



# **ESCUELA DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA**

## **ASIGNATURA: Modelos de Simulación**

**CORPORACIÓN UNIVERSITARIA REMINGTON**  
**DIRECCIÓN PEDAGÓGICA**

Este material es propiedad de la Corporación Universitaria Remington (CUR), para los estudiantes de la CUR en todo el país.

**2011**

## CRÉDITOS

---



El módulo de estudio de la asignatura Modelos de Simulación es propiedad de la Corporación Universitaria Remington. Las imágenes fueron tomadas de diferentes fuentes que se relacionan en los derechos de autor y las citas se relacionan en la bibliografía. El contenido del módulo está protegido por las leyes de derechos de autor que rigen al país.

Este material tiene fines educativos y no puede usarse con propósitos económicos o comerciales.

### AUTOR

---

Carlos Guillermo Londoño Herrera

Diplomado en Diseño Curricular y Herramientas significativas de Autoaprendizaje. Segundo semestre del 2008.

Docente de Estadística y Matemáticas

Centro de Atención de Tutoría Virtual para el Aprendizaje de la Estadística en la Corporación Universitaria Remington durante el año 2011

[Carlos.londono@remington.edu.co](mailto:Carlos.londono@remington.edu.co)

[Crow43@gmail.com](mailto:Crow43@gmail.com) Correo electrónico

**Nota:** el autor certificó (de manera verbal o escrita) No haber incurrido en fraude científico, plagio o vicios de autoría; en caso contrario eximió de toda responsabilidad a la Corporación Universitaria Remington, y se declaró como el único responsable.

### RESPONSABLES

---

#### Mauricio Sepúlveda

Director. De la Escuela de Ciencias Básicas e Ingeniería

#### Director Pedagógico

Octavio Toro Chica

[dirpedagogica.director@remington.edu.co](mailto:dirpedagogica.director@remington.edu.co)

#### Coordinadora de Medios y Mediaciones Tecnológicas

Angélica Ricaurte Avendaño

[distancia.coordinadormmt@remington.edu.co](mailto:distancia.coordinadormmt@remington.edu.co)

### GRUPO DE APOYO

---

#### Personal de la Unidad de Medios y Mediaciones

EDICIÓN Y MONTAJE

Unidad de Medios y Mediaciones

Primera versión. Febrero de 2011. Derechos Reservados



Esta obra es publicada bajo la licencia Creative Commons. Reconocimiento-No Comercial-Compartir Igual 2.5 Colombia.

### TABLA DE CONTENIDO

---

<b>1.</b>	<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>7</b>
<b>2.</b>	<b>PROPÓSITO GENERAL DEL MODULO .....</b>	<b>8</b>
2.1.	Objetivos .....	8
2.1.1.	Objetivo General .....	8
<b>3.</b>	<b>MAPA DE LA ASIGNATURA .....</b>	<b>9</b>
<b>4.</b>	<b>CONCEPTOS DE MODELOS DE SIMULACION Y CADENA DE MARKOV .....</b>	<b>10</b>
4.1.	Conceptos de Modelos de Simulación .....	11
4.1.1.	Definición de Modelos de simulación .....	11
4.1.2.	Tipos de Modelos de Simulación.....	14
4.2.	Cadena de Markov .....	15
<b>5.</b>	<b>REGRESION LINEAL SIMPLE Y PRONOSTICOS .....</b>	<b>20</b>
5.1.	Regresión Lineal Simple .....	21
5.1.1.	Ecuación Lineal .....	23
5.2.	Pronósticos.....	30
5.2.1.	Promedios Móviles.....	30
5.2.2.	Suavización Exponencial.....	31
<b>6.</b>	<b>TEORIA DE COLAS .....</b>	<b>38</b>
6.1.	Conceptos de Teoría de Colas .....	39
6.1.1.	Modelos de Teoría de Colas .....	39
6.1.2.	Solución en Excel.....	41
6.1.3.	Procedimiento en Excel.....	41
6.1.4.	Solución en Excel.....	44
6.1.5.	Solución en Excel.....	45
6.2.	Modelos de Inventarios.....	48
6.2.1.	Solución en Excel.....	49
<b>7.</b>	<b>GLOSARIO .....</b>	<b>57</b>
<b>8.</b>	<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>58</b>

## 1. INTRODUCCIÓN

Cuando alguien tiene la responsabilidad de conducir un sistema dado, como por ejemplo: un banco, una ciudad, un sistema de transporte, etc., debe tomar continuamente decisiones acerca de las acciones que ejecutará sobre el sistema. Estas decisiones deben ser tales que la conducta resultante del sistema satisfaga de la mejor manera posible los objetivos planteados.

Para poder decidir correctamente es necesario saber cómo responderá el sistema ante una determinada acción. Esto podría hacerse por experimentación con el sistema mismo; pero factores de costos, seguridad y otros hacen que esta opción generalmente no sea viable. A fin de superar estos inconvenientes, se reemplaza el sistema real por otro sistema que en la mayoría de los casos es una versión simplificada. Este último sistema es el modelo a utilizar para llevar a cabo las experiencias necesarias sin los inconvenientes planteados anteriormente.

Al proceso de experimentar con un modelo se denomina simulación. Al proceso de diseñar el plan de experimentación para adoptar la mejor decisión se denomina optimización. Si el plan de experimentación se lleva a cabo con el solo objeto de aprender a conducir el sistema, entonces se denomina entrenamiento o capacitación.

En este punto, es conveniente plantear las siguientes definiciones:

- ◆ Sistema: Conjunto de objetos o ideas que están interrelacionados entre sí como una unidad para la consecución de un fin (Shannon, 1988). También se puede definir como la porción del Universo que será objeto de la simulación.
- ◆ Modelo: Un objeto X es un modelo del objeto Y para el observador Z, si Z puede emplear X para responder cuestiones que le interesan acerca de Y (Minsky).
- ◆ Simulación: Simulación es el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y llevar a cabo experiencias con él, con la finalidad de aprender el comportamiento del sistema o de evaluar diversas estrategias para el funcionamiento del sistema (Shannon, 1988).

## 2. PROPÓSITO GENERAL DEL MODULO

El propósito de curso es que el estudiante aprenda a utilizar los diferentes modelos y a diferenciarlos y su aplicación en su vida académica, profesional, empresarial e investigativa.

### 2.1. Objetivos

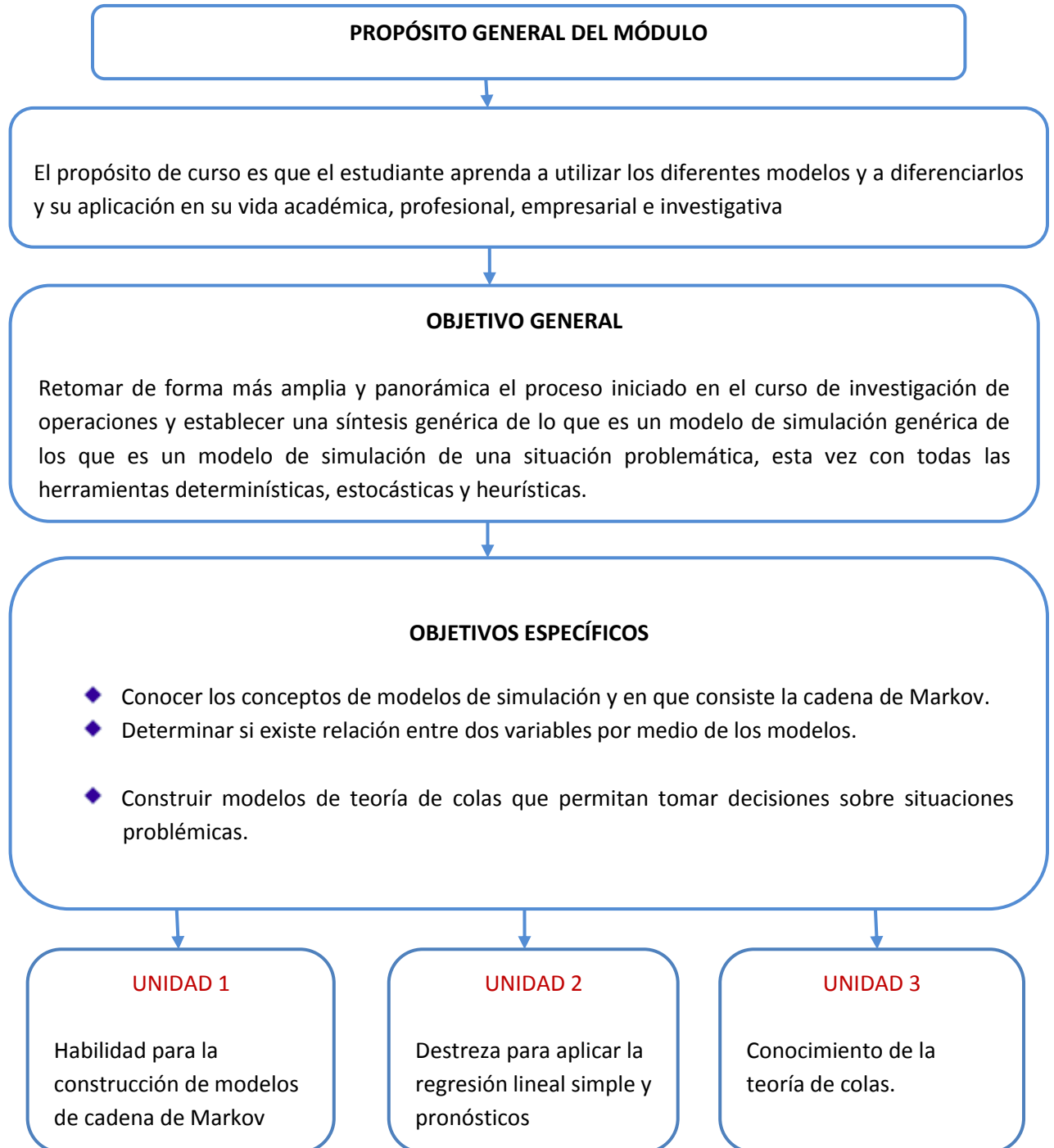
#### 2.1.1. Objetivo General

Retomar de forma más amplia y panorámica el proceso iniciado en el curso de investigación de operaciones y establecer una síntesis genérica de lo que es un modelo de simulación genérica de lo que es un modelo de simulación de una situación problemática, esta vez con todas las herramientas determinísticas, estocásticas y heurísticas.

##### 2.1.1.1 Objetivos Específicos

- ◆ Conocer los conceptos de modelos de simulación y en que consiste la cadena de Markov.
- ◆ Determinar si existe relación entre dos variables por medio de los modelos.
- ◆ Construir modelos de teoría de colas que permitan tomar decisiones sobre situaciones problemáticas.

### 3. MAPA DE LA ASIGNATURA



## 4. CONCEPTOS DE MODELOS DE SIMULACION Y CADENA DE MARKOV

### Objetivo General

- ◆ Conocer los conceptos de modelos de simulación y en que consiste la cadena de Markov.

### Objetivos Específicos

- ◆ Conocer los diferentes conceptos de los modelos de simulación
- ◆ Calcular los distintos parámetros de cadena de Markov
- ◆ Resolver algunos ejercicios de la problemática económica de la vida real

### Prueba Inicial

A continuación encontrará una serie de enunciados con cinco respuestas, de las cuales una sola es verdadera. Marque con una X la que usted considere correcta.

Dadas las siguientes definiciones, el estudiante estará en capacidad de responder a que concepto corresponde:

- ◆ Analizar a que concepto corresponde la siguiente definición:  
\_\_\_\_\_ es la acción y efecto de distribuir  
a. Variable      b. Característica      c. Distribución      d. Probabilidad
- ◆ Analizar a que concepto corresponde la siguiente definición:  
\_\_\_\_\_ mide la frecuencia con la que ocurre un resultado en un experimento bajo condiciones suficientemente estables  
a. Variable      b. Estadística      c. Distribución      d. Probabilidad
- ◆ Analizar a que concepto corresponde la siguiente definición:  
\_\_\_\_\_ es una rama de la matemática que se refiere a la recolección, estudio e interpretación de los datos obtenidos en un estudio  
a. Variable      b. Estadística      c. Probabilidad      d. Parámetro
- ◆ Analizar a que concepto corresponde la siguiente definición:

\_\_\_\_\_ como función matemática, es una cantidad a la cual el operador puede asignarle un valor arbitrario, se distingue de variable, la cual puede tomar sólo aquellos valores que haga la función posible.

- a. Variable      b. Variable dependiente      c. Variable Independiente      d. Parámetro

- ◆ Analizar a que concepto corresponde la siguiente definición:
- ◆ \_\_\_\_\_ es un resultado de una variable al azar especificada por una función de distribución
- ◆ a. Media      b. Parámetro      c. Valor      d. Número aleatorio

## 4.1. Conceptos de Modelos de Simulación

### 4.1.1. Definición de Modelos de simulación

Es un proceso que se da en la realidad mediante la construcción de modelos que resultan del desarrollo de ciertas aplicaciones específicas

#### 4.1.1.1 Aplicabilidad de los Modelos de Simulación

La simulación es conveniente cuando:

- ◆ No existe una formulación matemática analíticamente resoluble. Muchos sistemas reales no pueden ser modelados matemáticamente con las herramientas actualmente disponibles, por ejemplo la conducta de un cliente de un banco.
- ◆ Existe una formulación matemática, pero es difícil obtener una solución analítica. Los modelos matemáticos utilizados para modelar un reactor nuclear o una planta química son imposibles de resolver en forma analítica sin realizar serias simplificaciones.

#### 4.1.1.2 Teoría de los modelos de simulación

No existe el sistema real. Es problema del ingeniero que tiene que diseñar un sistema nuevo. El diseño del sistema mejorará notablemente si se cuenta con un modelo adecuado para realizar experimentos.

Los experimentos son imposibles debido a impedimentos económicos, de seguridad, de calidad o éticos. En este caso el sistema real está disponible para realizar experimentos, pero la dificultad de los mismos hace que se descarte esta opción. Un ejemplo de esto es la imposibilidad de provocar



fallas en un avión real para evaluar la conducta del piloto, tampoco se puede variar el valor de un impuesto a para evaluar la reacción del mercado.

El sistema evoluciona muy lentamente o muy rápidamente. Un ejemplo de dinámica lenta es el problema de los científicos que estudian la evolución del clima. Ellos deben predecir la conducta futura del clima dado las condiciones actuales, no pueden esperar a que un tornado arrase una ciudad para luego dar el mensaje de alerta. Por el contrario, existen fenómenos muy rápidos que deben ser simulados para poder observarlos en detalles, por ejemplo una explosión.

Entre las posibles desventajas de la simulación se pueden citar:

- ◆ El desarrollo de un modelo puede ser costoso, laborioso y lento.
- ◆ Existe la posibilidad de cometer errores. No se debe olvidar que la experimentación se lleva a cabo con un modelo y no con el sistema real; entonces, si el modelo está mal o se cometen errores en su manejo, los resultados también serán incorrectos.
- ◆ No se puede conocer el grado de imprecisión de los resultados. Por lo general el modelo se utiliza para experimentar situaciones nunca planteadas en el sistema real, por lo tanto no existe información previa para estimar el grado de correspondencia entre la respuesta del modelo y la del sistema real.
- ◆ Actualmente la simulación presta un invaluable servicio en casi todas las áreas posibles, algunas de ellas son:
- ◆ Procesos de manufacturas: Ayuda a detectar cuellos de botellas, a distribuir personal, determinar la política de producción.
- ◆ Plantas industriales: Brinda información para establecer las condiciones óptimas de operación, y para la elaboración de procedimientos de operación y de emergencias.
- ◆ Sistemas públicos: Predice la demanda de energía durante las diferentes épocas del año, anticipa el comportamiento del clima, predice la forma de propagación de enfermedades.
- ◆ Sistemas de transportes: Detecta zonas de posible congestionamiento, zonas con mayor riesgo de accidentes, predice la demanda para cada hora del día.
- ◆ Construcción: Predice el efecto de los vientos y temblores sobre la estabilidad de los edificios, provee información sobre las condiciones de iluminación y condiciones

ambientales en el interior de los mismos, detecta las partes de las estructuras que deben ser reforzadas.

- ◆ **Diseño:** Permite la selección adecuada de materiales y formas. Posibilita estudiar la sensibilidad del diseño con respecto a parámetros no controlables.
- ◆ **Educación:** Es una excelente herramienta para ayudar a comprender un sistema real debido a que puede expandir, comprimir o detener el tiempo, y además es capaz de brindar información sobre variables que no pueden ser medidas en el sistema real.
- ◆ **Capacitación:** Dado que el riesgo y los costos son casi nulos, una persona puede utilizar el simulador para aprender por sí misma utilizando el método más natural para aprender: el de prueba y error.

#### **4.1.1.3 Teoría de Modelos y Simulación**

La importancia de la Simulación es evidente al considerar el impacto que tuvieron algunos trabajos, como ser:

- ◆ **La Perestroyka:** Estudios de simulación efectuados en Rusia en las décadas del 70 y 80 convencieron a los dirigentes de la necesidad de plantear un fuerte cambio en la economía de ese país.
- ◆ **La caída de la bolsa de New York en 1988:** La utilización de programas de simulación por parte de los corredores de la bolsa causó una falsa inestabilidad que provocó la caída.
- ◆ **El regreso del Apolo 13:** La simulación jugó un rol fundamental en la determinación del plan de emergencia. La nave retornó con éxito a pesar de las graves averías.
- ◆ **Los Voyagers:** Gracias a la simulación se pudieron establecer los itinerarios óptimos para estas naves con un mínimo consumo de energía aprovechando la atracción gravitacional de los planetas.
- ◆ **Proyecto Monte Carlo:** Von Newman y Ulam (1945) emplearon simulación para estudiar reacciones nucleares.
- ◆ **Los modelos del planeta:** Algunos plantean la posibilidad de un calentamiento global debido al efecto invernadero. Otros plantean la posibilidad de un enfriamiento y predicen una nueva era glacial.

- ◆ Capacitación de tropas: En el operativo “Tormenta del desierto” llevado a cabo en la guerra contra Irak, las tropas de todas las fuerzas estadounidenses que participaron (fuerza aérea, marina y ejército) fueron entrenadas con simuladores.
- ◆ Capacitación de policías: Se utiliza entornos virtuales para que el policía aprenda a conducirse en situaciones de riesgo.
- ◆ Simuladores de vuelos: Fue una de las primeras aplicaciones de los simuladores. Actualmente se utilizan para entrenar pilotos de aviones comerciales y de combate.

#### 4.1.2. Tipos de Modelos de Simulación

De acuerdo a la naturaleza del modelo empleado, la simulación puede ser por (Fishman, 1978):

- ◆ Identidad: Es cuando el modelo es una réplica exacta del sistema en estudio. Es la que utilizan las empresas automotrices cuando realizan ensayos de choques de automóviles utilizando unidades reales.
- ◆ Cuasi-identidad: Se utiliza una versión ligeramente simplificada del sistema real. Por ejemplo, los entrenamientos militares que incluyen movilización de equipos y tropas pero no se lleva a cabo una batalla real.
- ◆ Laboratorio: Se utilizan modelos bajo las condiciones controladas de un laboratorio. Se pueden distinguir dos tipos de simulaciones:
- ◆ Juego operacional: Personas compiten entre ellas, ellas forman parte del modelo, la otra parte consiste en computadoras, maquinaria, etc. Es el caso de una simulación de negocios donde las computadoras se limitan a recolectar la información generada por cada participante y a presentarla en forma ordenada a cada uno de ellos.
- ◆ Hombre-Máquina: Se estudia la relación entre las personas y la máquina. Las personas también forman parte del modelo. La computadora no se limita a recolectar información, sino que también la genera. Un ejemplo de este tipo de simulación es el simulador de vuelo.
- ◆ Simulación por computadora: El modelo es completamente simbólico y está implementado en un lenguaje computacional. Las personas quedan excluidas del modelo. Un ejemplo es el simulador de un sistema de redes de comunicación donde la conducta de

los usuarios está modelada en forma estadística. Este tipo de simulación a su vez puede ser:

- ◆ Digital: Cuando se utiliza una computadora digital.
- ◆ Analógica: Cuando se utiliza una computadora analógica. En este grupo también se pueden incluir las simulaciones que utilizan modelos físicos.

## 4.2. Cadena de Markov

El análisis de markov consiste en una forma de analizar el movimiento actual del comportamiento de una variable discreta o continua con respecto al año. Es un procedimiento en cadena y se utiliza para la toma de decisiones.

### 1. Matriz de transición de n pasos

Una matriz de transición de n pasos es una matriz de probabilidad en una etapa.

### 2. Ecuación de Chapman – Kolmagorov

Es un procedimiento que me permite realizar un proceso en cadena para obtener la solución a un problema dado por medio de multiplicación de matrices.

### 3. Tiempo de Recurrencia

Es un proceso que me permite obtener información en términos de tiempo sobre el número de transacciones que hace el proceso de in de un estado i a un estado j por primera vez.

### 4. Probabilidades de estado estable

Es un proceso que me permite obtener información en términos de probabilidades sobre el número de transacciones que hace el proceso de in de un estado i a un estado j por primera vez.

### 5. Costo promedio esperado/ unidad de tiempo

Es el costo que se obtiene e varios periodos de tiempo, el cual está sujeto a la información en términos de probabilidades sobre el número de transacciones que hace el proceso de in de un estado i a un estado j por primera vez.

## EJEMPLO

Las ventas de una empresa de alimentos durante los primeros cuatro meses del año en cuatro ciudades del País, dieron que el primer mes vendieron en la ciudad uno una cantidad de 2500 productos en la ciudad 1, 2300 productos en la ciudad 2, 2200 en la ciudad 3 y 2500 en la ciudad 4. Para el segundo mes se vendieron en la ciudad uno una cantidad de 2650 productos en la ciudad 1, 2450 productos en la ciudad 2, 2250 en la ciudad 3 y 2600 en la ciudad 4. Para el tercer mes se vendieron en la ciudad uno una cantidad de 2750 productos en la ciudad 1, 2550 productos en la ciudad 2, 2350 en la ciudad 3 y 2700 en la ciudad 4. En el cuarto mes se vendieron en la ciudad uno una cantidad de 2850 productos en la ciudad 1, 2650 productos en la ciudad 2, 2450 en la ciudad 3 y 2800 en la ciudad 4. Además las ganancias Por las ventas de los productos fueron para las 4 ciudades de \$7.500.000 para la ciudad 1, \$6.500.000 para la ciudad 2, \$6.000.000 para la ciudad 3 y \$7.250.000 para la ciudad 4. Se pide determinar todos los parámetros del modelo de cadena de Markov.

### Solución

#### 1. Matriz de transición de n pasos

2. CIUDAD	3. MES 1	4. MES 2	5. MES 3	6. MES 4
7. CIUDAD 1	8. 2500	9. 2650	10. 2750	11. 2850
12. CIUDAD 2	13. 2300	14. 2450	15. 2550	16. 2650
17. CIUDAD 3	18. 2200	19. 2250	20. 2350	21. 2450
22. CIUDAD 4	23. 2500	24. 2600	25. 2700	26. 2800

27. CIUDAD	28. MES 1	29. MES 2	30. MES 3	31. MES 4
32. CIUDAD 1	33. 0,233	34. 0,247	35. 0,256	36. 0,265
37. CIUDAD 2	38. 0,231	39. 0,246	40. 0,256	41. 0,266
42. CIUDAD 3	43. 0,238	44. 0,243	45. 0,254	46. 0,265
47. CIUDAD 4	48. 0,236	49. 0,245	50. 0,255	51. 0,264

#### 2. Ecuación de Chapman – Kolmagorov

##### Paso 2

52. CIUDAD	53. MES 1	54. MES 2	55. MES 3	56. MES 4
57. CIUDAD 1	58. 0,234	59. 0,245	60. 0,255	61. 0,265
62. CIUDAD 2	63. 0,234	64. 0,245	65. 0,255	66. 0,265
67. CIUDAD 3	68. 0,234	69. 0,245	70. 0,255	71. 0,265
72. CIUDAD 4	73. 0,234	74. 0,245	75. 0,255	76. 0,265

#### 3. Tiempo de Recurrencia

77. CIUDAD	78. MESES
79. CIUDAD 1	80. 4,27
81. CIUDAD 2	82. 4,08
83. CIUDAD 3	84. 3,92
85. CIUDAD 4	86. 3,77

#### 4. Probabilidades de estado estable

87. CIUDAD	88. PROBABILIDAD
89. CIUDAD 1	90. 0,234
91. CIUDAD 2	92. 0,245
93. CIUDAD 3	94. 0,255
95. CIUDAD 4	96. 0,265

#### 5. Costo promedio esperado/ unidad de tiempo

6. CIUDAD	7. COSTO
8. CIUDAD 1	9. 1.758.254
10. CIUDAD 2	11. 1.594.340
12. CIUDAD 3	13. 1.531.132
14. CIUDAD 4	15. 1.921.933
16. COSTO PROMEDIO	17. 6.805.660

### EJERCICIOS

1. Las ventas de una empresa de lácteos durante los primeros cuatro meses del año en cuatro ciudades del País, dieron que el primer mes vendieron en la ciudad uno una cantidad de 3400 productos en la ciudad 1, 3200 productos en la ciudad 2, 3100 en la ciudad 3 y 3500 en la ciudad 4. Para el segundo mes se vendieron en la ciudad uno una cantidad de 3450 productos en la ciudad 1, 3050 productos en la ciudad 2, 3150 en la ciudad 3 y 3500 en la ciudad 4. Para el tercer mes se vendieron en la ciudad uno una cantidad de 3500 productos en la ciudad 1, 3250 productos en la ciudad 2, 3350 en la ciudad 3 y 3500 en la ciudad 4. En el cuarto mes se vendieron en la ciudad uno una cantidad de 3550 productos en la ciudad 1, 3350 productos en la ciudad 2, 3450 en la ciudad 3 y 3600 en la ciudad 4. Además las ganancias Por las ventas de los productos fueron para las 4 ciudades de \$12.500.000 para la ciudad 1, \$13.500.000 para la ciudad 2, \$14.000.000 para la ciudad 3 y \$15.250.000 para la ciudad 4. Se pide determinar todos los parámetros del modelo de cadena de Markov.

2. Una empresa de encomiendas realiza su trabajo en tres municipios cercanos de un departamento de Colombia. Para evitar que viajar de un lugar a otro, entrega la mercancía según sus sucursales, en la sucursal 1 entrega sus productos al municipio 1 con una probabilidad del 35%, para el municipio 2 con una probabilidad del 25% y para el municipio3 con probabilidad del 40%. En la sucursal 2 entrega sus productos al municipio 1 con una probabilidad del 55%, para el municipio 2 con una probabilidad del 15% y para el municipio3 con probabilidad del 30%. En la sucursal 3 entrega sus productos al municipio 1 con una probabilidad del 50%, para el municipio 2 con una probabilidad del 25% y para el municipio 3 con probabilidad del 25%. El costo de entrega de las encomiendas en las tres sucursales es de \$10.000, \$11.000 y \$12.500, respectivamente.

### Prueba Final

- ◆ ¿Qué entiende usted por modelos de simulación?
- ◆ ¿De un ejemplo de modelos de simulación?
- ◆ ¿En qué consiste la cadena de Markov?

### Actividad

El estudiante debe realizar un ejercicio aplicado a su actividad académica utilizando la cadena de Markov.



## 5. REGRESION LINEAL SIMPLE Y PRONOSTICOS

### OBJETIVO GENERAL

Determinar si existe relación entre dos variables por medio de los modelos.

### OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ◆ Interpretar los diagramas estadísticos
- ◆ Calcular los parámetros de regresión simple
- ◆ Resolver casos de la vida real

### Prueba Inicial

A continuación encontrará una serie de enunciados con cinco respuestas, de las cuales una sola es verdadera. Marque con una X la que usted considere correcta. Dadas las siguientes definiciones, el estudiante estará en capacidad de responder a que concepto corresponde:

- ◆ Analizar a que concepto corresponde la siguiente definición:  
\_\_\_\_\_ es una característica, cualidad o atributo o propiedad de un sujeto o unidad de observación.  
a. Variable      b. Característica      c. Escala de medición      d. Parámetro
- ◆ Analizar a que concepto corresponde la siguiente definición:  
\_\_\_\_\_ se refiere al fenómeno que se intenta explicar y que será objeto de estudio a lo largo de la investigación.  
a. Variable      b. Variable dependiente      c. Variable Independiente      d. Parámetro
- ◆ Analizar a que concepto corresponde la siguiente definición:  
\_\_\_\_\_ son todos aquellos factores o elementos que explican un fenómeno o la conducta del fenómeno.  
a. Variable      b. Variable dependiente      c. Variable Independiente      d. Parámetro

- ◆ Analizar a que concepto corresponde la siguiente definición:  
\_\_\_\_\_ como función matemática, es una cantidad a la cual el operador puede asignarle un valor arbitrario, se distingue de variable, la cual puede tomar sólo aquellos valores que haga la función posible.
- a. Variable      b. Variable dependiente      c. Variable Independiente      d. Parámetro
- ◆ Analizar a que concepto corresponde la siguiente definición:  
\_\_\_\_\_ de una variable estadística es la suma de todos sus posibles valores, ponderada por las frecuencias de los mismos.
- a. Media      b. Parámetro      c. Media Aritmética      d. Media Ponderada

## 5.1. Regresión Lineal Simple

El estudio de la regresión simple muestra la relación entre dos variables, una de ellas es independiente y una variable dependiente.

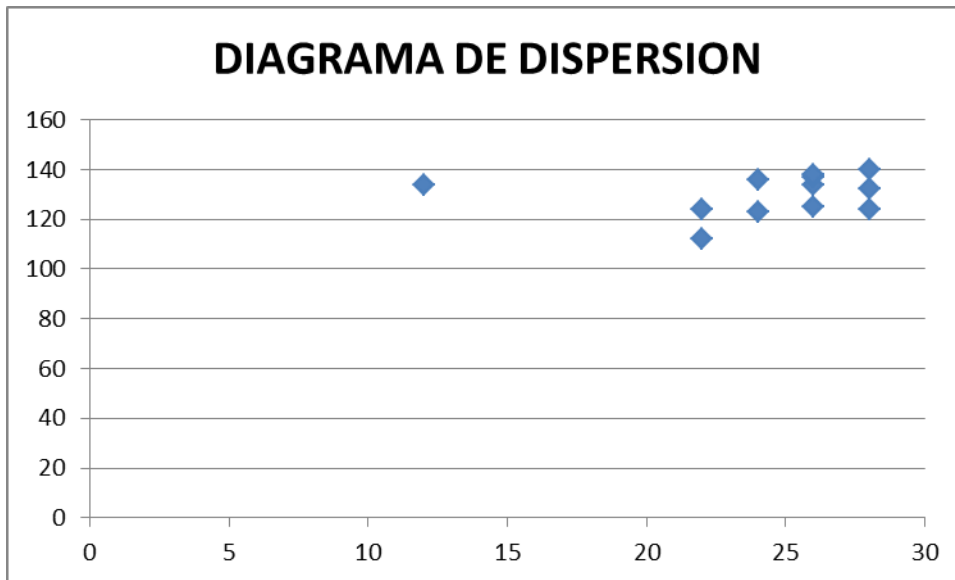
Diagrama de dispersión: Es una gráfica de pares de datos X e Y en un espacio dimensional.

### Ejemplo 1

Una tienda de electrodomésticos vende neveras y estufas a distintos clientes del municipio de Envigado según las necesidades del cliente. En la siguiente tabla se indica el comportamiento de las ventas y la cantidad durante los 12 primeros meses del año se desea observar si existe relación entre las dos variables.

Meses	CANTIDAD	VENTAS (miles de \$)
1	22	112
2	24	123
3	26	125
4	22	124
5	28	124
6	26	134
7	28	132
8	12	134
9	24	136
10	26	137
11	26	138
12	28	140

#### GRAFICA DE DIAGRAMA DE DISPERSION



Coeficiente de correlación: Es un valor entre -1 y 1 que indica la fuerza de la relación lineal entre dos variables cuantitativas.

#### ◆ FORMULA

$$r = \frac{n \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{n \sum X^2 - (\sum X)^2} \sqrt{n \sum Y^2 - (\sum Y)^2}}$$

### TABLA DE DATOS

Meses	CANTIDAD	VENTAS (miles de \$)	XY	X2	Y2
1	22	112	2464	484	12544
2	24	123	2952	576	15129
3	26	125	3250	676	15625
4	22	124	2728	484	15376
5	28	124	3472	784	15376
6	26	134	3484	676	17956
7	28	132	3696	784	17424
8	12	134	1608	144	17956
9	24	136	3264	576	18496
10	26	137	3562	676	18769
11	26	138	3588	676	19044
12	28	140	3920	784	19600
suma	292	1559	37988	7320	203295

$r = 0,13$

El coeficiente de correlación para la muestra de 12 datos puntuales es  $r=0,13$ . Esto indica que hay una relación lineal positiva bastante fuerte entre la cantidad de productos electrodomésticos y las ventas.

#### 5.1.1. Ecuación Lineal

Cuando se examina la correlación de dos variables, por lo general se hace con el propósito de usar una para pronosticar la otra.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + E$$

**DONDE:**

$\beta_0$ = Ordenada del origen (Intercepción en Y)

$\beta_1$ = Pendiente de la recta.

E= error aleatorio

### 5.1.1.1 Método De Mínimos Cuadrados

Es la línea recta que mejor se ajusta a un conjunto de puntos X e Y. La ecuación es:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X$$

**DONDE:**

$\beta_0$  = Ordenada del origen (Intercepción en Y)

$\beta_1$  = Pendiente de la recta.

Y = Valor pronosticado de la variable pendiente

X = Variable independiente

- ◆ Para determinar la ecuación para la línea recta que minimiza la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre los puntos y la recta:

- ◆ Para determinar la pendiente:

$$\beta_1 = \frac{n \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{n \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

- ◆ Para determinar la ordenada al origen y de la población:

$$\beta_0 = Y(MEDIA) - \beta_1 X(MEDIA)$$

#### Ejemplo (retomando el ejemplo 1)

Una tienda de ordenadores llevó a cabo un estudio para determinar la relación entre los gastos de publicidad semanal y las ventas. Por medio del método de los mínimos cuadrados encontrar la línea recta.

- ◆ Para determinar la pendiente:

$$\beta_1 = \frac{n \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{n \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

- ◆ Para determinar la ordenada al origen y de la población:

$$\beta_0 = Y(MEDIA) - \beta_1 X(MEDIA)$$

La ecuación es:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X$$

**Para el ejemplo la ecuación queda así:**

$$Y = 123,98 + 0,24 X$$

## RESIDUALES

Un residual es la diferencia entre el valor  $y$  y el valor  $\hat{y}$  pronosticado por la ecuación de regresión muestral.

$$E = Y - \hat{y}$$

E= Residual

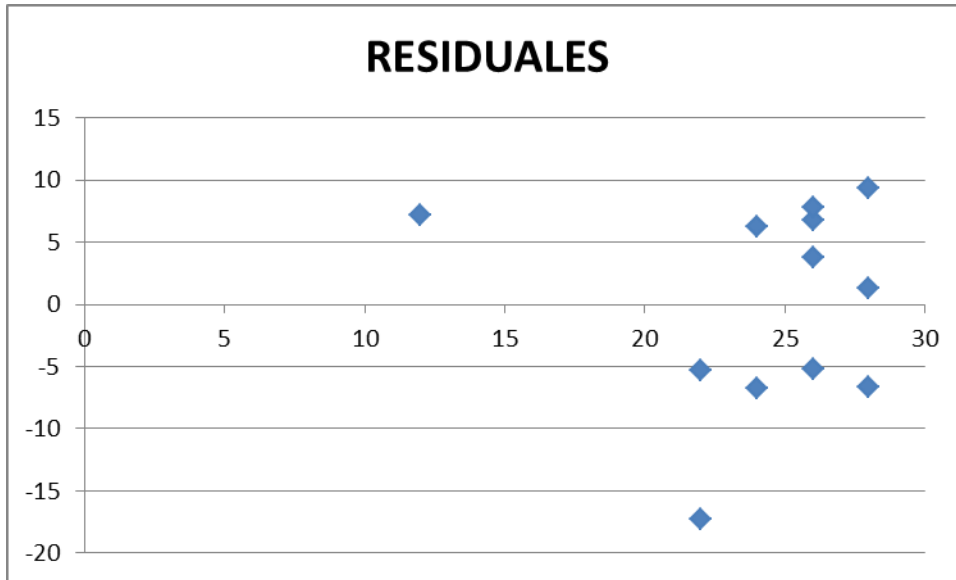
Y= valor real de y

$\hat{y}$ = Valor estimado de la variable dependiente al usar la ecuación de regresión muestral.

**Ejemplo (retomando el ejemplo1)**

Teniendo en cuenta los datos de la ecuación de línea recta de la cantidad de electrodomésticos y las ventas  $\hat{y} = 123,98 + 0,24X$

Meses	CANTIDAD	VENTAS (miles de \$)	VENTAS PRONOSTICADAS	RESIDUALES
1	22	112	129,26	-17,26
2	24	123	129,74	-6,74
3	26	125	130,22	-5,22
4	22	124	129,26	-5,26
5	28	124	130,7	-6,7
6	26	134	130,22	3,78
7	28	132	130,7	1,3
8	12	134	126,86	7,14
9	24	136	129,74	6,26
10	26	137	130,22	6,78
11	26	138	130,22	7,78
12	28	140	130,7	9,3
suma	292	1559		



#### 5.1.1.2 Coeficiente de Determinación

Mide el porcentaje de variabilidad en Y que puede ser explicado por la variable X. Suma de cuadrados de total

La cantidad de desviación total en la variable dependiente se llama suma de cuadrados del total.

$$SCT = \sum (y_i - y(\text{media}))^2$$

Suma del cuadrado del error

La recta de regresión de mínimos cuadrados minimiza la suma de cuadrados del error. La SCE mide la variabilidad de los valores Y de la muestra alrededor de Y.

$$SCE = \sum (y_i - y(\text{pronosticado}))^2$$

Suma de cuadrado de la regresión

La cantidad de la desviación en la variable dependiente explicada por la ecuación de regresión.

$$SCR = SCT - SCE$$

La ecuación de  $r^2$ , el porcentaje de variabilidad de la variable dependiente, Y, que puede explicarse por la variable predictora, X, se puede definir ahora como:

$$r^2 = 1 - \frac{\sum (y - y(\text{pronosticado}))^2}{\sum (y - y(\text{media}))^2}$$

$$0 \leq r^2 = 1 - \frac{SCE}{SCT}$$

El coeficiente que está después del signo menos representa el porcentaje de la variabilidad de Y que todavía, no se puede explicar en la ecuación de regresión

Ejemplo (retomando el ejemplo 1)

Continuando con el ejemplo de la empresa de electrodomésticos, se desea determinar el coeficiente de determinación.

Meses	CANTIDAD	VENTAS (miles de \$)	VENTAS PRONOSTICADAS	RESIDUALES	residuales 2	media y	y-ymedia	(y-ymedia)2
1	22	112	129,26	-17,26	297,91	130	-18	321,01
2	24	123	129,74	-6,74	45,43	130	-7	47,84
3	26	125	130,22	-5,22	27,25	130	-5	24,17
4	22	124	129,26	-5,26	27,67	130	-6	35,01
5	28	124	130,7	-6,7	44,89	130	-6	35,01
6	26	134	130,22	3,78	14,29	130	4	16,67
7	28	132	130,7	1,3	1,69	130	2	4,34
8	12	134	126,86	7,14	50,98	130	4	16,67
9	24	136	129,74	6,26	39,19	130	6	37,01
10	26	137	130,22	6,78	45,97	130	7	50,17
11	26	138	130,22	7,78	60,53	130	8	65,34
12	28	140	130,7	9,3	86,49	130	10	101,67
suma	292	1559			<b>742,27</b>			<b>754,92</b>

Suma de cuadrados de total

$$SCT = \sum (y_i - y(\text{media}))^2$$

SCT= 754,92



Suma del cuadrado del error

La recta de regresión de mínimos cuadrados minimiza la suma de cuadrados del error. La SCE mide la variabilidad de los valores Y de la muestra alrededor de Y.

$$SCE = \sum (y_i - y(\text{pronosticado}))^2$$

$$SCE = 742,27$$

Suma de cuadrado de la regresión

La cantidad de la desviación en la variable dependiente explicada por la ecuación de regresión.

$$SCR = SCT - SCE$$

$$SCR = 754,92 - 742,27 = 12,64$$

La ecuación de  $r^2$ , el porcentaje de variabilidad de la variable dependiente, Y, que puede explicarse por la variable predoctora, X, se puede definir ahora como:

$$r^2 = 1 - \frac{\sum (y - y(\text{pronosticado}))^2}{\sum (y - y(\text{media}))^2}$$

$$r^2 = 1 - \frac{SCE}{SCT}$$

$$r^2 = 1 - \frac{742,27}{754,92}$$

$$r^2 = 0,02$$

El porcentaje de variabilidad en las ventas que puede ser explicado por la variable cantidad de productos electrodomésticos es del 2%.

## Prueba Final

Otro estadístico importante en el análisis de regresión es el estadístico F, que se usa para probar la hipótesis nula de que la ecuación de regresión muestral no explica un porcentaje significativo de la varianza de la variable Y. La hipótesis nula y alternativa son:

$$H_0 = p^2 = 0$$

$$H_1 = p^2 \neq 0$$

El estadístico de prueba para la hipótesis nula establecida se obtiene de la distribución F si la hipótesis nula es cierta.

### TABLA DE ANALISIS DE VARIANZA (ANOVA)

FUENTE DE VARIACION	G.L.	SUMA DE CUADRADOS	ESTIMACION DE VARIANZA
REGRESION	k-1	SCR	SCR/(k-1)
ERROR RESIDUAL	n-k	SCE	SCE/(n-k)
TOTAL	n-1	SCT	

El estadístico de la prueba F:

$$f = \frac{SCR/(k-1)}{SCE/(n-k)}$$

### Ejemplo (retomando el ejemplo 1)

De la empresa de electrodomésticos de la cantidad de productos y las ventas . Se pide determinar la hipótesis para la pendiente.

$$H_0 = p^2 = 0$$

$$H_1 = p^2 \neq 0$$

El estadístico de prueba para la hipótesis nula establecida se obtiene de la distribución F si la hipótesis nula es cierta.

#### TABLA DE ANALISIS DE VARIANZA (ANOVA)

FUENTE DE VARIACION	G.L.	SUMA DE CUADRADOS	ESTIMACION DE VARIANZA
REGRESION	1	742,27	742,27
ERROR RESIDUAL	10	12,64	1,264
TOTAL	11	754,92	

El estadístico de la prueba F:

$$f = \frac{SCR/(k - 1)}{SCE/(n - k)}$$

$$f = \frac{742,27}{1,264}$$

$$f = 587,1$$

F DE LA TABLA PARA F(0.05, 1, 11)=4,844

Por tanto, se rechaza la hipótesis nula. Con muy poca probabilidad de error. Se concluye que la ecuación de regresión explica un porcentaje significativo de la varianza de las ventas

## 5.2. Pronósticos

Los pronósticos es simplemente una predicción del comportamiento de una variable la cual esta sujeta al presente y como va hacer en el futuro.

### 5.2.1. Promedios Móviles

Los promedios móviles son promedios ponderados, el cual estima la demanda del siguiente periodo de tiempo durante bimestres, trimestres, semestres.

#### EJEMPLO

El comportamiento de la demanda de bicicletas en inventario durante un periodo de 12 meses. Esta dado a continuación:

Meses	DEMANDA
1	44
2	46
3	50
4	48
5	46
6	48
7	50
8	52
9	54
10	54
11	56
12	60

Determinar bimestral, trimestral y semestral

### Solución

Meses	Demanda	Bimestre	Trimestre	Semestre
1	44	0	0	0
2	46	45	0	0
3	50	48	47	0
4	48	49	48	0
5	46	47	48	0
6	48	47	47	47
7	50	49	48	48
8	52	51	50	49
9	54	53	52	50
10	54	54	53	51
11	56	55	55	52
12	60	58	57	54

### 5.2.2. Suavización Exponencial

En la suavización exponencial las ponderaciones de las observaciones se tienen en cuenta el nivel de confianza para analizar el comportamiento de la variable.

$$Y_{t+1} = \alpha y_t + (1-\alpha) Y_t$$

### EJEMPLO

El comportamiento de la demanda de bicicletas en inventario durante un periodo de 12 meses con un nivel de confianza del 99% y del 97%.

Meses	Demanda	Nivel 99	Nivel del 97
1	44	0	0
2	46	44,2	45
3	50	46,4	47
4	48	49,8	49
5	46	47,8	47
6	48	46,2	47
7	50	48,2	49
8	52	50,2	51
9	54	50,2	53
10	54	54	54
11	56	54,2	55
12	60	56,4	57

### Taller

Se han recogido datos en dos localidades mediante sendas encuestas sobre el consumo (Y) de productos de hogar y de la renta (X) de los consumidores Consultados, obteniéndose los siguientes resultados:

Ciudad 1		Ciudad 2	
X	Y	X	Y
4.8	64.0	7.1	54.6
5.3	68.0	3.4	44.7
6.5	79.0	5.5	51.0
3.2	56.0	4.3	49.7
6.0	69.4	3.7	47.2
3.8	60.9	6.0	55.0
4.2	62.8	3.3	42.9
7.0	75.6	6.7	55.6
2.6	61.7	5.1	47.6
3.5	57.8	4.5	49.5
5.6	72.3	2.7	44.6
5.8	70.5	5.9	57.2

Se ha observado una relación lineal entre el consumo (en miles de pesetas) y la renta (en millones de pesetas) y se desea contrastar si esta relación es idéntica en las dos ciudades donde se ha realizado el trabajo de campo.

Un hipermercado ha decidido ampliar el negocio. Decide estudiar de forma exhaustiva el número de cajas registradoras que va a instalar, para evitar grandes colas. Para ello, se obtuvieron los siguientes datos procedentes de otros establecimientos similares acerca del número de cajas registradoras y del tiempo medio de espera.

N	NÚMERO DE CAJAS REGISTRADORAS	TIEMPO PROMEDIO DE ESPERA
1	10	30
2	12	25
3	13	32
4	14	34
5	15	35
6	16	28
7	18	30
8	20	32
9	12	24
10	14	36

Bajo el supuesto de que el tiempo de espera medio depende linealmente del número de cajas registradoras se pretende saber, e Interpretar:

- Realizar el diagrama de dispersión.
- Realizar el coeficiente de correlación.
- Realizar la prueba de hipótesis en el análisis de correlación. Con t del 0.95
- Realizar la prueba de hipótesis en el análisis de correlación. Con t del 0.90
- Encontrar la ecuación de la línea recta de regresión muestral con el método mínimos cuadrados
- Encontrar la línea recta cuando x vale 10, 12, 24.
- Encontrar los residuales.
- Realizar el grafico de y pronostica con respecto a x.
- Encontrar la línea recta de regresión con el valor mínimo y el valor máximo
- Realizar el grafico de los residuales.

- ◆ Un investigador cree que la inteligencia de los niños, medida a través del coeficiente intelectual (CI en puntos), depende del número de hermanos. Toma una muestra aleatoria

de 15 niños y ajusta una regresión lineal simple. Los resultados aparecen en la salida adjunta.

N	CL	HERMANOS
1	112	0
2	114	1
3	110	2
4	113	3
5	114	2
6	115	4
7	110	2
8	112	1
9	117	2
10	111	3
11	118	2
12	120	4
13	122	5
14	121	4
15	124	5

Bajo el supuesto de que el tiempo de espera medio depende linealmente del número de cajas registradoras se pretende saber, e Interpretar:

- Realizar el diagrama de dispersión.
- Realizar el coeficiente de correlación.
- Realizar la prueba de hipótesis en el análisis de correlación. Con t del 0.95
- Realizar la prueba de hipótesis en el análisis de correlación. Con t del 0.90
- Encontrar la ecuación de la línea recta de regresión muestral con el método mínimos cuadrados
- Encontrar la línea recta cuando x vale 1, 5, 2.
- Encontrar los residuales.
- Realizar el grafico de y pronostica con respecto a x.
- Encontrar la línea recta de regresión con el valor mínimo y el valor máximo
- Realizar el grafico de los residuales.

- ◆ La entrada a cine en los teatros de cine Colombia en los centros comerciales, indica una relación de cantidad de personas que ingresan y el valor en el precio a pagar (miles de pesos) . Con la siguiente tabla responder las preguntas:

N	CANTIDAD	PRECIO
1	12	96000
2	14	112000
3	16	121000
4	18	132000
5	19	135000
6	15	118000
7	14	110000
8	12	90000
9	16	119000
10	15	117500
11	18	130000
12	17	127600

Se pide encontrar:

- Realizar el diagrama de dispersión.
  - Realizar el coeficiente de correlación.
  - Realizar la prueba de hipótesis en el análisis de correlación. Con t del 0.95
  - Realizar la prueba de hipótesis en el análisis de correlación. Con t del 0.90
  - Encontrar la ecuación de la línea recta de regresión muestral con el método mínimos cuadrados
  - Encontrar la línea recta cuando x vale 18, 15, 12.
  - Encontrar los residuales.
  - Realizar el grafico de y pronostica con respecto a x.
  - Encontrar la línea recta de regresión con el valor mínimo y el valor máximo
  - Realizar el grafico de los residuales.
- ◆ Dada la difícil situación por la que atraviesa actualmente la empresa PALMA CARIBE en la que hemos empezado a trabajar, se propone la reducción de determinados gastos. Para ello se estudia la relación que existe entre dos variables como son: los gastos en publicidad (variable X) y los beneficios (variable Y). De ambas variables disponemos de los siguientes datos:



AÑO	GASTOS EN PUBLICIDAD	UTILIDADES
1985	60	32
1986	65	35
1987	78	37
1988	79	38
1989	82	42
1990	86	44
1991	88	46
1992	92	56
1993	98	58
1994	99	60

Se pide:

- ¿Se puede considerar que ambas variables guardan algún tipo de relación? ¿Cuál sería la variable dependiente y cuál la independiente?
- Realizando un gráfico adecuado. ¿Se puede suponer que la relación que las liga es de tipo lineal?
- Construye las dos rectas de regresión mínimo cuadrática asociada con las variables.
- Si la empresa para el próximo año realizará un esfuerzo para poder invertir 12.550.000 pesos en publicidad. ¿Cuáles resultarían ser sus beneficios? ¿Con qué fiabilidad realizaría usted la predicción?
- ¿Cuáles resultarían ser sus beneficios si la predicción se efectúa considerando tan solo como variable explicativa el tiempo? ¿Cuál sería la fiabilidad de esta otra predicción? Comente los resultados.

### Prueba Final

- ◆ ¿Cómo define usted el concepto de regresión simple?
- ◆ ¿Cómo define usted el concepto de diagrama de dispersión y coeficiente de regresión?
- ◆ ¿Qué es un análisis de regresión simple?
- ◆ Con una aplicación en su empresa calcule los parámetros de regresión simple y defina sus características.

### Actividad

El estudiante debe realizar un proyecto aplicando la regresión simple y analizar si es viable o no teniendo en cuenta el análisis de cálculos y gráficas.

## 6. TEORIA DE COLAS

### Objetivo General

Construir modelos de teoría de colas que permitan tomar decisiones sobre situaciones problemáticas.

### Objetivos Específicos

- ◆ Conocer los diferentes modelos de líneas de espera.
- ◆ Diferenciar un modelo de línea de espera de una cola con un solo servidor y múltiple.
- ◆ Realizar ejercicios por medio de líneas de colas y diferenciarlos
- ◆ Solucionar ejercicios de modelo de teoría de colas.

### Prueba Inicial

A continuación encontrará una serie de enunciados con cinco respuestas, de las cuales una sola es verdadera. Marque con una x la que usted considere correcta.

Dadas las siguientes definiciones, el estudiante estará en capacidad de responder a que concepto corresponde:

- ◆ Analizar a que concepto corresponde la siguiente definición:  
\_\_\_\_\_ Representación esquemática o conceptual de un fenómeno, que representa una teoría o hipótesis de cómo dicho fenómeno funciona  
a. Variable      b. Característica      c. Modelo      d. Parámetro
- ◆ Analizar a que concepto corresponde la siguiente definición:  
\_\_\_\_\_ A un valor representativo de una población  
○ a. Variable      b. Característica      c. Modelo      d. Parámetro
- ◆ Analizar a que concepto corresponde la siguiente definición:  
\_\_\_\_\_ es la experimentación con un modelo de una hipótesis o un conjunto de hipótesis de trabajo  
a. Variable      b. parámetro      c. Código      d. simulación

- ◆ Analizar a que concepto corresponde la siguiente definición:  
\_\_\_\_\_ Es un símbolo que representa un elemento no especificado de un conjunto  
dado  
a. Símbolo      b. Variable      c. Valor      d. Parámetro
  
- ◆ Analizar a que concepto corresponde la siguiente definición:  
\_\_\_\_\_ es el conjunto de todos los bienes propios y disponibles para la venta a los  
clientes  
a. Mercado      b. Economía      c. Parámetro      d. Inventario

## 6.1. Conceptos de Teoría de Colas

La teoría de colas es una formulación matemática para la optimización de sistemas en que interactúan dos procesos normalmente aleatorios: un proceso de llegadas de clientes y un proceso de servicio a los clientes, en los que existen fenómenos de acumulación de clientes en espera del servicio y donde existen reglas definidas (conductos) para la prestación del servicio.

### 6.1.1. Modelos de Teoría de Colas

#### 6.1.1.1 Sistema con un Servidor

Sistemas de línea de espera con un servidor.

Este sistema trata de una distribución de llegada markoviano, tiempo de servicio markoviano y un servidor.

Estimador  $P = \lambda / \mu < 1$

Características:

- ◆ El número promedio de unidades en el sistema.

$$L = \lambda / (\mu - \lambda)$$

- ◆ El número promedio de unidades que esperan ser atendidas en la cola:

$$Lq = \lambda^2 / \mu (\mu - \lambda)$$

- ◆ El tiempo promedio de una unidad en el sistema

$$W = 1 / (\mu - \lambda)$$

- ◆ El tiempo promedio de una unidad en la cola

$$Wq = \lambda / \mu (\mu - \lambda)$$

### Ejemplo

Una tienda de un barrio desea realizar un estudio para conocer el comportamiento en compra de sus productos por parte de 30 clientes constantes, para lo cual tomo los datos a través del tiempo en que llegaban a comprar sus productos y el tiempo en prestarle el servicio. De sea estimar los diferentes parámetros para lo cual tomo sus datos en totalidad.

número de clientes	TIEMPO DE LLEGADA	TIEMPO DE SERVICIO
1	10	12
2	20	23
3	30	34
4	20	26
5	20	30
6	10	22
7	30	40
8	40	50
9	20	40
10	10	21
11	5	10
12	2	12
13	5	15
14	4	15
15	3	11
16	6	15
17	8	16
18	20	23
19	22	24
20	23	26

21	24	28
22	26	30
23	28	32
24	38	36
25	32	38
26	34	40
27	36	42
28	30	44
29	25	46
30	24	48
TOTAL	605	849

### 6.1.2. Solución en Excel

TIEMPO DE LLEGADA	605
TIEMPO DE SERVICIO	849
NÚMERO PROMEDIO EN EL SISTEMA	2
NÚMERO PROMEDIO EN LA COLA	0
TIEMPO PROMEDIO EN EL SISTEMA	0,004
TIEMPO PROMEDIO EN LA COLA	0,003

### 6.1.3. Procedimiento en Excel

TIEMPO DE LLEGADA	B34
TIEMPO DE SERVICIO	B35
NÚMERO PROMEDIO EN EL SISTEMA	B34/(B35-B34)
NÚMERO PROMEDIO EN LA COLA	FX(CUADRATICA,B34) FX/B35(B35-B34)
TIEMPO PROMEDIO EN EL SISTEMA	E37/(B35-B34)
TIEMPO PROMEDIO EN LA COLA	B34/B35(B35-B34)

#### 6.1.3.1 Sistema de Línea de Espera con dos Servidores

Este modelo supone llegadas y tiempos de servicio aleatorios paracanales de servicio múltiples, teniendo en cuenta las mismas consideraciones que en el modelo anterior, excepto que ahora

existe una sola fila de entrega que alimenta a los canales de múltiples de servicio con igual tasa de servicio.

Características:

- ◆ La probabilidad de que no se encuentren clientes en espera

$$P_0 = 1 / (\sum_{n=0}^{\infty} 1/n! (\lambda/\mu)^n + 1/s! (\lambda/\mu)^s (s\mu/s\mu-\lambda))$$

- ◆ La probabilidad de que el sistema este ocupado:

$$P(\text{sistema este ocupado}) = (P^s(\mu S) / S! (\mu S / \mu S - \lambda)) * P_0$$

- ◆ El número promedio de unidades en el sistema.

$$L = P(\text{sistema este ocupado}) * \rho\lambda / (s - \rho\lambda) + \rho$$

- ◆ El número promedio de unidades que esperan ser atendidas en la cola:

$$L_q = P(\text{sistema este ocupado}) * \rho\lambda / (s - \rho\lambda)$$

- ◆ El tiempo promedio de una unidad en el sistema

$$W = 1 / \lambda (P(\text{sistema este ocupado}) * \rho\lambda / (s - \rho\lambda) + \rho)$$

- ◆ El tiempo promedio de una unidad en la cola

$$W_q = 1/\lambda (P(\text{sistema este ocupado}) * \rho\lambda / (s - \rho\lambda))$$

### Ejemplo

Una entidad bancaria desea el comportamiento de pago de consignaciones por parte de 30 de sus clientes para lo cual realizo un estudio en su sede principal entre las 8 a.m. y 11.30 p.m., se tiene en la oficina 5 servidores. Para lo cual se obtuvieron los datos en la tabla y se pide determinar los diferentes parámetros.

número de clientes	TIEMPO DE LLEGADA	TIEMPO DE SERVICIO
1	12	23
2	24	25
3	36	35
4	37	32
5	49	36
6	54	55
7	54	58
8	56	100
9	58	120
10	46	130
11	48	145
12	13	25
13	10	30
14	8	24
15	6	21
16	15	36
17	24	33
18	23	34
19	21	35
20	21	36
21	18	28
22	16	32
23	20	36
24	24	120
25	23	125
26	33	125
27	35	44
28	34	128
29	32	136
30	33	137
TOTAL	883	1944



#### 6.1.4. Solución en Excel

TIEMPO DE LLEGADA	883
TIEMPO DE SERVICIO	1944
PROBABILIDAD DE QUE ESTE DESOCUPADO	0.03
PROBABILIDAD DE QUE ESTE OCUPADO	0.17
NÚMERO PROMEDIO EN EL SISTEMA	2
NÚMERO PROMEDIO EN LA COLA	1
TIEMPO PROMEDIO EN EL SISTEMA	0.002
TIEMPO PROMEDIO EN LA COLA	0.0004

##### 6.1.4.1 Sistema de Línea de Espera Servidores Múltiples en Serie

Este tipo de líneas de espera es característico del sector productivo, donde las líneas de ensamble requieren de una serie de actividades que se desarrollan en serie.

#### Ejemplo

Un centro de salud tiene los servicios ambulatorios para las comunidades de estratos 1,2 y 3, el cual la consulta por los usuarios es de 3000 personas o menos, que no se tiene la suficiente infraestructura donde se proporciona este tipo de servicio (centros médicos), pero a donde llegan vías comunicación (caminos). Al llegar la unidad móvil a la comunidad, se prestan los siguientes servicios:

- ◆ Recolección de datos personales
- ◆ Rayos X
- ◆ Toma de presión Sanguínea
- ◆ Muestra de sangre
- ◆ Muestra orina
- ◆ Revisión médica la unidad móvil cuenta para su atención con un personal de 6 especialistas, cada uno de acuerdo a su especialización.

El tiempo que se tiene en promedio de servicio para cada servicio ofrecido es:

Actividad	Datos	Rayos x	Muestra Sangre	Presión Arterial	Muestra Orina	Revisión Medica
Tiempo promedio en minutos	4	4	1	2	1	5

### 6.1.5. Solución en Excel

Se determina  $P_i$  y el tiempo en prestar el servicio (60 minutos dividido el tiempo dado para cada servicio) y el tiempo de llegada está presupuestado de la siguiente manera:  $60/6=10$  minutos

i	1	2	3	4	5	6
$\mu_i$	15	15	60	30	60	12
$P=\lambda/\mu$	0,7	0,7	0,2	0,3	0,2	0,8

La probabilidad de que al entrar una persona a la unidad móvil existan 3 personas esperando dar su información personal, 2 ser sometidas a rayos x, 1 que le tomen presión arterial, 2 revisión sanguínea ,1 esperando análisis de orina y 3 en revisión médica.

Actividad	Datos	Rayos x	Muestra Sangre	Presión Arterial	Muestra Orina	Revisión Medica
Personas	3	2	2	1	1	3
(1-P)	0,3	0,3	0,8	0,7	0,8	0,2
PN	0,30	0,44	0,03	0,33	0,17	0,58
(1-P)PN	0,10	0,15	0,02	0,22	0,14	0,10
TOTAL						1,0083E-06

El número esperado de personas en todo el sistema (esperando y siendo atendido) es de:

P	0,7	0,7	0,2	0,3	0,2	0,8
(1-P)	0,3	0,3	0,8	0,7	0,8	0,2
W	2	2	0,2	0,5	0,2	5
NÚMERO ESPERADO						10

El número esperado de personas en todo el sistema es 10.

El tiempo de espera de una persona es:

P	0,7	0,7	0,2	0,3	0,2	0,8
(1-P)	0,3	0,3	0,8	0,7	0,8	0,2
(1/μ)	0,07	0,07	0,02	0,03	0,02	0,08
P/(1-P)	2	2	0,2	0,5	0,2	5
TS	0,133	0,133	0,003	0,017	0,003	0,417
TOTAL						0,71

El tiempo de espera de una persona es de 0,71 horas, se pasa a minutos multiplicándolo por 60 minutos, quedando así: 43 minutos.

El tiempo dentro del sistema es:

P	0,7	0,7	0,2	0,3	0,2	0,8
(1-P)	0,3	0,3	0,8	0,7	0,8	0,2
(1/μ)	0,07	0,07	0,02	0,03	0,02	0,08
1/(1-P)	3	3	1,2	1,5	1,2	6
TS	0,20	0,20	0,02	0,05	0,02	0,50
TOTAL						1

El tiempo dentro del sistema es de una hora.

#### 6.1.5.1 Sistema de Líneas de Espera con Servidores Múltiples en Paralelo

##### Ejemplo

Servientrega tiene un equipo de mantenimiento para sus vehículos. Cuenta con dos equipos de técnicos especializados con sus respectivas herramientas. La llegada de vehículos al taller de mantenimiento es una variable aleatoria, con una distribución de Poisson que tiene un valor medio de 2 vehículos por mes. El tiempo promedio de servicio es una variable aleatoria exponencial de 3 vehículos por mes. En esta ciudad cuenta con 10 vehículos en la actualidad para sus servicios. Encuentre los diferentes parámetros.

##### Solución

Se evalúa el parámetro P.

$$P = \lambda / S\mu = 2 / (2)(3) = 0,33 < 1$$

La probabilidad de que el sistema este desocupado

n	n!	(m-n)!	S!	$S^{(n-s)}$	$(m-n)!s!S^{(n-s)}$	$m!/(m-n)!s!S^{(n-s)}$
0	1	3628800	2	0,25	1814400	2
1	1	362880	2	0,5	362880	10
2	2	40320	2	1	80640	45
3	6	5040	2	2	20160	180
4	24	720	2	4	5760	630
5	120	120	2	8	1920	1890
6	720	24	2	16	768	4725
7	5040	6	2	32	384	9450
8	40320	2	2	64	256	14175
9	362880	1	2	128	256	14175
10	3628800	1	2	256	512	7088
TOTAL						52370
Po						1,90951E-05

La probabilidad de que el sistema este desocupado es del 0,0019%

El número de unidades en el sistema

$$L = \sum (n-2)P_n$$

Se toma desde los positivos

n-2	1	2	3	4	5	6	7	8
P <sub>n</sub>	0,03	0,07	0,07	0,28	0,40	0,40	0,20	0,07
(n-2)P <sub>n</sub>	0,03	0,14	0,21	1,12	2,00	2,40	1,40	0,56
L								8

El número de vehículo en el sistema (para ser reparados o no) es de 8.

El número de vehículos en el sistema (no están en mantenimiento) es de:

$$W = \sum nP_n$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pn	0,002	0,001	0,02	0,03	0,07	0,07	0,28	0,40	0,40	0,20	0,07
nPn	0	0,001	0,04	0,09	0,28	0,35	1,68	2,8	3,2	1,8	0,7
											10

El número de vehículos en el sistema (no están en mantenimiento) es de 10.

El tiempo de espera para que se le proporcione el mantenimiento a los vehículos es de:

$$TL = W / \mu \quad (W - L)$$

$$TL = 10 / 3 (10 - 8) = 10 / 6$$

$$TL = 2 \text{ Horas}$$

El tiempo en el sistema es de

$$Tw = TL + 1 / \mu$$

$$Tw = 2 + 1 / 3 = 2 + 0,3$$

El tiempo en el sistema es de 2 Horas y 20 Minutos.

## 6.2. Modelos de Inventarios

**DEFINICION:** Los inventarios son aquellos materiales o bienes ociosos que la organización conserva para su uso en algún momento en el futuro.

### Ejemplo

Una empresa de Medellín de confección surte almacenes éxito con tres sus productos tradicionales, la cual realizó un estudio de mercadeo para disminuir el costo. La demanda de artículos de artículos para tres ciudades es de 120 unidades mensuales para Medellín, para Bogotá de 150 unidades y Cali de 130 unidades mensuales. El costo de preparación de la orden es de \$1000 para Bogotá, a Cali de \$500 y a Medellín de \$400 por orden y el costo que le representa el almacenamiento por unidad en el mes es de \$100, Utilizando los datos, se pide plantear un modelo EOQ y se pide determinar sus parámetros. La empresa trabaja 360 días al año. Además cual produce los costos mínimos y los costos más altos.

### 6.2.1. Solución en Excel

Información

	BOGOTA	CALI	MEDELLIN
DEMANDA	150	130	120
COSTO DE ORDEN(S)	1000	500	400
COSTO DE ALMACENAMIENTO (H)	100	100	100

Cantidad optima de pedidos

$$Q=\sqrt{2DS/H}$$

CANTIDAD OPTIMA DE PEDIDOS	BOGOTA	CALI	MEDELLIN
DEMANDA	150	130	120
COSTO DE ORDEN(S)	1000	500	400
COSTO DE ALMACENAMIENTO (H)	100	100	100
CANTIDAD OPTIMA DE PEDIDOS	55	36	31

- ◆ La cantidad óptima de pedidos para Bogotá es de 55 artículos.
- ◆ La cantidad óptima de pedidos para Cali es de 36 artículos.
- ◆ La cantidad óptima de pedidos para Medellín es de 31 artículos.

Número esperado de órdenes

$$N=D/Q$$

NÚMERO DE ORDENES	BOGOTA	CALI	MEDELLIN
DEMANDA	150	130	120
CANTIDAD OPTIMA DE PEDIDOS	55	36	31
NÚMERO DE ORDENES	3	4	4

- ◆ El número de órdenes de pedido es para Bogotá de 3.
- ◆ El número de órdenes de pedido es para Cali de 4.
- ◆ El número de órdenes de pedido es para Medellín de 4.

Tiempo esperado entre órdenes

$$T= \text{Número de días laborales/ año}$$

N

Tiempo esperado entre órdenes DIAS	BOGOTA 360	CALI 360	MEDELLIN 360
NÚMERO DE ORDENES	3	4	4
Tiempo esperado entre órdenes	120	90	90

- ◆ El tiempo esperado entre órdenes para Bogotá es de 120 días al año.
- ◆ El tiempo esperado entre órdenes para Cali es de 90 días al año.
- ◆ El tiempo esperado entre órdenes para Medellín es de 90 días al año.

El costo total

COSTO TOTAL	BOGOTA	CALI	MEDELLIN
DEMANDA	150	130	120
COSTO DE ORDEN(S)	1000	500	400
COSTO DE ALMACENAMIENTO (H)	100	100	100
CANTIDAD OPTIMA DE PEDIDOS	55	36	31
COSTO TOTAL	5477	3606	3098

- ◆ El costo total de pedidos para Bogotá es de \$5477
- ◆ El costo total de pedidos para Cali es de \$3606
- ◆ El costo total de pedidos para Medellín es de \$3098

EL que le representa el costo más alto es Bogotá con \$5477 y el mínimo costo Medellín con \$3098.

### Taller

Una empresa de alimentos lácteos desea realizar un estudio para conocer el comportamiento en sus ventas de sus productos por parte de 30 clientes constantes, para lo cual tomo los datos a través del tiempo en que llegaban a comprar sus productos y el tiempo en prestarle el servicio. Desea estimar los diferentes parámetros para lo cual tomo sus datos en totalidad.

número de clientes	TIEMPO DE LLEGADA	TIEMPO DE SERVICIO
1	21	27
2	22	28
3	23	29
4	21	30
5	24	30
6	24	31
7	23	32
8	22	33
9	20	31
10	19	32
11	18	33
12	17	34
13	16	35
14	15	36
15	14	31
16	13	32
17	12	33
18	11	34
19	10	33
20	19	31
21	19	28
22	21	29
23	22	30
24	23	31
25	24	32
26	24	33
27	23	34
28	22	35
29	24	36
30	23	37
TOTAL		

Un almacén de calzado de un barrio desea realizar un estudio para conocer el comportamiento en compra de sus productos por parte de 30 clientes constantes, para lo cual tomo los datos a través del tiempo en que llegaban a comprar sus productos y el tiempo en prestarle el servicio. Desea estimar los diferentes parámetros para lo cual tomo sus datos en totalidad.



número de clientes	TIEMPO DE LLEGADA	TIEMPO DE SERVICIO
1	11	23
2	12	23
3	13	24
4	15	25
5	15	26
6	13	23
7	12	27
8	11	28
9	11	29
10	10	27
11	12	30
12	13	31
13	14	32
14	15	33
15	16	31
16	17	32
17	18	27
18	10	28
19	20	30
20	21	30
21	22	29
22	23	28
23	24	31
24	21	32
25	21	33
26	23	34
27	22	35
28	21	36
29	20	37
30	19	38
TOTAL		

Una compañía de chocolates del centro de la ciudad desea realizar un estudio para conocer el comportamiento en compra de sus productos por parte de 30 clientes constantes, para lo cual tomo los datos a través del tiempo en que llegaban a comprar sus productos y el tiempo en prestarle el servicio. Desea estimar los diferentes parámetros para lo cual tomo sus datos en totalidad.

número de clientes	TIEMPO DE LLEGADA	TIEMPO DE SERVICIO
1	45	50
2	46	52
3	47	53
4	48	54
5	49	55
6	50	60
7	52	61
8	52	62
9	53	66
10	54	63
11	55	64
12	56	65
13	57	67
14	58	68
15	59	69
16	59	70
17	60	71
18	61	72
19	62	76
20	62	75
21	63	76
22	64	77
23	65	78
24	66	79
25	67	77
26	68	75
27	69	74
28	70	76
29	66	72
30	65	76
TOTAL		

Una sucursal bancaria desea el comportamiento de manejo de tarjetas debito por parte de 30 de sus clientes para lo cual realizo un estudio en su sede principal entre las 8 a.m. y 11.30 p.m., se tiene en la oficina 3 servidores. Para lo cual se obtuvieron los datos en la tabla y se pide determinar los diferentes parámetros.

Número de clientes	TIEMPO DE LLEGADA	TIEMPO DE SERVICIO
1	6	11
2	7	12
3	8	13
4	9	12
5	11	23
6	12	22
7	13	21
8	14	20
9	13	23
10	15	24
11	16	25
12	17	25
13	18	26
14	19	27
15	21	28
16	22	29
17	23	31
18	24	23
19	25	22
20	15	20
21	10	21
22	6	12
23	5	13
24	3	14
25	4	15
26	5	16
27	7	12
28	18	20
29	12	15
30	14	16
TOTAL		

Una empresa transportadora de alimentos desea estimar el comportamiento de entrega de sus productos en supermercados a de 30 de sus clientes para lo cual realizo un estudio entre los supermercados que le presta el servicio entre las 8 a.m. y 6.30 p.m., se tiene en 6 servidores. Para lo cual se obtuvieron los datos en la tabla y se pide determinar los diferentes parámetros.

Número de clientes	TIEMPO DE LLEGADA	TIEMPO DE SERVICIO
1	21	32
2	22	33
3	23	34
4	25	34
5	23	35
6	28	36
7	29	37
8	30	38
9	31	39
10	32	40
11	33	41
12	34	42
13	34	43
14	35	44
15	36	45
16	37	45
17	38	46
18	39	47
19	40	48
20	41	49
21	42	51
22	43	52
23	44	56
24	45	55
25	46	54
26	46	53
27	47	57
28	44	58
29	49	59
30	45	60
TOTAL		

- ◆ El estudiante deberá plantear un problema de línea de espera en serie de acuerdo a su lugar de trabajo.
- ◆ El estudiante podrá plantear un ejercicio de línea de espera en paralelo de acuerdo a su lugar de estudio.

Una empresa de electrodomésticos de Bogotá surte a una cadena de almacenes con tres sus líneas, la cual desea analizar el comportamiento de sus clientes de acuerdo a sus compras por lo tanto efectuó un estudio de mercadeo para disminuir el costo. La demanda de artículos de artículos para tres ciudades es de 135 unidades mensuales para Medellín, para Bogotá de 165 unidades y Cali de 170 unidades mensuales. El costo de preparación de la orden es de \$1500 para Bogotá, a Cali de \$750 y a Medellín de \$650 por orden y el costo que le representa el almacenamiento por unidad en el mes es de \$250, Utilizando los datos, se pide plantear un modelo EOQ y se pide determinar sus parámetros. La empresa trabaja 260 días al año. Además cual produce los costos mínimos y los costos más altos.

- ◆ El estudiante deberá plantear un ejercicio de modelo de inventarios.

#### Prueba Final

- ◆ ¿Cómo define usted los conceptos de líneas de espera?
- ◆ ¿En qué consiste la línea de espera de una cola?
- ◆ ¿Cuál es la utilidad de los servidores en la línea de espera?
- ◆ ¿En qué consiste el modelo de inventarios?

#### Actividad

El estudiante debe realizar un ejercicio aplicado a su actividad académica utilizando la línea de espera y los modelos de inventarios.

## 7. GLOSARIO

1. **Modelo:** Un objeto X es un modelo del objeto Y para el observador Z, si Z puede emplear X para responder cuestiones que le interesan acerca de Y).
2. **Simulación:** Simulación es el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y llevar a cabo experiencias con él, con la finalidad de aprender el comportamiento del sistema o de evaluar diversas estrategias para el funcionamiento del sistema
3. **Cadena de markov:** Consiste en una forma de analizar el movimiento actual del comportamiento de una variable discreta o continua con respecto al año. Es un procedimiento en cadena y se utiliza para la toma de decisiones.
4. **Ecuación de Chapman – Kolmogorov:** Es un procedimiento que me permite realizar un proceso en cadena para obtener la solución a un problema dado por medio de multiplicación de matrices
5. **Regresión lineal Simple:** El estudio de la regresión simple muestra la relación entre dos variables, una de ellas es independiente y una variable dependiente.
6. **Pronósticos:** es simplemente una predicción del comportamiento de una variable la cual está sujeta al presente y como va hacer en el futuro.
7. **Teoría de colas:** Es una formulación matemática para la optimización de sistemas en que interactúan dos procesos normalmente aleatorios: un proceso de llegadas de clientes y un proceso de servicio a los clientes, en los que existen fenómenos de acumulación de clientes en espera del servicio y donde existen reglas definidas (conductos) para la prestación del servicio.
8. **Modelos inventarios:** Son aquellos materiales o bienes ociosos que la organización conserva para su uso en algún momento en el futuro

## 8. BIBLIOGRAFÍA

### Fuentes bibliográficas

1. MENDENHALL, William. SINCICH, Terry. Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias. 4ª edición. Prentice Hall. 1997.
2. PURCELL, Edwin J. VARBERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6ª edición. Prentice Hall. 1997.
3. MATHUR, Kamlesh, SOLOW, Daniel. Investigación de Operaciones, el arte de la toma de decisiones. Prentice Hall. 1997.
4. NAKAMURA, Shoichiro. Análisis numérico y visualización gráfica con Matlab. 1ª edición. Prentice Hall. 1997.
5. MONROY, Olivares César. Teoría del caos. Alfa Omega grupo editor. 1997.
6. Galdos Cálculo y Estadística III Edición Única. Grupo La Republica. Lima Perú; 2005.
7. Cannavos G. Probabilidad y Estadística Aplicación y métodos. Ed. en español Mc GRAW-HILL/INTERAMERICANA DE MEXICO.1995.
8. Hamdy A. Taha. Investigación de Operaciones. edición 7. Pearson Educación, 2004. páginas 830

### Fuentes digitales o electrónicas

1. [ilink Universidad de Alicante](#) Desde la primera publicación de Investigación de operaciones: una introducción, en el año 1971, he hecho incontables cambios, tanto en el estilo como en el ... [gaudi.ua.es/ uhtbin/ boletin/ 189880](#)
2. [UNIVERSIDAD NACIONAL AUTNOMA DE MEXICO](#) Investigación de Operaciones (una introducción). 6a. Edición. México. Prentice Hall,1998. MARÍN PINILLOS, Benito. Técnicas de Optimización ... [www.economia.unam.mx/ reforma/ proplan/ eco\\_negoci/ pdfs/ semestre6/ InvestigaciondeOperacionesI.pdf](#)

Más 3. Investigación de Operaciones: Opiniones y Características en... Opiniones y características sobre Investigación de Operaciones. Desde la primera publicación de Investigacion de Operaciones: Una... [opinion.mercadolibre.com.ar/ investigacion-operaciones-26725-VCP](#)

4. INVESTIGACIÓN OPERATIVA. Introducción. - La naturaleza de la ... Pontificia de Comillas). - TAHA (1997), " Investigación de operaciones una introducción " (6ª Edición), De. Prentice Hall.  
[www.uclm.es/ área/ WebMaths/ docencia/ temarios/ Microsoft%20Word%20-%20io\\_eco.pdf](http://www.uclm.es/área/WebMaths/docencia/temarios/Microsoft%20Word%20-%20io_eco.pdf)

5. Universidad del Cauca Ingeniería de Sistemas 658.4034T357 Investigación de Operaciones: Una introducción./ ha Taha. 658.4034T435 Toma de Decisiones por medio de Investigación de Operaciones rj Thierauf ... [www.unicauca.edu.co/ docs/ facultades/ sistemas/ pensum/ SemestreVIII/ investigacion\\_operaciones.pdf](http://www.unicauca.edu.co/docs/facultades/sistemas/pensum/SemestreVIII/investigacion_operaciones.pdf)

6. UNIVERSIDAD AUTÓNOMA CHAPINGO TAHA, ha Investigación de Operaciones una Introducción. Editorial Representaciones y Servicios. México. 1981. THIERAUF, rj Introducción a la Investigación... [www.chapingo.mx/ agroind/ planes/ fichas/ Optativas/ pdf/ Investigaci%F3n%20de%20operaciones.pdf](http://www.chapingo.mx/agroind/planes/fichas/Optativas/pdf/Investigaci%F3n%20de%20operaciones.pdf)

7. Microsoft powerpoint - tema6 Algorithms". PWS-KENT Publishing Company. 1987. TAHA, ha "Investigación de Operaciones. Una Introducción." (6ª. ed.) Prentice-Hall, 1998. ... [www.lcc.uma.es/ ~cmgl/ mmtc0708/ tema6.pdf](http://www.lcc.uma.es/~cmgl/mmtc0708/tema6.pdf)

8. INVESTIGACION DE OPERACIONES I INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES Una introducción. Hamdy Taha. Ed. Prentice Hall, 1998. [Incluye diskette con software]. 2.- INTRODUCCION A LA INVESTIGACION DE... [www.ucab.edu.ve/ ucabnuevo/ industrial/ recursos/ prog\\_inv\\_operaciones1.pdf](http://www.ucab.edu.ve/ucabnuevo/industrial/recursos/prog_inv_operaciones1.pdf)

9. bciucla Descriptor: Alejandría BE 7.0.3b3 [T57.6 T34 1997] Investigación de Operaciones una Introducción Operations Research, an Introduction Taha, Hamdy A. Fernández Gamero, Ángel (Revisor); [bibcyt.ucla.edu.ve/ cgi-win/ be\\_alex.exe?Descriptor=IX+SEMESTRE+MATEMATICA& Nombrebd=bciucla](http://bibcyt.ucla.edu.ve/cgi-win/be_alex.exe?Descriptor=IX+SEMESTRE+MATEMATICA&Nombrebd=bciucla)

10. UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA Investigación de operaciones. Una introducción. Séptima Edición. Prentice Hall. Hillier – Lieberman. Introducción a la investigación de operaciones. ... 426.doc