$

$$(x - 8) - 2 = x - 10 = \text{Edad de Bill hace dos años}$$

- ✓ Una ecuación que expresa la relación de sus edades hace dos años es:

$$X - 2 = 5 (x - 10)$$

Se resuelve la ecuación:

$$x - 2 = 5(x - 10)$$

$$x - 2 = 5x - 50$$

Términos semejantes:

$$x - 5x = 2 - 50$$

$$-4x = -48, \text{ se multiplica por } -1$$

$$4x = 48, \text{ se despeja la variable}$$

$$x = \frac{48}{4}$$

$$x = 12$$

Entonces:

la edad actual de John es 12 años

Prueba:

Si **John** tiene ahora **12 años**, **Bill** debe tener **4**. Hace dos años **John** tenía **10** y **Bill** **2**.
Puesto que $10 = 5(2)$, la respuesta es correcta.

(Zill & Dewar, 1992)

- **PROBLEMA NÚMERO 4:**

Una compañía de dulces fabrica una chocolatina de forma rectangular de 12 cm de largo, por 6 cm de ancho y 3 cm de grosor. Debido a un incremento en los costos, la compañía ha decidido reducir el volumen de la chocolatina en un 25%. El grosor será el mismo, pero el largo y el ancho se reducirán en una misma cantidad. Determine el nuevo largo y el nuevo ancho de la chocolatina.

- ✓ De acuerdo a las indicaciones dadas en las sugerencias, escribiremos con variables los datos del problema, esto es:

ELEMENTOS	NUEVAS CONDICIONES	RELACIÓN DE LAS VARIABLES
El volumen de la chocolatina era de 216 cm^3 .	A este volumen se le reducirá un 25%: $\frac{25}{100} * 216 \text{ cm}^3 = 54 \text{ cm}^3$	Producto de las dimensiones: $12 \text{ cm} * 6 \text{ cm} * 3 \text{ cm} = 216 \text{ cm}^3$
	El nuevo volumen será: $216 \text{ cm}^3 - 54 \text{ cm}^3 = 162 \text{ cm}^3$	
Las dimensiones eran: Largo: 12 cm. Ancho: 6 cm. Grosor: 3 cm.	Sea x la cantidad a quitar al largo y al ancho; las nuevas dimensiones son : Nuevo largo: 12 - x. Nuevo ancho: 6 - x. Nuevo grosor :3	El nuevo producto de dimensiones será (modelo matemático): $(12-x)*(6-x)*3 = 162$

- ✓ Tomando la ecuación obtenida:

$$3(12 - x) * (6 - x) = 162$$

- Dividiendo por 3 ambos lados de la igualdad:

$$\frac{3(12 - x) * (6 - x)}{3} = \frac{162}{3}$$

- Se obtiene:

$$(12 - x) * (6 - x) = 54$$

- Realizando el producto indicado:

$$72 - 18x + x^2 = 54$$

- Igualando a 0:

$$x^2 - 18x + 72 - 54 = 0 \rightarrow x^2 - 18x + 18 = 0$$

- Solucionando la ecuación:

Actividad: utiliza cualquiera de los métodos vistos y verifica los resultados.

$$x_1 = 16,94 \text{ cms.}$$

$$x_2 = 1,063 \text{ cms.}$$

Nota: el valor de $x_1 = 16,94 \text{ cms.}$ No se puede utilizar en la solución del problema porque es mayor que cualquiera de las magnitudes dadas y nos darían magnitudes negativas, sin sentido alguno para una medición.

Entonces la cantidad a quitar es de **1,063 cm.**

Las nuevas dimensiones serían:

DIMENSIONES	DIMENSIÓN MENOS CANTIDAD A QUITAR	NUEVAS DIMENSIONES
LARGO	12 cms - 1,063cms	10,937 cms.
ANCHO	6 cms - 1,063 cms	4,937 cms
GROSOR	3 cms.	3 cms.
VOLUMEN		10,937 cms* 4,937 cms *3cms = 162 cms.

El resultado no es exacto debido a que no es posible utilizar todos los decimales:
161,987907 = 162 (se realiza la aproximación).

• PROBLEMA NÚMERO 5

Se desea construir una caja sin tapa. Para ello se tomará una lámina cuadrada de cartón y se cortarán en las cuatro esquinas cuadrados idénticos de 5 cm de lado y se doblarán hacia arriba. Si la caja será hecha para contener un volumen de 2000 cm^3 . Determine las dimensiones de la lámina de cartón a utilizar.

- ✓ De acuerdo a las indicaciones dadas en las sugerencias, escribiremos con variables los datos del problema, esto es:

ELEMENTOS	VARIABLES	RELACIÓN DE VARIABLES
Lado del cuadrado	X	X
Lado del nuevo cuadrado	$X - 5 - 5$	$X - 10$
Volumen de la caja:	Largo: $x - 10$ Ancho: $x - 10$ Grosor: 5	Largo*ancho*grosor $(x - 10) * (x - 10) * 5 = 2000$

SOLUCIÓN:

Nota: un cuadrado es un rectángulo que tiene los cuatro lados iguales.

- ✓ Sea **x** el lado del cuadrado; se va a quitar en las cuatro esquinas 5 cm a cada lado de la esquina.
Véase la figura 2:

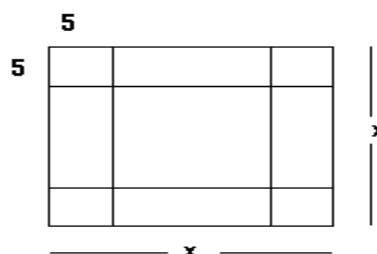


Figura 2. Figura para el problema número 5
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

- ✓ Quitando 5 cm en cada esquina el lado de la caja será $x - 5 - 5 = x - 10$. La figura 4 ilustra esta situación:

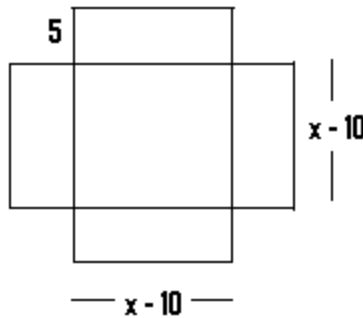


Figura 3. Figura para el problema número 5
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

- ✓ Doblando los lados hacia arriba la caja queda como la mostrada en la figura 4.

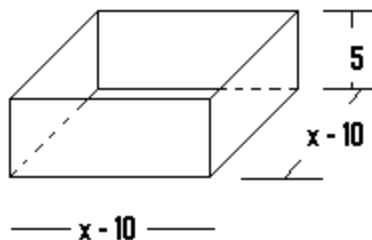


Figura 4. Figura para el ejemplo 5
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

- ✓ Se debe encontrar un modelo para el volumen:

Volumen es igual a **alto - grosor (5)**, por **ancho (x-10)**, por **largo(x-10)**. El volumen tiene un valor de 2000 cm^3 ; entonces queda:

$$(x - 10) * (x - 10) * 5 = 2000x^2 - 20x - 300 = 0$$



Efectuando los productos indicados, queda:

$$5(x^2 - 20x + 100) = 2000$$

✓ Dividiendo por 5 ambos lados de la igualdad:

$$5\left(\frac{(x^2 - 20x + 100)}{5}\right) = \frac{2000}{5}$$

Obtenemos

$$(x^2 - 20x + 100) = 400$$

✓ Igualamos a cero:

$$(x^2 - 20x + 100) - 400 = 0$$

✓ Reducción de términos semejantes:

$$x^2 - 20x - 300 = 0$$

✓ Factorizando:

$$(x - 30)(x + 10) = 0$$

✓ Igualamos cada factor a cero:

$$(x - 30) = 0 \rightarrow x_1 = 30$$

$(x + 10) = 0 \rightarrow x_2 = -10$ **Nota:** el valor de $x_2 = -10$ *cms.* No se puede utilizar en la solución del problema porque nos darían magnitudes negativas, sin sentido alguno para una medición.

Por lo tanto:

$x_1 = 30$ Es la solución para el problema.

El lado de la lámina debe ser de 30 cm.

Enlaces para problemas resueltos.

<http://www.youtube.com/watch?v=ZhAy51ouZIU&feature=relmfu>
http://www.youtube.com/watch?v=wg44YjtS_1M
<http://www.youtube.com/watch?v=YDbM9hBPvBg&feature=fvwrel>
<http://www.youtube.com/watch?v=9veNjGofq7I>
<http://www.youtube.com/watch?v=C-MlecFJ8Q&feature=related>

4.2. Tema 2: Desigualdades e inecuaciones

○ Definiciones y conceptos.

Desigualdad: es una expresión que indica que una cantidad es mayor o menor que otra cantidad. Los signos de desigualdad son: SÍMBOLO	LECTURA	INCLUSIÓN	REPRESENTACIÓN

$>$	Mayor que...	No incluye el extremo de...	Se representa con PARÉNTESIS (), en notación de intervalos.
$\geq$	Mayor-igual que...	Incluye el extremo de...	Se representa con CORCHETE [] en notación de intervalos.
$<$	Menor que...	No incluye el extremo de...	Se representa con PARÉNTESIS () en notación de intervalos.
$\leq$	Menor-igual que...	Incluye el extremo de...	Se representa con CORCHETE [] en notación de intervalos.
$+\infty$	Más infinito		En intervalo siempre se representa por un paréntesis.
$-\infty$	Menos infinito		En intervalo siempre se representa por un paréntesis.

EJEMPLOS: Interprete los siguientes intervalos y diligencie los espacios que están en blanco marcados con interrogantes (¿?).

Nota: para leer un intervalo hay que hacerlo: primero, del centro hacia la derecha y luego del centro hacia la izquierda.

INTERVALO	LECTURA
1. $A = [5, 9) = 5 \leq X < 9$	X es menor que 9 y mayor-igual que 5 (no incluye el 9, pero si incluye el 5, es un intervalo cerrado en 5 y abierto en 9).
2. $B = (-3, 4] = -3 < X \leq 4$	¿?
3. $C = [0, 10] = 0 \leq X \leq 10$	X es menor-igual que 10 y mayor-igual que 0 (Incluye el cero y el diez, los dos extremos y es cerrado en ambos)
4. $D = (5, -1) = -5 < X < -1$	X es menor-igual que -1 y mayor-igual que -5

	(No incluye el -1 y el 5, los dos extremos, es abierto en ambos).
5. $E=(-\infty, 1] = -\infty < X \leq 1$	¿?
6. $F=(2, +\infty) = -2 < X < +\infty$	¿?
$R_e = (-\infty, +\infty)$ 7. $G=(-\infty, +\infty) = -\infty < X < +\infty$	X es menor-igual que $+\infty$ y mayor-igual que $-\infty$ (No incluye el $+\infty$ y el $-\infty$, los dos extremos, es abierto en ambos). Este intervalo, representa, además, el campo numérico de los números Reales.

Nota: si observa, detenidamente, se dará cuenta que el signo que está a la izquierda de x se lee al revés, o sea de derecha a izquierda, por ejemplo, en el numeral 1 tenemos

$$(5 \leq X < 9)$$

Aparentemente tenemos entre el 5 y la x el símbolo **menor-igual que...**, lo estamos leyendo **mayor-igual que...** porque lo leemos de **derecha a izquierda (al revés)**.

- **Inecuaciones:** una inecuación es una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas) que sólo se verifica para determinados valores de las incógnitas.

Ejemplos:

$$x - 5 \leq 3$$

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

$$\frac{3}{4}x - 7 < \frac{2}{5}x + \frac{1}{3}$$

- **Propiedades de las inecuaciones:** en las inecuaciones se cumplen las **mismas propiedades** que en las ecuaciones, pero se deben tener en cuenta las siguientes restricciones.

1. Cuando todos los términos de una inecuación se multiplican por una **cantidad negativa**, se debe cambiar el sentido de la desigualdad.
2. En una inecuación **no se puede multiplicar o dividir** por una **cantidad que contenga a la variable**.

(<http://www.youtube.com/watch?v=f8etboOqMMg>),
(<http://www.youtube.com/watch?v=y8pr0SYTCi4&feature=related>)

- **Solución de inecuaciones:** solucionar una inecuación consiste en encontrar uno o varios intervalos que contengan todos los valores de la incógnita que cumplen con el sentido de la desigualdad.

En la inecuación: $3x - 5 < x + 3$, $x = 0$ es solución de la inecuación. $x = 20$, no es solución de la inecuación.

Nota: cuando en el proceso de solución de una inecuación se llega a una desigualdad falsa, quiere decir que la inecuación no tiene solución.
Cuando en el proceso de solución de una inecuación se llega a una desigualdad verdadera, quiere decir que la solución de la inecuación son todos los reales.

Enlaces para solución de inecuaciones.

http://www.youtube.com/watch?v=CSPk_iUkc-Q
<http://www.youtube.com/watch?v=jSZWvCh2PqI&feature=related>
<http://www.youtube.com/watch?v=CiCp1-3n3sU&feature=related>
<http://www.youtube.com/watch?v=VphT7BaFAOw&feature=related>
<http://www.youtube.com/watch?v=CqcneRwCZi4&feature=related>

- **Solución de inecuaciones lineales e inecuaciones cuadráticas**

A través de los ejercicios de aprendizaje se detallará el procedimiento a seguir en la solución de una inecuación cuadrática y de la misma manera se ilustrará la solución de una inecuación lineal.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Solucione la inecuación: $x^2 + 2x > 15$

PROCEDIMIENTO

1. Deje un lado de la inecuación en cero:

$x^2 + 2x - 15 > 0$ Esta expresión se llama **inecuación objetivo**.

- 2. Encuentre las raíces de la inecuación objetivo.** Esto es **igual a cero** y resuelva la ecuación resultante, los valores obtenidos son las raíces de la inecuación objetivo. En estas raíces la inecuación objetivo se hace cero, es decir, donde posiblemente hay cambio de signo en la expresión.

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \rightarrow (x + 5)(x - 3) = 0$$

$$x + 5 = 0 \rightarrow x = -5$$

$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

Las raíces de la inecuación objetivo son: $x = -5$ y $x = 3$

3. Cada raíz ubíquela en la recta numérica.

4. Evalúe el signo que tiene la inecuación objetivo en cada raíz. Para ello se toma un número que se encuentre a la izquierda y otro número que encuentre a la derecha de cada raíz. Estos números se reemplazan en la inecuación objetivo y el signo del resultado se coloca encima de la recta numérica.

5. La respuesta o solución de la inecuación, resulta tomando los intervalos que cumplan con el sentido de la desigualdad. Para ello nos fijamos en el sentido de la desigualdad de la inecuación objetivo y en la recta numérica de la siguiente manera:

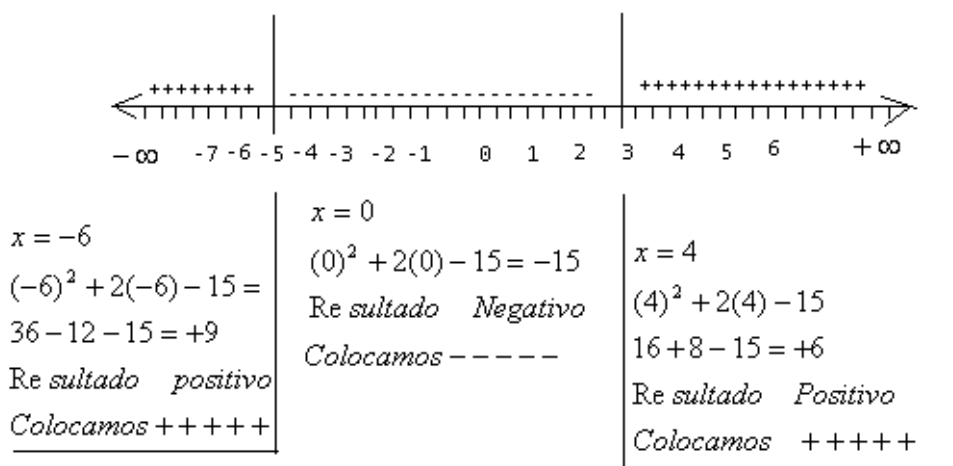


Figura 5. Recta numérica para solucionar $x^2 + 2x > 15$
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

PISTAS DE APRENDIZAJE

Tenga en cuenta que:

Si en la inecuación objetivo se tiene: > 0 Se toman los +++++, sin incluir las raíces.

Si en la inecuación objetivo se tiene: ≥ 0 Se toman los +++++, incluyendo las raíces.

Si en la inecuación objetivo se tiene: < 0 Se toman los -----, sin incluir las raíces.

Si en la inecuación objetivo se tiene: ≤ 0 Se toman los -----, incluyendo las raíces.

- ✓ Tenga en cuenta: este método también se utiliza para solucionar inecuaciones de grado tres o superior.

La solución del ejemplo es:

$$x \in (-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$$

○ MÉTODO DE LOS INTERVALOS

Es otro método utilizado para solucionar inecuaciones cuadráticas (también inecuaciones racionales e irracionales y de orden superior a 2, 3, 4...) es el método denominado Método de los intervalos, siendo el método más universal para la solución de este tipo de intervalos.

✓ PROCEDIMIENTO

A través de un ejemplo se ilustrará el proceso a seguir.

Ejercicio de Aprendizaje

Encuentre el (los) intervalo (s) solución para la siguiente inecuación:

$$a) \quad x^2 - x \geq 6$$

Procedimiento:

1. Se desiguala la inecuación a cero:

$$x^2 - x - 6 \geq 0$$



2. Se factoriza la inecuación:

$$(x - 3) * (x + 2) \geq 0$$

3. Se iguala cada factor a cero:

$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

4. Se representan estas dos raíces sobre la recta numérica:(ver diagrama al final)

5. Se toman los intervalos que quedan marcados sobre la recta numérica:

$$A = (-\infty, -2)$$

$$B = (-2, +\infty)$$

$$C = (3, +\infty)$$

6. Tomamos cualquier valor del intervalo y lo reemplazamos en la inecuación original:

- ✓ En el intervalo **A** tomaremos el -3 (puede también tomar -4 o -5 o -6...).

✓ **Pista de aprendizaje:**

- ✓ Tenga en cuenta que: si se toma el -2 se hace cero la inecuación, no tome los extremos del intervalo.



- ✓ Reemplacemos -3 en la inecuación objetivo:

$$\begin{aligned}x^2 - x - 6 &\geq 0 \\(-3)^2 - (-3) - 6 &> 0 \\9 + 3 - 6 &> 0 \\+6 &> 0 \in \mathbf{Re}^+.\end{aligned}$$

- ✓ En el intervalo **B tomaremos el 0** y lo reemplazamos:

$$\begin{aligned}x^2 - x - 6 &> 0 \\(0)^2 - 0 - 6 &< 0 \\-6 &< 0 \in \mathbf{Re} \text{ Negativos}.\end{aligned}$$

- ✓ En el intervalo **C tomaremos el 4** y lo reemplazamos:

$$\begin{aligned}x^2 - x - 6 &\geq 0 \\(4)^2 - 4 - 6 &> 0 \\16 - 4 - 6 &> 0 - (-3) - 6 > 0 \\+6 &> 0 \mathbf{RePositivos}.\end{aligned}$$

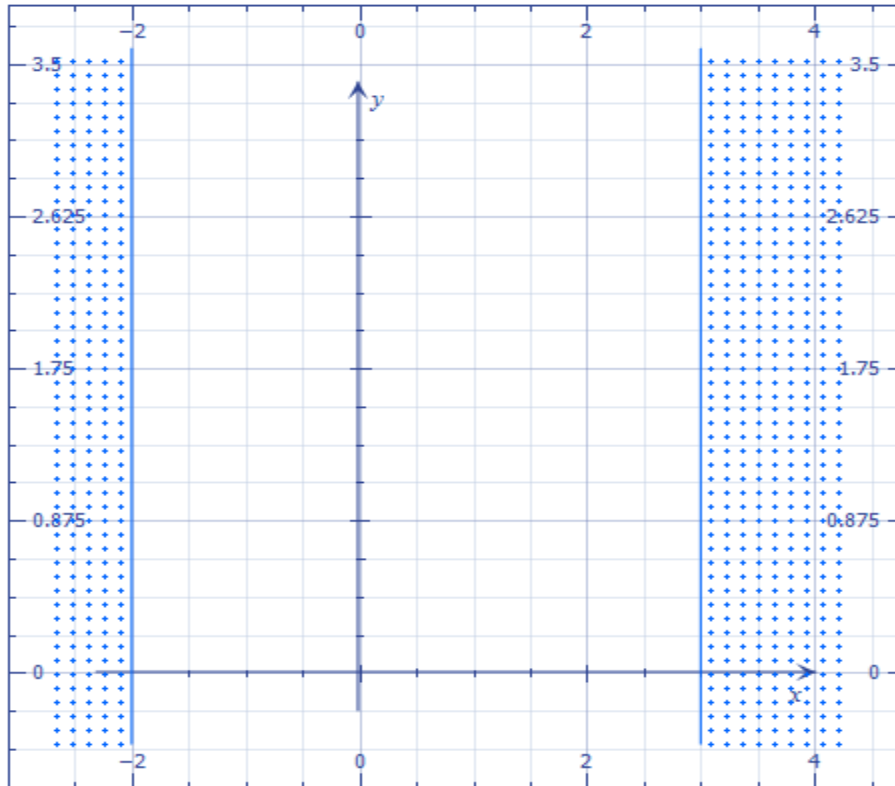
7. **Respuesta:** para determinarla debemos mirar las condiciones iniciales de la inecuación, ésta nos indica que la solución son **todos los números mayores e iguales a cero**; de acuerdo a esta condición los únicos intervalos que la cumplen son el **intervalo A** y el **intervalo C**, la solución es la **unión** de los mismos, cerrando el intervalo en los extremos -2 y 3 ya que, en este caso hacen parte de la

solución por contener el signo igual, al reemplazarlos en la ecuación original obtendríamos la identidad $0 = 0$, contemplada en la inecuación original.

Solución: $x \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$



Gráficamente sería:(lo punteado representa los intervalos solución).



PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga en cuenta: cuando la inecuación es $\geq$ en la solución se toma la unión de los intervalos que cumplen con las condiciones iniciales.

b) $7 - \frac{x}{2} > \frac{5x}{3} - 6$

Procedimiento: es una inecuación lineal (el grado de x es 1).

1. Se debe multiplicar toda la inecuación por el m.c.m. de los denominadores, en este caso:

m.c.m es $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$6 \cdot (7 - \frac{x}{2}) > 6 \cdot (\frac{5x}{3} - 6)$, efectuando la multiplicación indicada:

$$42 - 3x > 10x - 36$$

$$-3x - 10x > -42 - 36 \rightarrow -13x > -78$$

$$>$$

2. Dividimos ambos lados de la desigualdad por -13 , para hallar el valor de x :

$$\frac{(-13x)}{(-13)} > \frac{(-78)}{(-13)}$$

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga presente que: al multiplicar o dividir ambos miembros de una desigualdad por un número real negativo (Re^-), la desigualdad cambia de sentido.

$$a > b$$

$$(a) * (-1) > (b) * (-1)$$

$$-a < -b$$

$$5 > 3$$

Ejemplo: $(5) * (-1) > (3) * (-1)$

$$-5 < -3$$

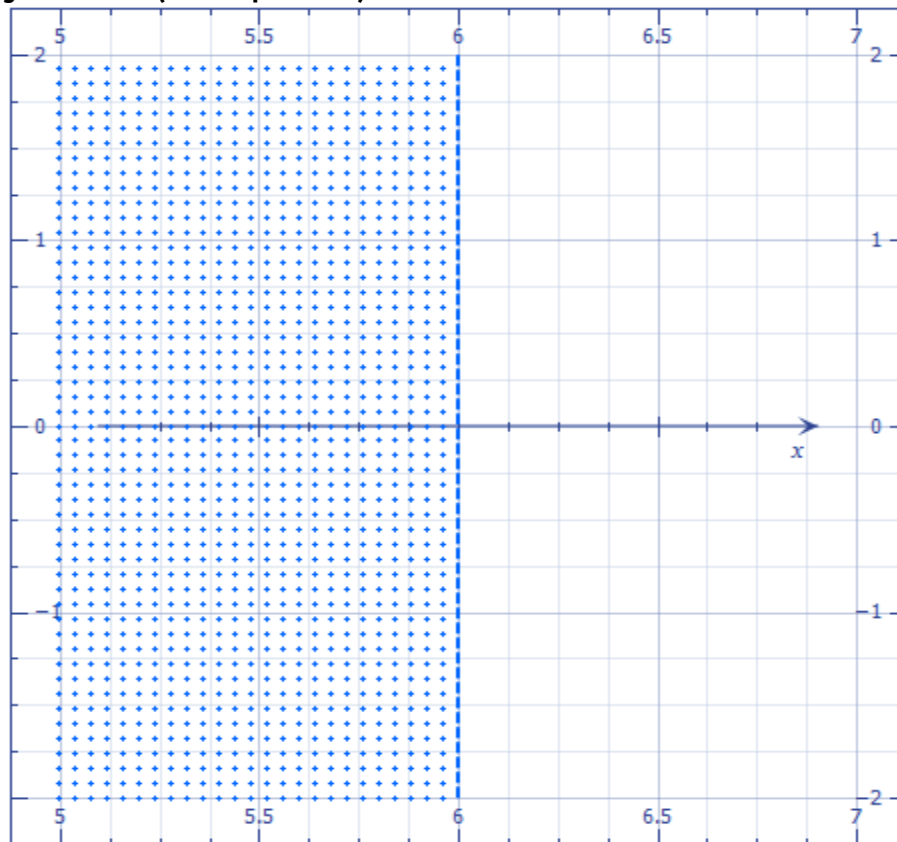
Continuando con el ejercicio y realizando la división indicada, tenemos:



$x < 6$, por lo tanto la solución analítica de la inecuación es el intervalo:

Solución: $x \in (-\infty < 6)$, no incluye el 6 por ser abierto en dicho punto (no está el signo igual).

La solución gráfica sería: (todo lo punteado)



C. $2x - 10 > 0$

Procedimiento: es una inecuación lineal (el grado de x es 1)

1. Sumamos a ambos miembros de la desigualdad el inverso aditivo de -10 que es +10

$$2x - 10 + 10 > 0 + 10$$



PISTA DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria que: si a una desigualdad le sumamos o restamos el mismo número real a ambos lados, el sentido de la desigualdad no cambia.

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}_e$

$$\begin{aligned} a &< b \\ a \pm c &< b \pm c \\ &\text{no cambia} \end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 3 &< 5 \\ 3 + 7 &< 5 + 7 \\ 10 &< 12 \end{aligned}$$

Continuando con el ejercicio;

$$\begin{aligned} 2x - 10 + 10 &> 0 + 10 \\ 2x &> 10, \end{aligned}$$

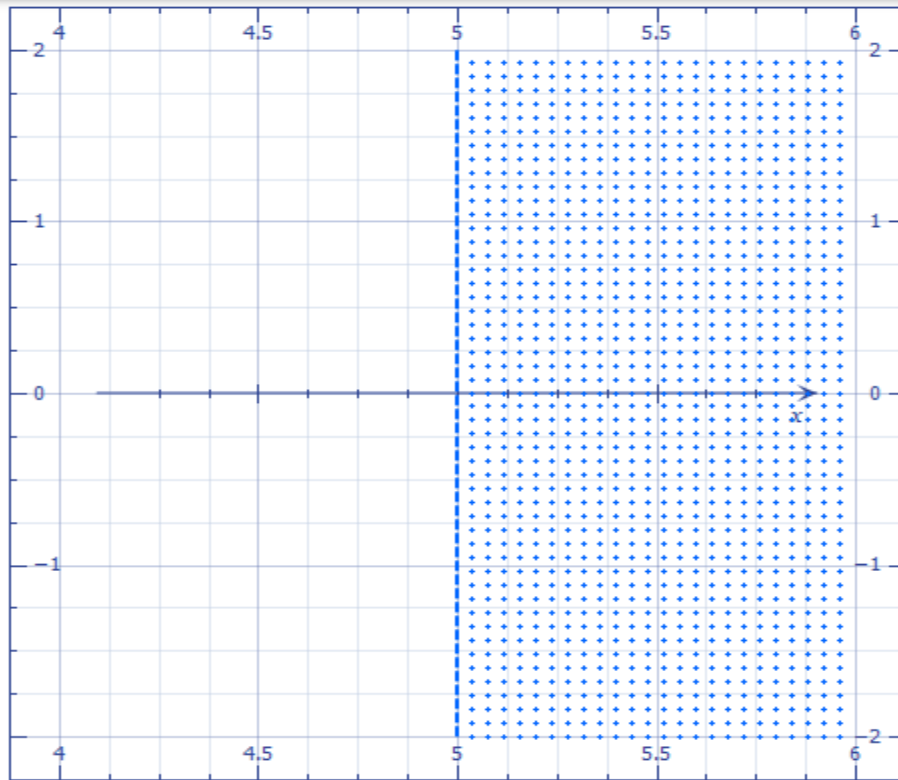
2. Dividiendo por 2 ambos miembros de la inecuación:

$$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}, \text{ simplificando}$$

$x > 5$, La solución analítica sería el intervalo:

Solución: $x \in (5, +\infty)$

La solución gráfica para la inecuación $2x - 10 > 0$
::



a. $x^2 + 6x + 5 \leq 0$

Procedimiento: es una inecuación cuadrática y obtendremos dos raíces como solución.

1. Como la inecuación ya está desigualada a cero, procedemos a factorizarla:

$$x^2 + 6x + 5 \leq 0$$

$$(x + 1)(x + 5) \leq 0$$

2. Igualamos cada factor a cero:

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$$

$$x + 5 = 0 \rightarrow x = -5$$



3. Se representan estos puntos en la recta numérica (ver solución gráfica al final del proceso.

4. Obtenemos los intervalos (como son dos raíces obtenemos tres intervalos):

$$A = (-\infty, -5)$$

$$B = (-5, -1)$$

$$C = (-1, +\infty)$$

5. Tomamos un valor cualquiera en cada uno de los intervalos y lo reemplazamos en la inecuación objetivo:

$A = (-\infty, -5)$: Tomamos el -6

$$(-6)^2 + 6(-6) + 5 = 36 - 36 + 5 = +5 > 0, +5 \in Re^+$$

$B = (-5, -1)$: Tomamos el -3

$$(-3)^2 + 6(-3) + 5 = 9 - 18 + 5 = -4 < 0, -4 \in Re^-$$

$C = (-1, +\infty)$: Tomamos el 0

$$(0)^2 + 6(0) + 5 = 0 + 0 + 5 = +5 > 0, +5 \in Re^+$$

6. De acuerdo a lo anterior el único intervalo que cumple con las condiciones iniciales del problema es el intervalo **C**.

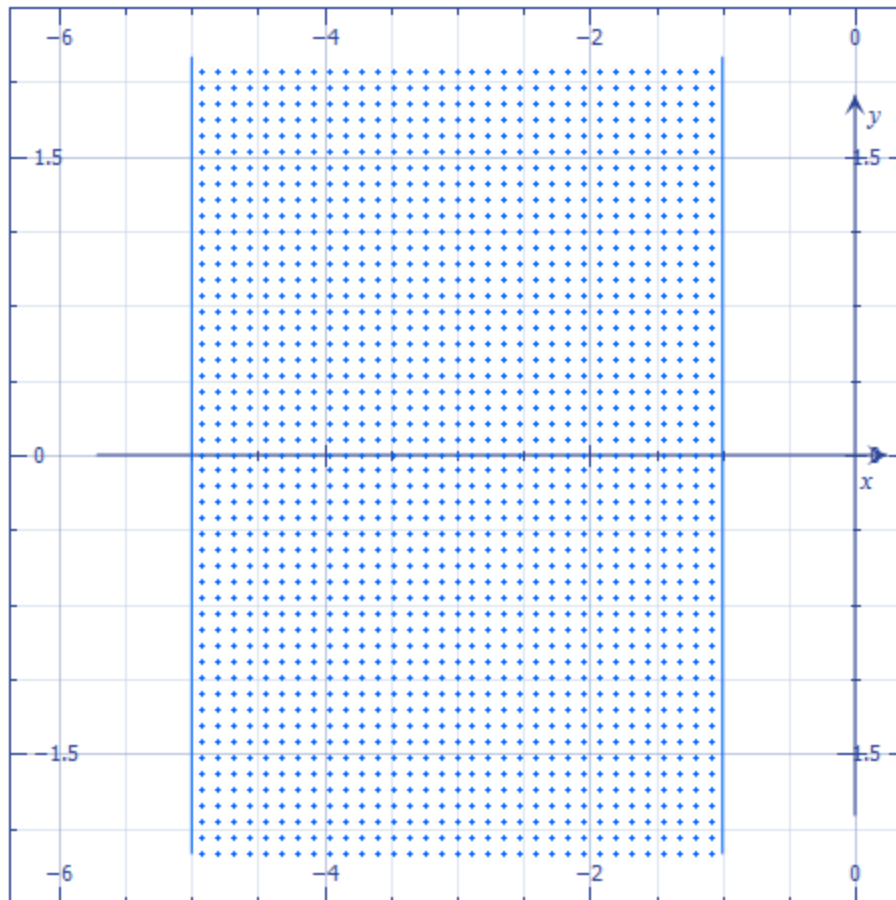
✓ La solución analítica es el intervalo

$$C = [-5, -1], \text{ cerrado en los extremos porque estos hacen parte de la solución } (\leq).$$



✓ La solución gráfica de la inecuación:

$$x^2 + 6x + 5 \leq 0$$



b. $6x^2 - 7x - 3 \geq 0$

Procedimiento:

1. Igualando a cero y factorizando:

$$\frac{6}{6}(6x^2 - 7x - 3) = 0$$

$$\frac{36x^2 - 7(6x) - 18}{6} = 0$$

$$\frac{(6x-9)*(6x+2)}{6} = 0 \rightarrow \frac{3(2x-3)*2(3x+1)}{6} = 0, \text{ simplificando}$$

$$(2x - 3) * (3x + 1) = 0$$

2. Igualamos cada factor a cero para obtener las raíces:

$$2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$3x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

3. Las raíces de la ecuación son:

$$x = \frac{3}{2}, x = -\frac{1}{3}$$

4. Se ubican estos dos números en la recta numérica (ver solución gráfica al final del proceso).

5. Obtenemos los intervalos (como son dos raíces obtenemos tres intervalos):



$$A = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$$

$$B = \left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$$

$$C = \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

6. Tomamos un valor cualquiera en cada uno de los intervalos y lo reemplazamos en la inecuación objetivo:

$$A = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right): \text{Tomamos el } -1$$

$$6(-1)^2 - 7(-1) - 3 = 6 + 7 - 3 = +10 > 0 \in Re^+$$

$$B = \left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right): \text{Tomamos el } 0$$

$$6(0)^2 - 7(0) - 3 = 0 - 0 - 3 = -3 < 0 \in Re^-$$

$$C = \left(\frac{3}{2}, +\infty\right): \text{Tomamos el } 2$$

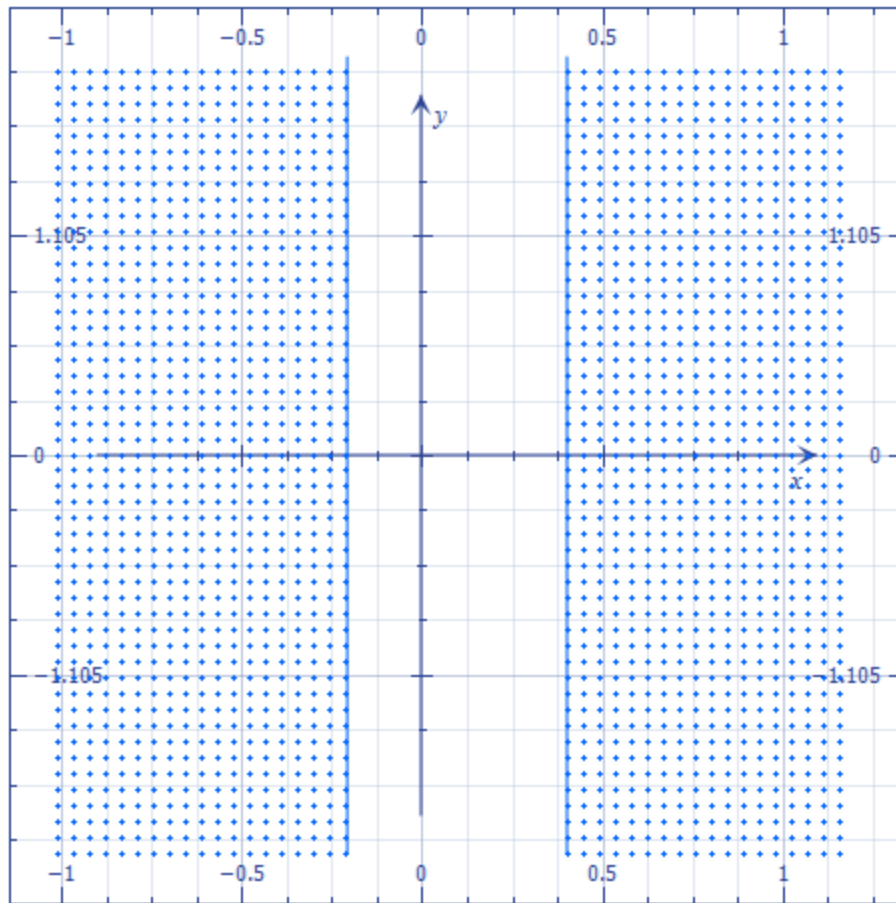
$$6(2)^2 - 7(2) - 3 = 24 - 14 - 3 = +7 > 0 \in Re^+$$

7. De acuerdo a lo anterior los intervalos que cumplen con las condiciones iniciales del problema son el intervalo **A** y el intervalo **B**.

✓ Analíticamente:

$$S = (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$$

✓ Gráficamente: La solución gráfica de la ecuación $6x^2 - 7x - 3 \geq 0$



Nota: también se puede representar de la siguiente manera:



	$x = -\frac{1}{3}$	$x = \frac{3}{2}$	
+++++	-----	+++++	
$x = -1$	$x = 0$	$x = 2$	
$6(-1)^2 - 7(-1) - 3$	$6(0)^2 - 7(0) - 3$	$6(2)^2 - 7(2) - 3$	
$6 + 7 - 3$	-3	$24 - 14 - 3$	
<i>Positivo</i>	<i>Negativo</i>	<i>Positivo</i>	

Figura 9. Recta numérica para solucionar desigualdad
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

La solución es:

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$$

○ SOLUCIÓN DE INECUACIONES RACIONALES.

Son racionales porque hay variables en el denominador.

PROCEDIMIENTO:

1. Deje un lado de la inecuación en cero.
2. Deje la inecuación con una sola fracción (Reduzca términos semejantes).
3. La inecuación anterior se llama inecuación objetivo. Encuentre todas las raíces de la inecuación objetivo. Para ello iguale a cero tanto el numerador como el denominador.
4. Coloque las raíces en la recta numérica y determine el signo de la inecuación objetivo a la izquierda y a la derecha de cada raíz.

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga en cuenta que: los intervalos donde se incluyan las raíces del denominador siempre son abiertos (con paréntesis).

Enlaces para solución de inecuaciones racionales.

<http://www.youtube.com/watch?v=V5Y92aeEQos>

http://www.youtube.com/watch?v=O75Nsbws_CQ&feature=related

http://www.youtube.com/watch?v=_9LMFSWecY0&feature=related

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Resuelva las siguientes inecuaciones racionales:

a. $\frac{5}{x+2} + \frac{3x}{x-2} \leq 3$

Procedimiento:

1. Se desiguala a cero y se determina el m.c.m. de los denominadores y se realiza la operación indicada (suma de fracciones algebraicas, en este caso).

$$\frac{5}{x+2} + \frac{3x}{x-2} - 3 \leq 0$$

El m.c.m. es: $(x+2) * (x-2)$, queda entonces:

$$\left(\frac{5}{x+2}\right) + \left(\frac{3x}{x-2}\right) - 3 \leq 0 \rightarrow \frac{5(x-2) + 3x(x+2) - 3(x+2)(x-2)}{(x+2) * (x-2)} \leq 0$$

2. Efectuando los productos indicados:

$$\frac{5x-10+3x^2+6x-3(x^2-4)}{(x+2)*(x-2)} \leq 0, \text{ realizando el producto que queda indicado:}$$

$$\frac{5x-10+3x^2+6x-3x^2+12}{(x+2)*(x-2)} \leq 0, \text{ Reduciendo términos semejantes:}$$

$$\frac{11x+2}{(x+2)*(x-2)} \leq 0, \text{ esta es la } \textbf{inecuación objetivo}$$

3. Cada factor, tanto en el numerador como en el denominador se debe igualar a cero:

$$11x + 2 = 0 \rightarrow x = -\frac{2}{11}$$

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

Estas tres raíces se ubican en la recta numérica (ver solución gráfica al final del proceso)

4. Obtenemos los intervalos (como son tres raíces obtenemos cuatro intervalos):

$$A = (-\infty, -2)$$

$$B = \left(-2, -\frac{2}{11}\right)$$

$$C = \left(-\frac{2}{11}, 2\right)$$

$$D = (2, +\infty)$$

5. Tomamos un valor cualquiera en cada uno de los intervalos y lo reemplazamos en la inecuación objetivo:

$A = (-\infty, -2)$, tomamos el -3

$$\frac{11(-3) + 2}{(-3 + 2) * (-3 - 2)} = \frac{-33 + 2}{(-1) * (-5)} = \frac{-31}{5} = -\frac{31}{5} < 0, -\frac{31}{5} \in Re^-$$

$B = (-2, -\frac{2}{11})$, tomamos el -1

$$\frac{11(-1) + 2}{(-1 + 2) * (-1 - 2)} = \frac{-11 + 2}{(1) * (-3)} = \frac{-9}{-3} = 3 > 0, 3 \in Re^+$$

$C = (-\frac{2}{11}, 2)$, tomamos el 0

$$\frac{11(0) + 2}{(0 + 2) * (0 - 2)} = \frac{0 + 2}{(2) * (-2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} < 0, -\frac{1}{2} \in Re^-$$

$D = (2, +\infty)$, tomamos el 3

$$\frac{11(3) + 2}{(3 + 2) * (3 - 2)} = \frac{33 + 2}{(5) * (1)} = \frac{35}{5} = 7 > 0, 7 \in Re^+$$

6. Solución:

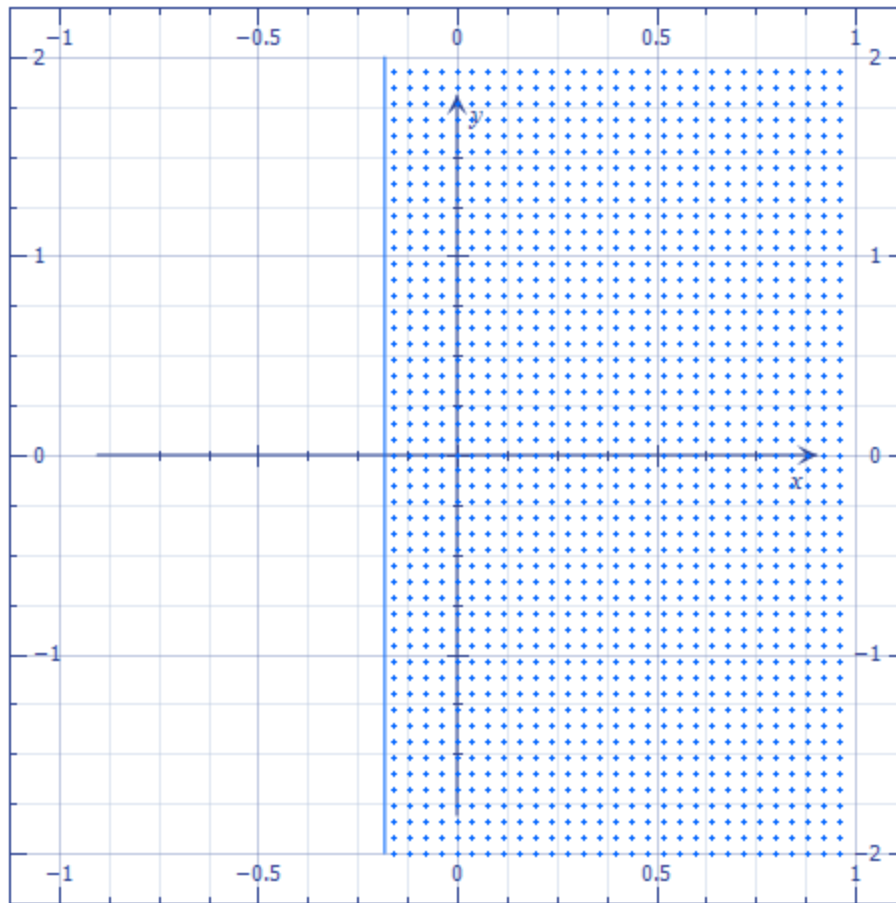
✓ **Analítica:** está dada por los intervalos que cumplen la condición del problema

($\leq$), esto es,

$$S = x \in (-\infty, -2] \cup [-\frac{2}{11}, 2)$$

✓ **Gráfica inecuación objetivo:**

$$\frac{11x + 2}{(x + 2) * (x - 2)} \leq 0$$



Nota: la siguiente gráfica presenta otra forma de solución para la inecuación:

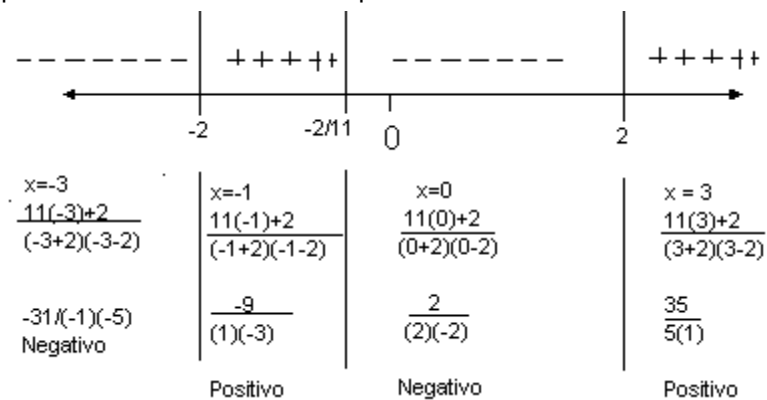


Figura 10. Recta numérica para solucionar desigualdad
(Autor Elkin Ceballos Gómez)



b. Resuelva la siguiente inecuación Racional:

$$\frac{3x}{x+5} \geq 7$$

Procedimiento:

1. Se desiguala a cero:

$$\frac{3x}{x+5} - 7 \geq 0,$$

2. Se halla el m.c-m : $x + 5$

3. Se realiza la operación de fracciones algebraicas indicada:

$$\frac{3x - 7(x+5)}{x+5} \geq 0$$

4. Realizando el producto indicado y reduciendo términos semejantes:

$$\frac{3x-7(x+5)}{x+5} \geq 0 \rightarrow \frac{3x-7x-35}{x+5} \geq 0,$$

$$\frac{-4x - 35}{x+5} \geq 0, \text{ esta es la inecuación objetivo.}$$

5. Cada factor, tanto en el numerador como en el denominador se debe igualar a cero:

$$-4x - 35 = 0 \rightarrow -4x = 35 \rightarrow x = -\frac{35}{4} = -8,75$$

$$x + 5 = 0 \rightarrow x = -5$$

6. Las raíces son:

$$x = -\frac{35}{4} = -8,75, \quad x = -5$$

7. Se ubican estas raíces en la recta numérica (ver al final del procedimiento en la solución gráfica).

8. Se obtienen los intervalos a partir de estos puntos (son dos puntos se obtienen 3 intervalos):

$$A = (-\infty, -8,75)$$

$$B = (-8,75, -5)$$

$$C = (-5, +\infty)$$

9. Tomamos un valor cualquiera en cada uno de los intervalos y lo reemplazamos en la inecuación objetivo:

10.

$$A = (-\infty, -8,75), \text{ tomamos } -9$$

$$\frac{-4(-9) - 35}{-9 + 5} = \frac{36 - 35}{-4} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4} < 0; -\frac{1}{4} \in Re^-$$

$$B = (-8,75, -5), \text{ tomamos } -6$$

$$\frac{-4(-6) - 35}{-6 + 5} = \frac{24 - 35}{-1} = \frac{-11}{-1} = 11 > 0; 11 \in Re^+$$

$$C = (-5, +\infty), \text{ tomamos } -4$$

$$\frac{-4(-4) - 35}{-4 + 5} = \frac{16 - 35}{1} = -19 < 0; -19 \in Re^-$$

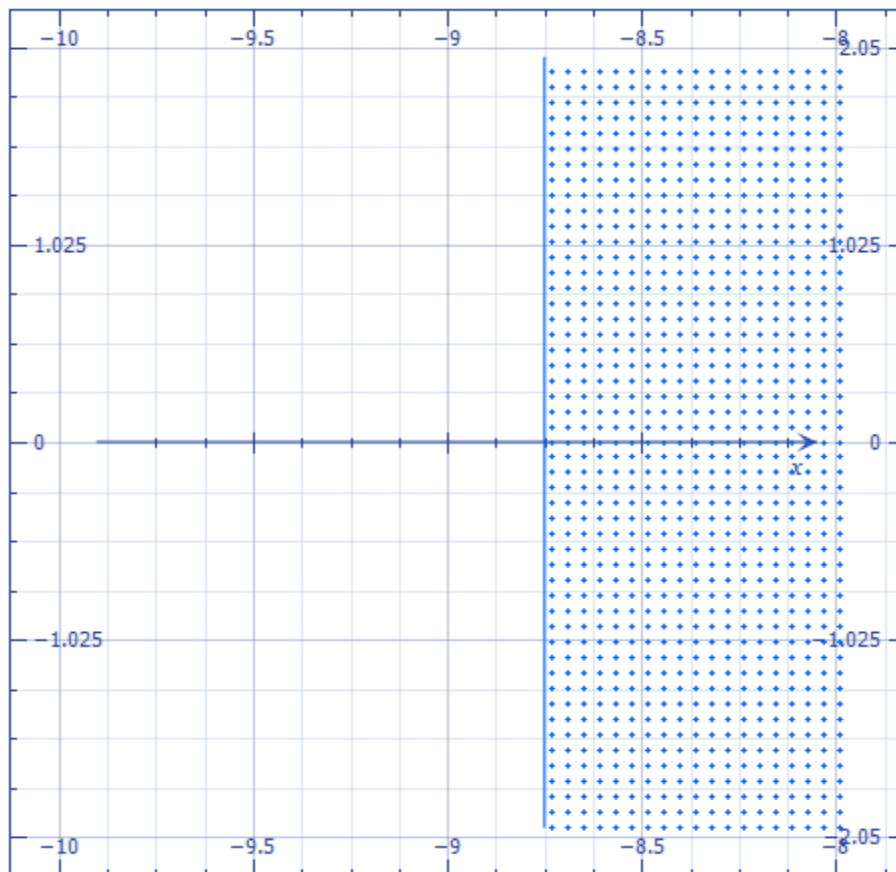
11. Solución:

- ✓ **Analítica:** está dada por los intervalos que cumplen la condición del problema; esto es, el intervalo **B**, entonces la solución será:

$$S = x \in [-8,25, -5)$$

Nota: en menos cinco (- 5) el intervalo es **abierto** porque en él se **hace cero el denominador**.

- ✓ **Gráfica:** la solución para la inecuación $\frac{-4x-35}{x+5} \geq 0$





Nota: otra forma de representarla sería:

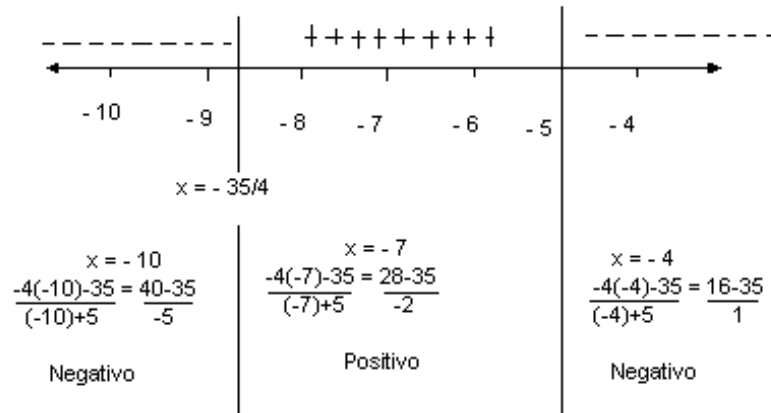


Figura 11. Recta numérica para solucionar desigualdad
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

La solución se da tomando los signos positivos, ya que en la inecuación objetivo dice ≥ 0

La solución es: $x \in [-35/4, -5)$

En menos cinco el intervalo es abierto porque en él se hace cero el denominador.

- C. Solucione la siguiente inecuación de acuerdo al procedimiento seguido en los ejercicios anteriores, justificando cada uno de los pasos seguidos:

$$\frac{2x - 3}{x^2 - 25} \geq 0$$

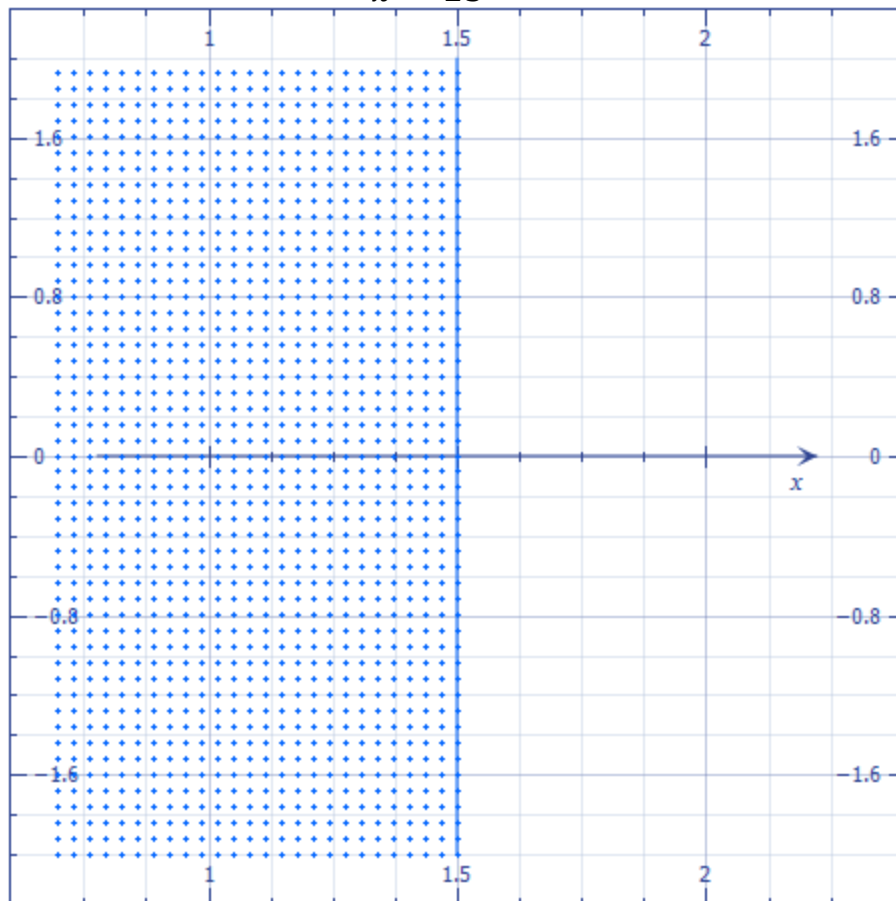
Procedimiento

✓ La solución analítica es:

$$S = x \in (-5, \frac{3}{2}] \cup (5, +\infty)$$

✓ La solución gráfica de la inecuación :

$$\frac{2x - 3}{x^2 - 25} \geq 0$$



✓ **SOLUCIÓN DE INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO.**

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga presente que: el valor absoluto se refiere a una cantidad que siempre es positiva. El símbolo de valor absoluto es: $|$

$$|3| = 3 \quad |-2| = 2 \quad |-5| = 5 \quad |0| = 0 \quad |-3/5| = 3/5$$

Cuando consideramos una inecuación, procedemos de la misma manera que con los números Reales, pero teniendo en cuenta que estamos trabajando con una variable y el resultado de tiene que ser un conjunto de valores, es decir uno o varios intervalos, decimos entonces que:

1. $|f(x)| \leq a$, con $a \in \mathbb{R}^+$, sería:

$$\begin{array}{c} -a \leq f(x) \leq a \\ \sigma \\ [-a, +a] \end{array}$$

También se cumple con: $|f(x)| < a \leftrightarrow -a < x < a$

Ejemplo: $|x| \leq 5 \rightarrow -5 \leq x \leq 5$

2. $|f(x)| \geq a$, con $a \in \mathbb{R}^+$, sería:

$$\begin{array}{c} x \geq b \\ \sigma \\ x \leq -b \end{array}$$

También se cumple con: $|x| > b \Leftrightarrow x > b \vee x < -b$

Por ejemplo $|x| > 10$ quiere decir que.

$$x > 10 \vee x < -10$$

PISTA DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria que: cuando se tiene una inecuación de este tipo, se deben plantear estas desigualdades.

Enlaces para solución de desigualdades con valor absoluto.

<http://www.youtube.com/watch?v=Ogxr5wwVMAw>

<http://www.youtube.com/watch?v=HA3Vgrb3U-c&feature=related>

<http://www.youtube.com/watch?v=8OjhQ7z48qM&feature=related>

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Resuelva la desigualdad:

$$|2x - 3| \leq 2$$

Procedimiento:

1. Se debe cumplir que:

$-a \leq x \leq a$, entonces aplicando esta propiedad tenemos:

$$-2 \leq 2x - 3 \leq 2$$

2. Se deben solucionar estas dos desigualdades simultáneamente, es decir la operación que se realiza en un miembro de la desigualdad se debe realizar en todos los demás

- ✓ Sumando 3 en todos los términos de la expresión queda:

$$3 - 2 \leq 2x - 3 + 3 \leq 2 + 3$$

- ✓ Simplificando:

$$1 \leq 2x \leq 5$$

- ✓ Dividiendo todos los términos por 2:

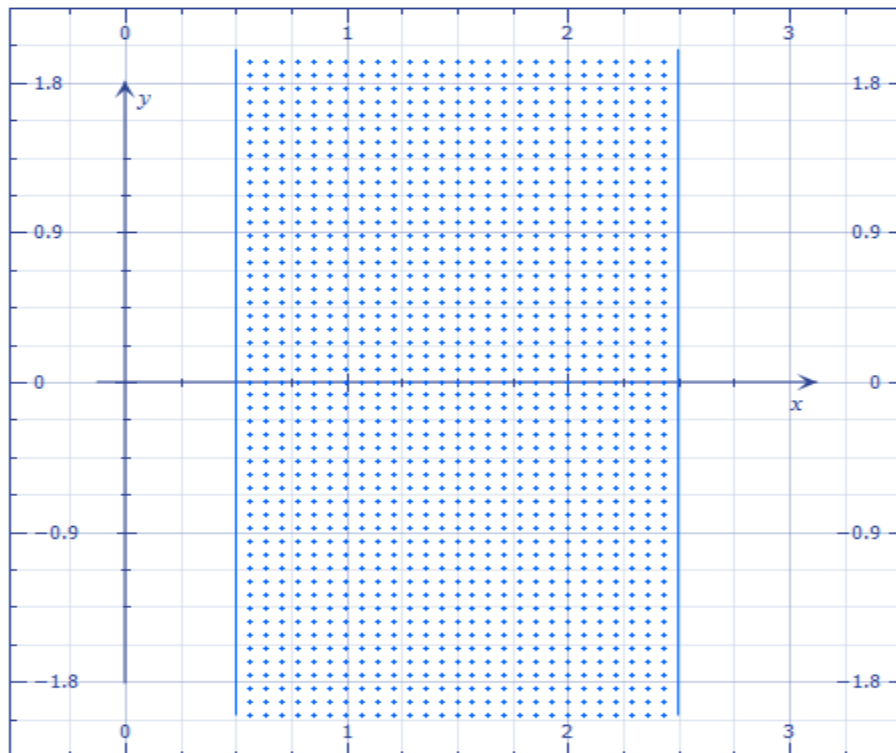
$$\frac{1}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{5}{2}$$

- ✓ Simplificando:

$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

3. a) La solución analítica sería: $x \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$

- a) La solución gráfica sería: $|2x - 3| \leq 2$



Resuelva la siguiente inecuación:

$$|7 - 3x| \geq 8$$

Procedimiento:

1. Se debe cumplir que:

$$x \geq b$$

σ

$$x \leq -b$$

2. Según la propiedad respectiva, significa que:

$$7 - 3x \geq 8$$

σ $\geq$

$$7 - 3x \leq -8$$

3. Se resuelve cada inecuación por separado y la solución es la **unión** ($\cup$) de ambas soluciones:

a. $7 - 3x \geq 8$

$7 - 7 - 3x \geq 8 - 7$, restamos ambos lados -7

$-3x \geq 1$, desigualamos a **cero**

$-3x - 1 \geq 0$ **Inecuación objetivo**

$-3x - 1 + 1 \geq 0 + 1$, sumamos a ambos lados $+1$

$-3x \geq 1$

$\frac{-3x}{-3} \geq \frac{1}{-3}$, se dividen ambos miembros por -3

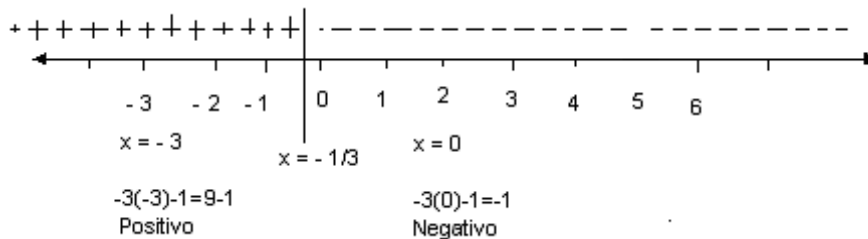
$$x \leq -\frac{1}{3}$$

Solución: $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}]$

PISTA DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta que: cuando se multiplica o se divide una inecuación por un Re^- , la desigualdad cambia de sentido.

Gráficamente: ubicando en la recta numérica:



Recta numérica para solucionar desigualdad con valor absoluto.
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

Como en la inecuación objetivo uno dice ≥ 0 , se deben tomar los signos de suma. La solución de esta inecuación es:

$$x \in (-\infty, -\frac{1}{3}]$$

σ

$$b. 7 - 3x \leq -8$$

$$7 - 7 - 3x \leq -8 - 7, \text{ restamos ambos lados } -7$$

$$-3x \leq -15, \text{ desiguálamos a } \text{cero}$$

$$-3x + 15 \leq 0, \text{ Inecuación objetivo}$$

$$-3x + 15 - 15 \leq -15, \text{ restamos a ambos lados } -15$$

$$-3x \leq -15$$

$$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{-15}{-3}, \text{ se dividen ambos miembros por } -3$$

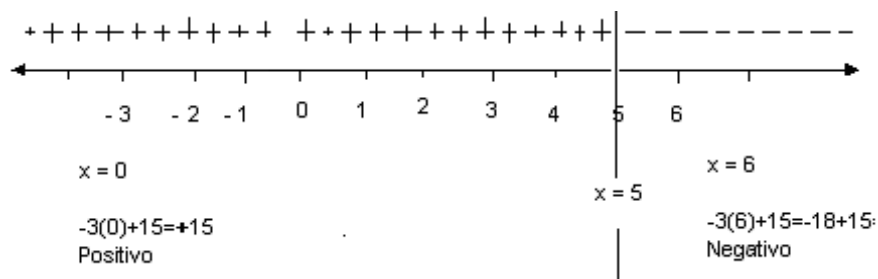
$$x \geq \frac{15}{3} \rightarrow x \geq 5$$

$$\text{Solución: } x \in [5, +\infty)$$

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga presente que: cuando se multiplica o se divide una inecuación por un Re^- , la desigualdad cambia de sentido.

Gráficamente: ubicando en la recta numérica:



Recta numérica para solucionar desigualdad
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

Como el sentido de la inecuación que estamos resolviendo es ≤ 0 , se deben tomar los signos menos:

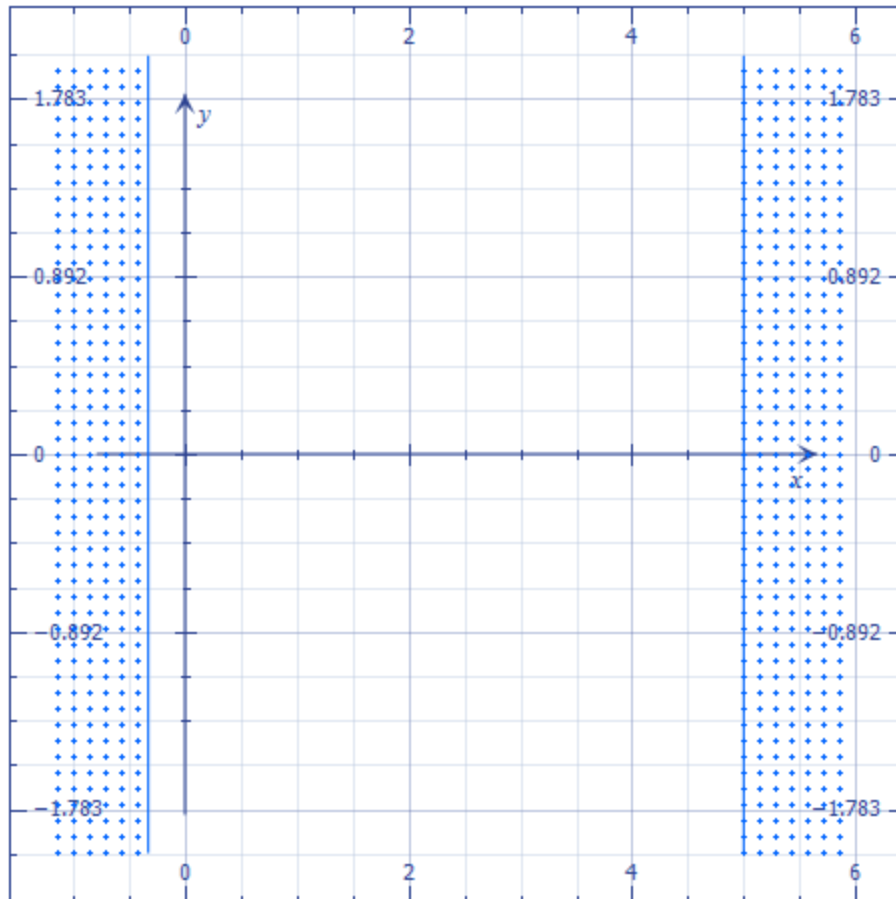
Para esta inecuación la solución es:

$$x \in ([5, +\infty)$$

4. Por lo tanto la **solución final** es la **unión** de las dos soluciones:

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup x \in [5, +\infty)$$

$$|7 - 3x| \geq 8$$



2. Resuelva la siguiente inecuación con valor absoluto, analítica y gráficamente:

$$\left| 4 - \frac{1}{2}x \right| \leq 7$$

Procedimiento:

PISTA DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta: $|f(x)| \leq a$, con $a \in \mathbb{R}^+$, entonces:

$$-a \leq f(x) \leq a$$

$$\sigma$$

$$[-a, +a]$$

1. Utilizamos la propiedad indicada,

$$-7 \leq 4 - \frac{1}{2}x \leq 7$$

2. Solucionamos simultáneamente las dos inecuaciones.

3. Sumamos **4** a cada uno de los miembros de la desigualdad:

$$-7 - \mathbf{4} \leq \mathbf{4} - 4 - \frac{1}{2}x \leq 7 - \mathbf{4}, \text{ simplificamos}$$

$$-11 \leq -\frac{1}{2}x \leq 3$$



4. Multiplicamos por -2 , (que es el inverso multiplicativo de $-\frac{1}{2}$), cada uno de los miembros de la desigualdad:

PISTA DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria que: el inverso multiplicativo de un número Real es la fracción inversa del número (conservando el signo), de tal manera que al multiplicar el número y su inverso multiplicativo se obtiene como resultado la unidad positiva (+1), esto es:

El inverso multiplicativo de $a \in \mathbb{R}_e$ es $\frac{1}{a}$, con $a \neq 0$, de tal manera que $a * \frac{1}{a} = +1$

$(-11) * (-2) \leq \left(-\frac{1}{2}x\right) * (-2) \leq (3) * (-2)$, efectuando los productos indicados, tenemos:

$22 \geq x \geq -6$, que se expresa $-6 \leq x \leq 22$

PISTA DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta que: cambia el sentido de la desigualdad por que se multiplicó cada uno de los miembros de la inecuación por un $\mathbb{R}_e^-$.

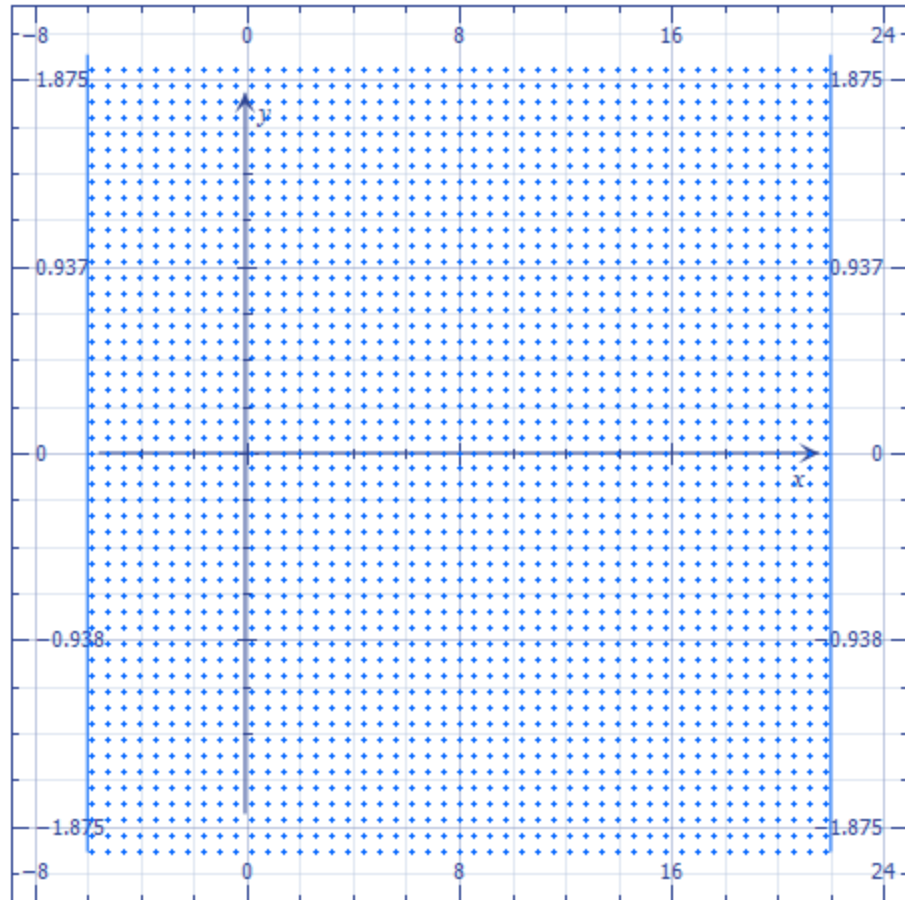
5. Solución

c. Analítica: $x \in [-6, 22]$

d. Gráfica: para la inecuación



$$\left|4 - \frac{1}{2}x\right| \leq 7, \text{sería:}$$



d. Resuelva, analítica y gráficamente, la siguiente inecuación con valor absoluto:

$$|5x - 9| \geq -10$$

Procedimiento

1. Analizando la inecuación y revisando la definición de valor absoluto:

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga presente que: $|f(x)| \leq a$, con $a \in \mathbb{R}^+$

Esta inecuación **no tiene solución**, ya que el valor absoluto nunca da negativo (**-10**).

✓ **Inecuaciones de la forma: $x^2 + b$ (RAÍCES COMPLEJAS)**

Cuando las **raíces** de una inecuación son **complejas**, o lo que es lo mismo al tratar de solucionar la ecuación resultante, esta no tiene solución, quiere decir, que la inecuación se cumple para todos los números reales o para ninguno. Por lo tanto, es suficiente con evaluar para un solo valor de "x".

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

a. $x^2 + 4 > 0$ Inecuación objetivo

Procedimiento:

1. Utilizamos la fórmula general para encontrar las raíces:

PISTA DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria: la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



2. Determinamos los coeficientes:

a	=	1
b	=	0
c	=	4

Reemplazando estos valores:

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1) * (4)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{\pm \sqrt{-16}}{2}$$

No existe, por lo tanto la ecuación no tiene solución.

PISTA DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta que: la raíz par de un número negativo no está definida para los números Reales.

Si: $\sqrt[n]{-a}$, con n par y $a \in \mathbb{R}_e$, **no tiene solución en los Reales**

3. Debemos determinar el signo de $x^2 + 4$ para cualquier valor de x:

- $x = -2$, **tenemos**, $(-2)^2 + 4 = 8 > 0$ (**positivo**)
- $x = -\frac{1}{2}$, **tenemos**, $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 4 = \frac{1}{4} + 4 = \frac{1+16}{4} = \frac{17}{4} > 0$ (**positivo**).

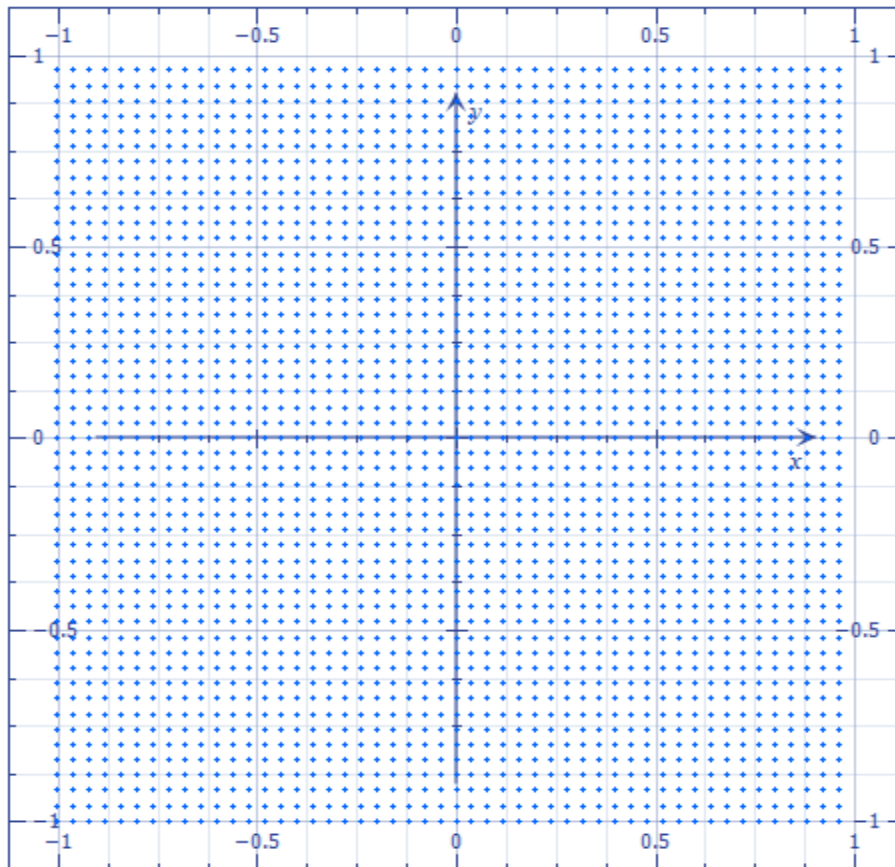
- $x = 5$, tenemos, $(5)^2 + 4 = 25 + 4 = 29 > 0$ (positivo).
- *Cualquier valor, en los números reales, que le asignemos a la variable x , siempre obtendremos un número mayor que cero (positivo).*

4. De lo anterior, concluimos que la solución de la inecuación son los números Reales, esto es:

a. Analíticamente:

$$x \in R_e = (-\infty, +\infty)$$

b. Gráficamente la inecuación $x^2 + 4 > 0$





b. $-x^2 + 6x \geq 10$

Procedimiento

1. Desigualamos la inecuación a cero, para el efecto restamos 10 a ambos lados de la inecuación:

$$-x^2 + 6x - 10 \geq 10 - 10, \text{ simplificamos:}$$

$$-x^2 + 6x - 10 \geq 0 \text{ Inecuación objetivo}$$

2. Utilizamos la fórmula general para encontrar las raíces:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3. Determinamos los coeficientes:

a	=	-1
b	=	6
c	=	-10

Reemplazando estos valores:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(-1) * (-10)}}{2(-1)}$$



$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 40}}{-2}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{-2} \text{ No existe.}$$

4. De lo anterior concluimos que la inecuación **no tiene solución**.

5. Se debe determinar el signo de: $-x^2 + 6x - 10 \geq 0$

- $x = 3$, tenemos, $-(3)^2 + 6(-3) = -9 - 18 - 10 = -37$ (1)*
- $x = -2$, tenemos, $-(-2)^2 + 6(-2) = -4 - 12 - 10 = -26$ (2)*
- $x = -10$, tenemos, $-(-10)^2 + 6(-10) = -100 - 60 - 10 = -170$ (3)*

6. Analizando las respuestas 1, 2, 3: obtenemos

$$-37 < 0 \text{ (Negativo) (1)*}$$

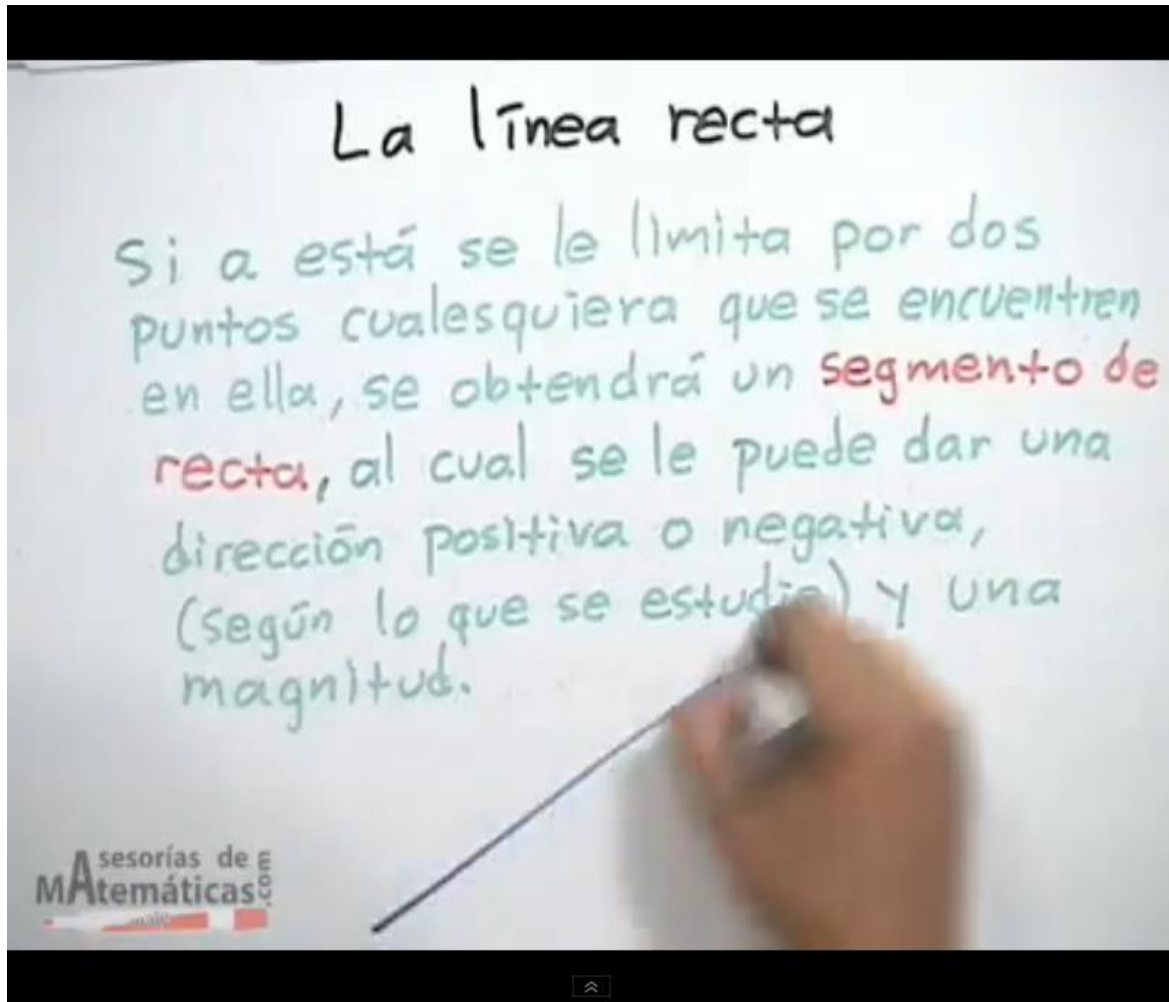
$$-26 < 0 \text{ (Negativo) (2)*}$$

$$-170 < 0 \text{ (Negativo) (3)*}$$

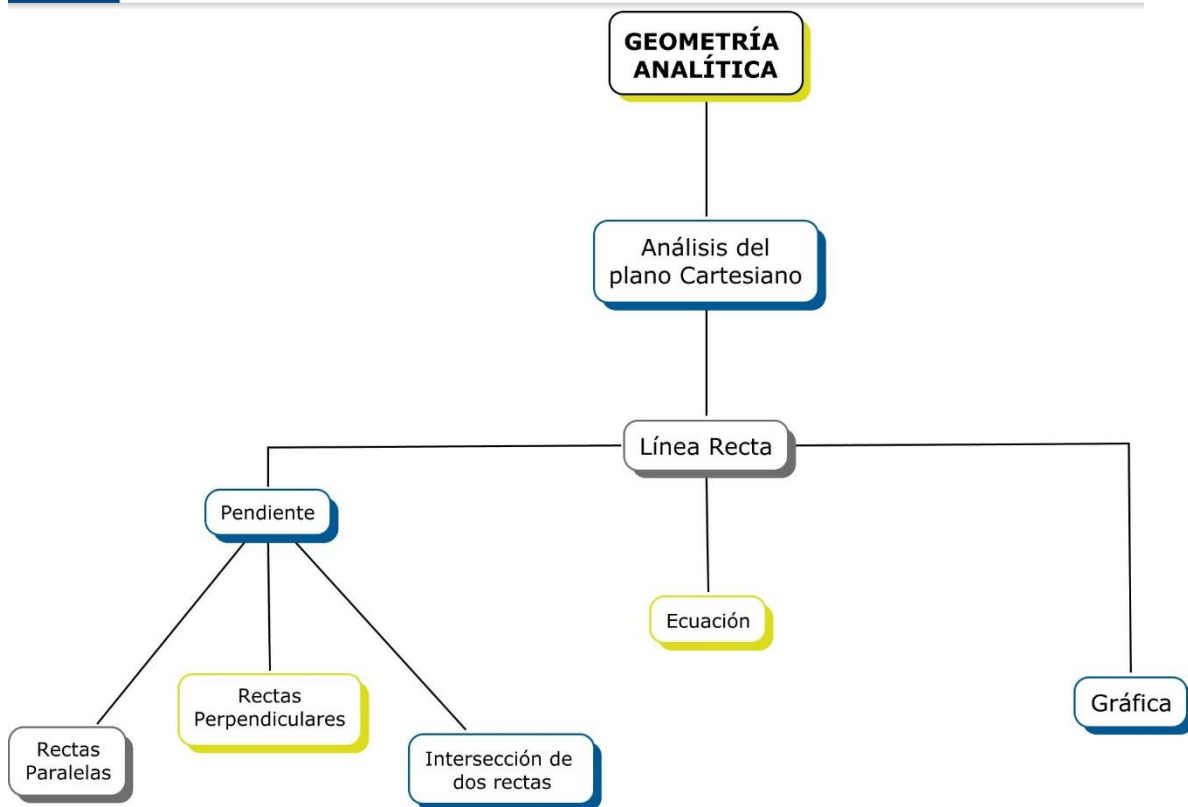
Quiere decir que $-x^2 + 6x - 10$ siempre es **negativo**, nunca es cero y la inecuación dice ≥ 0 , por lo tanto, **la inecuación no tienen solución en los números reales**.



5. UNIDAD 4 CONCEPTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA



<http://www.youtube.com/watch?v=ZRp10Ym746s&feature=fvsnr>



5.1. Tema 1: Línea Recta

- Definición de línea recta o modelo lineal o ecuación de la línea recta

Es una ecuación que relaciona dos variables, una de las variables se asume como **variable independiente**, se le asigna la letra **x** o la letra **t** o la letra **q**; la otra variable se asume como **variable dependiente**, se le asigna la letra **y**.

Una ecuación lineal cumple con las siguientes características:

1. El máximo exponente de la variable **x (variable independiente)**, es **uno**, otras letras que se utilizan para la variable independiente son: **q, t, z**.
2. El máximo exponente de la variable **y (variable dependiente)** es **uno**.
3. Su gráfica es una línea recta.
4. No hay variable en el denominador.
5. No hay producto entre las variables.
6. Para hacer la gráfica es suficiente con conocer dos puntos sobre la línea recta.

Enlaces para línea recta.

<http://www.youtube.com/watch?v=ZRp10Ym746s>

5.2. Tema 2: Ecuaciones de la línea recta.

La línea recta tiene diferentes presentaciones, todas equivalentes. Veamos algunas de ellas.

- **Ecuación punto pendiente de la línea recta.** Presenta la siguiente forma:

$$y - y_0 = m (x - x_0)$$

Donde:

El punto (x_0, y_0) Son las coordenadas de un punto conocido sobre la línea recta.

m: Es la pendiente de la línea recta (más adelante se definirá claramente el concepto, aunque puedes revisar la prueba inicial y mirar el concepto).

- **Ecuación intersección pendiente de la línea recta.** Esta ecuación resulta de despejar y de la ecuación anterior. Presenta la siguiente forma:

$$y = mx + b$$

Dónde:

m: Es la pendiente de la línea recta.

b: Es el intercepto de la línea recta con el eje y. Es el punto donde la recta corta el eje y.

Ejemplo:

$$y = 2x + 5$$

Dónde:

$$m = 2 \quad y \quad b = 5$$

La pendiente es 2 y el intercepto con el eje y es el punto de coordenadas **(0, 5)**, para hallarlo se hace ***x* = 0** en la ecuación dada.

- **Ecuación general de la línea recta.** Es una ecuación igualada a cero. Presenta la siguiente forma:

$$Ax + By + C = 0$$

Donde: **A, B, C** $\in \mathbb{R}_e$.

NOTA: para calcular la pendiente en este tipo de ecuación lineal:

$$m = -\frac{A}{B}$$

(http://www.youtube.com/watch?v=4W6_g-KdEHE&feature=related)

Ejemplos:

$$1. 8x + 6y = 0$$

$$2. 5x - 6y + 7 = 0$$

$$2. -3x + 7 = 0$$

Actividad: de acuerdo a la ecuación: $m = -\frac{A}{B}$:

¿Cuál sería la pendiente de cada una de las rectas anteriores (1, 2, 3)?

¿Cómo se interpretaría la pendiente de la ecuación 3?
=

5.3. Tema 3: Pendiente de una línea recta

La pendiente es un valor constante para cualquier línea recta.

La pendiente da información acerca del ángulo de inclinación de la línea recta con respecto al eje. **x**.

PENDIENTE	INCLINACIÓN	CARACTERÍSTICA
$m > 0$	La inclinación es menor de 90 grados.	La recta es creciente .
$m < 0$	La inclinación es mayor de 90 grados.	La recta es decreciente .
$m = 0$	El ángulo de inclinación es de 180 grados .	Es una recta horizontal cuya ecuación es: $y = b$.
m No existe	El ángulo de inclinación es de 90 grados .	En este caso se tiene una recta vertical cuya ecuación es: $x = c$.

✓ **Rectas paralelas y Rectas perpendiculares**

RECTAS	CARACTERÍSTICA	PENDIENTES
PARALELAS	Son rectas que por más que se prolonguen, nunca se tocan ni se cortan.	Dos rectas L1 y L2 son paralelas si se cumple que sus pendientes $m_1 \wedge m_2$, son iguales, es decir si: $m_1 = m_2$ Las rectas son paralelas , o viceversa.
PERPENDICULARES O NORMALES	Se dice que dos rectas son perpendiculares o normales cuando se cortan formando entre sí un ángulo de 90° .	Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a menos uno. $m_1 * m_2 = -1$ Las rectas son perpendiculares

✓ **GRÁFICA:** para graficar un modelo lineal es suficiente con dos puntos, los pasos a seguir son:

1. Lleve el modelo a la forma intercepto pendiente, $y = mx + b$
2. Se seleccionan dos valores de x arbitrariamente (ya sabemos que el dominio de la función lineal son los números Reales).
3. Cada valor de x seleccionado se reemplaza en el modelo para obtener la respectiva y .
4. Las parejas obtenidas se ubican en el plano cartesiano.
5. Una los dos puntos obtenidos mediante una línea recta para obtener la línea recta pedida.

Enlaces para gráfica de la línea recta:

<http://www.youtube.com/watch?v=itezG3ROd0w&feature=related>

<http://www.youtube.com/watch?v=dLNxF4SlxIw&feature=related>

http://www.youtube.com/watch?v=1V8drS0gt_Q&feature=related

Grafique cada una de las siguientes ecuaciones lineales.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Grafique cada una de las siguientes ecuaciones lineales.

a. $2y - 6x + 10 = 0$

Procedimiento

1. Obtenemos la ecuación de la forma : $y = mx + b$

2. Despejamos y en función de x :

$$2y = 6x - 10$$

$$y = \frac{6x-10}{2}, \text{ separando denominadores:}$$

$$y = \frac{6x}{2} - \frac{10}{2}, \text{ simplificando:}$$

$$y = 3x - 5$$

3. De la ecuación anterior deducimos que la pendiente $m = 3$ y corta al eje y en el punto $(0, -5)$, como la pendiente es positiva **la función es creciente**.

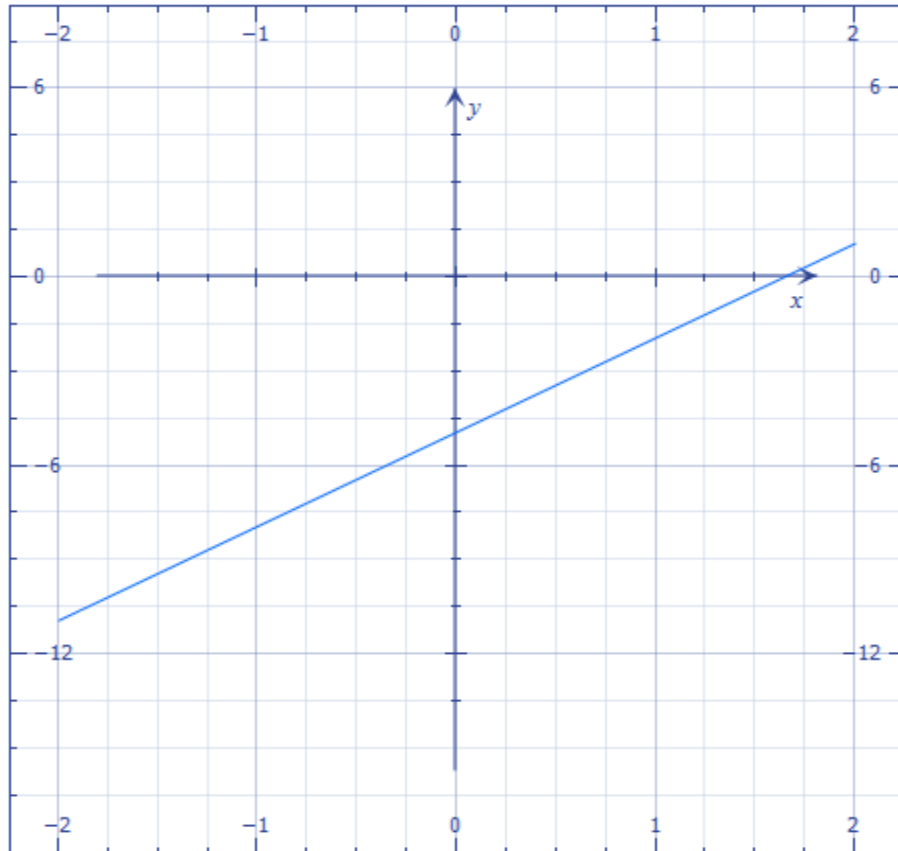
4. Seleccionando dos valores de x (los que cada quien desee) por ejemplo $x = 0$ y $x = 4$, con estos valores se obtiene la respectiva y reemplazando en la ecuación.

Valores dados a X	$y = 3x - 5$	Valores obtenidos para Y	coordenada
0	$y = 3(0) - 5$	$y = -5$	$(0, -5)$
4	$y = 3(4) - 5$	$y = 7$	$(4, 7)$



Ubicando estos dos puntos en el plano cartesiano y uniéndolos mediante una línea recta. La gráfica se muestra en la figura 15.

$$y = f(x) = 3x - 5$$



b. $y = -4x + 10$

Procedimiento

1. De la ecuación anterior deducimos que la pendiente $m = -4$ y corta al eje y en el punto $(0, 10)$, como la pendiente es negativa **la función es decreciente**.

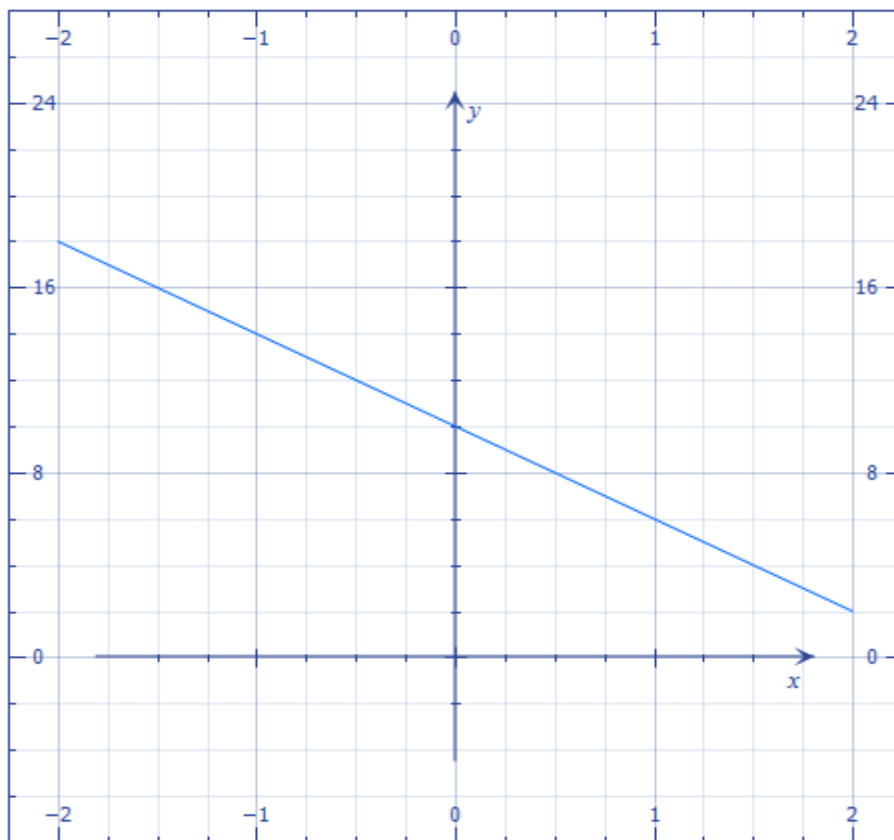


2. Seleccionando dos valores de x (los que cada quien deseé) por ejemplo $x = 2$ y $x = 5$, con estos valores se obtiene la respectiva y reemplazando en la ecuación.

Valores dados a X	$y = -4x + 10$	Valores obtenidos para Y	coordenada
2	$y = -4(2) + 10$	$y = 2$	(2, 2)
5	$y = -4(5) + 10$	$y = -10$	(5, -10)

3. Ubicando estos dos puntos en el plano cartesiano y uniéndolos mediante una línea recta., obtenemos la gráfica para la función lineal:

$$y = -4x + 10$$





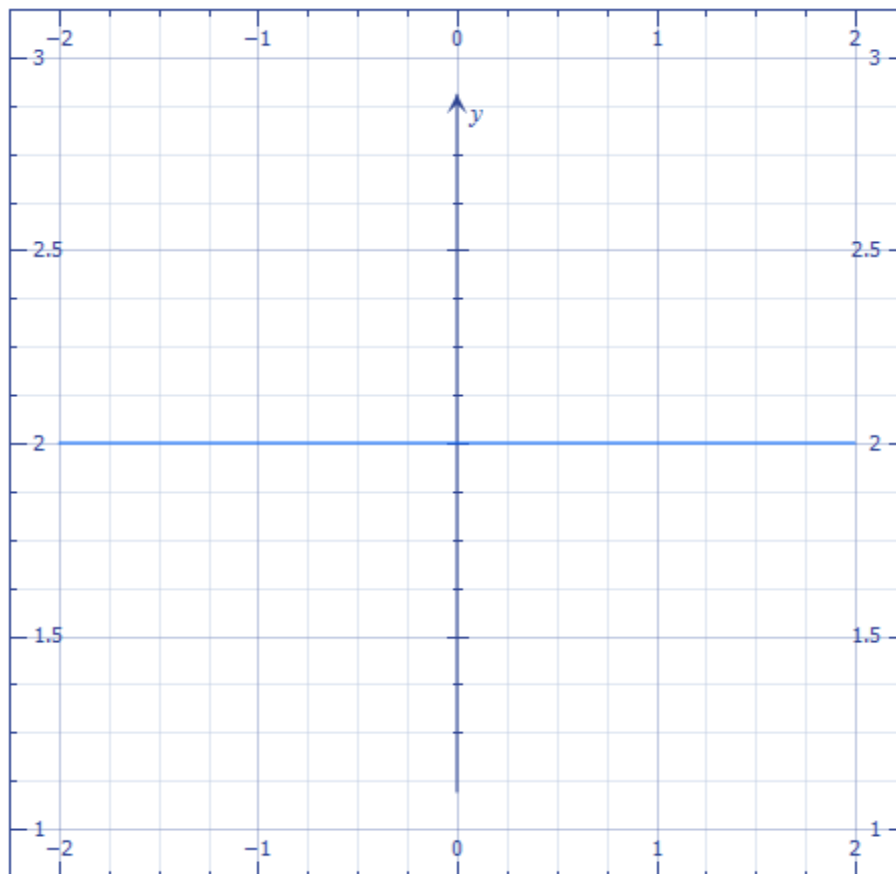
C. $y = g(x) = 2$

PROCEDIMIENTO

1. Se puede ver que para cualquier valor de x la y siempre tendrá el mismo valor.

x	-8	8
y	2	2

2. La gráfica de la función: $y = 2$



PISTA DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta que: para hallar los interceptos con los ejes cartesianos, se procede de la siguiente forma:

- Intercepto con el eje X: se hace $Y = 0$, en la ecuación de la forma $y = mx + b$.
- Intercepto con el eje Y: se hace $X = 0$, en la ecuación de la forma $y = mx + b$.
- Se puede hacer cero para X e Y en cualquiera de las formas de la función lineal, pero se hace más fácil hacerlo en $Y = mx + b$, ya que se visualizan mejor los elementos de la línea recta.

➤ Determinación de la ecuación de la línea recta o modelo lineal

Algunas veces el modelo lineal no es conocido, por lo tanto se debe hallar, naturalmente se debe dar la información suficiente para ello. Una de las formas de construirlo es utilizando la ecuación punto pendiente de la línea recta, dicha ecuación es la siguiente:

$$y - y_0 = m (x - x_0)$$

Dónde:

m: es la pendiente de la línea recta.

(x_0, y_0) : Son las coordenadas de un punto sobre la línea recta; Dichos valores son conocidos.

- **Determinación de la ecuación de la línea recta**
- Conocidos un punto de coordenadas (x_0, y_0) sobre la línea recta y la pendiente **m** de la línea recta.

(<http://www.youtube.com/watch?v=W3wRESJsc9Q&feature=related>)

- Reemplace el punto y la pendiente en la ecuación punto pendiente.
- Efectúe operaciones.
- Despeje la variable dependiente (que por lo general le asignamos la letra y).

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Encuentre el modelo matemático lineal que cumple con las siguientes características, (lo que es lo mismo encuentre la ecuación de la línea recta):

Procedimiento

- a. Pasa por el punto de coordenadas **(1,3)** y tiene pendiente igual a **-2**.

1. Los datos conocidos son:

x_0	1
y_0	3
m	- 2

Nota: el **primer valor** del punto siempre corresponde a la **variable independiente** (en este caso a la x), y el **segundo valor** corresponde a la **variable dependiente** (en este caso a la y).



2. Reemplazamos estos datos en la ecuación punto pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 3 = -2(x - 1)$$

3. Se realizan las operaciones indicadas:

$$y - 3 = -2x + 2$$

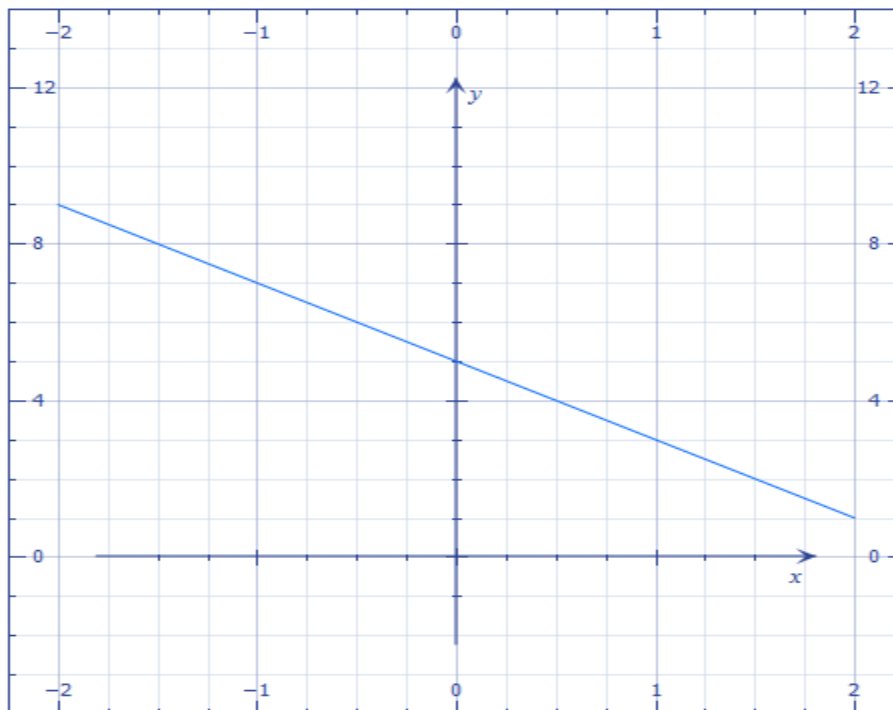
4. Se obtiene la forma $y = mx + b$, o lo que es lo mismo, se determina el **modelo lineal pedido**

$$y - 3 = -2x + 2 \rightarrow y = -2x + 2 + 3 \rightarrow$$

$$y = -2x + 5$$

Modelo lineal pedido.

5. Representación gráfica de: $y = -2x + 5$



Ejemplo 2:

- b. Pasa por el punto de coordenadas **$(-2,5)$** y tiene pendiente igual a **$3/2$** .

Procedimiento

1. Los datos conocidos son:

x_0	- 2
y_0	5
m	$\frac{3}{2}$

2. Reemplazamos estos datos en la ecuación punto pendiente:

$$y - y_0 = m (x - x_0)$$

$$y - 5 = \frac{3}{2} (x - (-2))$$

3. Se realizan las operaciones indicadas:

$$2 * (y - 5) = 3 * (x + 2)$$

$$2y - 10 = 3x + 6$$



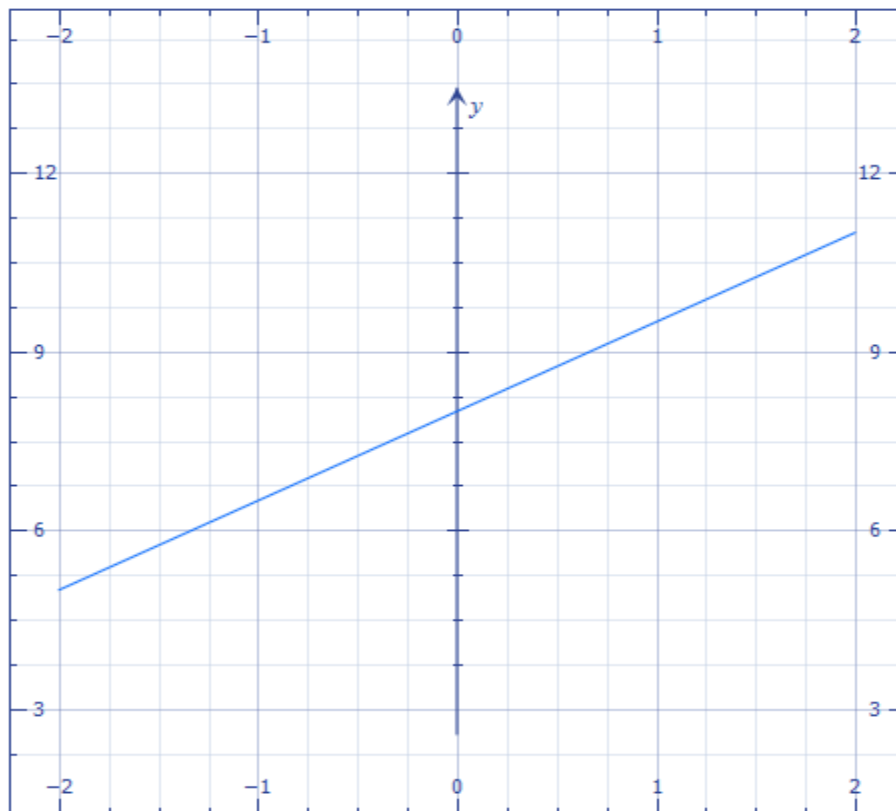
4. Se obtiene la forma $y = mx + b$, o lo que es lo mismo, se determina **el modelo lineal pedido**:

$$2y = 3x + 6 + 10$$

$$y = \frac{3x+16}{2}, \text{ separando denominadores:}$$

$$y = \frac{3x}{2} + \frac{16}{2}, \text{ simplificando } \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 8$$

5. Gráfica de la función: $y = \frac{3}{2}x + 8$



- **Determinación de la ecuación de la línea recta**
- Conocidos dos puntos de coordenadas: (x_0, y_0) y (x_1, y_1) sobre la línea recta.
(<http://www.youtube.com/watch?v=lgdn4G1rbfU>)
(<http://www.youtube.com/watch?v=KUKKJMbC6m8&feature=related>)

•

1. Se Halla la pendiente de la recta, utilizando la ecuación de la pendiente:

$$m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \quad \text{o} \quad m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

2. Con la pendiente y cualquiera de los dos puntos anteriores se determina el modelo lineal, utilizando la ecuación punto pendiente de la línea recta.

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Encuentre la ecuación y la gráfica de la recta que pasa por los puntos de coordenadas

a. (3,2) y (5,1).

Procedimiento

1. Los datos conocidos para determinar la pendiente son:

Tabla A

x_0	y_0	x_1	y_1
3	2	5	1



O, también:

Tabla B

x_0	y_0	x_1	y_1
5	1	3	2

PISTA DE APRENDIZAJE

Tenga presente que: para efectos de hallar la pendiente se puede tomar cualquier punto como el inicio, bien sea:

$$(x_0, y_0) \text{ o } (x_1, y_1)$$

2. Para determinar la pendiente tomaremos los datos de la tabla A:

$$m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

$$m = \frac{2 - 1}{3 - 5} = \frac{1}{-2} \rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

3. Los datos para determinar el modelo lineal son:

m	$-\frac{1}{2}$
x_0	3
y_0	2

4. Reemplazamos en la ecuación de la recta Punto- Pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$



$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

5. Realizamos las operaciones indicadas:

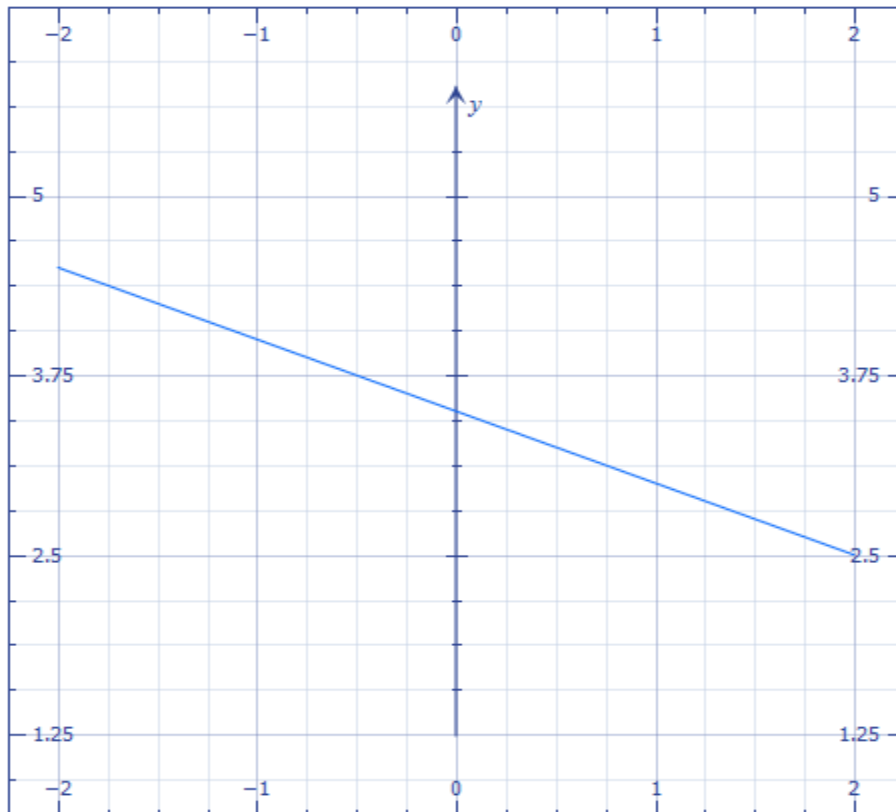
$$2 * (y - 2) = -1 (x - 3) \rightarrow 2y - 4 = -x + 3 \rightarrow$$

$$2y = -x + 3 + 4 \rightarrow y = \frac{-x+7}{2}, \text{ separando denominadores:}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

6. Obtuvimos el modelo matemático o ecuación lineal pedida y su gráfica sería:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$



Actividad: realice el procedimiento anterior con los datos de la tabla B y determine que obtiene el mismo resultado.

- **Determinación de la ecuación de la línea recta**

Conocido un punto de coordenadas (x_0, y_0) sobre la línea recta y la condición que la recta cuyo modelo se desea buscar o **es paralela** o **es perpendicular** a una recta cuyo modelo es conocido:

Se encuentra la pendiente de la recta cuyo modelo es conocido. Para ello se lleva el modelo a la forma intercepto - pendiente $y = mx + b$, el número que acompañe a la x es la pendiente.

Nota: rectas paralelas y rectas Perpendiculares

RECTAS	CARACTERÍSTICAS	REPRESENTACIÓN
PARALELAS	Dos o más rectas son paralelas si se cumple que tienen la misma pendiente.	Sean L_1 y L_2 <i>dos rectas paralelas, entonces:</i> $m_1 = m_2$
PERPENDICULARES	Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a menos uno.	Sean L_1 y L_2 <i>dos rectas perpendiculares, entonces:</i> $m_1 * m_2 = -1$ $\checkmark m_1 = -\frac{1}{m_2}$ $\checkmark m_2 = -\frac{1}{m_1}$

(<http://www.youtube.com/watch?v=8gEyd4oekz0&feature=related>)

(<http://www.youtube.com/watch?v=bfZ57ESvFok&feature=relmfu>)

(<http://www.youtube.com/watch?v=ee90DBguSR8&feature=related>)

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

- a. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto de coordenadas $(-1, 5)$ y que es **perpendicular** a la recta de ecuación es $2y - 4x = 6$

Procedimiento

1. **Datos conocidos:** solo se conocen las coordenadas del punto $(-1, 5)$, se debe encontrar la pendiente:

x_0	- 1
y_0	5
m	¿?

2. La información que se tiene es que la recta pedida es perpendicular a la recta cuya ecuación o modelo es conocido.

- Para encontrar la pendiente de la recta perpendicular se debe despejar la y en la ecuación conocida y el número que acompañe a la x es la pendiente:

$$2y - 4x = 6 \rightarrow 2y = 4x + 6 \rightarrow y = \frac{4x+6}{2}, \text{ separando denominadores, tenemos:}$$

$$y = \frac{4x}{2} + \frac{6}{2} \rightarrow y = 2x + 3$$

- Por lo tanto la pendiente de la recta es $m_1 = 2$ (coeficiente de x).

3. Para hallar la pendiente de la recta cuya ecuación se desea buscar se aprovecha la condición que si dos rectas son perpendiculares el producto de sus pendientes es igual a menos uno $m_1 * m_2 = -1$ y se despeja la pendiente buscada.

Sea m_2 la pendiente de la recta buscada, se sabe que $m_1 = 2$, entonces reemplazando en:
 $m_1 * m_2 = -1$, tenemos:

$$2 * m_2 = -1$$

$$m_2 = -\frac{1}{2}$$

3. Se halla la ecuación de la recta pedida, utilizando el punto conocido y la nueva pendiente encontrada reemplazando estos valores en: $y - y_0 = m (x - x_0)$

x_0	- 1
y_0	5
m	$-\frac{1}{2}$

$$y - 5 = -\frac{1}{2} [x - (-1)]$$

- 4 Se realizan las operaciones indicadas:

$$2 * (y - 5) = -1 * [x + 1] \rightarrow 2y - 10 = -x - 1 \rightarrow$$

$$2y = -x - 1 + 10 \rightarrow y = \frac{-x + 9}{2} \rightarrow$$



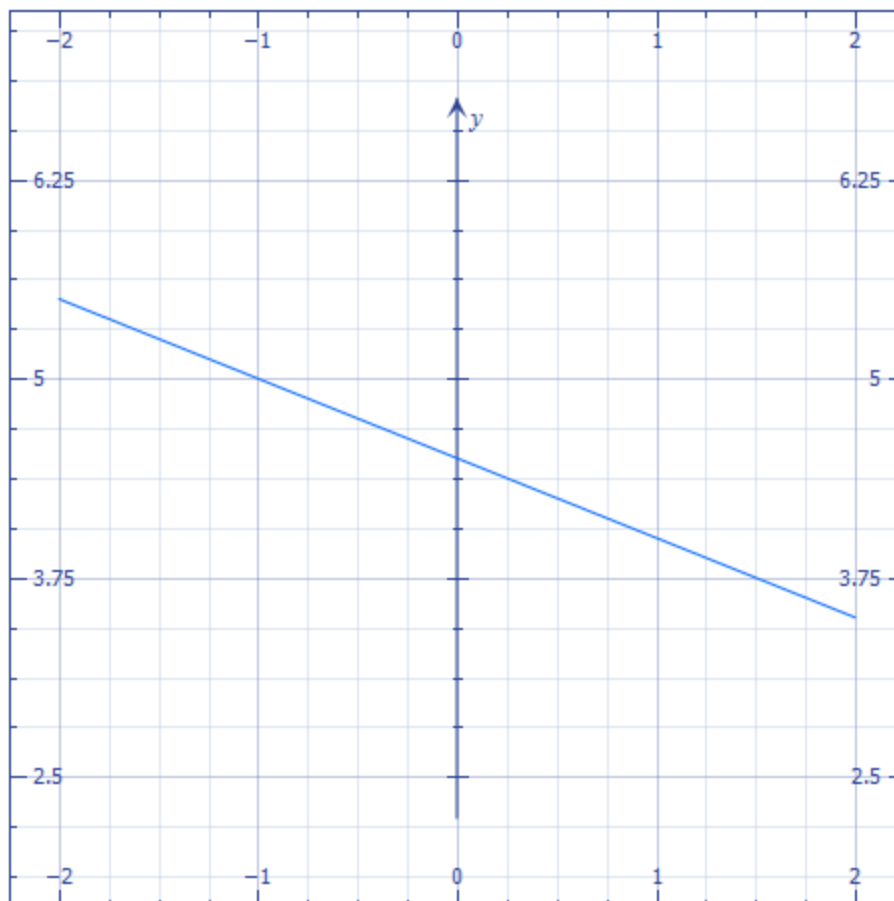
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

Ecuación o modelo lineal pedido.

5. concluimos entonces que:

$y = 2x + 3$ Es perpendicular a $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

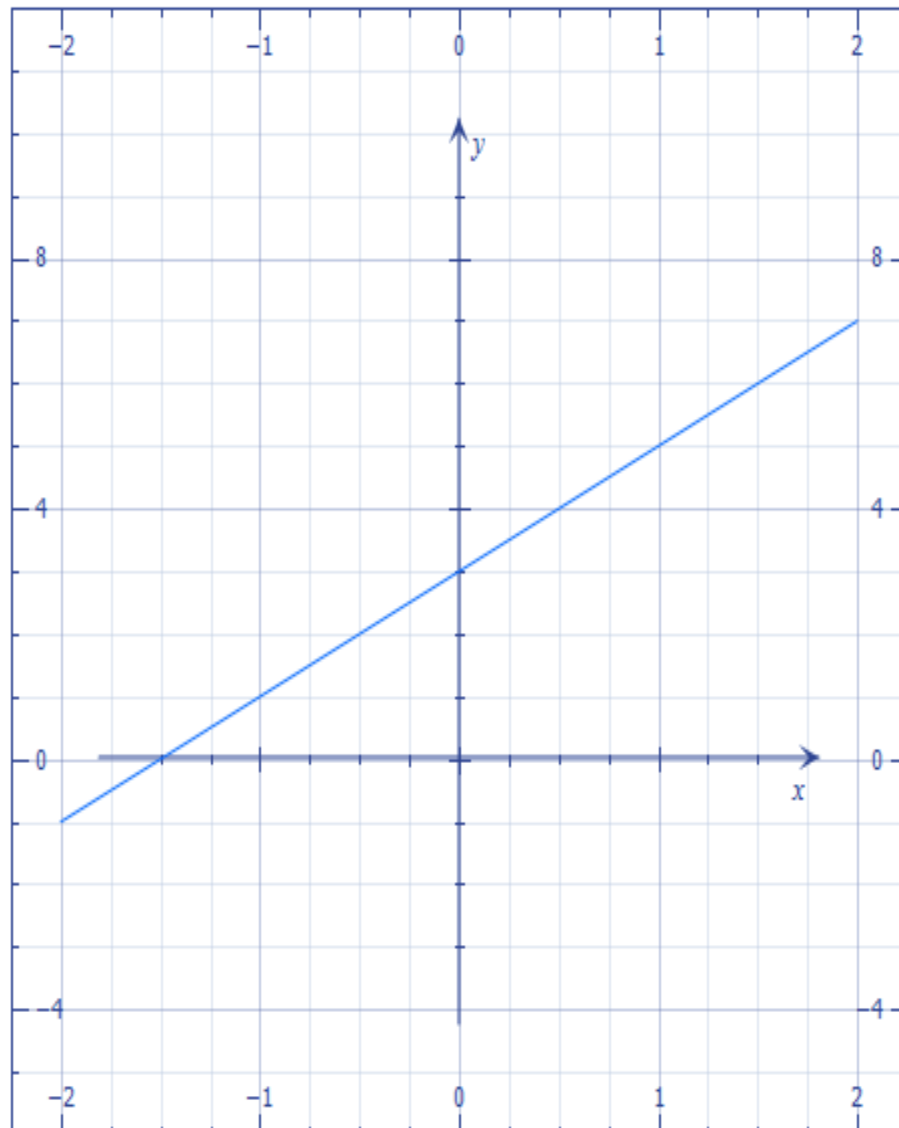
6. La gráfica correspondiente a $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$





7 . La gráfica correspondiente ^a:

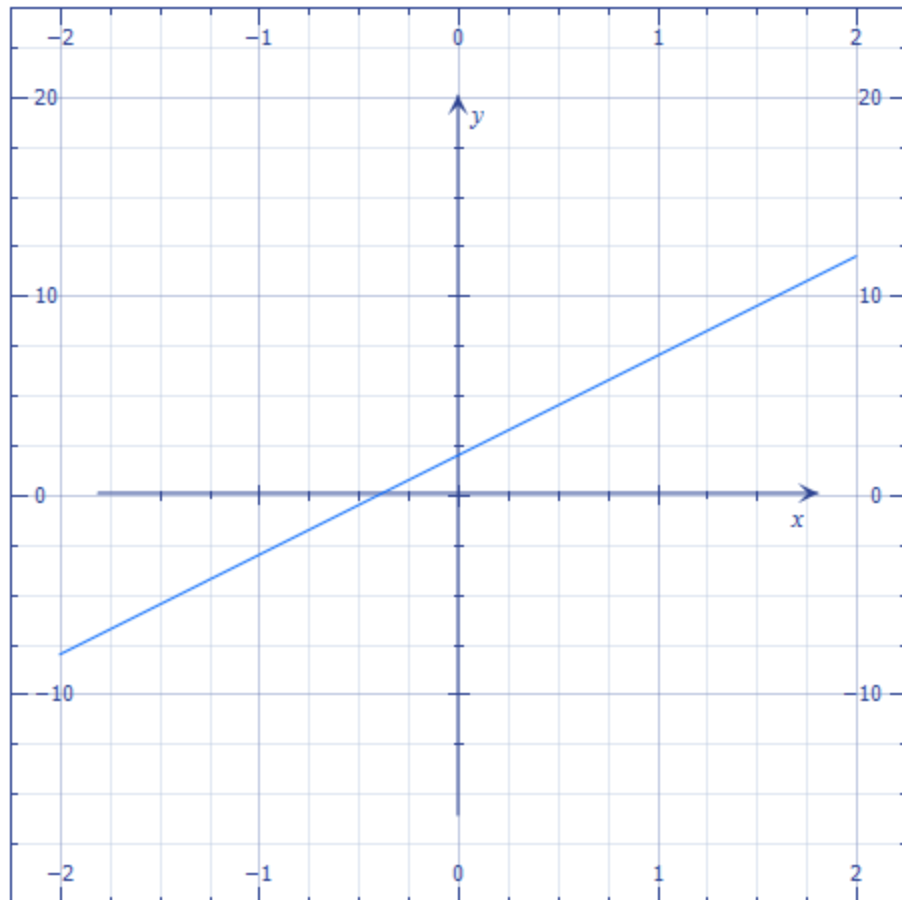
$$y = 2x + 3$$





- b.** Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto de coordenadas $(3,3)$ y es paralela a la recta cuya ecuación es:

$y = 5x + 2$, la gráfica de esta función es:



GRÁFICA A



Procedimiento

1. Como son rectas paralelas tienen la misma pendiente. La pendiente de la recta dada es el número que acompaña a la x después de haber despejado la y ; como ya la y está despejada podemos ver que la pendiente es 5.
2. Los datos conocidos para hallar la ecuación son:

x_0	3
y_0	3
m	5

3. Se halla la ecuación de la recta pedida, utilizando el punto conocido y pendiente conocida reemplazando estos valores en: $y - y_0 = m(x - x_0)$

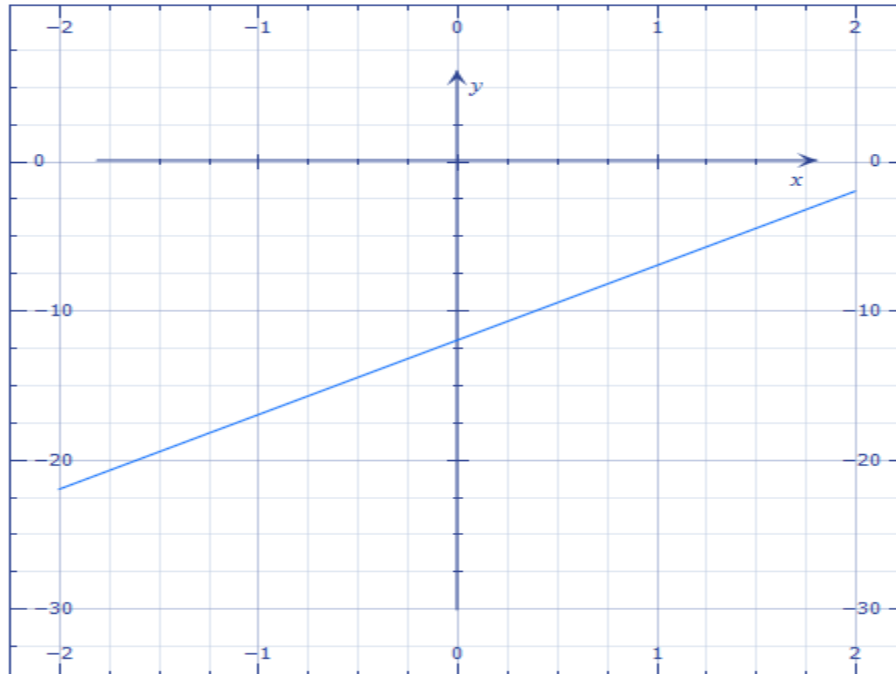
$$y - 3 = 5(x - 3)$$

4. Se realizan las operaciones indicadas:

$$y - 3 = 5x - 15 \rightarrow y = 5x - 15 + 3 \rightarrow$$

$$y = 5x - 12, \text{ ecuación pedida.}$$

5. Gráficamente: $y = 5x - 12$ (Paralela a $y = 5x + 2$, GRÁFICA A)



GRÁFICA B

5.4. Tema 4: Aplicaciones del modelo lineal

Al enfrentarse a un problema se sugiere el siguiente procedimiento:

- Identifique las variables que interviene en el problema
- Identifique variable independiente y asígnele una letra.
- Identifique la variable dependiente y asígnele una letra.
- Identifique los datos del problema.
- Cuando sea necesario utilice las condiciones del problema para buscar más datos.
- De acuerdo a los datos encuentre el modelo lineal pedido.
- Con el modelo responda a las preguntas planteadas.

Enlaces para aplicaciones de la línea recta.

<http://www.youtube.com/watch?v=gCqprj3jTzQ>

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

- a. Suponga que la demanda por semana de un producto es de 100 unidades cuando el precio es de \$ 58 por unidad, y de 200 unidades si son a \$ 51 cada una. Determinar La ecuación de demanda, suponiendo que es lineal.

Procedimiento

1. **Estrategia:** ya que la ecuación de demanda es lineal, la curva de la demanda debe ser una línea recta. Tenemos que la cantidad q y el precio p están relacionados linealmente de tal modo que $p = 58$ cuando $q = 100$, y $p = 51$ cuando

$q = 200$. Con estos puntos podemos encontrar una **ecuación de la recta**, esto es, **la ecuación de demanda**.

2. Datos conocidos del problema: $p_1(100, 58)$ y $p_2(200, 51)$

$x_0(q_1)$	$y_0(p_1)$	$x_1(q_2)$	$y_1(p_2)$
100	58	200	51

3. Reemplazando estos valores en:

$$m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \text{ Obtenemos el valor de la pendiente.}$$

- La pendiente de la recta que pasa por $p_1(100, 58)$ y $p_2(200, 51)$ es:

$$m = \frac{51-58}{200-100} \rightarrow m = -\frac{7}{100}$$

4. Una ecuación de la recta (forma punto - pendiente $y = mx + b$) es:

$$p - 58 = -\frac{7}{100}(q - 100)$$

5. Realizando las operaciones indicadas:

$$100 * (p - 58) = -7 * (q - 100)$$

$$100p - 5800 = -7q + 700$$

$$100p = -7q + 700 + 5800$$

$$100p = -7q + 700 + 5800$$

$$p = \frac{-7q + 700 + 5800}{100} \rightarrow p = \frac{-7q + 6500}{100}$$

Dividiendo por 100 y separando denominadores y simplificando, tenemos:

$$p = -\frac{7q}{100} + \frac{6500}{100} \rightarrow p = -\frac{7q}{100} + 65, \text{ que corresponde a:}$$

La ecuación de la demanda (Haeussler, 1997)

- b.** Suponga que el valor de una maquinaria en cierta empresa disminuye cada año un 10% de su valor original. Si el valor original es de \$ 200 millones.

Encuentre un modelo matemático que exprese el valor de la maquinaria en cualquier año.

Procedimiento

1. Datos conocidos:

t	Número de años desde que se compró la maquinaria.
$y = c(t)$	el costo de la maquinaria para cualquier año t .
Costo inicial de la maquinaria: $t_0 = 0, y_0 = 200$ Dónde: t_0 : Tiempo inicial. y_0 : Costo inicial	\$ 200 millones
Precio de la maquinaria disminuye cada año	10% de su valor inicial, esto es: $200 \cdot 10\% = 20$ millones de pesos

Esta disminución anual es **la pendiente** de la recta, la **disminución es constante**, por lo tanto el signo de esta pendiente es **negativo**.

$$m = -20$$

2. Para hallar el modelo lineal se dispone de la siguiente información:

t_0	0
y_0	200
m	- 20

3. Reemplazando en la ecuación punto pendiente:

$$y - 200 = -20(x - 0)$$

$$y - 200 = -20(x), \text{ Despejando } Y:$$

$$y = c(t) = -20(x) + 200$$

Representa el modelo matemático que expresa el valor de la maquinaria en cualquier año.

PISTA DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria que: cuando se tiene un valor constante que aumenta o disminuye, este valor corresponde a la pendiente.

Cuando **aumenta**, quiere decir que **la pendiente es positiva**.

Cuando **disminuye**, quiere decir que **la pendiente es negativa**.

- C.** Una compañía fabrica y vende cierto tipo de artículo bajo las siguientes condiciones: costo de fabricación de una unidad es de 25 dólares, cada unidad se vende a 40 dólares y la compañía tiene costos fijos mensuales de 350 dólares. Determine un modelo para los costos totales mensuales de la compañía.

Procedimiento

1. Datos conocidos: MODELO DE COSTOS

q	El número de unidades producidas y vendidas mensualmente.
$y = c(q)$	Costo total mensual cuando se producen q unidades.



Si no hay producción: $q_0 = 0, y_0 = 350$	q_0 : Cantidad inicial de producción y_0 : Costos iniciales de producción
m (pendiente para el costo)	Costo de fabricación de una unidad: 25 US/unidad
Como la pendiente (m) es positiva	Por cada unidad que se aumente la producción, los costos aumentarán US\$ 25, por lo tanto, la pendiente significa en este caso el costo de producir una sola unidad.

2. Para hallar el modelo lineal se dispone de la siguiente información:

q_0	0
y_0	350
m	25

3. Reemplazando en la ecuación punto pendiente:

$$y - 350 = 25(q - 0)$$

$$y - 350 = 25(q), \text{ Despejando Y:}$$

$$y = 25q + 350$$

Modelo de costo pedido.

D. Sea r el ingreso y q el número de unidades producidas y vendidas. Se tiene la siguiente información:

Si no se vende nada, no habrá ingreso, esto nos da el siguiente punto: $q_0=0, r_0=0$.

La pendiente para el ingreso es 40 ($m = 40 \frac{\text{US\$}}{\text{unidad}}$).

PROCEDIMIENTO

1. Datos conocidos: MODELO PARA EL INGRESO

q	El número de unidades producidas y vendidas mensualmente.
r	el ingreso
Si no se vende nada: $q_0 = 0, r_0 = 0$	q_0 : Cantidad inicial vendida r_0 : Ingreso inicial
m (pendiente para el ingreso)	40 US/unidad
Como la pendiente (m) es positiva	Por cada unidad que se aumenten las ventas, los ingresos aumentarán US\$ 40, por lo tanto, la pendiente significa en este caso el precio de venta de cada unidad.

2. Para hallar el modelo lineal se dispone de la siguiente información:

q_0	0
r_0	0
m	40

3. Reemplazando en la ecuación punto pendiente:

$$r - 0 = 40(q - 0)$$

$$r = 40 q,$$

$r = 40 q$ Modelo lineal para el ingreso.
--

d. Tomando los datos de los problemas anteriores podemos obtener un modelo para:

➤ **La utilidad o ganancia.**

1. Sea U la utilidad, tenemos:

UTILIDAD (U)	=	INGRESOS (r)	-	COSTOS: $c(q)$
$U = r - c(q)$				

2. Sabemos que:

$$r = 40q$$

$y = c(q) = 25q + 350$, Reemplazando estos valores en la ecuación de utilidad tenemos:

$$u = 40q - (25q + 350) \rightarrow u = 40q - 25q - 350, \text{ la utilidad, en \$ o en US, está dada por:}$$

$$u = 15q - 350$$

➤ **El punto de equilibrio.** Punto de equilibrio quiere decir **utilidad igual a cero** ($u = 0$)

$$u = 0 \rightarrow 15q - 350 = 0 \rightarrow 15q = 350 \rightarrow q = \frac{350}{15}$$

$q = 24 \text{ unidades (aprox.)}$.

Interpretando el resultado obtenido:

Para no obtener utilidades se deben producir 24 unidades.

- a. “El costo total para un fabricante está conformado por costos indirectos fijos de US\$ 200 anuales más costos de producción de US\$ 50 por unidad”. (Hoffman & Bradley, 1995, p.29).

Encuentre un modelo para los costos totales anuales del fabricante en términos del número de unidades producidas.

PROCEDIMIENTO

1. Datos conocidos: MODELO COSTOS TOTALES

q	El número de unidades producidas anualmente.
$y = c(q)$	Costo cuando se producen q unidades.
Si no se vende nada: $q_0 = 0, r_0 = 0$	q_0 : Cantidad inicial vendida r_0 : Ingreso inicial
Si no hay producción se tienen costos de US \$ 200	$q_0 = 0, y_{o=200}$
La pendiente (m) es positiva y $m = 50$	El costo por unidad representa la pendiente.

2. Reemplazando los valores conocidos: **$p(0, 200)$** y **$m = 50$** en la ecuación punto pendiente: **$y - y_0 = m(q - q_0)$** , tenemos:

$$y - 200 = 50(q - 0) \rightarrow$$

$$y = 50q + 200$$

Este es el modelo lineal pedido para costos totales.

6. PISTAS DE APRENDIZAJE

Tener en cuenta: que para sumar fraccionarios heterogéneos se debe llevar cada fraccionario a un denominador común, que es el m.c.m. de los denominadores.

Tenga presente: para sumar expresiones algebraicas, se debe sumar el coeficiente de los términos semejantes, el exponente de las letras no cambia, debe ser el mismo.

Traer a la memoria: la división entre cero no está definida en ningún campo numérico. Cuando en el numerador hay un número diferente de cero y en el denominador está el cero se dice que el resultado no existe; si en el numerador y en el denominador está el cero, se dice que el resultado es indefinido.

Tener en cuenta: el signo de un número fraccionario puede ir en el numerador, en el denominador o en el vínculo. Se acostumbra escribirlo en el numerador o en el vínculo.

Tenga presente: para expandir un polinomio elevado a una potencia n , no se distribuye la potencia para cada término del binomio, esto es, $(5x - 9)^4$ no es igual a $(5x)^4 - (9)^4$. Para expandir $(5x - 9)^4$, una forma es utilizando el triángulo de Pascal.

Traer a la memoria: la raíz par de los números negativos no pertenece a los números reales.

Tener en cuenta: cuando se suma dos números, si los signos son iguales, se suma los números y se conserva el signo que tienen; si los signos son contrarios, se restan y se conserva el signo del número mayor.

Tenga presente: si m_1 es la pendiente de una recta y m_2 es la pendiente de una recta perpendicular a la primera, se cumple que $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Traer a la memoria: una suma de cuadrados no es factorizable en los enteros.

Tener en cuenta: el orden en que se efectúan operaciones es: Primero potencias o raíces, luego multiplicaciones o divisiones y por último sumas y restas.

7. GLOSARIO

Mínimo común múltiplo. Símbolo m.c.m. Es el menor de todos los números posibles que contiene exactamente a dos o más números.

Factorizar. “**FACTORIZACION**. El proceso de escribir un polinomio como el producto de polinomios (o factores) irreducibles se llama **Factorización o descomposición en factores irreducibles**.” Díez, 2002, p.8).

Igualdad. Una igualdad es una expresión que indica que dos o más cantidades tienen el mismo valor.

Ecuación. “Una **ecuación** es una proposición que indica que dos expresiones son iguales.” (Haeussler & Richard, 1977, p.33).

Identidad. “Una ecuación se llama **identidad** si todos los números del dominio de la variable la satisfacen.” (Zill & Dewar, 1995, p.62).

Desigualdad. Una desigualdad es un enunciado que indica que un número es mayor que otro; o que un número es mayor o igual que otro; o que un número es menor que otro; o que un número es menor o igual que otro.

Inecuación. Es una desigualdad con incógnitas.

Racionalizar. Consiste en: Utilizando un proceso matemático cambiar una raíz que está en el numerador para el denominador o viceversa.

Expresión algebraica. “Si números representados por símbolos, se combinan mediante operaciones de suma, resta, multiplicación, división o extracción de raíces, entonces la expresión resultante es llamada expresión algebraica.” (Haeussler & Richard, 1977, p.17).

Productos notables. Son fórmulas que permiten multiplicar polinomios por simple inspección.

Raíz de una ecuación. “Una solución o **raíz**, de una ecuación es cualquier número que, sustituido en la ecuación, la convierte en una proposición verdadera.” (Zill & Dewar, 1995, p.62).

8. BIBLIOGRAFÍA

Baldor, A. (1996). Álgebra. Madrid: Ediciones y Publicaciones Preludio.

Dávila, A., Navarro, P., & Carvajal, J. (1996). INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO. Caracas: McGraw-Hill.

Diez, L. H. (2002). Matemáticas operativas. Primer año de universidad, Preuniversitarios y semilleros. Medellín: Zona Dinámica.

Haeussler, E. &. (1997). Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. México: Prentice hall.

Hoffmann, L. D., & Bradley, G. L. (1995). CÁLCULO Aplicado a Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales. Santafé de Bogotá: McGRAW-HILL.

Purcell, E., & Varverg, D. (1993). Cálculo con geometría analítica. México: Prentice Hall.

S.T.Tan. (1998). Matemáticas para administración y economía. México: International Thompson editores, S.A.

Stewar, J., Lothar, R., & Watson, S. (2001). Precálculo. Madrid: International Thomson Editores, S.A.

Swokowski, E. (1986). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Uribe, J. (1999). Teoría de conjuntos y temas afines. Medellín.: Serie Schaum.

Zill, D. G., & Dewar, J. (1992). Algebra y trigonometría. Santafé de Bogotá: Mcgraw-Hill/Interamericana S.A.