



CORPORACIÓN
UNIVERSITARIA
REMINGTON
RES. 2661 MEN JUNIO 21 DE 1996

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA ASIGNATURA TRASVERSAL MATEMÁTICAS III

Dirección de Educación a Distancia y Virtual

Este material es propiedad de la Corporación Universitaria Remington (CUR),
para los estudiantes de la CUR en todo el país.

2012

CRÉDITOS



El módulo de estudio de la asignatura Transversal Matemáticas III es propiedad de la Corporación Universitaria Remington. Las imágenes fueron tomadas de diferentes fuentes que se relacionan en los derechos de autor y las citas en la bibliografía. El contenido del módulo está protegido por las leyes de derechos de autor que rigen al país.

Este material tiene fines educativos y no puede usarse con propósitos económicos o comerciales.

AUTOR

Elkin Ceballos Gómez.

Ingeniero Electricista de la Universidad Nacional Diplomado en Diseño Curricular. Especialista en Matemáticas Aplicadas y Pensamiento Complejo

Docente de La Corporación Universitaria de Ciencia y Desarrollo Docente de matemáticas en educación básica y media en la Institución Educativa Kennedy Docente de la organización Remington.

ecballos2@yahoo.com

Nota: el autor certificó (de manera verbal o escrita) No haber incurrido en fraude científico, plagio o vicios de autoría; en caso contrario eximió de toda responsabilidad a la Corporación Universitaria Remington, y se declaró como el único responsable.

RESPONSABLES

Director de la Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

Dr. Jorge Mauricio Sepúlveda Castaño

ingenieria.director@remington.edu.co

Tomás Vásquez Uribe

Director (e) Educación a Distancia y Virtual

distancia.coordinadorcat@remington.edu.co

Angélica Ricaurte Avendaño

Coordinadora de Remington Virtual (CUR-Virtual)

mediaciones.coordinador01@remington.edu.co

GRUPO DE APOYO

Personal de la Unidad de Remington Virtual (CUR-Virtual)

EDICIÓN Y MONTAJE

Primera versión. Febrero de 2011. Segunda versión Marzo 2012

Derechos Reservados



Esta obra es publicada bajo la licencia Creative Commons. Reconocimiento-No Comercial-Compartir Igual 2.5 Colombia.

TABLA DE CONTENIDO

1.	MAPA DE LA ASIGNATURA	7
2.	INTEGRAL INDEFINIDA E INTEGRACIÓN	9
2.1.	Prueba inicial.....	9
2.2.	Técnicas de Integración.....	37
3.	INTEGRAL DEFINIDA	68
3.1.	Prueba Inicial.....	68
3.2.	Integral Definida.....	69
3.3.	Área bajo una curva y área entre curvas.....	72
3.4.	Sólidos de Revolución	88
4.	MÉTODOS DE INTEGRACIÓN	101
4.1.	Prueba inicial.....	101
4.2.	Integración por partes.....	102
4.3.	Relación con otros Temas	132
5.	BIBLIOGRAFÍAS.....	133
5.1.	Fuentes digitales o electrónicas	134

1. MAPA DE LA ASIGNATURA

MATEMÁTICAS III

PROPÓSITO GENERAL DEL MÓDULO

El cálculo es una herramienta de uso cotidiano en la elaboración de diseños y la implementación y desarrollo de proyectos. El manejo de la conceptualización y aplicación de este modelo permitirá un ejercicio versátil de la acción en las diferentes áreas del conocimiento.

OBJETIVO GENERAL

Ampliar y mejorar la capacidad para plantear, manejar e interpretar argumentos matemáticos, contribuyendo así al desarrollo de la disciplina mental y de trabajo de los estudiantes. Presentar el cálculo como una de las ramas de la matemática más aplicadas en las ciencias naturales y las tecnologías contemporáneas, estudiar comprensivamente los elementos geométricos, algebraicos y analíticos asociados al modelo de representación de situaciones problemáticas propuesto por el cálculo en su aproximación integral. Identificar las características de este modelo de representación con una claridad suficiente que le permitan al estudiante desarrollar la habilidad y la destreza de discretizar cuales situaciones problemáticas de su cotidianidad pueden ser simuladas con este esquema de pensamiento. Brindar elementos del modelo que permitan representar otro grado de libertad del sistema dinámico no lineal conformado por la interacción de la persona y su entorno de objetos cotidianos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✘ Definir la anti derivada y la integral indefinida, así como explicar y aplicar las fórmulas básicas de integración.
- ✘ Entender el concepto de la integral definida a partir del cálculo del área bajo una curva
- ✘ Calcular integrales indefinidas y definidas, usando diferentes métodos de integración.
- ✘ Escriba aquí el objetivo general de la unidad tres
- ✘ Escriba aquí el objetivo general de la unidad.

UNIDAD 1

Búsqueda de definiciones de situaciones problemáticas cotidianas para ser representados por medio del modelo.

Estudio teórico-práctico de las características fundamentales del modelo.

Se explica las leyes básicas de integración, la integración con condiciones iniciales, las aplicaciones en economía y física y algunas técnicas de integración.

UNIDAD 2

Búsqueda de definiciones de situaciones problemáticas cotidianas para ser representados por medio del modelo.

Estudio teórico-práctico de las características fundamentales del modelo.

Concepto de integral definida partiendo del área bajo una curva, teorema fundamental del cálculo y propiedades de la integral definida.

UNIDAD 3

Búsqueda de definiciones de situaciones problemáticas cotidianas para ser representados por medio del modelo.

Estudio teórico-práctico de las características fundamentales del modelo.

Resolver integrales de funciones racionales mediante la transformación de la función racional propia en una suma de fracciones más simples. Resolver integrales que provienen de la derivada de un producto de funciones.

2. INTEGRAL INDEFINIDA E INTEGRACIÓN

OBJETIVO GENERAL.

Definir la anti derivada y la integral indefinida, explicando y aplicando las fórmulas básicas de integración.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✘ Utilizar las leyes básicas de integración para encontrar un conjunto de funciones primitivas.
- ✘ Integración de funciones por el método de sustitución o cambio de variable.
- ✘ Efectuar integrales realizando división previa a la integral.

2.1. Prueba inicial.

Escriba cinco notaciones diferentes para indicar la primera derivada de una función o modelo matemático.

Obtenga la derivada indicada para cada función:

- ✘ $f(x) = 8x^3 - 9x^2 - 5x + 7.$ Tercera
- ✘ $y = f(x) = \frac{3x^5}{2} + \frac{7x^3}{3} - \frac{3x}{2}.$ Primera
- ✘ $y = \frac{6}{2x-3}.$ Primera
- ✘ $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^5} + 7.$ Primera
- ✘ $y = f(x) = (3 - 5x^2)(4x - 15)$ Segunda
- ✘ $y = e^{5x^3 - 6x + 4}$ Primera
- ✘ $y = \ln(5x^3 - 2x^2 + 7)$ Primera

Encuentre la función de costo marginal y la función de costo promedio para cada función de costo dada:

✖ $c(q) = 3.5q^2 + 2q - 4 \$$

✖ $c(q) = 6q^3 + 8.5q^2 - 3q + 7 \text{ Dólares}$

Dada la función para la posición instantánea de cierto objeto, donde t es el tiempo en segundos, encuentre la función para la velocidad instantánea y la función para la aceleración instantánea:

✖ $s(t) = 8t^2 + 5t - 60 \text{ Km}$

✖ $s(t) = 50t + 3 \text{ m}$

✖ $s(t) = 17t^3 + 28t^2 - 9t + 5 \text{ cm}$

Dada la función para la demanda de un producto:

$$p(q) = 15q + 9 \$$$

Determine la función para el ingreso marginal.

Temas

INTEGRACIÓN

✖ Reseña histórica.

Los cimientos del Cálculo Infinitesimal fueron colocados por matemáticos como: Cavalieri, Torricelli, Fermat, Pascal y Barrow, entre otros. Y luego el cálculo fue desarrollado en forma independiente por Isaac Newton en Inglaterra y por Gottfried Leibniz en Alemania hacia el final de los años 1600 y comienzos de los años 1700 (entre 1660 y 1720). Y fue George Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) quien proporcionó la definición moderna de la Integral definida.

Uno de los problemas que originó el desarrollo del Cálculo fue el problema del área. El concepto de área se tuvo desde muy temprano, prácticamente desde el desarrollo de la agricultura y la propiedad privada que hizo necesario idear métodos para medir los terrenos. Antes de los griegos se conocían fórmulas para calcular con bastante precisión el área de superficies poligonales de cualquier forma. Lo que no existía era una fórmula o un método para encontrar el área de una superficie cuyo borde exterior fuera una curva, la de un círculo por ejemplo.

Arquímedes (287-212 AC) resolvió el problema parcialmente, deduciendo la fórmula para hallar el área del círculo. El método de Arquímedes fue un avance importante, pero no satisfacía totalmente la necesidad de encontrar el área de una curva, problema que si resolvió el Cálculo. Esta fue un de las necesidades por las cuales surgió el Cálculo.

Hoy en día el Cálculo no solo se aplica para determinar áreas, sino también para el diseño de puentes, caminos, velocidad exacta que debe alcanzarse para colocar un satélite en una órbita alrededor de la tierra, para determinar modelos matemáticos bajo ciertas condiciones, entre otras aplicaciones. Tiene aplicación en todas las ramas del conocimiento, en Economía, Administración, Física y demás ciencias.

Definición de integral ó antiderivada.

La integral es una operación contraria a la derivada.

DEFINICIÓN:

La integral de una función $f(x)$, es otra función que $F(x)$, siempre que se cumpla que $F'(x) = f(x)$.

Para indicar que $F(x)$ es una integral de $f(x)$ utilizamos el siguiente símbolo:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Esto es lo que se llama integral indefinida.

DEMOSTRACIÓN:

Para hacer la demostración partimos de la condición:

$$F'(x) = f(x)$$

Otra notación para $F'(x)$ puede ser:

$$F'(x) = \frac{d[F(x)]}{dx}$$

La igualdad queda:

$$\frac{d[F(x)]}{dx} = f(x)$$

Multiplicando a ambos lados por dx queda:

$$\frac{d[F(x)]}{dx} * dx = f(x) * dx \rightarrow d[F(x)] = f(x)dx$$

Para quitar el diferencial $d[F(x)]$, integramos en ambos lados:

$$\int d[F(x)] = \int f(x)dx$$
$$F(x) = \int f(x)dx$$

Que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo1:

Si $F(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6x$

Derivando tenemos que:

$$F'(x) = 12x^2 + 10x + 6 = f(x)$$

Aplicando la fórmula:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Tenemos que:

$$F(x) = \int (12x^2 + 10x + 6)dx = 4x^3 + 5x^2 + 6x$$

Es decir, una integral de $12x^2 + 10x + 6$, es:

$$F(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6x.$$

Ejemplo2:

Si $F(x) = 5x^4$

Derivando tenemos que:

$$F'(x) = 20x^3 = f(x)$$

Aplicando la fórmula:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Tenemos que:

$$F(x) = \int 20x^3 dx = 5x^4$$

Es decir, una integral de $20x^3$, es:

$$F(x) = 5x^4.$$

NOTA:

Siempre que integremos se debe sumar al resultado una constante de integración **C** que representa las cantidades que no tiene variable.

Explicación de la nota anterior:

Sí $F(x) = x^4$, su derivada $F'(x)$ es $4x^3$, esto es:

$$F'(x) = 4x^3$$

Entonces, tenemos que una integral de $4x^3$ es $F(x) = x^4$. Representando esta situación matemáticamente, tenemos que:

$$\int 4x^3 dx = x^4$$

Pero que pasa si $F(x) = x^4 + 10$, derivando podemos ver que:

$$F'(x) = 4x^3$$

Se obtiene la misma derivada, por lo tanto:

$\int 4x^3 dx$ También debe ser igual a $F(x) = x^4 + 10$.

Lo mismo sucede si $F(x) = x^4 - 5$

Su derivada es igual a

$$F'(x) = 4x^3$$

Entonces, $\int 4x^3 dx$ debe ser igual a $F(x) = x^4 - 5$

Tenemos que $\int 4x^3 dx$

Debe ser igual a: $F(x) = x^4$ y debe ser igual a $F(x) = x^4 + 10$ y también debe ser igual a $F(x) = x^4 - 5$

Estas tres funciones solo se difieren en una constante, como no sabemos cuál número escribir, **siempre que se integre, al resultado le escribimos una constante C.**

LEYES BÁSICAS DE INTEGRACIÓN.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c; \quad n \neq -1$$

Ejemplo1

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{x^4}{4} + c$$

Ejemplo2

$$\int \sqrt[5]{x^2} dx = \int x^{2/5} dx = \frac{x^{2/5+1}}{2/5+1} + c = \frac{x^{7/5}}{7/5} + c = \frac{5}{7} \sqrt[5]{x^7} + c$$

Ejemplo3

$$\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3-1}}{-3-1} + c = \frac{x^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{4x^4} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln x + c$$

$$\int dx = x + C$$

Ejemplo1

$$\int dz = z + C$$

Ejemplo2

$$\int dy = y + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

Ejemplo1

$$\int 5^x dx = \frac{1}{\ln 5} 5^x + C$$

Ejemplo2

$$\int 7^x dx = \frac{1}{\ln 7} 7^x + C$$

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx = kF(x) + C$$

Donde k es una constante.

Podemos ver que se efectúa la integral de la función, el resultado se multiplica por la constante k y al final sólo se escribe una sola constante de integración.

Ejemplo1

$$\int 10dx = 10 \int dx = 10x + c$$

Ejemplo2

$$\int \frac{11}{x} dx = 11 \ln x + c$$

Ejemplo3

$$\int \frac{-4}{y} dy = -4 \ln y + c$$

Ejemplos4

$$\int \frac{8}{x} dx = 8 \int \frac{1}{x} dx = 8 \ln x + C$$

Ejemplo 5

$$\int \sqrt{3} dx = \sqrt{3} \int dx = \sqrt{3}x + c$$

Ejemplo 6

$$\int 9x^{1.3} dx = 9 \int x^{1.3} dx = \frac{9x^{2.3}}{2.3} + C$$

Ejemplos7

$$\int 6x^2 dx = 6 \int x^2 dx = 6 \frac{x^{2+1}}{2+1} + c = 6 \frac{x^3}{3} + c = 2x^3 + c$$

Ejemplo 8

$$\int \frac{8}{x^5} dx$$

$$\int \frac{8}{x^5} dx = 8 \int x^{-5} dx = 8 \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{2}{x^4} + C$$

Ejemplo9

$$\int 11e^x dx = 11 \int e^x dx = 11e^x + C$$

Ejemplo10

$$\int \frac{3}{5} e^x dx = \frac{3}{5} e^x + c$$

Ejemplo11

$$\int -8e^z dz = -8e^z + c$$

Ejemplo12

$$\int e dx = ex + c \text{ Ya que } e \text{ es una constante.}$$

Ejemplo13

$$\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + c$$

$$\int [f(x) \pm g(x) \pm h(x) \pm \dots] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \pm \int h(x) dx \pm \dots$$

Esto es: La integral de una suma es igual a la suma de las integrales.

Para aplicar la ley, se efectúa cada derivada independientemente y al final escribimos una sola constante de integración C.

Ejemplos1

$$\begin{aligned} \int (5x^2 + 6x - 10) dx &= \int 5x^2 dx + \int 6x dx - \int 10 dx = \frac{5x^3}{3} + \frac{6}{2}x^2 - 10x + c \\ &= \frac{5x^3}{3} + 3x^2 - 10x + c \end{aligned}$$

Ejemplo 2

$$\int (7x^4 - 3x^2 + 8x - 9) dx$$

SOLUCIÓN

$$7 \int x^4 dx - 3 \int x^2 dx + 8 \int x dx - 9 \int dx$$

$$\frac{7x^5}{5} - \frac{3x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 9x + C$$

Simplificando:

$$\frac{7x^5}{5} - x^3 + 4x^2 - 9x + C$$

Ejemplo 3

$$\int \frac{4x^5 - 6x^3 + 8x}{2x} dx$$

$$\int \frac{4x^5 - 6x^3 + 8x}{2x} dx = \int \frac{4x^5}{2x} dx - \int \frac{6x^3}{2x} dx + \int \frac{8x}{2x} dx$$

$$\int 2x^4 dx - \int 3x^2 dx + \int 4 dx = 2 \frac{x^5}{5} - 3 \frac{x^3}{3} + 4x + c$$

Ejemplo 4

$$\int 5z^3 dx$$

$$\int 5z^3 dx = 5z^3 \int dx = 5z^3 x + c$$

Esto debido a que se está integrando x y no se está integrando z

Ejemplo 5

$$\int \left(3q^2 - \frac{2}{3}q + 5 \right) dq$$

$$\begin{aligned} \int \left(3q^2 - \frac{2}{3}q + 5 \right) dq &= 3 \int q^2 dq - \frac{2}{3} \int q dq + 5 \int dq = 3 \frac{q^3}{3} - \frac{2}{3} \frac{q^2}{2} + 5q + c \\ &= q^3 - \frac{1}{3}q^2 + 5q + c \end{aligned}$$

Ejemplo 6

$$\int y^2(y + 3/2) dy$$

$$\int y^2 \left(y + \frac{3}{2} \right) dy = \int \left(y^3 + \frac{3}{2} y^2 \right) dy = \int y^3 dy + \int \frac{3}{2} y^2 dy = \frac{y^4}{4} + \frac{3}{2} \frac{y^3}{3} + c$$

$$\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^3 + c$$

Ejemplo7

$$\int 3 \cdot 2^x dx = 3 \int 2^x dx = 3 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + c$$

Ejemplo8

$$\int \frac{5^x}{7} dx = \frac{1}{7} \int 5^x dx = \frac{1}{7} \frac{5^x}{\ln 5} + c$$

Integración con condiciones iniciales. Las condiciones iniciales nos permiten determinar el valor de la constante **C**. Es decir entre muchas funciones, nos permite determinar una única función.

Ejemplo1

Sí. $f'(x) = 5x$, y $f(1) = 4$. Determine: $f(x)$

El procedimiento a seguir para este y para cualquier otro ejemplo es el siguiente:

1. escriba una notación para la derivada que permita visualizar las dos variables.

$f'(x)$. También se puede escribir como: $\frac{d[f(x)]}{dx}$ ó $\frac{dy}{dx}$ esto es.

$$f'(x) = \frac{d[f(x)]}{dx} = \frac{dy}{dx} \text{ . Utilicemos. } \frac{dy}{dx} \text{ .}$$

2. La ecuación que nos dan se llama una ecuación diferencial (porque es una ecuación que incluye derivadas).

$$\frac{dy}{dx} = 5x$$

3. Debemos independizar las dos variables. Todo lo que tenga **x** a un lado (incluyendo el dx) y todo lo que tenga $y = f(x)$ al lado contrario.

Separando variables queda:

$$dy = 5x dx$$

4. Debemos integrar en ambos lados. No es necesario colocar dos constantes de integración.

$$\int dy = \int 5x dx$$

Resolviendo la integral

$$y = \frac{5x^2}{2} + C$$

Recuerde que y es lo mismo que $f(x)$ ($y = f(x)$)

5. Luego utilizamos la condición inicial o valor en la frontera para hallar **C**.

Para este caso la condición inicial es $f(1) = 4$. Esta condición quiere decir:

Para $x = 1$, $y = 4$

Vamos a la función obtenida y reemplazamos tanto a **x** como a **y**; resulta una ecuación con una incógnita que es **C**, La despejamos. Tenemos:

Para $x = 1$, $y = 4$ Reemplazando **x** e **y** en el modelo tenemos:

$$4 = \frac{5(1)^2}{2} + C \Rightarrow 4 = \frac{5}{2} + C \Rightarrow 4 - \frac{5}{2} = C \Rightarrow \frac{8-5}{2} = C \Rightarrow \frac{3}{2} = C$$

La función queda:

$$y = \frac{5x^2}{2} + \frac{3}{2}$$

Hemos contestado la primera pregunta.

- a. Con la función obtenida podemos encontrar valores de x o de y según se necesite.

b. $f(x) \rightarrow y = \frac{5x^2}{2} + \frac{3}{2}$

c. $f(-3)$

$$f(-3) = \frac{5(-3)^2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{45}{2} + \frac{3}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

d. $f(2)$

$$f(2) = \frac{5(2)^2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{20}{2} + \frac{3}{2} = \frac{23}{2}$$

e. ¿Qué valor tiene la x cuando $y = 7$?

$$7 = \frac{5x^2}{2} + \frac{3}{2} \rightarrow 2 * 7 = 2 * \frac{5x^2}{2} + 2 * \frac{3}{2}$$

$$14 = 5x^2 + 3$$

$$14 - 3 = 5x^2$$

$$11 = 5x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{11}{5}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{11}{5}}$$

Ejemplo2

Si y es una función de x tal que $y' = 8x - 4$ y $y(2) = 5$, encuentre y . [Nota: $y(2) = 5$ significa que $y = 5$ cuando $x = 2$] Encontrar también $y(4)$.

Solución: Aquí, $y(2) = 5$ es la condición inicial. Como $y' = 8x - 4$, y es una antiderivada de $8x - 4$:

$$y = \int (8x - 4)dx = 8 \cdot \frac{x^2}{2} - 4x + C = 4x^2 - 4x + C. \quad (2)$$

Podemos determinar el valor de C por medio de la condición inicial. Como $y = 5$ cuando $x = 2$, de la ecuación 2 tenemos

$$5 = 4(2)^2 - 4(2) + C$$

$$5 = 16 - 8 + C$$

$$C = -3$$

Reemplazando C por -3 en la ecuación (2) se obtiene la función que buscamos:

$$y = 4x^2 - 4x - 3 \quad (3)$$

Para encontrar $y(4)$, hacemos $x = 4$ en la ecuación (3):

$$y(4) = 4(4)^2 - 4(4) - 3 = 64 - 16 - 3 = 45$$

Ejemplo 3

Si $f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$ con $f'(3) = 8$, halle $f(x)$

SOLUCIÓN

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x + 3 \Rightarrow dy = (3x^2 + 4x + 3)dx$$

$$\int dy = \int (3x^2 + 4x + 3)dx \Rightarrow y = \frac{3x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 3x + C$$

$$y = f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + C$$

La condición inicial es: $x = 3$, $y = 8$

Reemplazando tenemos:

$$8 = (3)^3 + 2(3)^2 + 3(3) + C \Rightarrow 8 = 27 + 18 + 9 + C$$

$$8 - 27 - 18 - 9 = C \Rightarrow C = -46$$

¹ HAEUSSLER. Ernest. F. Jr; RICHARD S. Paul. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. 8 ed. México: Prentice Hall, 1997. p. 729

La función o modelo queda:

$$y = f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 46$$

Aplicaciones de la integral indefinida.

APLICACIONES EN ECONOMÍA: Costo marginal, ingreso marginal y otras aplicaciones en economía.

Costo marginal: Tenemos los siguientes tres modelos matemáticos (o funciones)

$c(q)$:

Modelo o función para los costos.

$c'(q)$:

Modelo o función de costo marginal. El costo marginal resulta al derivar la función o modelo de costo. El costo marginal es lo que cuesta producir una unidad adicional a las unidades que se tenía planeado producir inicialmente.

$$\bar{c}(q) = \frac{c(q)}{q}:$$

Es el modelo o función de costo promedio. Es lo que cuesta en promedio producir una sola unidad.

q :

Número de unidades producidas.

Como estamos integrando el dato en este tipo de problemas será el modelo de costo marginal; adicional mente la condición inicial será casi siempre la misma, nos darán un valor para los costos fijos, los costos fijos quieren decir $q = 0$. (Producción igual a cero).

Ejemplo1

En la manufactura de un producto se tiene: Costos fijos mensuales de \$ 2'000000 (\$ 2000 miles). Y el modelo o función para el costo marginal es:

$$c'(q) = 10q + 8 \text{ \$ (miles).}$$

Donde q es el número de unidades producidas mensualmente.

Determine:

1. Función o modelo para el costo.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}c'(q) &= \frac{d[c(q)]}{dq} \rightarrow \frac{d[c(q)]}{dq} = 10q + 8 \\d[c(q)] &= (10q + 8)dq \rightarrow \int d[c(q)] = \int (10q + 8)dq \\c(q) &= 5q^2 + 8q + c\end{aligned}$$

2. La condición inicial dice que los costos fijos son de \$2000 miles, esto quiere decir que para $q = 0$, $c = 2000$

$$2000 = 5(0)^2 + 8(0) + c \rightarrow c = 2000$$

El modelo de costos queda: $c(q) = 5q^2 + 8q + 2000$ \$(miles)

3. Función o modelo para el costo promedio.

SOLUCIÓN

$$\bar{c}(q) = \frac{c(q)}{q} = \frac{5q^2 + 8q + 2000}{q} = 5q + 8 + \frac{2000}{q} \quad \$(miles)$$

4. Costo, costo promedio y costo marginal cuando se producen 50 unidades en el mes; interprete los resultados obtenidos.

SOLUCIÓN

Nos piden determinar: $c(50)$, $\bar{c}(50)$, $c'(50)$

$$c(50) = 5(50)^2 + 8(50) + 2000 = 14900 \quad \$(miles)$$

Quiere decir. Producir 50 unidades en un mes le cuesta a la empresa \$ 14'900000.

$$\bar{c}(50) = 298 \text{ $(miles)}.$$

Quiere decir: Cuando se producen 50 unidades en un mes cada unidad le cuesta a la empresa \$289000.

$$c'(50) = 10(50) + 8 = 508 \text{ $miles}$$

Quiere decir: Cuando se producen 50 unidades, producir una unidad adicional a las 50 le cuesta a la empresa \$ 508000. Esa sola unidad adicional cuesta \$ 508000.

Ejemplo2

La función o modelo para el costo marginal es:

$$c'(q) = 4q + 7 \text{ $}$$

Determine el costo promedio cuando la producción es de 200 unidades. Se sabe que los costos fijos son de \$350000

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} c(q) &= \int c'(q) dq = \int (4q + 7) dq \text{ $} \\ c(q) &= 4 \frac{q^2}{2} + 7q + c \text{ $} \Rightarrow c(q) = 2q^2 + 7q + c \end{aligned}$$

La condición inicial dice que: Costos fijos son de \$350000

Esto quiere decir: $q = 0$, $c(q) = 350000$

Reemplazando tenemos:

$$350000 = 2(0)^2 + 7(0) + c \Rightarrow c = 350000$$

La función de costo total queda:

$$c(q) = 2q^2 + 7q + 350000$$

La función de costo promedio se obtiene como:

$$\bar{c}(q) = \frac{c(q)}{q} = \frac{2q^2 + 7q + 350000}{q} = 2q + 7 + \frac{350000}{q} \$$$

Nos piden hallar el costo promedio para una producción de 200 unidades, es decir para $q = 200$

$$\bar{c}(200) = 2(200) + 7 + \frac{350000}{200} \$ = 2157 \$$$

Ejemplo3

El siguiente ejemplo fue tomado del libro Fundamentos de Cálculo del autor Francisco Soler Fajardo² y otros.

Una compañía actualmente produce 150 unidades por semana de un producto. Por experiencia, saben que producir la unidad número x en una semana (costo marginal) está dado por:

$$c'(x) = 25 - 0.02x \$$$

Determine el costo extra por semana que debería considerar al elevar la producción de 150 a 200 unidades por semana.

SOLUCIÓN

Debemos hallar la función de costo.

$$c(x) = \int c'(x) dx = \int (25 - 0.02x) dx = 25x + 0.02 * \frac{x^2}{2} + C$$

$$c(x) = 25x + 0.01x^2 + C \$$$

No se tienen la información suficiente para determinar la constante de integración C , pero no es necesario saberlo. Ya que se desea calcular el incremento en el costo que resulta al elevar x de 150 a 200 unidades por semana, es decir, se desea hallar:

$$c(200) - c(150)$$

$$c(200) = 25(200) - 0.01(200)^2 + C = 4600 + C$$

² SOLER FAJARDO, Francisco; NUÑEZ, Reinaldo; ARANDA SILVA, Moisés. Fundamentos de Cálculo con aplicaciones a ciencias Económicas y Administrativas. 2 ed. Bogotá: Ecoe ediciones, 2002. p. 370.

$$c(150) = 25(150) - 0.01(150)^2 + C = 3525 + C$$
$$c(200) - c(150) = 4600 + C - (3525 + C) = 4600 + C - 3525 - C = 1075$$

El incremento en el costo semanal sería de \$ 1075.

INGRESO MARGINAL: Tenemos las siguientes tres funciones:

$$r(q) :$$

Función para los ingresos.

$$r'(q) :$$

Función de ingreso marginal. El ingreso marginal resulta al derivar la función o modelo de ingreso. El ingreso marginal es el ingreso que resulta cuando se vende una unidad adicional a las presupuestadas.

$$r(q) = p(q) * q :$$

$$p(q) :$$

Función de precio o demanda.

$$q :$$

Número de unidades vendidas.

Como estamos integrando el dato en este tipo de problemas será el modelo de ingreso marginal; adicionalmente la condición inicial será casi siempre la misma, si no hay ventas no habrá ingresos, esto es: Para $q = 0$, $r = 0$.

Ejemplo1

Si la función para el ingreso marginal es:

$$r'(q) = 1000 - 15q - q^2 \text{ \$}$$

Encuentre la función para la demanda o precio

SOLUCIÓN

$$r'(q) = \frac{d[r(q)]}{dq}$$

$$\frac{dr}{dq} = 1000 - 12q - 6q^2 \text{ \$}$$

$$dr = (1000 - 12q - 6q^2) dq \Rightarrow \int dr = \int (1000 - 12q - 6q^2) dq$$

$$r = 1000q - \frac{12q^2}{2} - \frac{6q^3}{3} + C$$

$$y = r(q) = 1000q - 6q^2 - 2q^3 + C$$

Cuando no se vende ($q = 0$) no hay ingreso ($r = 0$). Nos queda:

$$0 = 1000(0) - 6(0)^2 - 2(0)^3 + C \Rightarrow C = 0$$

La función de ingreso es: $y = r(q) = 1000q - 6q^2 - 2q^3 \text{ \$}$

La función demanda se obtiene dividiendo la función de ingreso entre q :

$$p = \frac{r(q)}{q} = \frac{1000q - 6q^2 - 2q^3}{q} \$ = 1000 - 6q - 2q^2 \text{ \$}$$

Ejemplo2

La función o modelo para el ingreso marginal es:

$$r'(q) = 5q + 3000 \text{ \$}$$

Determine el modelo para el ingreso.

SOLUCIÓN

$$r(q) = \int r'(q) dq = \int (5q + 3000) dq = 5 \frac{q^2}{2} + 3000q + C$$

$$r(q) = \frac{5}{2} q^2 + 3000q + C$$

La condición inicial es:

$$q = 0, r = 0$$

$$q = 0, r = 0 \Rightarrow 0 = \frac{5}{2}(0)^2 + 3000(0) + C \Rightarrow C = 0$$

La función de ingreso es:

$$r(q) = \frac{5}{2} q^2 + 3000q \text{ \$}$$

APLICACIONES EN FÍSICA: (Movimiento en un eje coordenado y Caída libre). Para un objeto que se mueve a lo largo de un eje, tenemos las siguientes funciones:

$s(t)$:

Función o modelo de posición. Esta dado en unidades de espacio (metros, kilómetros, centímetros).

$v(t)$:

Función o modelo de velocidad instantánea. Está dada en unidades de espacio divididas entre unidades de tiempo. Las unidades más utilizadas son: m/s (Se lee metro por segundo; cm/s (centímetro por segundo); km./h (kilómetro por hora); Km./s (kilómetro por segundo); entre otras.

$a(t)$:

Función o modelo de aceleración. Esta dado en unidades de espacio divididas entre unidades de tiempo al cuadrado. Las más utilizadas son: m/s², Km./s².

t :

Tiempo.

Tenemos la siguiente relación entre ellas:

$$v(t) = \int a(t) dt$$

$$s(t) = \int v(t) dt$$

NOTAS:

Las condiciones iniciales, por lo general, se dan para un tiempo $t = 0$, a no ser que se de una condición diferente.

El dato en este caso es la aceleración.

Ejemplo1

La aceleración de un cuerpo que se mueve a lo largo de un eje coordenado está dada por:

$a(t) = 2t + 3 \text{ m/s}^2$ El objeto parte con una velocidad de 12 m/s desde una posición de 10 m.

Determine:

1. Función de velocidad instantánea.

SOLUCIÓN

$$v(t) = \int a(t) dt = \int (2t + 3) dt = t^2 + 3t + c$$

$$v(t) = t^2 + 3t + c$$

Debemos determinar el valor de la constante **C**. Sabemos que el objeto parte con una velocidad de 4 m/s. Esta condición inicial quiere decir:

Para $t = 0$, $v = 12$.

$$12 = (0)^2 + 3(0) + C \Rightarrow C = 12$$

La función de velocidad es: $v(t) = t^2 + 3t + 12 \text{ m/s}$

2. Función de posición:

$$s(t) = \int (t^2 + 3t + 12) dt$$

$$s(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 12t + C \text{ m}$$

Para hallar **C** tenemos que el objeto parte de una posición de 100 m, quiere decir esta condición:
Para $t = 0$, $s = 100$.

$$100 = \frac{(0)^3}{3} + \frac{3(0)^2}{2} + 12(0) + C \Rightarrow C = 100$$

La función de posición es: $s(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 12t + 100 \text{ m}$

Realice el mismo ejemplo cuando el objeto parte desde el reposo, es decir, cuando $v = 0$.

Ejemplo2

Un cuerpo se mueve a lo largo de un eje coordenado con aceleración dada por la función:

$$a(t) = 3t^2 + 6 \text{ m/s}^2$$

El objeto parte del reposo a 20 metros del origen.

Determine función de velocidad instantánea y función de posición instantánea.

SOLUCIÓN.

Tenemos que:

$$v(t) = \int a(t) dt = \int (3t^2 + 6) dt = \frac{3t^3}{3} + 6t + C = t^3 + 6t + C$$

El cuerpo parte del reposo, esto quiere decir que: $t = 0$, $v = 0$

Reemplazando tenemos:

$$0 = (0)^3 + 6(0) + C \Rightarrow C = 0$$

La función de velocidad es: $v(t) = t^3 + 6t \text{ m/s}$

$$s(t) = \int (t^3 + 6t) dt = \frac{t^4}{4} + \frac{6t^2}{2} + C = \frac{t^4}{4} + 3t^2 + C$$

Para hallar la función de posición sabemos que: $s(t) = \int v(t) dt$

A 20 metros del origen quiere decir que: $t = 0$, $s = 20$

Reemplazando tenemos:

$$20 = \frac{(0)^4}{4} + 3(0)^2 + C \Rightarrow C = 20$$

La función de posición es: $s(t) = \frac{t^4}{4} + 3t^2 + 20 \text{ m}$

Ejemplo3

Caída libre. En caída libre la aceleración es la gravedad y se asume como negativa.

Si el objeto va cayendo la velocidad se asume negativa (por lo general).

Si el objeto va subiendo la velocidad se asume positiva (Por lo general).

Recuerde que la gravedad es de $9,8 \text{ m/s}^2$. Quiere decir $a(t) = -9,8 \text{ m/s}^2$.

Se arroja un objeto desde una altura inicial de 310 m, con una velocidad de 15 m/s. Determine:

1. Función de velocidad instantánea:

SOLUCIÓN

Sabemos que: $a(t) = -9,8 \text{ m/s}^2$.

$$v(t) = \int -9,8 dt = -9,8t + c$$

Para determinar el valor de **C** utilizamos la condición inicial:

$$\begin{aligned} t = 0, \quad v &= 15 \\ 15 &= -9,8(0) + c \rightarrow 15 = c \end{aligned}$$

La función de velocidad queda: $v(t) = -9,8t + 15 \text{ m/s}$

2. Función para la posición:

SOLUCIÓN

$$s(t) = \int (-9,8t + 15)dt = -4,9t^2 + 15t + c$$

La condición inicial es: Para $t = 0$, $s = 310$.

$$310 = -4,9(0)^2 + 15(0) + c \rightarrow c = 310$$

La función de posición es: $s(t) = -4,9t^2 + 15t + 310 \quad m$

3. Altura máxima que alcanza el cuerpo:

SOLUCIÓN

La altura máxima se da en el momento en que la velocidad es cero.

Hacemos la velocidad igual a cero y despejamos t :

$$v(t) = 0 \rightarrow -9,8t + 15 = 0$$

$$t = 1,53 \quad s$$

Este es el tiempo que se demora el objeto para alcanzar la altura máxima. Para determinar la altura máxima reemplazamos este valor en el modelo de posición.

$$s_{max} = s(1,53) = -4,9(1,53)^2 + 15(1,53) + 310$$

$$s_{max} = 321,479 \quad m$$

Otra forma de determinar la altura máxima sería determinando los máximos y mínimos de $s(t)$ utilizando derivadas.

1. La máxima velocidad que alcanza el cuerpo.

SOLUCIÓN

La máxima velocidad se da un momento antes de que el objeto toque el piso, es decir, para $s = 0$.

$$s(t) = 0 \rightarrow 0 = -4,9t^2 + 15t + 310$$

Solucionando esta ecuación resulta: $t = -6,57$ s y $t = 9,6$ s El valor negativo lo descartamos.

La máxima velocidad se presenta en $t = 9,6$

$$v_{max} = v(9,6) = -9,8(9,6) + 15 = -79,08 \text{ m/s}$$

2. Determine si después de 2,5 segundos el objeto sube o baja.

Una forma de determinar esto es reemplazando este tiempo en el modelo de velocidad y dependiendo del signo del resultado sabemos si sube o si baja.

$$v(2,5) = -9,8(2,5) + 15 = -9,5 \text{ m/s}$$

Como la velocidad es negativa, el objeto cae en ese momento.

Ejemplo 4

Un objeto se deja caer desde una altura de 500 m. Determine:

3. Función de velocidad instantánea.

SOLUCIÓN

$$v(t) = \int -9,8 dt \Rightarrow v(t) = -9,8t + C \text{ m/s.}$$

Como el objeto se deja caer, quiere decir que para $t = 0$, $v = 0$

Reemplazando esta condición inicial en la función de velocidad, tenemos:

$$v(t) = -9,8t + C \Rightarrow 0 = -9,8(0) + C \Rightarrow C = 0$$

La función queda: $v(t) = -9,8t \text{ m/s.}$

4. Función de posición o altura instantánea.

SOLUCIÓN

$$s(t) = \int v(t) dt = \int -9.8t dt = -4.9t^2 + C \quad m$$

Como el objeto cae de una altura de 500 m, esto quiere decir, que:

$$t = 0, s(t) = 500$$

Reemplazando en la función de posición:

$$s(t) = -4.9t^2 + C \Rightarrow 500 = -4.9t^2 + C \Rightarrow s(t) = -4.9t^2 + 500 \quad m$$

$$s(t) = -4.9t^2 + 500 \quad m.$$

2. Velocidad máxima que alcanza el cuerpo

SOLUCIÓN

La velocidad máxima se alcanza cuando $s(t) = 0$

$$s(t) = 0 \Rightarrow -4.9t^2 + 500 \Rightarrow 500 = 4.9t^2 \Rightarrow \frac{500}{4.9} = t^2 \Rightarrow t = \pm \sqrt{500/4.9}$$

Descartamos el número negativo

$$t = \sqrt{\frac{500}{4.9}} \quad s$$

Para obtener la velocidad máxima, reemplazamos este valor en la función de velocidad:

$$v(t) = -9.8t \quad m/s.$$

$$V_{\max} = v\left(\sqrt{\frac{500}{4.9}}\right) = -9.8\left(\sqrt{\frac{500}{4.9}}\right) = -98.99 \quad m/s.$$

$$v_{\max} = -98.99 \quad m/s.$$

5. Velocidad, posición y aceleración después de 5 segundos.

SOLUCIÓN

Nos piden hallar:

$$s(5) = -4,9(5)^2 + 500 = 377,5 \text{ m.}$$

$$v(5) = -9,8(5) = -4,9 \text{ m/s.}$$

$$a(5) = -9,8 \text{ m/s}^2.$$

Ejemplo5

El siguiente ejemplo fue tomado del libro Cálculo con geometría analítica de los autores Purcell y Varberg ³

Cerca de la superficie de la tierra, la aceleración debida a la gravedad es de 32 pies por segundo cuadrado. Si se arroja un objeto hacia arriba desde una altura inicial de 1000 pies, con una velocidad de 50 pies por segundo, encuentre su velocidad y su altura 4 segundos más tarde.

SOLUCIÓN

Tenemos que:

$$v(t) = \int -32dt = -32t + C$$

Tenemos que cuando $t = 0$, $v = 50$

$$50 = -32(0) + C \Rightarrow C = 50$$

La función de velocidad queda: $v(t) = -32t + 50 \text{ pies/s}$

$$s(t) = \int (-32t + 50)dt = \frac{-32t^2}{2} + 50t + C = -16t^2 + 50t + C$$

Tenemos que para $t = 0$, $s = 1000$

³ PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 228.

$$1000 = -16(0)^2 + 50(0) + C \Rightarrow C = 1000$$

La función de posición es: $s(t) = -16t^2 + 50t + 1000$ pies

Cuando $t = 4$

$$v(4) = -32(4) + 50 = -78 \text{ pies} / s$$

$$s(4) = -16(4)^2 + 50(4) + 1000 = 944 \text{ pies}$$

2.2. Técnicas de Integración

Integración por sustitución o integración por cambio de variable. Esta técnica es la más general y la más utilizada

Antes de explicar en qué consiste la técnica, veamos necesidad de utilizarla:

Determine: $\int (x+2)^2 dx$

Para poderla realizar por los métodos conocidos, debemos expandir primero el binomio.

$$\int (x+2)^2 dx = \int (x^2 + 4x + 4) dx = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x + c$$

Para este ejemplo fue fácil y práctico expandir el binomio, ya que se encontraba elevado a la potencia 2, pero que sucede si la potencia es 100, ó 1'235400, ó es un fraccionario como 5/3.

Podemos ver que sería tedioso expandir el binomio ó sería imposible en el caso del exponente fraccionario.

Es por esto que es necesario integrar por sustitución ó cambio de variable.

La fórmula de integración por cambio de variable es la siguiente:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, \text{ para } n \neq -1$$

Sí $n = -1$, la fórmula es:

$$\int \frac{1}{u} du = \int u^{-1} du = \ln u + c$$

Donde u es función de x

Para explicar la manera de aplicar la técnica de integración por sustitución, vamos a resolver el siguiente ejercicio.

Resuelva: $\int (x-10)^{30} dx$

PASOS:

1. Asignen a la expresión principal una variable que puede ser: u , v , w ó cualquier otra variable diferente a la variable inicial. (Esto es cambio de variable).

Para el ejemplo:

$$\text{Sea } u = x - 10$$

Lo importante al asignar la nueva variable es que, la expresión que quede, debe contener la derivada de la variable asignada.

2. Derivamos la expresión asignada a la nueva variable con respecto a la variable inicial.

Para el ejemplo:

$$\frac{du}{dx} = 1$$

3. Despeje el diferencial de la variable inicial:

Para el ejemplo despejamos el dx

$$dx = du$$

4. Reemplace en la integral inicial la variable asignada y el diferencial despejado y luego simplifique.

$$\int (x-10)^{30} dx = \int u^{30} du$$

5. Si al hacer los reemplazos correspondientes y simplificar, aparece la variable inicial, es porque: Ó la integral no se puede efectuar por este método ó porque hay que hacer un cambio de variable diferente.
6. Resuelva la integral.

$$\int (x-10)^{30} dx = \int u^{30} du = \frac{u^{31}}{31} + C$$

7. Recupere la variable original.

$$\int (x-10)^{30} dx = \int u^{30} du = \frac{u^{31}}{31} + C = \frac{(x-10)^{31}}{31} + C$$

Ejemplo1

El siguiente ejemplo fue propuesto por el autor Haeussler⁴ que fue propuesto en uno de sus libros.

Resuelva la integral:

$$\int 3x^2(x^3 + 7)^3 dx$$

SOLUCIÓN

$$v = x^3 + 7 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{dv}{3x^2}$$

$$\int 3x^2 v^3 \frac{dv}{3x^2} = \int v^3 dv = \frac{v^4}{4} + c = \frac{(x^3 + 7)^4}{4} + c$$

Ejemplo3

$$\int 4x^2(2x^3 + 20)^8 dx$$

⁴ HAEUSSLER. Ernest. F. Jr; RICHARD S. Paul. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. 8 ed. México: Prentice Hall, 1997. p. 735.

SOLUCIÓN

$$u = 2x^3 + 20$$

$$\frac{du}{dx} = 6x^2 \Rightarrow \frac{du}{6x^2} = dx$$

$$\int 4x^2 (2x^3 + 20)^8 dx = \int 4x^2 u^8 \frac{du}{6x^2}$$

$$= \frac{2}{3} \int u^8 du = \frac{2}{3} \frac{u^9}{9} + C$$

Recuperando la variable inicial:

$$\int 4x^2 (2x^3 + 20)^8 dx = \frac{2(2x^3 + 20)^9}{27} + C$$

Ejemplo4

El siguiente ejemplo fue tomado del autor Haeussler⁵ que fue propuesto en uno de sus libros.

Resuelva la integral: $\int x\sqrt{x^2 + 5} dx$

SOLUCIÓN

$$w = x^2 + 5 \Rightarrow \frac{dw}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} dw$$

$$\int x\sqrt{x^2 + 5} dx = \int x\sqrt{w} \frac{1}{2x} dw = \frac{1}{2} \int w^{1/2} dw = \frac{1}{2} \frac{w^{3/2}}{3/2} + c$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{w^3} + c = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 5)^3} + c$$

⁵ HAEUSSLER. Ernest. F. Jr.; RICHARD S. Paul. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. 8 ed. México: Prentice Hall, 1997. p. 735.

Ejemplo5:

$$\int 2x\sqrt{4x^2 + 1}dx$$

SOLUCIÓN

$$u = 4x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 8x \Rightarrow \frac{du}{8x} = dx$$

$$\int 2x\sqrt{4x^2 + 1}dx = \int 2x\sqrt{u} \frac{du}{8x} \Rightarrow \frac{1}{4} \int u^{1/2} du = \frac{1}{4} \frac{u^{3/2}}{3/2} + C$$

$$\int 2x\sqrt{4x^2 + 1}dx = \frac{1}{6} \sqrt{(4x^2 + 1)^3} + C$$

Ejemplo6

$$\int 16x(2x^2 - 31)^5 dx$$

SOLUCIÓN

$$u = 2x^2 - 31 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x \Rightarrow \frac{du}{4x} = dx$$

$$\int 16x(2x^2 - 31)^5 dx = \int 16xu^5 \frac{du}{4x} = 4 \int u^5 du = 4 \frac{u^6}{6} + C = \frac{2(2x^2 - 31)^6}{3} + C$$

Ejemplo7

$$\int 14x(x^2 - 10)^6 dx \quad R: (x^2 - 10)^7 + c$$

Ejemplo8

$$\int \frac{8}{(6x + 5)^5} dx$$

SOLUCIÓN

$$u = 6x + 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6 \Rightarrow \frac{du}{6} = dx$$

$$\int \frac{8}{(6x+5)^5} dx = \int \frac{8}{u^5} \frac{du}{6} = \frac{4}{3} \int u^{-5} du = \frac{4}{3} \frac{u^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{3u^4} + C = -\frac{1}{3(6x+5)^4} + C$$

Ejemplo9

$$\int \frac{6x+5}{6x^2+10x+100} dx$$

$$u = 6x^2 + 10x + 100 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 12x + 10 \Rightarrow \frac{du}{12x+10} = dx$$

$$\int \frac{6x+5}{6x^2+10x+100} dx = \int \frac{6x+5}{u} * \frac{du}{12x+10} = \int \frac{6x+5}{u} * \frac{du}{2(6x+5)} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du$$

$$\int \frac{6x+5}{6x^2+10x+100} dx = \frac{1}{2} \ln u + C = \frac{1}{2} \ln(6x^2 + 10x + 100) + C$$

Ejemplo10

$$\int \frac{5x}{x^2-23} dx \quad R: \frac{5}{2} \ln(x^2-23) + C$$

Ejemplo11

$$\int 5^{3x-2} dx$$

SOLUCIÓN

$$u = 3x - 2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow \frac{du}{3} = dx$$

$$\int 5^{3x-2} dx = \int 5^u * \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int 5^u du = \frac{1}{3} * \frac{5^u}{\ln 5} + C = \frac{5^{3x-2}}{3 \ln 5} + C$$

Ejemplo12

$$\int 10x^2 e^{6x^3+20} dx$$

SOLUCIÓN

$$u = 6x^3 + 20$$

$$\frac{du}{dx} = 12x^2 \Rightarrow \frac{du}{6x^2} = dx$$

$$\int 10x^2 e^{6x^3+20} dx = \int 10x^2 e^u \frac{du}{6x^2}$$

Simplificando:

$$\frac{5}{3} \int e^u du$$

Integrando:

$$\frac{5}{3} e^u + C$$

Recuperando la variable inicial:

$$\frac{5}{3} e^{6x^3+20} + C$$

INTEGRALES QUE SE RESUELVEN CON DIVISIÓN PREVIA A LA INTEGRAL

Se desea encontrar la integral de una expresión racional que es una expresión de la forma:

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

La idea es obtener la siguiente integral:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Cuando deseamos efectuar una integral de este tipo, pueden suceder tres casos:

1. Que la integral se pueda efectuar directamente por el método de **sustitución o cambio de variable** (esta forma ya la hemos realizado en clase)

Ejemplo1

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-7} dx$$

SOLUCIÓN

$$w = x^2 + x - 7 \quad \frac{dw}{dx} = 2x + 1 \rightarrow dx = \frac{dw}{2x+1}$$

$$\int \frac{2x+1}{w} \frac{dw}{2x+1} = \int \frac{dw}{w} = \ln|w| + c = \ln|x^2 + x - 7| + c$$

Ejemplo2

$$\int \frac{2x}{(x^2+10)^5} dx$$

SOLUCIÓN

$$v = x^2 + 10 \quad \frac{dv}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{dv}{2x}$$

$$\int \frac{2x}{v^5} \frac{dv}{2x} = \int v^{-5} dv = \frac{v^{-5+1}}{-5+1} + c = \frac{v^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{4v^4} + c = -\frac{1}{4(x^2+10)^4} + c$$

2. Puede suceder también que haya que efectuar primero la división. $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Esta división es posible si la fracción es impropia, es decir, el grado del polinomio P(x) es mayor que el grado del polinomio Q(x).

Ejemplo1

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{2x + 1} dx$$

Para efectuar esta integral debemos realizar primero la división.

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{2x + 1}.$$

Esta división se puede efectuar utilizando división larga o división sintética.

En este ejemplo vamos a efectuar la división utilizando división larga.

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 3x^2 + 0x + 1 \quad | \quad 2x + 1 \\
 \underline{-2x^3 - x^2} \\
 + 2x^2 + 0x + 1 \\
 \underline{-2x^2 - x} \\
 - x + 1 \\
 \underline{x + \frac{1}{2}} \\
 \phantom{x + \frac{1}{2}} + \frac{3}{2}
 \end{array}$$

Tenemos que:

$$C(x) = x^2 + x - \frac{1}{2}, \quad R(x) = \frac{3}{2}, \quad Q(x) = 2x + 1$$

Entonces:

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{2x + 1} = x^2 + x - \frac{1}{2} + \frac{3/2}{2x + 1}$$

Ç

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{2x + 1} dx = \int \left(x^2 + x - \frac{1}{2} + \frac{3/2}{2x + 1} \right) dx$$

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{2x + 1} dx = \int \left(x^2 + x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} * \frac{1}{2x + 1} \right) dx$$

$$= \int x^2 dx + \int x dx - \frac{1}{2} \int dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{2x + 1} dx$$

Resolviendo cada una de la cuatro integrales individualmente

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \int dx = -\frac{1}{2} x$$

Para efectuar la cuarta integral se debe hacer cambio de variable:

$$\frac{3}{2} \int \frac{1}{2x + 1} dx \Rightarrow u = 2x + 1, \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\frac{3}{2} \int \frac{1}{2x + 1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{u} \frac{du}{2} = \frac{3}{2} * \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{3}{4} \ln u = \ln|u| = \frac{3}{4} \ln|2x + 1|$$

La respuesta final es:

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{2x + 1} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} x + \frac{3}{4} \ln|2x + 1| + c$$

Ejemplo2

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 3}{x - 3} dx$$

SOLUCIÓN

Debemos efectuar la división:

$$\frac{3x^2 - 5x + 3}{x - 3}$$

SOLUCIÓN DE LA DIVISIÓN

$3x^2$	$-5x$	$+3$	$x - 3$
$-3x^2$	$+9x$		$3x + 4 = C(x)$
0	$+4x$	$+3$	
	$-4x$	$+12$	
	0	$15 = R(x)$	

Tenemos que:

$$\frac{3x^2 - 5x + 3}{x - 3} = 3x + 4 + \frac{15}{x - 3}$$

Entonces:

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 3}{x - 3} dx = \int \left(3x + 4 + \frac{15}{x - 3} \right) dx = \int 3x dx + \int 4 dx + \int \frac{15}{x - 3} dx$$

Resolviendo cada integral:

$$\int 3x dx = 3 \frac{x^2}{2} = \frac{3}{2} x^2$$

$$\int 4 dx = 4x$$

$$\int \frac{15}{x - 3} dx \Rightarrow u = x - 3, \frac{du}{dx} = 1 \rightarrow du = dx \Rightarrow 15 \int \frac{1}{u} du = 15 \ln|u| = 15 \ln|x - 3|$$

La respuesta final es :

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 3}{x - 3} dx = \frac{3}{2} x^2 + 4x + 15 \ln|x - 3| + C$$

3. La otra posibilidad sería descomponer, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ En una suma de fracciones simples llamada fracciones parciales. Esto es posible cuando la fracción es propia, es decir, el grado del polinomio $P(x)$ es menor que el grado del polinomio $Q(x)$. Este método lo veremos más adelante en la UNIDAD 3.

SUSTITUCIONES PARA RACIONALIZACIÓN

INTEGRALES QUE CONTIENEN $\sqrt[n]{ax+b} \wedge \sqrt[n]{(ax+b)^m}$

Si aparece. $\sqrt[n]{ax+b}$. En una integral, la sustitución. $u = \sqrt[n]{ax+b}$. Eliminará el radical.

Tenga en cuenta que la x tiene como exponente 1 (sí, fuera exponente 2 o superior, no se puede utilizar el método que vamos a describir).

También tenga en cuenta que tanto a como b son números cualesquiera, pero a no puede ser cero; porque si a fuera cero, entonces todo lo del radical sería constante y se utilizaría otro método más sencillo para su solución.

Para describir los pasos de este método, vamos a utilizar un ejemplo.

Resuelva la integral:

$$\int 6x \sqrt[3]{3x+8} \, dx$$

1. Para eliminar el radical se hace u igual al radical.

$$u = \sqrt[3]{3x+8}$$

2. Para quitar la raíz elevamos ambos lados de la igualdad a un exponente equivalente al índice de la raíz, en este caso elevamos a ambos lados a un exponente tres, ya que la raíz es cúbica.

$$u = \sqrt[3]{3x+8} \Rightarrow u^3 = (\sqrt[3]{3x+8})^3$$

Quedando:

$$u^3 = 3x+8$$

3. Luego derivamos la igualdad anterior con respecto a **u** (hallamos: $\frac{du}{dx}$) y despejamos el

dx.

Para realizar esta derivada, se recomienda que siempre que se derive u, escribimos luego de la derivada du y cuando se derive x, se escribe, luego de la derivada dx.

$$3u^2 du = 3dx$$

Despejamos el dx:

$$\frac{3u^2 du}{3} = dx \Rightarrow u^2 du = dx$$

4. Luego reemplazamos a **u** y al **dx** en la integral original. Sí hay que hacer otro reemplazo lo hacemos; la idea es que en la integral resultante no aparezca nada que tenga que ver con la variable inicial o sea con la **x**. Haciendo los siguientes reemplazos:

$$\int 6x \sqrt[3]{3x+8} dx = \int 6x * u * u^2 du$$

Debemos encontrar una expresión para x.

Como $u^3 = 3x + 8$. Despejemos la x

$$u^3 = 3x + 8 \Rightarrow u^3 - 8 = 3x \Rightarrow \frac{u^3 - 8}{3} = x$$

Reemplazamos en la integral y efectuamos las simplificaciones y operaciones necesarias.

$$\int 6 \left(\frac{u^3 - 8}{3} \right) * u * u^2 du = 2 \int (u^6 - 8u^3) du$$

Esta es una integral que sabemos efectuar.

5. Efectuamos la integral. Y recuperamos la variable inicial.

$$\begin{aligned} 2 \int (u^6 - 8u^3) du &= 2 \left(\frac{u^7}{7} + \frac{8u^4}{4} \right) + C \\ &= 2 \left[\frac{(\sqrt[3]{3x+8})^7}{7} + 2(\sqrt[3]{3x+8})^4 \right] + C \end{aligned}$$

$$\int 6x \sqrt[3]{3x+8} \, dx = 2 \left[\frac{\sqrt[3]{(3x+8)^7}}{7} + 2\sqrt[3]{(3x+8)^4} \right] + C$$

Ejemplo1

El siguiente ejemplo fue tomado de uno de los libros del autor Purcell.⁶

Resuelva la integral:

$$\int x \sqrt[3]{x-4} \, dx$$

SOLUCIÓN

1. Hacemos **u** igual al radical.

$$u = \sqrt[3]{x-4}$$

2. Para quitar la raíz elevamos ambos lados de la igualdad a un exponente equivalente al índice de la raíz, en este caso elevamos a ambos lados a un exponente tres, ya que la raíz es cúbica.

$$u^3 = (\sqrt[3]{x-4})^3$$

Quedando:

$$u^3 = x - 4.$$

3. Luego derivamos la igualdad anterior con respecto a **u** (hallamos: $\frac{du}{dx}$) y despejamos el **dx**.

$$3u^2 du = dx$$

4. Luego reemplazamos a **u** y al **dx** en la integral original. Sí hay que hacer otro reemplazo lo hacemos; la idea es que en la integral resultante no aparezca nada que tenga que ver con la variable inicial o sea con la **x**. Haciendo los siguientes reemplazos:

⁶ PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 396.

$$x = u^3 + 4; \quad u = \sqrt[3]{x-4} \quad y \quad dx = 3u^2 du$$

La integral queda:

$$\int x \sqrt[3]{x-4} dx \Rightarrow \int (u^3 + 4) u 3u^2 du = \int (3u^6 + 12u^3) du .$$

5. Efectuamos la integral. Y recuperamos la variable inicial.

$$\int (3u^6 + 12u^3) du = \frac{3u^7}{7} + \frac{12u^4}{4} + c = \frac{3(\sqrt[3]{x-4})^7}{7} + 3(\sqrt[3]{x-4})^4 + c$$

Ejemplo3

Resuelva: $\int \sqrt[7]{2x-103} dx$

SOLUCIÓN

$$u = \sqrt[7]{2x-103}$$

$$u^7 = 2x-103$$

$$7u^6 du = 2dx \Rightarrow \frac{7u^6 du}{2} = dx$$

Reemplazando en la integral e integrando

$$\int \sqrt[7]{2x-103} dx = \int u * \frac{7u^6}{2} du \Rightarrow \frac{7}{2} \int u^7 du = \frac{7}{2} * \frac{u^8}{8} + C$$

$$\int \sqrt[7]{2x-103} dx = \frac{7}{16} \sqrt[7]{(2x-103)^8} + C$$

NOTA:

Esta integral también se puede resolver por sustitución.

Ejemplo4

Resuelva:

$$\int \sqrt[7]{(5x+3)^2} \, dx$$

SOLUCIÓN

$$\int \sqrt[7]{(5x+3)^2} \, dx = \int (\sqrt[7]{5x+3})^2 \, dx$$

$$u = \sqrt[7]{5x+3} \rightarrow u^7 = 5x+3$$

Derivando:

$$7u^6 \, du = 5 \, dx \Rightarrow \frac{7u^6 \, du}{5} = dx$$

Reemplazando en la integral:

$$\int (\sqrt[7]{5x+3})^2 \, dx = \int (u)^2 \frac{7}{5} u^6 \, du = \frac{7}{5} \int u^8 \, du = \frac{7}{5} \frac{u^9}{9} + C$$

$$= \frac{7}{45} (\sqrt[7]{5x+3})^9 + C$$

$$\int \sqrt[7]{(5x+3)^2} \, dx = \frac{7}{45} \sqrt[7]{(5x+3)^9} + C$$

INTEGRACIÓN DE EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS

FÓRMULAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN

$$\int \sin u \, du = -\cos u + c$$

$$\int \cos u \, du = \sin u + c$$

$$\int \sec^2 u \, du = \tan u + c$$

$$\int \csc^2 u \, du = -\cot u + c$$

$$\begin{aligned} \int \sec u \tan u \, du &= \sec u + c \\ \int \csc u \cot u \, du &= -\csc u + c \\ \int \tan u \, du &= \ln|\sec u| + c \\ \int \cot u \, du &= \ln|\sin u| + c \\ \int \sec u \, du &= \ln|\sec u + \tan u| + c \\ \int \csc u \, du &= \ln|\csc u - \cot u| + c \end{aligned}$$

ALGUNAS IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1, \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x, \quad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \\ \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \tan x = \frac{1}{\cot x}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x} \\ \csc x &= \frac{1}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \sin(2x) = 2 \sin x \cos x \\ \sin(mx)\cos(nx) &= \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] \\ \sin(mx)\sin(nx) &= -\frac{1}{2}[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x] \\ \cos(mx)\cos(nx) &= \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] \\ \sin(A+B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \sin(A-B) &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \\ \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \cos(A-B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B \\ \tan(A+B) &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \\ \tan(A-B) &= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} \end{aligned}$$

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen}x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

PASOS PARA LA INTEGRACIÓN DE EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para la integración de expresiones trigonométricas, se debe tener en cuenta los siguientes aspectos.

No necesariamente este es el orden a seguir.

1. Determine inicialmente si la integral presenta la forma de alguna de las fórmulas básicas; Si es así efectuamos la integral.
2. Cuando hay una sola expresión trigonométrica, para hacer el cambio de variable se toma lo que está dentro de la expresión trigonométrica, es decir el ángulo.
3. Cuando hay dos o más expresiones trigonométricas en la misma integral, el cambio de variable se hace tomando una de las expresiones trigonométricas.
4. Lleve las expresiones trigonométricas a expresiones equivalentes en términos del seno y del coseno. (Esto a veces funciona).
5. Si es necesario utilice una o varias de las identidades trigonométricas.

Ejemplos resueltos:

Ejemplo1

$$\int 3x^2 \cos x^3 dx$$

SOLUCIÓN

$$u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow \frac{du}{3x^2} = dx$$

Reemplazando en la integral:

$$\int 3x^2 \cos x^3 dx = \int 3x^2 \cos u \frac{du}{3x^2} = \int \cos u du = \text{senu} + C$$

$$\int 3x^2 \cos x^3 dx = \text{sen} x^3 + C$$

Ejemplo2

$$\int \frac{x}{\text{sen}^2(3x^2 + 2)} dx$$

SOLUCIÓN

$$u = 3x^2 + 2 \Rightarrow du = 6x dx \Rightarrow \frac{du}{6x} = dx$$

Reemplazando en la integral

$$\int \frac{x}{\text{sen}^2(3x^2 + 2)} dx = \int \frac{x}{\text{sen}^2 u} * \frac{du}{6x} = \frac{1}{6} \int \frac{1}{\text{sen}^2 u} du$$

Utilizando la identidad número 4.

$$\csc u = \frac{1}{\text{senu}} \Rightarrow \csc^2 u = \frac{1}{\text{sen}^2 u}$$

La integral queda:

$$\int \frac{x}{\text{sen}^2(3x^2 + 2)} dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{\text{sen}^2 u} du = \frac{1}{6} \int \csc^2 u du = \frac{1}{6} (-\cot u) + C$$

$$\int \frac{x}{\text{sen}^2(3x^2 + 2)} dx = -\frac{1}{6} \cot(3x^2 + 2) + C$$

Ejemplo3

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^5 x} dx$$

Acá el cambio de variable se debe hacer por una de las dos funciones trigonométricas, en este caso por coseno.

$$u = \cos x \Rightarrow du = -\operatorname{sen} x dx \Rightarrow \frac{du}{-\operatorname{sen} x} = dx$$

Reemplazando en la integral:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{u^5} * \frac{du}{-\operatorname{sen} x} = - \int \frac{1}{u^5} du = - \int u^{-5} du = - \frac{u^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{4u^4} + C$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^5 x} dx = \frac{1}{4 \cos^4 x} + C = \frac{1}{4} \sec^4 x + C$$

Ejemplo4

$$\int \tan(5x - 7) dx$$

SOLUCIÓN

$$u = 5x - 7 \Rightarrow du = 5 dx \Rightarrow \frac{du}{5} = dx$$

$$\int \tan(5x - 7) dx = \int \tan u * \frac{du}{5} = \frac{1}{5} \ln |\sec(u)| + C$$

$$\int \tan(5x - 7) dx = \int \tan u * \frac{du}{5} = \frac{1}{5} \ln |\sec(5x - 7)| + C$$

Ejemplo5

El siguiente ejemplo fue tomado de uno de los libros del autor Purcell⁷

Resuelva

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x} dx$$

SOLUCIÓN

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x} dx = \int \left(\frac{\sin x}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) dx = \int \frac{\sin x}{\sin x} dx - \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$\int dx - \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$\int dx = x$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx \rightarrow u = \sin x \rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \rightarrow \frac{du}{\cos x} = dx$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{\cos x}{u} \frac{du}{\cos x} = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x} dx = x + \ln|\sin x| + C$$

⁷ PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 389.

Ejercicios por temas

Resuelva las siguientes integrales indefinidas, utilizando las leyes básicas de integración.

1. $\int 7x^5 dx$
2. $\int \frac{4}{x^3} dx$
3. $\int (5x-3)^3 dx$
4. $\int \left(\sqrt[6]{x^5} - 3e^{4x} - \frac{8}{x} + \sqrt{x} \right) dx$
5. $\int \frac{6x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 18x - 300}{3x^2} dx$

Resuelva los siguientes problemas.

1. Desde un edificio de 32 metros se tira hacia arriba una piedra con una velocidad de $30m/s$. Determine la función de velocidad instantánea y la función de altura ó posición instantánea. Determine la altura máxima y la velocidad máxima que alcanza el objeto.
2. La función de costo marginal para cierto producto de una empresa es:

$$c'(q) = 5q^2 + 7q + 800 \$$$

3. Los costos fijos son de 400.000 \$
4. Encuentre la función de costo promedio del producto.
5. La función de ingreso marginal en la venta de q unidades de un producto es:
 $r'(q) = 50000 - 6q \$$

Encuentre la función de demanda ó precio.

Resuelva las siguientes integrales utilizando las técnicas de integración vistas.

1. $\int \frac{5x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 9x + 10}{x + 2} dx$

2. $\int x^2 \sqrt[4]{3x+1} dx$

3. $\int 7x \sin(x^2 + 35) dx$

4. $\int \tan^3 x \cot^2 x dx$

5. $\int \frac{3x+1}{\sqrt[5]{3x^2+2x+3}} dx$

Ejercicio de autoevaluación

1. La función de ingreso marginal para cierto producto es:

$$r'(q) = \frac{300}{(1000 - 2q)^2} \$$$

Halle la función de precio o demanda del producto

2. Un objeto se mueve a lo largo del eje coordenado: Encuentre la función o modelo de posición y la función o modelo de velocidad bajo las condiciones indicadas.
- a. La aceleración está dada por la función. $a(t) = t \text{ cm/s}^2$. El objeto parte del origen con una velocidad de 50 cm/s.
- b. $a(t) = 2t + 1 \text{ cm/s}^2$. Parte desde el reposo a una distancia de 250 cm del origen.
- c. $a(t) = -3t^2 + 8t + 50 \text{ m/s}^2$. Parte desde el origen con una velocidad de 6 m/s.
- d. $a(t) = 6 \text{ m/s}^2$. El objeto parte del reposo a 100 m del origen. Determine además la posición después de un minuto.

Ejercicio de autoevaluación

En los siguientes problemas encuentre la integral indefinida:

1. $\int \frac{8}{x^9} dx$

2. $\int \left(\frac{3}{x} + \frac{5}{3x^6} + \frac{2}{3} \right) dx$

3. $\int \frac{10}{\sqrt[6]{x^5}} dx$

4. $\int \frac{(5x+7)^3}{3x^3} dx$

5. $\int (8x-1)(3x+4) dx$

6. $\int 3^{4x} dx$

7. $\int \frac{1}{e^{6x}} dx$

8. $\int x 7^{x^2} dx$

9. $\int \sqrt[3]{x^2} (3x+5) dx$

10. $\int \frac{e^{4x} - e^{5x}}{e^{4x}} dx$

RESUELVA LAS SIGUIENTES INTEGRALES POR SUSTITUCIÓN

1. $\int (9x+5)^{12} dx$

2. $\int \frac{4x}{\sqrt[8]{4x+11}} dx$

3. $\int 6x^2(2x^3 - e)^{10} dx$

4. $\int \frac{8x-5}{4x^2-5x+13} dx$

5. $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x-39} dx$

6. $\int 8xe^{4x^2-100} dx$

7. $\int \sqrt{11x} dx$

8. $\int \frac{100}{e^{50x-99}} dx$

9. $\int x\sqrt{(5x^2-3)^5} dx$

10. $\int \frac{5}{x \ln x^4} dx$

INTEGRALES QUE SE RESUELVEN UTILIZANDO DIVISIÓN PREVIA

1. $\int \frac{9x^3 - 7x + 5}{x + 2} dx$

2. $\int \frac{(5x-7)^2}{x+6} dx$

3. $\int \frac{x^4 - 16}{x + 2} dx$

4. $\int \frac{4x^2 - 9x - 7}{2x - 3} dx$

5. $\int \frac{x^4 - 3x^3 - 8x^2 - 1x + 4}{x+3} dx$

6. $\int \frac{5x^2 + x - 1}{3x+2} dx$

7. $\int \frac{7x^3 + 5x - 9}{9x+7} dx$

8. $\int \frac{25x^2 + 20x + 4}{5x+4} dx$

9. $\int \frac{x^3 - 125}{x^2 + 5x + 25} dx$

10. $\int \frac{8x^3 + 27}{2x+3} dx$

INTEGRAL INDEFINIDA APLICACIONES EN ECONOMÍA

El ejercicio número 31 ha sido tomado de uno de los libros de matemáticas del autor Haeussler⁸

1. Un fabricante ha determinado que la función de costo marginal es:

$$c'(q) = 0.003q^2 - 0.4q + 40 \text{ \$}$$

Donde **q** es el número de unidades producidas. Si el costo marginal es de \$ 27.50 cuando $q = 50$, y los costos fijos son de \$ 5 000, ¿Cuál es el costo promedio de producir 100 unidades?

2. El costo marginal de un artículo cuando se producen **q** unidades es:

$$c'(q) = -3q^2 + 60q + 4000 \text{ \$}$$

El costo de producir 10 unidades es 90000 \$. ¿Cuál es el costo de producir 50 unidades?

3. La función de ingreso marginal para cierto producto es:

⁸ HAEUSSLER. Ernest. F. Jr; RICHARD S. Paul. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. 8 ed. México: Prentice Hall, 1997. p. 734.

$$r'(q) = \frac{350}{(q+3)^2} \$$$

Encuentre la función de demanda.

4. La función de ingreso marginal para cierto producto es:

$$r'(q) = \frac{405}{(5q+7)^3} \$$$

Encuentre la función de demanda.

El ejercicio número 35 fue tomado de uno de los libros del autor STEWART⁹

5. El costo marginal para fabricar x unidades de un producto es:

$$C'(x) = 0.006x^2 - 1.5x + 8 \text{ dólares}$$

El costo fijo es de 1 500 000 dólares, encuentre el costo de producir 2000 unidades.

6. La función de costo marginal para cierto artículo es:

$$C'(q) = \frac{35}{q+10} \$$$

Encuentre la función de costo, si los costos fijos son de 300000 \$.

7. La función de costo marginal para cierto artículo es:

$$C'(q) = 3e^{0.004q} \$$$

Si los costos fijos son de \$ 3 000, determine la función de costo.

INTEGRAL INDEFINIDA APLICACIONES EN FÍSICA

1. Una bola es lanzada desde la superficie de la tierra con una velocidad de 43.5 m/s. ¿Cuál es la máxima altura que alcanza? Recomendación. Encuentre primero las funciones de

⁹ STEWART, James. Cálculo conceptos y contexto. 1 ed. México: International Thomson Editores, 1999. p. 488.

velocidad y de posición.

2. La función de aceleración de un objeto está dada por:

$$a(t) = 3.5t^2 - 4t + 30 \text{ m/s}^2$$

3. El objeto parte desde una posición de -153 m con una velocidad de 3.5 m/s. Determine: Posición, velocidad y aceleración del objeto, cuando han transcurrido 12.5 segundos.

4. La función de aceleración de cierto objeto es:

$$a(t) = \frac{5}{(4t + 5)^4} \text{ m/s}^2$$

El objeto parte desde el origen con una velocidad de 8 m/s. Determine:

- a. Función de velocidad instantánea.
- b. Función de posición instantánea.

1. Un objeto se mueve desde el origen con una velocidad dada por la función:

$$v(t) = \frac{3t}{3t^2 + 10} \text{ m/s}$$

Encuentre:

- a. Función de aceleración instantánea.
 - b. Función de posición instantánea.
 - c. Posición, velocidad y aceleración cuando han transcurrido 20 segundos.
2. Un objeto se deja caer desde una altura de 253 m. Determine la función o modelo de posición para cualquier instante t . Determine además la velocidad del objeto en el momento en que toca el suelo.
3. Un objeto se lanza hacia arriba desde una altura de 250 m, con una velocidad de 100 m/s. Determine si el objeto va subiendo o va cayendo después de 5s. Justifique su respuesta. ¿El objeto irá cayendo o subiendo después de 15 s?
4. Un objeto se lanza hacia arriba desde la azotea de un edificio de 245 m con una velocidad de 83 m/s. determine:

- a. La altura máxima que alcanza el objeto.
- b. La velocidad máxima del objeto.

Integrales que contienen $\sqrt[n]{ax+b} \wedge \sqrt[n]{(ax+b)^m}$

1. $\int 2x\sqrt{7x-2} \, dx$
2. $\int \frac{x}{\sqrt{3-11x}} \, dx$
3. $\int \frac{10x}{\sqrt{x+100}} \, dx$
4. $\int x \sqrt[4]{7x+8} \, dx$
5. $\int x\sqrt{x+3} \, dx$
6. $\int 4x \sqrt[3]{x^2+6x+9} \, dx$
7. $\int 7x \sqrt[9]{6x-13} \, dx$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1. $\int \sin 6x \, dx$
2. $\int \frac{2}{3} \cos\left(\frac{5}{9}x\right) \, dx$
3. $\int 5x^3 \sin x^4 \, dx$
4. $\int \frac{3}{2} x \sin(4x-3) \, dx$
5. $\int \sec^2(7x) \, dx$

6. $\int \csc^2(8x + 5) dx$

7. $\int \operatorname{sen} x (3 - \cos x)^6 dx$

8. $\int \frac{5 \cos x dx}{(10 + \operatorname{sen} x)^6}$

9. $\int \frac{\cot 3x}{\operatorname{sen} 3x} dx$

10. $\int 5^{\cos x} \operatorname{sen} x dx$

11. $\int \frac{\cos x}{1 - \cos^2 x} dx$

12. $\int e^{3x} \operatorname{sen}(e^{3x}) dx$

13. $\int \frac{1}{x \operatorname{sen}(\ln x)} dx$

14. $\int \cos^3 x dx$

15. $\int \operatorname{sen}(4x) \cos(8x) dx$

16. $\int \cos(10x) \cos(12x) dx$

17. $\int \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{4}{5}x\right) dx$

DEMUESTRE LAS SIGUIENTES FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN

1. $\int \tan u du = \ln|\sec u| + c$

$$2. \int \cot u \, du = \ln|\sen u| + c$$

$$3. \int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u| + c$$



$$4. \int \csc u \, du = \ln|\csc u - \cot u| + c$$

3. INTEGRAL DEFINIDA

OBJETIVO GENERAL.

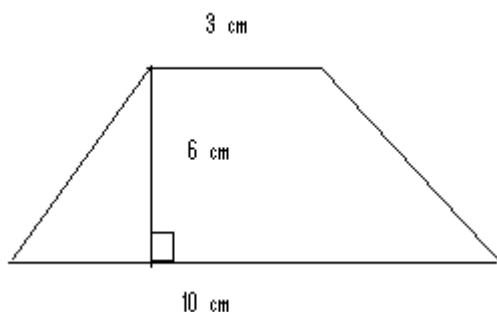
Entender el concepto de la integral definida a partir del cálculo del área bajo una curva.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

-  Aplicar la integral definida al cálculo del área bajo una curva y el área entre curvas.
-  Aplicar la integral definida para el cálculo del volumen de sólidos de revolución utilizando diferentes métodos.

3.1. Prueba Inicial

1. Determine el área de un triángulo rectángulo en el cual un cateto es igual a 3 cm y la hipotenusa es igual a 5 cm.
2. Determine el área de un rectángulo en el cual un lado es igual a 4 cm y el otro lado es igual a 8 cm.
3. Para la función $f(x) = 2x^2 - 5$.
4. Halle $f(5) - f(3)$
5. Para la función $f(x) = \frac{5}{3}x^3 - 8x^2 + x - 9$
6. Halle $f(2) - f(-2)$
7. Determine el área del trapecio mostrado en la figura:



3.2. Integral Definida

Definición de integral definida. La integral definida es una expresión de la forma:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Dónde: Las letras a y b se llaman límites de integración.

a : Límite inferior.

b : Límite superior.

La integral definida es un número, para calcular este número, lo hacemos utilizando el teorema fundamental del cálculo.

El teorema fundamental del cálculo.

El teorema fundamental del cálculo recibe de manera apropiada este nombre porque establece una conexión entre las dos ramas del cálculo: el cálculo diferencial y el cálculo integral. El primero surgió del problema de la tangente, el cálculo integral lo hizo de un problema en apariencia no relacionado, el problema del área. El profesor de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630 – 1667), descubrió que estos dos problemas en realidad estaban íntimamente relacionados. De hecho, se dio cuenta que la derivación y la integración son procesos inversos. El teorema fundamental del cálculo da la relación inversa precisa entre la derivada y la integral. Newton y Leibniz explotaron esta relación y la usaron para desarrollar el cálculo en un método matemático sistemático.¹⁰

¹⁰ STEWART, James. Cálculo conceptos y contexto. 1 ed. México: International Thomson Editores, 1999. p. 383.

Teorema fundamental del cálculo.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

En la integral definida no es necesario colocar la constante de integración.

El teorema fundamental del cálculo se puede demostrar a partir del área bajo una curva.

Ejemplo1

Calcule: $\int_0^2 (6 - 3x^2)dx$

SOLUCIÓN

$$\int_0^2 (6 - 3x^2)dx = 6x - 3\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 6x - x^3\Big|_0^2 = 6(2) - (2)^3 - [4(0) - (0)^3] = 12 - 8 = 4$$

Ejemplo2

Calcule: $\int_{-1}^3 (6x^2 - 2x + 6)dx$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 (6x^2 - 2x + 6)dx &= \frac{6x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 6x\Big|_{-1}^3 = 2x^3 - x^2 + 6x\Big|_{-1}^3 \\ &= 2(3)^3 - (3)^2 + 6(3) - [2(-1)^3 - (-1)^2 + 6(-1)] \\ &= 54 - 9 + 18 - (-2 - 1 - 6) = 72\end{aligned}$$

Ejemplo3

Calcule: $\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx$

SOLUCIÓN

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$$

Utilizando el método sustitución tenemos:

$$u = 1 + x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow \frac{du}{3x^2} = dx$$

Reemplazando en la integral tenemos:

$$\int \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx = \int \frac{3x^2}{\sqrt{u}} \frac{du}{3x^2} = \int \frac{1}{u^{1/2}} du = \int u^{-1/2} du = \frac{u^{1/2}}{1/2}$$

$$2\sqrt{u} = 2\sqrt{1+x^3} \Big|_0^1 = 2\sqrt{1+(1)^3} - 2\sqrt{1+(0)^3} = 2\sqrt{2} - 2$$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

$$1. \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

Esto es, al intercambiar los límites de integración, se cambia el signo de la integral.

$$\int_3^5 (4x+3) dx = -\int_5^3 (4x+3) dx$$

$$2. \int_a^a f(x) dx = 0$$

Sí los límites de integración son iguales, el resultado de la integral es igual a cero.

$$\int_{10}^{10} 50x^4 dx = 0$$

$$3. \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx; \quad a < b < c$$

$$\int_0^6 (2x-3)dx = \int_0^2 (2x-3)dx + \int_2^6 (2x-3)dx$$

1. La variable de integración es una “variable muda” en el sentido de que cualquier otra variable produce el mismo resultado, es decir, el mismo número.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$$

$$\int_5^{10} 3xdx = \int_5^{10} 3zdz$$

3.3. Área bajo una curva y área entre curvas.

Área bajo una curva. Para describir un método para determinar el área bajo una curva, partamos de un ejemplo particular.

Ejemplo

Encuentre el área de la región R limitada por la curva $y = f(x) = \sqrt{x}$ y el eje x, entre $x = 0$ y $x = 9$.

Lo primero que debemos hacer es efectuar la gráfica del modelo.

Los valores para la gráfica se muestran en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1	1,41	1,73	2	2,23	2,44	2,64	2,82	3

La gráfica de la función la podemos ver en la figura 1

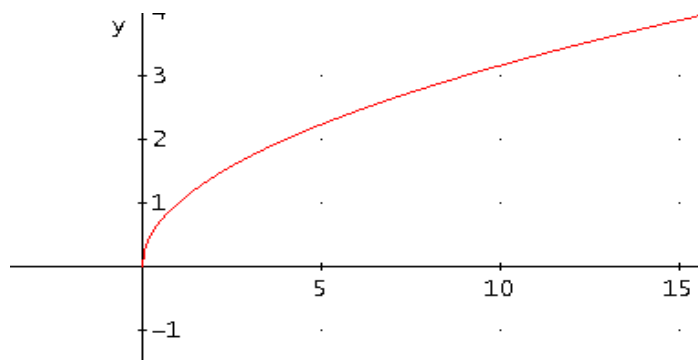


Figura 1. Gráfica de la función $y = f(x) = \sqrt{x}$

Vamos a obtener el área total como una suma de áreas, dividiendo la figura en rectángulos de igual base y alturas determinadas por la función.

Por facilidad tomemos la base para cada rectángulo igual a 1. Si llamamos la base Δx , tenemos que $\Delta x = 1$.

Esto lo podemos observar en la figura 2

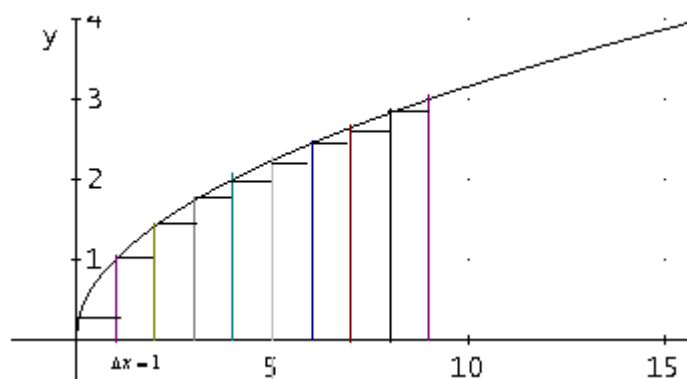


Figura 2

Tenemos además que el área de un rectángulo es igual a base por altura.

De tal manera que el área total será igual a la suma de cada área:

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \dots + A_9$$

Tenemos lo siguiente:

$$A_1 = \Delta x * f(1) = 1 * \sqrt{1} = 1$$

$$A_2 = \Delta x * f(2) = 1 * \sqrt{2} = 1,41$$

$$A_3 = \Delta x * f(3) = 1 * \sqrt{3} = 1,73$$

$$A_4 = \Delta x * f(4) = 1 * \sqrt{4} = 2$$

$$A_5 = \Delta x * f(5) = 1 * \sqrt{5} = 2.23$$

$$A_6 = \Delta x * f(6) = 1 * \sqrt{6} = 2.44$$

$$A_7 = \Delta x * f(7) = 1 * \sqrt{7} = 2.64$$

$$A_8 = \Delta x * f(8) = 1 * \sqrt{8} = 2.82$$

$$A_9 = \Delta x * f(9) = 1 * \sqrt{9} = 3$$

El área total se obtiene sumando las áreas anteriores:

$$A_T \approx 19,306$$

Una manera fácil para determinar Δx sería de la siguiente manera:

$$\Delta x = \frac{\text{extremo mayor} - \text{extremo menor}}{\text{Número de rectángulos}}$$

Mientras más pequeña sea la base de cada rectángulo, más precisa será el área obtenida, Esto quiere decir que mientras más rectángulos, más exacto será el valor obtenido.

Vamos a hacer el estudio para una función cualquiera:

Sea la función $y = f(x)$, determinemos el área de la región R en el primer cuadrante, entre $x = a$ y $x = b$.

Para ello utilizemos el mayor número de rectángulos posible, esto quiere decir que la base de cada rectángulo será lo más pequeña posible, esto se puede observar en la figura 3

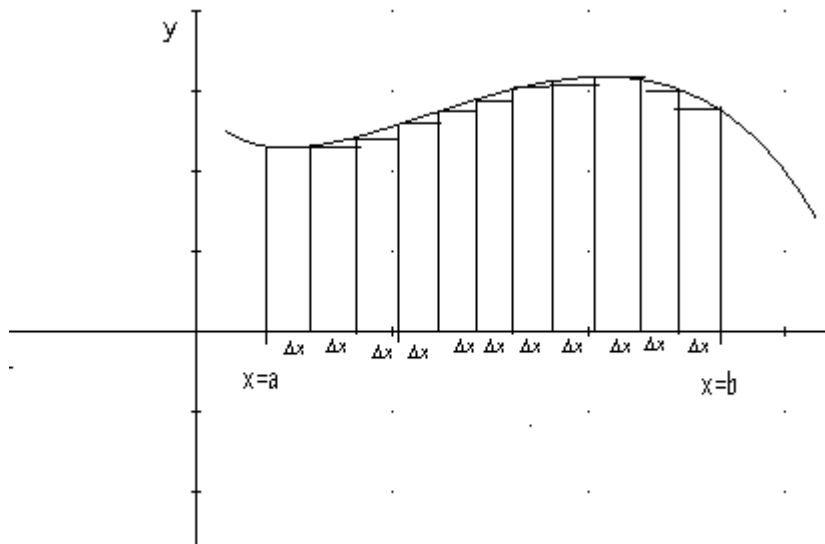


FIGURA3

Podemos ver de la figura que:

$$A_T \approx \Delta x * f(x_1) + \Delta x * f(x_2) + \Delta x * f(x_3) + \Delta x * f(x_4) + \dots + \Delta x * f(x_n)$$

$$A_T \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

$$\text{Si } n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0$$

Esto es,

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Ejemplo

Determine el área exacta del ejemplo anterior.

SOLUCIÓN

$$A = \int_0^9 \sqrt{x} \, dx = \int_0^9 x^{1/2} \, dx = \left. \frac{x^{3/2}}{3/2} \right|_0^9 = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_0^9 = \frac{2}{3} \sqrt{9^3} - \frac{2}{3} \sqrt{0^3} = \frac{2}{3} (27) - \frac{2}{3} (0) = 18$$

Cuando se determina el área bajo una curva se pueden presentar tres alternativas.

2. Sí, la región está por encima del eje x como lo muestra la figura4 :

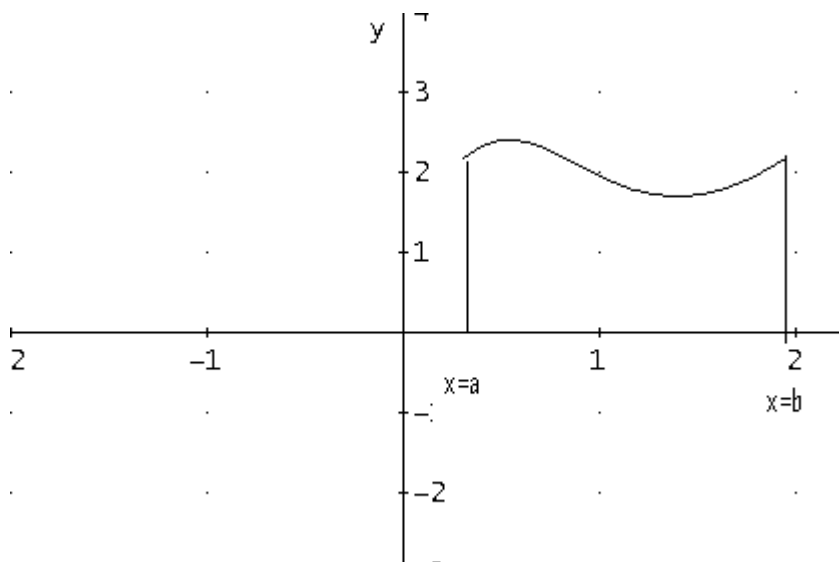


Figura 4

Entonces:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

3. Sí, La región está por debajo del eje x como lo muestra la figura 5:

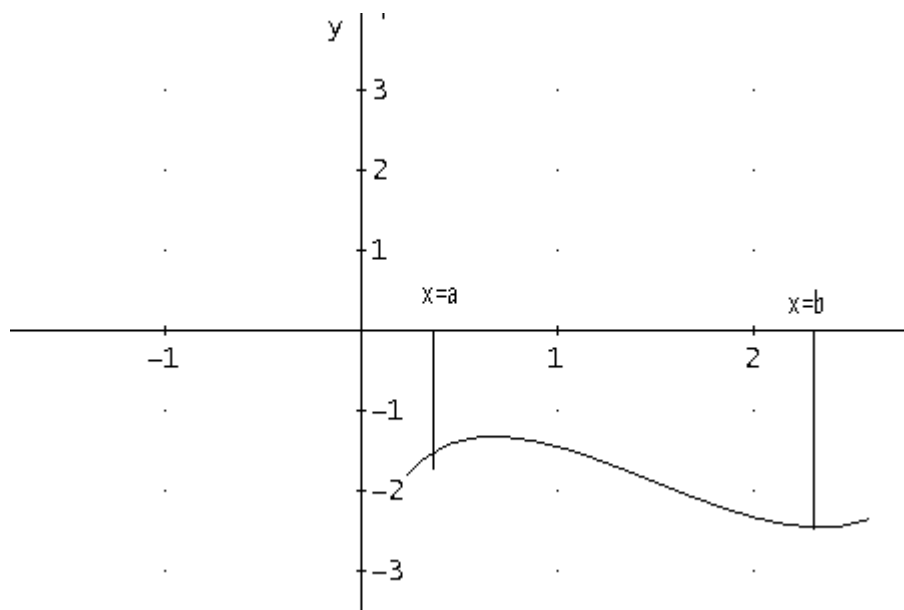


Figura 5

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo1

El siguiente ejemplo fue tomado de uno de los libros del autor Purcell.¹¹

Encuentre el área de la región R limitada por: $y = f(x) = \frac{x^2}{3} - 4$ y el eje x, entre $x = -2$ y $x = 3$.

¹¹ PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 282.

SOLUCIÓN

La gráfica de la figura se puede hacer dándole valores a x entre -2 y 3 , reemplazando cada valor en la función $y = f(x) = \frac{x^2}{3} - 4$. Efectuando este proceso, obtenemos los valores mostrados en la tabla:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-2.6	-3.6	-4	-3.6	-2.6	-1

La gráfica de la función y el área que se pide hallar la podemos observar en la figura 6.

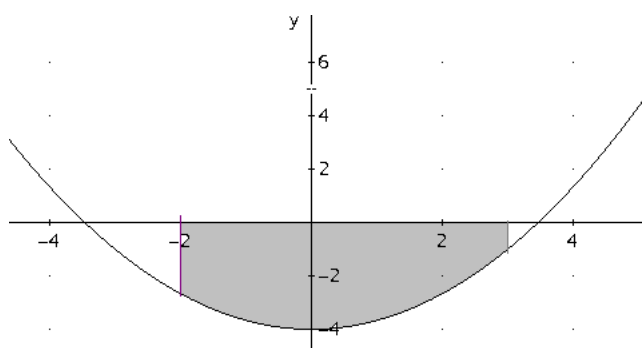


Figura 6

Como la región está por debajo del eje x , se debe plantear la integral:

$$A = -\int_{-2}^3 \left(\frac{x^2}{3} - 4 \right) dx$$

SOLUCIÓN DE LA INTEGRAL

$$A = -\int_{-2}^3 \left(\frac{x^2}{3} - 4 \right) dx = -\int_{-2}^3 \left(\frac{1}{3} x^2 - 4 \right) dx = -\left(\frac{1}{3} \frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_{-2}^3$$

$$A = -\left\{ \frac{1}{3} * \frac{(3)^3}{3} - 4(3) - \left[\frac{1}{3} * \frac{(-2)^3}{3} - 4(-2) \right] \right\}$$

$$A = -\left\{\frac{1}{3} * \frac{27}{3} - 12 - \left[\frac{1}{3} * \frac{(-8)}{3} + 8\right]\right\}$$

$$A = -\left\{3 - 12 - \left[-\frac{8}{9} + 8\right]\right\}$$

$$A = -\left\{-9 + \frac{8}{9} - 8\right\}$$

$$A = -\left(\frac{-149}{9}\right)$$

$$A = \frac{145}{9} \text{ Unidades cuadradas}$$

1. Sí, región tiene parte por encima y parte por debajo del eje x, entonces el área se debe calcular utilizando varias integrales.

Ejemplo2

El siguiente ejemplo fue tomado de uno de los libros del autor Purcell¹²

Encuentre el área de la región limitada por $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ y el eje x, entre $x = -1$ y $x = 2$.

SOLUCIÓN

Para determinar la región cuya área deseamos hallar, podemos dar valores a x entre $x = -1$ y $x = 3$, reemplazar en la función para obtener los respectivos valores de y.

Realizando este proceso, obtenemos los valores de la siguiente tabla.

x	-1	0	1	2
y	1	3	0	-3

¹² PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 282.

La gráfica de la función y la región cuya área queremos obtener, la podemos ver en la figura 7

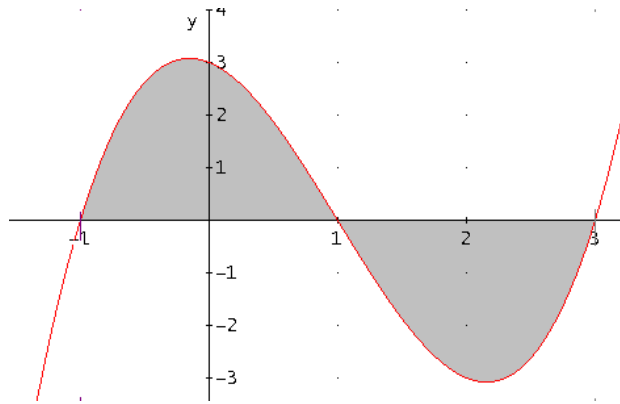


Figura 7

En la figura podemos ver que la gráfica corta el eje x en los puntos:

$$x = -1, x = 1 \wedge x = 3$$

Si estos puntos no se pueden leer en la gráfica, se debe proceder como sigue:

Debemos hallar los puntos donde la función corta el eje x , para ello se soluciona la ecuación $f(x) = 0$.

La solución de $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ es: $x = 3, x = -1, x = 1$

Planteamiento de la integral a calcular.

Entre -1 y 1 la función está por encima del eje x , por lo tanto se debe plantear la integral:

$$\int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx$$

Entre 1 y 2 la función está por debajo del eje x , se debe plantear la integral:

$$-\int_1^2 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx$$

Para determinar el área se deba plantear:

$$A = \int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx$$

SOLUCIÓN DE LA INTEGRAL

$$A = \int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx$$

$$A = \left. \frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x \right|_{-1}^1 - \left. \left(\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x \right) \right|_1^2$$

$$A = \frac{(1)^4}{4} - (1)^3 - \frac{(1)^2}{2} + 3(1) - \left[\frac{(-1)^4}{4} - (-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2} + 3(-1) \right] \\ - \left[\left(\frac{(2)^4}{4} - (2)^3 - \frac{(2)^2}{2} + 3(2) \right) - \left(\frac{(1)^4}{4} - (1)^3 - \frac{(1)^2}{2} + 3(1) \right) \right]$$

$$A = \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3 - \left[\frac{1}{4} - (-1) - \frac{1}{2} - 3 \right] - \left[\left(\frac{16}{4} - 8 - \frac{4}{2} + 6 \right) - \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3 \right) \right]$$

$$A = \frac{7}{4} - \left(-\frac{9}{4} \right) - \left[(4 - 8 - 2 + 6) - \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3 \right) \right]$$

$$A = \frac{7}{4} + \frac{9}{4} - \left[0 - \left(\frac{7}{4} \right) \right]$$

$$A = \frac{16}{4} - \left[-\left(\frac{7}{4} \right) \right]$$

$$A = 4 + \frac{7}{4}$$

$$A = \frac{23}{4} \text{ Unidades cuadradas}$$

Ejemplo 3

Encuentre el área de la región limitada por $y = 3x^2 + 7x - 6$ y el eje x entre $x = -4 \wedge x = 2$.

SOLUCIÓN

La gráfica de la función y de la región cuya área se desea hallar la podemos ver en la figura 8.

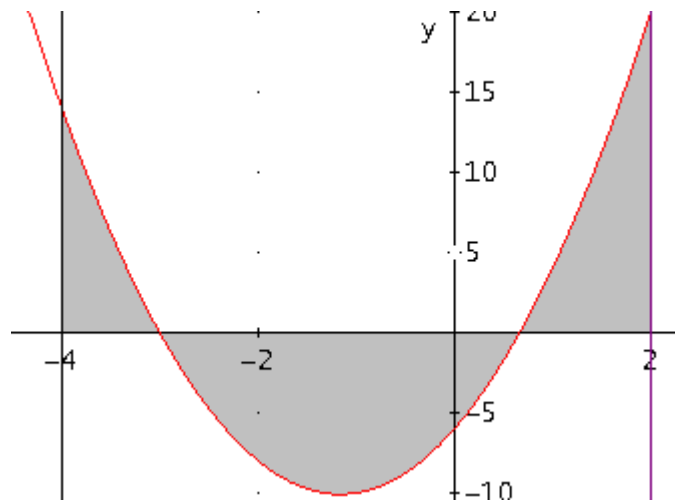


Figura 8

Como los puntos donde la función corta el eje x no se pueden leer con exactitud en la gráfica, para determinarlos se debe solucionar la ecuación:

$$3x^2 + 7x - 6 = 0$$

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN

$$\frac{3}{3}(3x^2 + 7x - 6) = 0 \Rightarrow \frac{9x^2 + 7(3x) - 18}{3} = 0 \Rightarrow \frac{(3x+9)(3x-2)}{3} = 0$$

$$\frac{3(x+3)(3x-2)}{3} = 0 \Rightarrow (x+3)(3x-2) = 0$$

$$\begin{array}{lcl}
 x+3=0 & & 3x-2=0 \\
 x=-3 & \vee & 3x=2 \\
 & & x=\frac{2}{3}
 \end{array}$$

Para hallar el área de la región, se debe plantear:

$$A = \int_{-4}^{-3} (3x^2 + 7x - 6) dx - \int_{-3}^{2/3} (3x^2 + 7x - 6) dx + \int_{2/3}^2 (3x^2 + 7x - 6) dx$$

Se deja como ejercicio resolver estas integrales, se debe obtener la respuesta:

$$\int_{-4}^{-3} (3x^2 + 7x - 6) dx = \frac{13}{2}$$

$$\int_{-3}^{2/3} (3x^2 + 7x - 6) dx = -\frac{1331}{54}$$

$$\int_{2/3}^2 (3x^2 + 7x - 6) dx = \frac{328}{27}$$

$$A = \frac{13}{2} - \left(-\frac{1331}{54} \right) + \frac{328}{27} = \frac{13}{2} + \frac{1331}{54} + \frac{328}{27}$$

$$A = \frac{1169}{27} \text{ Unidades cuadradas}$$

- ✎ Área entre curvas. Para determinar el área entre curvas se debe tener en cuenta cuál de las curvas está por encima y cual está por debajo (o cual curva está más alejada del eje x y cual curva está más cerca del eje).
- ✎ El área se calcula como:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Donde $f(x)$ está por encima de $g(x)$.

Procedimiento para hallar el área entre curvas:

1. Determine los puntos de corte de ambas curvas, si los hay, para ello resuelva la ecuación:
 $f(x) = g(x)$
2. Bosqueje la gráfica de ambas funciones.

RECOMENDACIÓN:

Grafique solo el tramo necesario, de valores entre el área a obtener o entre los puntos de corte.

- Plantee el área como una integral o como varias integrales, según sea el caso, y resuelva.

Ejemplo1

Encuentre el área de la región R limitada por las curvas:

$$y = g(x) = 8 - x^2 \wedge y = f(x) = x^2, \text{ entre } x = 0 \text{ y } x = 3.$$

SOLUCIÓN

Lo primero que hay que determinar son los puntos donde se cortan estas curvas. Para ello igualamos ambas funciones y despejamos la variable:

$$x^2 = 8 - x^2 \rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = \frac{8}{2} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow x = 2, x = -2$$

Los puntos para hacer ambas gráficas se observan en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3
$y = f(x) = x^2$	0	1	4	9
$y = g(x) = 8 - x^2$	8	7	4	-1

La gráfica de la región se observa en la figura 9

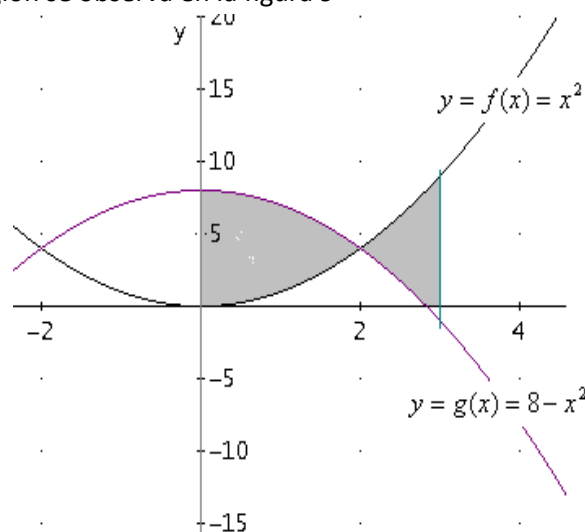


Figura 9

De acuerdo a la figura 9 tenemos que:

Entre $x = 0$ y $x = 2$ $g(x)$ está por encima de $f(x)$, para este tramo se debe plantear la integral:

$$\int_0^2 (8 - x^2 - x^2) dx$$

Entre $x = 2$ y $x = 3$ $f(x)$ está por encima de $g(x)$, para este tramo se debe plantear la integral:

$$\int_2^3 [x^2 - (8 - x^2)] dx$$

El área de la región se obtiene como:

$$A = \int_0^2 (8 - 2x^2) dx + \int_2^3 [2x^2 - 8] dx$$

SOLUCIÓN DE CADA INTEGRAL

Solución de $\int_0^2 (8 - 2x^2) dx$:

$$\int_0^2 (8 - 2x^2) dx = 8x - \frac{2x^3}{3} \Big|_0^2 = 8(2) - \frac{2(2)^3}{3} - \left[8(0) - \frac{2(0)^3}{3} \right] = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

Solución de $\int_2^3 [2x^2 - 8] dx$:

$$\begin{aligned} \int_2^3 [2x^2 - 8] dx &= \frac{2x^3}{3} - 8x \Big|_2^3 = \frac{2(3)^3}{3} - 8(3) - \left[\frac{2(2)^3}{3} - 8(2) \right] = 18 - 24 - \left[\frac{16}{3} - 16 \right] \\ &= -6 - \left(-\frac{32}{3} \right) = -6 + \frac{32}{3} = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

$$A = \frac{32}{3} + \frac{14}{3} = \frac{46}{3} \text{ Unidades cuadradas}$$

Ejemplo2

Determine el área de la región R limitada por las curvas:

$$y = f(x) = x^2 - 6x + 8 \wedge y = g(x) = x + 2, \text{ entre } x = 0 \text{ y } x = 7.$$

SOLUCIÓN

La región cuya área se desea hallar la podemos ver en la figura 10

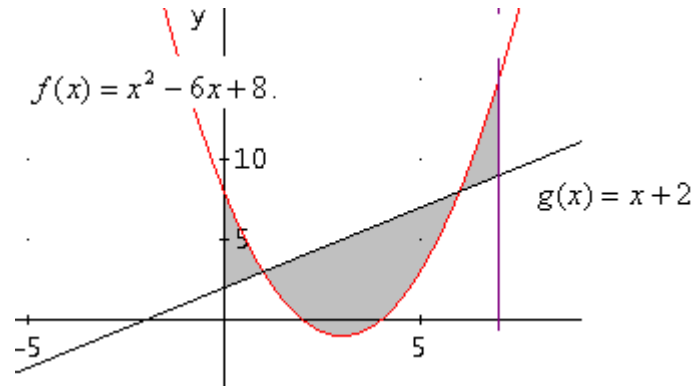


Figura 10

Los puntos donde se cortan estas dos funciones se obtienen solucionando la ecuación:

$$f(x) = g(x)$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = x + 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 - x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x - 1) = 0 \Rightarrow x - 6 = 0 \vee x - 1 = 0$$

$$x = 6 \vee x = 1$$

De acuerdo a la figura 10, para hallar el área de la región sombreada, se debe plantear:

$$A = \int_0^1 [x^2 - 6x + 8 - (x + 2)] dx + \int_1^6 [x + 2 - (x^2 - 6x + 8)] dx + \int_6^7 [x^2 - 6x + 8 - (x + 2)] dx$$

Ejemplo3

Encuentre el área de la región limitada por la curva:

$$y = f(x) = 3x^2 + 10x - 8$$

Entre: $x = -3 \wedge x = 2$

SOLUCIÓN

La gráfica de esta función es una parábola que abre hacia arriba como lo muestra la figura 11.

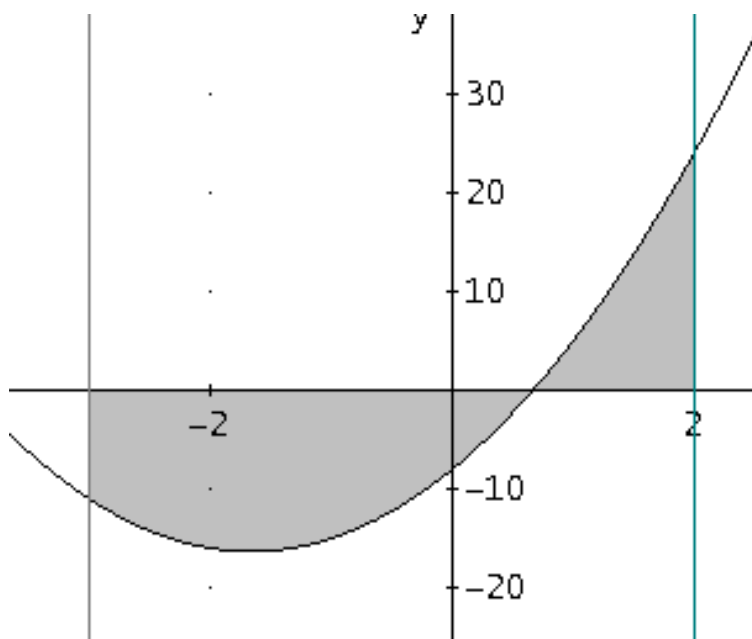


Figura 11.

Debemos encontrar los puntos donde la gráfica corta el eje x las integrales a plantear:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 10x - 8 = 0 \Rightarrow x = -4 \vee x = 2/3$$

Para hallar el área se debe plantear y solucionar:

$$A = - \int_{-3}^{2/3} (3x^2 + 10x - 8) dx + \int_{2/3}^2 (3x^2 + 10x - 8) dx$$

Queda como ejercicio solucionar estas integrales definidas, se debe obtener:

$$A = \frac{1610}{27} \text{ Unidades cuadradas.}$$

Ejemplo4

El siguiente ejemplo fue tomado de uno de los libros del autor STEWART¹³

Encuentre el área de la región encerrada por las parábolas $y = x^2 \wedge y = 2x - x^2$.

SOLUCIÓN

La grafica de ambas funciones se puede ver en la figura 12

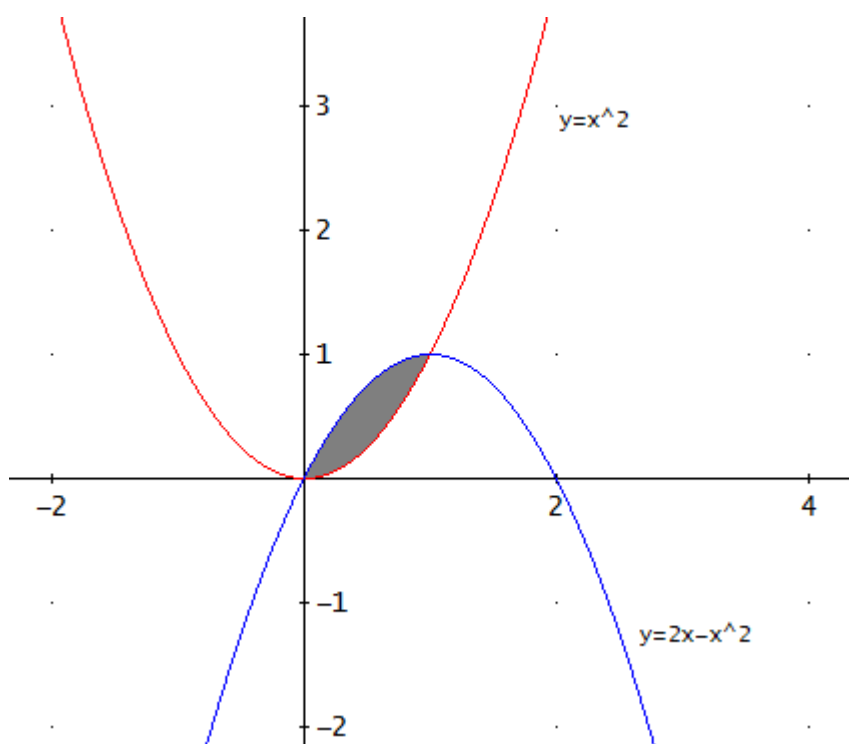


Figura 12.

Debemos encontrar los puntos de corte, para ello se debe solucionar la ecuación:

$$x^2 = 2x - x^2 \Rightarrow x^2 + x^2 - 2x = 0$$

$$2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow 2x(x - 1) = 0$$

¹³ STEWART, James. Cálculo conceptos y contexto. 1 ed. México: International Thomson Editores, 1999. p. 449.

$$2x = 0 \vee x - 1 = 0$$

$$2x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{2} = 0 \vee x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Como la función $y = 2x - x^2$ está por encima de la función $y = x^2$, para calcular el área de la región se debe plantear:

$$A = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2) dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx$$

Solución de la integral

$$A = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \left. \frac{2x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right|_0^1 = (1)^2 - \frac{2(1)^3}{3} - \left[(0)^2 - \frac{2(0)^3}{3} \right] = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

3.4. Sólidos de Revolución

Un sólido de revolución es una figura en el espacio (quiere decir que tiene volumen) que se forma al hacer girar una figura plana alrededor de una línea recta fija (esta recta es el eje del sólido de revolución).


Nos interesa determinar el volumen del sólido de revolución.

Sabemos que volumen es igual a base por ancho por alto.

El volumen de un cilindro es: $v = \pi r^2 h$

En este caso el radio está determinado por la función.

Existen varios métodos para determinar el volumen de un sólido de revolución. Sólo vamos a estudiar dos de ellos.

 Método del disco para determinar el volumen de un sólido de revolución. Este método se utiliza cuando se hace girar el área bajo una curva alrededor de un eje.¹⁴

En este caso se obtiene un cilindro, el volumen de un cilindro es:

¹⁴HERNÁNDEZ, Elsie. Aplicaciones de la integral definida: Volumen de sólidos de revolución. En: Cálculo Diferencial e Integral. [en línea]. [consultado 2 feb. 2010]. Disponible en <http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/CALCULODIFERENCIAL/curso-elsie/aplicacionesintegral/html/node6.html>

$$v = \pi r^2 h$$

1. Cuando el eje del sólido es el eje x :

Dada una función $y = f(x)$, cuya grafica se puede observar en la en la figura 13

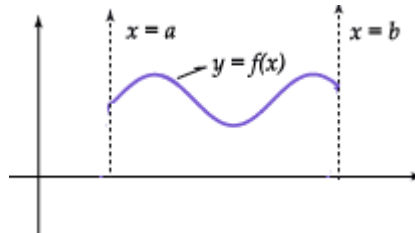


Figura 13 gráficas de la función $y = f(x)$

Si hacemos girar la región plana R comprendida entre la función $y = f(x)$ y el eje x entre $x = a$ y $x = b$ se obtiene el sólido de revolución mostrado en la figura 14.

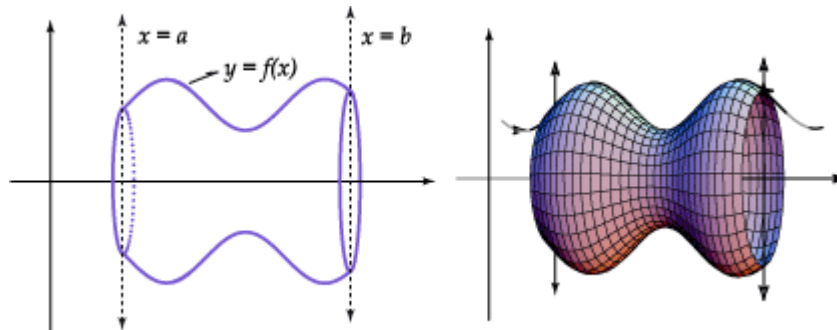


Figura 14.

Sólido de revolución formado al hacer girar la región R alrededor del eje x .

Dividiendo el sólido en n sólidos iguales de altura Δx como lo muestra la figura 15

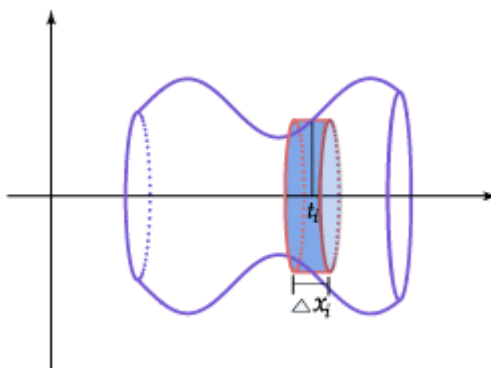


Figura 15

Luego calculando el volumen de cada sólido y obteniendo el volumen del sólido como la suma de los n volúmenes, se llega a la expresión:

Volumen del sólido:

$$v \approx \sum_{i=1}^{\infty} \pi [f(x_i)]^2 \Delta x_i$$

Si hacemos que el número de sólidos más pequeños tienda a infinito se obtiene el volumen exacto del sólido, esto es:

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \pi [f(x_i)]^2 \Delta x_i = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b \pi [f(x_i)]^2 \Delta x_i$$

La expresión anterior se convierte en

$$v = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

1. Cuando el eje del sólido es el eje y :

$$v = \pi \int_c^d [f(y)]^2 dy$$

Ejemplo1

Halle el volumen del sólido generado al hacer girar alrededor del eje x la región R formada por la función $y = x^2$ y el eje x entre $x = 0 \wedge x = 1$.

SOLUCIÓN

La figura 16 muestra la región plana y el sólido generado

Nota: Para hacer la gráfica de la región basta con graficar la función $y = x^2$ entre $x = 0 \wedge x = 1$

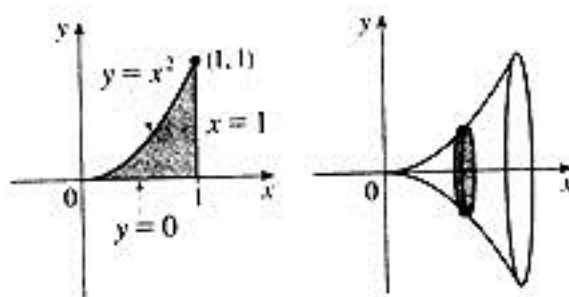


Figura 16

Para hallar el volumen se debe plantear:

$$v = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$v = \pi \int_0^1 [x^2]^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{(1)^5}{5} - \frac{(0)^5}{5} \right) = \frac{\pi}{5}$$

$$v = \frac{\pi}{5} \text{ Unidades cúbicas}$$

Ejemplo2

Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje y la región R limitada por la función $x = \sqrt{y}$ y el eje y entre $y = 0 \wedge y = 4$

SOLUCIÓN

La figura 17 muestra la gráfica de la región R y la gráfica del sólido generado

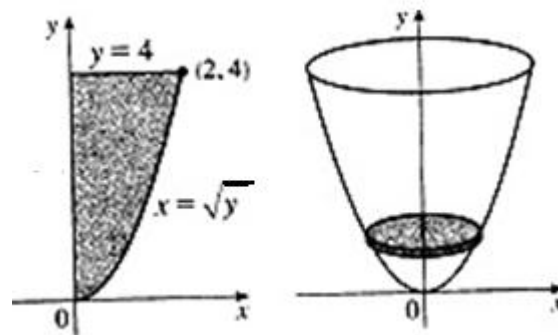


Figura 17

Como la región gira en torno al eje y, para hallar el volumen se debe plantear:

$$v = \pi \int_c^d [f(y)]^2 dy$$

$$v = \pi \int_0^4 [\sqrt{y}]^2 dy = \pi \int_0^4 y dy = \pi \frac{y^2}{2} \Big|_0^4 = \pi \left[\frac{(4)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \right] = 8\pi$$

$$v = 8\pi \text{ Unidades Cúbicas } \boxed{x = \sqrt{y}}$$

Ejemplo3

El siguiente ejemplo fue tomado de uno de los libros del autor Purcell¹⁵

Encuentre el volumen del sólido de revolución obtenido mediante la rotación alrededor del eje x de la región limitada por la curva $y = \sqrt{x}$ y el eje x entre $x = 0$ y $x = 4$.

Queda como ejercicio, se debe llegar a:

$$v = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = 8\pi$$

¹⁵ PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 290.

Ejemplo4

El siguiente ejemplo fue tomado de uno de los libros del autor Purcell.¹⁶

Encuentre el volumen del sólido de revolución que se genera por la rotación alrededor del eje **y** de la región limitada por la curva $y = x^3$ \wedge el eje **y** entre $y = 0$ \wedge $y = 3$

Se deja como ejercicio, la respuesta es:

$$v = \pi \int_0^3 (y^{1/3})^2 dy = \frac{3\pi 3^{5/3}}{5} \approx 11,7625969...$$

❏ Método de la arandela para determinar el volumen de un sólido de revolución. Este método se utiliza cuando se hace girar el área entre dos curvas alrededor de un eje.

Si la región gira alrededor del eje x, se tiene que:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx - \pi \int_a^b [g(x)]^2 dx$$

$$V = \pi \int_a^b \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx$$

Donde la función $f(x)$ está por encima de la función $g(x)$

Si la región gira alrededor del eje y

$$V = \pi \int_a^b [f(y)]^2 dy - \pi \int_a^b [g(y)]^2 dy$$

$$V = \pi \int_a^b \{ [f(y)]^2 - [g(y)]^2 \} dy$$

Donde la función $f(y)$ está más alejada del eje y que la función $g(y)$

Ejemplo1

Encuentre el volumen del sólido que se genera al girar alrededor del eje **x** la región R formada por las curvas $x = y^2$ \wedge $y = x^2$

¹⁶ PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 291.

SOLUCIÓN

Es conveniente que escribamos la función $x = y^2$ despejando la y , esto es:

$$x = y^2 \Rightarrow y^2 = x \Rightarrow y = \pm\sqrt{x} \Rightarrow y = f(x) = \pm\sqrt{x}$$

La otra función la podemos llamar como:

$$y = g(x) = x^2$$

Para determinar los límites de la región R , es necesario que encontremos los puntos de corte de ambas funciones, para ello se debe plantear y solucionar la ecuación:

$$f(x) = g(x)$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \pm\sqrt{x} = x^2$$

Para eliminar la raíz elevamos en ambos lados al cuadrado, esto es:

$$\begin{aligned}
 (\pm\sqrt{x})^2 &= (x^2)^2 \Rightarrow x = x^4 \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \\
 &\quad x^3 - 1 = 0 \\
 x = 0 \quad \vee \quad &x^3 = 1 \\
 &x = \sqrt[3]{1} \\
 &x = 1
 \end{aligned}$$

La región y el sólido generado se pueden observar en la figura 18 donde solamente se debe graficar la parte positiva de la función $f(x)$, es decir:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

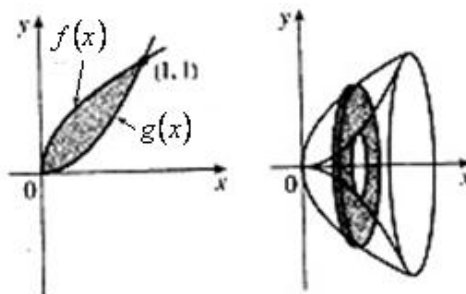


Figura 18

Podemos ver que la función $f(x)$ está por encima de la función $g(x)$, por lo tanto para hallar el volumen se debe plantear y solucionar:

$$V = \pi \int_a^b \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \{ [\sqrt{x}]^2 - [x^2]^2 \} dx \Rightarrow V = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1$$

$$V = \pi \left\{ \frac{(1)^2}{2} - \frac{(1)^5}{5} - \left[\frac{(0)^2}{2} - \frac{(0)^5}{5} \right] \right\} = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{10} \pi$$

$$V = \frac{3}{10} \pi \text{ Unidades cúbicas}$$

Ejemplo2

Determine el volumen del sólido de revolución que se genera al girar alrededor del eje x , la región limitada por la parábola $y = x^2 + 1$ y la recta $y = x + 3$

SOLUCIÓN

Primero debemos determinar los puntos de corte de estas figuras.

Para ello igualamos ambas funciones.

$$x^2 + 1 = x + 3 \Rightarrow x^2 + 1 - x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \vee x + 1 = 0$$

$$x = -1 \quad \vee \quad x = 2$$

La región y el sólido generado los podemos ver en la figura 19

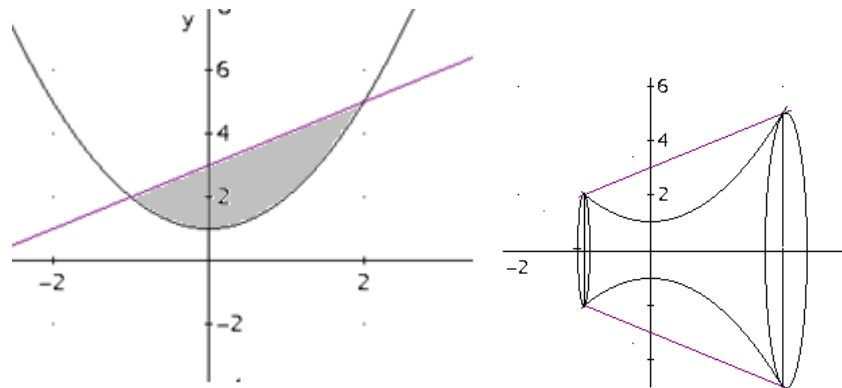


Figura 19

Podemos ver que la línea recta, cuya función es $y = x + 3$ esta más alejada del eje x (o está por encima) y que la parábola, cuya función es $y = x^2 + 1$, está más cerca del eje x (o está por debajo).

Para hallar el volumen se debe plantear:

$$V = \pi \int_{-1}^2 \left[(x+3)^2 - (x^2+1)^2 \right] dx$$

Es práctico resolver aparte la expresión: $(x+3)^2 - (x^2+1)^2$

$$\begin{aligned}
 (x+3)^2 - (x^2+1)^2 &= x^2 + 6x + 9 - (x^4 + 2x^2 + 1) = \\
 x^2 + 6x + 9 - x^4 - 2x^2 - 1 &= -x^4 - x^2 + 6x + 8
 \end{aligned}$$

$$V = \pi \int_{-1}^2 \left[(x+3)^2 - (x^2+1)^2 \right] dx = \pi \int_{-1}^2 (-x^4 - x^2 + 6x + 8) dx$$

$$\pi \int_{-1}^2 (-x^4 - x^2 + 6x + 8) dx \Rightarrow \pi \left(-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x \right) \Big|_{-1}^2$$

$$V = \pi \left[\left(-\frac{(2)^5}{5} - \frac{(2)^3}{3} + 3(2)^2 + 8(2) \right) - \left(-\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3} + 3(-1)^2 + 8(-1) \right) \right]$$

$$V = \pi \left[\left(-\frac{32}{5} - \frac{8}{3} + 12 + 16 \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 3 - 8 \right) \right]$$

$$V = \frac{117}{5} \pi \text{ Unidades cúbicas}$$

Ejemplo3

El siguiente ejemplo fue tomado de uno de los libros del autor Purcell.¹⁷

Encuentre el volumen del sólido de revolución que se genera por la rotación alrededor del eje x de la región limitada por las parábolas: $y = x^2 \quad \wedge \quad y^2 = 8x$

SOLUCIÓN

Encontramos los puntos donde se cortan ambas funciones.

$$y^2 = 8x \rightarrow y = \pm \sqrt{8x}$$

Puntos de corte:

$$\begin{aligned} x^2 &= \pm \sqrt{8x} \rightarrow x^4 = (\pm \sqrt{8x})^2 \rightarrow x^4 - 8x = 0 \\ x &= 0 \quad \vee \quad x = 2 \end{aligned}$$

Queda como ejercicio efectuar la gráfica de la región y el sólido de revolución.

Para hallar el volumen se debe plantear:

$$V = \pi \int_0^2 \left[(\pm \sqrt{8x})^2 - (x^2)^2 \right] dx$$

Se deja como ejercicio solucionar la integral.

La respuesta es:

$$V \approx 30,16... \text{ Unidades cúbicas}$$

¹⁷ PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 291.

Ejemplo4

Realice el ejemplo3, pero la región gira alrededor del eje **y**.

$$R: V = \pi \int_0^4 \left[(\pm \sqrt{y})^2 - \left(\frac{y^2}{8} \right)^2 \right] dy = 4,8\pi \approx 15,07964474...$$

Ejercicios de autoevaluación

Integral definida. Resuelva las siguientes integrales definidas.

$$\int_0^{10} 3x^2 dx$$

$$\int_{-2}^5 \frac{x}{x^2 + 4} dx$$

$$\int_1^6 \frac{x}{x+4} dx$$

$$\int_0^3 e^{3x+1} dx$$

1. Área bajo una curva y área entre curvas.

Encuentre el área de la región formada por la curva $y = 4x^2 - 5x - 6$ y el eje x , entre $x = -3$ y $x = 5$.

Encuentre el área de la región R formada por la curva $f(x) = 10x^2 - x - 3$ y el eje x entre $x = 0$ y $x = 2$.

Encuentre el área de la región formada por la curva $f(x) = \frac{5x}{x^2 - 16}$ y el eje x , entre $x = -2$ y $x = 3$.

Encuentre el área de la región formada por las funciones $y = 4x^2 \wedge y = 3x$

Encuentre el área de la región formada por las curvas $y = 3x^2 - 5x \wedge y = 2x^2 - 6$ entre $x = -3$ y $x = 5$.

2. Sólidos de revolución.

- ❏ Determine el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer rotar alrededor del eje x la función $y = \sqrt{16-x}$ entre $x = -4$ y $x = 4$.
- ❏ Determine el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer rotar alrededor del eje x la función $y = e^x$ entre $x = -1$ y $x = 3$.
- ❏ Determine el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer rotar alrededor del eje x la función $y = x^2 + 4$ entre $x = -4$ y $x = 5$.
- ❏ Determine el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer rotar alrededor del eje x la función $y = x^2 \wedge y = 3x$ entre $x = 0$ y $x = 3$.
- ❏ Determine el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer rotar alrededor del eje x la función $y = x + 1 \wedge y = 2x$ entre $x = 2$ y $x = 10$.

Use una integral definida para encontrar el área de la región limitada por la curva, el eje x y los valores de x dados. En cada caso primero bosqueje la región.

- ❏ $y = 2x - 3$, entre, $x = 0 \wedge 5$
- ❏ $y = x^3 + 2x$, entre $x = -2 \wedge x = 2$
- ❏ $y = x^2 - 5x - 24$, entre $x = -3 \wedge x = 5$
- ❏ $y = 5x^2 + 8x - 4$, entre $x = -1 \wedge x = 6$

Determine el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar la región dada alrededor del eje indicado.

- ❏ $y = \frac{5}{4}x$, entre $x = 0 \wedge x = 10$ Gira alrededor del eje x
- ❏ $y = 3x^2$ entre $x = 2 \wedge x = 3$ Gira alrededor del eje x
- ❏ $y = 5x + 4$ entre $x = 0 \wedge x = 3$ Gira eje x

Determine el área de la región limitada por la curva o curvas, el eje x y los valores de x dados. En cada caso primero bosqueje la región.

- ❏ $y = 7x^2 - 12x - 4x$ entre $x = -2 \wedge x = 8$
- ❏ $y = \sqrt{25-x}$ entre $x = -5 \wedge x = 5$

- ✚ $y = \frac{100}{x+4}$ entre $x = 1 \wedge x = 6$
- ✚ $y = 5x^2 - 3x \wedge y = x^2 + 6$ entre $x = -1 \wedge x = 7$
- ✚ $y = 4x^2 \wedge y = 3x^2 + 9$ entre $x = -2 \wedge x = 5$

Determine el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar la región dada alrededor del eje indicado.



- ✚ $y = 2x + 1$ entre $x = 0 \wedge x = 6$ gira eje x
- ✚ $y = x^2 + 4x$ entre $x = 0 \wedge x = 3$ gira eje x
- ✚ $y = e^x$ entre $x = -2 \wedge x = 2$ gira eje x
- ✚ $y = 5x^2 + 1$ entre $x = -1 \wedge x = 1$ gira eje x
- ✚ $y = \frac{5}{x+3}$ entre $x = -1 \wedge x = 2$ gira eje x
- ✚ $y = \sqrt{x^2 + 16}$ entre $x = -4 \wedge x = 4$ gira eje x
- ✚ $y = \sqrt{25 - x^2} \wedge y = 2$ entre $x = -3 \wedge x = 4$ gira eje x
- ✚ $y = x \wedge y = x^3$ entre $x = 0 \wedge x = 1$ gira eje x
- ✚ $y = 2x + 1 \wedge y = 1 - x^2$ entre $x = 0 \wedge x =$ gira eje x
- ✚ $y = x + 4 \wedge y = \sqrt{x^2 - 4}$ entre $x = 4 \wedge x = 6$ gira eje x

4. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

OBJETIVO GENERAL.

Capacitar al estudiante para el manejo, con destreza, de las técnicas propias del cálculo y su aplicación a la solución de situaciones problémicas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

-  Resolver integrales utilizando fracciones parciales.
-  Resolver integrales utilizando integración por partes

4.1. Prueba inicial

1. Efectué la suma de las siguientes fracciones:

$$\frac{5}{x-3} - \frac{8}{x+4}$$

$$\frac{4x}{x^2+1} - \frac{7}{x}$$

$$\frac{4}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{8}{(x+1)^3}$$

$$\frac{5}{x} + \frac{3}{x-7} + \frac{8}{x+1}$$

$$\frac{3}{2x-1} + \frac{5}{7x-3} + \frac{1}{x-2}$$

2. Halle la primera derivada de las siguientes funciones

$$f(x) = (5x-3)^4 e^{2x-3}$$

$$f(x) = \sqrt{3x^2 - 6x + 5} (6x-1)$$

$$y = \operatorname{sen} x * \ln x$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2 + 4}\right)$$

$$f(x) = \cos^3(4x - 3) * x^2$$

4.2. Integración por partes

El método de integración por partes nos permite utilizar la siguiente fórmula:

La siguiente idea de la definición de integración por partes fue tomada del autor LEITHOLD¹⁸

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Donde tanto “u” como “v” son expresiones en “x”

Para demostrar esta fórmula partimos de la derivada de un producto:

$$D_x(uv) = (uv)' \Rightarrow \frac{d(uv)}{dx} = \frac{du}{dx} v + \frac{dv}{dx} u \Rightarrow d(uv) = dx * \left(\frac{du}{dx} v + \frac{dv}{dx} u \right) \Rightarrow d(uv) = v du + u dv$$

Si integramos a ambos lados queda:

$$\int d(uv) = \int v du + \int u dv$$

$$uv = \int v du + \int u dv \rightarrow \int u dv = uv - \int v du$$

La fórmula de integración por partes es:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

En la utilización de esta fórmula, se busca:

Que u sea un factor simple, que nos permita una derivada “sencilla”.

Y que dv sea un factor que permita una integral “sencilla”.

¹⁸ LEITHOLD, Louis. El Cálculo con Geometría Analítica. 6 ed. México: Harla, 1992. p. 689.

Pasos para aplicar la fórmula de integración por partes

1. A una de las expresiones le asignamos la letra u .
2. Obtenemos $\frac{du}{dx}$ derivando; despejamos dx
3. A la expresión restante le asignamos el dv .
4. Obtenemos v integrando la expresión anterior.
5. Reemplazamos en la fórmula de integración por partes a: uv y a $\int vdu$
6. Efectuamos: $\int vdu$.
7. La constante de integración se coloca después de realizar todas las integrales.

NOTAS:

1. Este método se utiliza principalmente para integrar expresiones que contengan e^u , $\ln|u|$ o expresiones trigonométricas todas combinadas entre sí o con expresiones polinómicas.
2. e^x por lo general nunca es u .
3. $\ln|x|$ por lo general es u .

Ejemplo1

El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor SOLER FAJARDO.¹⁹

Resuelva:

$$\int \ln|x| dx$$

¹⁹SOLER FAJARDO, Francisco; NUÑEZ, Reinaldo; ARANDA SILVA, Moisés. Fundamentos de Cálculo con aplicaciones a ciencias Económicas y Administrativas. 2 ed. Bogotá: Ecoe ediciones, 2002. p. 335.

SOLUCIÓN

Sea: $u = \ln|x| \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

Sea: $dv = dx \rightarrow v = \int dx \Rightarrow v = x$

$$\int \ln|x| dx = x \ln|x| - \int x \frac{1}{x} dx$$

$$\int \ln|x| dx = x \ln|x| - \int dx = x \ln|x| - x + c$$

Ejemplo 2

El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor LEITHOLD²⁰

Encuentre:

$$\int x \ln|x| dx$$

SOLUCIÓN

Sea: $u = \ln|x| \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

Sea: $dv = x dx \rightarrow v = \int x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

$$\int x \ln|x| dx = \frac{x^2}{2} \ln|x| - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx$$

$$\int x \ln|x| dx = \frac{x^2}{2} \ln|x| - \int \frac{x}{2} dx$$

$$\int x \ln|x| dx = \frac{x^2}{2} \ln|x| - \frac{x^2}{4} + c$$

²⁰ LEITHOLD, Louis. El Cálculo con Geometría Analítica. 6 ed. México: Harla, 1992. p. 691

Ejemplo3

El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor SOLER FAJARDO²¹

Resuelva:

$$\int xe^x dx$$

SOLUCIÓN

Sea: $u = x \rightarrow du = dx$

Sea: $dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + c$$

Ejemplo4

El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor LEITHOLD²²

Resuelva:

$$\int x^3 e^{x^2} dx$$

SOLUCIÓN

Sea: $u = x^2 \rightarrow du = 2x dx$

Sea: $dv = xe^{x^2} dx \rightarrow v = \int xe^{x^2} dx$

²¹ SOLER FAJARDO, Francisco; NUÑEZ, Reinaldo; ARANDA SILVA, Moisés. Fundamentos de Cálculo con aplicaciones a ciencias Económicas y Administrativas. 2 ed. Bogotá: Ecoe ediciones, 2002. p. 335.

²² LEITHOLD, Louis. El Cálculo con Geometría Analítica. 6 ed. México: Harla, 1992. p. 691

$$v = \int x e^{x^2} dx$$

Esta integral se debe resolver por sustitución

$$v = \int x e^{x^2} dx$$

$$\text{Sea } z = x^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2x \Rightarrow \frac{dz}{2x} = dx$$

La integral queda:

$$v = \int x e^z \frac{dz}{2x} = \frac{1}{2} \int e^z dz = \frac{1}{2} e^z = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

$$\text{Tenemos que: } v = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

Reemplazando en la fórmula de integración por partes:

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \int \frac{1}{2} e^{x^2} 2x dx$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

Ejemplo 5

El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor LEITHOLD²³

Resuelva:

$$\int x^2 e^x dx$$

SOLUCIÓN

$$u = x^2 \rightarrow du = 2x dx$$

$$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$$

²³ LEITHOLD, Louis. El Cálculo con Geometría Analítica. 6 ed. México: Harla, 1992. p. 691

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$$

$\int 2xe^x dx$ Hay que efectuarla por partes:

$$u = 2x \rightarrow du = 2dx$$

$$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$$

$$\int 2xe^x dx = 2xe^x - \int e^x 2dx$$

$$\int 2xe^x dx = 2xe^x - 2e^x$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

Ejemplo6

El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor PURCELL²⁴

Resuelva:

$$\int x^2 \sen x dx$$

SOLUCIÓN

$$u = x^2 \rightarrow du = 2x dx$$

$$dv = \sen x dx \rightarrow v = -\cos x$$

$$\int x^2 \sen x dx = x^2 (-\cos x) - \int (-\cos x) 2x dx$$

$$\int x^2 \sen x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx$$

$\int x \cos x dx$ Hay que efectuarla por partes:

²⁴ PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 404.

$$u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos x \rightarrow v = \text{sen} x$$

$$\int x \cos x dx = x \text{sen} x - \int \text{sen} x dx$$

$$\int x \cos x dx = x \text{sen} x - \cos x = x \text{sen} x + \cos x$$

$$\int x^2 \text{sen} x dx = -x^2 \cos x + 2(x \text{sen} x + \cos x) + c = -x^2 \cos x + 2x \text{sen} x + 2 \cos x + c$$

El resultado final es:

$$\int x^2 \text{sen} x dx = -x^2 \cos x + 2x \text{sen} x + 2 \cos x + c$$

Ejemplo7

El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor HAEUSSLER²⁵

Resuelva:

$$\int \frac{\ln|x|}{\sqrt{x}} dx$$

SOLUCIÓN

$$u = \ln|x| \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = \frac{1}{\sqrt{x}} dx = x^{-1/2} dx \rightarrow v = 2x^{1/2}$$

$$\int \frac{\ln|x|}{\sqrt{x}} dx = \ln|x| 2x^{1/2} - \int 2x^{1/2} \frac{1}{x} dx$$

²⁵ HAEUSSLER. Ernest. F. Jr; RICHARD S. Paul. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. 8 ed. México: Prentice Hall, 1997. p. 798.

$$\int \frac{\ln|x|}{\sqrt{x}} dx = 2x^{1/2} \ln|x| - 2 \int x^{-1/2} dx$$

$$\int \frac{\ln|x|}{\sqrt{x}} dx = 2x^{1/2} \ln|x| - 4x^{1/2} + c$$

$$\int \frac{\ln|x|}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \ln|x| - 4\sqrt{x} + c$$

Ejemplo8

El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor PURCELL²⁶

Resuelva:

$$\int e^x \sen x dx$$

SOLUCIÓN

$$u = \sen x \rightarrow du = \cos x dx$$

$$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$$

$$\int e^x \sen x dx = \sen x e^x - \int \cos x dx$$

$$\int e^x \cos x dx. \text{ Hay que efectuarla por partes:}$$

$$u = \cos x \rightarrow du = -\sen x dx$$

$$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$$

$$\int e^x \cos x dx = \cos x e^x - \int e^x (-\sen x) dx$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sen x dx$$

²⁶ PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 404.

$$\int e^x \sin x dx = \sin x e^x - \left[e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \right]$$

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

Para solucionar este ejercicio, hay que despejar la integral $\int e^x \sin x dx$

$$\int e^x \sin x dx + \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x$$

$$2 \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} (e^x \sin x - e^x \cos x) = \frac{1}{2} e^x \sin x - \frac{1}{2} e^x \cos x$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x \sin x - \frac{1}{2} e^x \cos x + c$$

Ejemplo9

El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor HAEUSSLER²⁷

Resuelva:

$$\int x^2 e^{2x+1} dx$$

SOLUCIÓN

$$u = x^2 \rightarrow du = 2x dx$$

$$dv = e^{x+1} dx \rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x+1}$$

$$\int x^2 e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} e^{2x+1} - \int \frac{1}{2} e^{2x+1} 2x dx$$

²⁷ HAEUSSLER. Ernest. F. Jr; RICHARD S. Paul. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. 8 ed. México: Prentice Hall, 1997. p. 800.

$$\int x^2 e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x+1} - \int e^{2x+1} x dx$$

$\int e^{2x+1} x dx$. Hay que hacerla por partes.

$$u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{2x+1} dx \rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x+1}$$

$$\int e^{2x+1} x dx = \frac{1}{2} e^{2x+1} x - \int \frac{1}{2} e^{2x+1} dx$$

$$\int e^{2x+1} x dx = \frac{1}{2} x e^{2x+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} e^{2x+1} = \frac{1}{2} x e^{2x+1} - \frac{1}{4} e^{2x+1}$$

$$\int x^2 e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x+1} - \left(\frac{1}{2} x e^{2x+1} - \frac{1}{4} e^{2x+1} \right) + c$$

$$\int x^2 e^{2x+1} dx = x^2 e^{2x+1} - \frac{1}{2} x e^{2x+1} + \frac{1}{4} e^{2x+1} + c$$

Ejemplo 10

Resuelva

$$\int x^2 \cos(2x) dx$$

SOLUCIÓN

$$u = x^2, du = 2x dx$$

$$dv = \cos(2x) \Rightarrow v = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

$$\int x^2 \cos(2x) dx = x^2 \frac{1}{2} \sin(2x) - \int \frac{1}{2} \sin(2x) 2x dx = \frac{1}{2} x^2 \sin(2x) - \int x \sin(2x) dx$$

$\int x \sin(2x) dx$ Se debe efectuar por partes

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \operatorname{sen}(2x), v = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\int x \operatorname{sen}(2x) dx = -\frac{1}{2}x \cos(2x) - \int -\frac{1}{2}\cos(2x) = -\frac{1}{2}x \cos(2x) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)$$

$$\int x^2 \cos(2x) dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{sen}(2x) - \left(-\frac{1}{2}x \cos(2x) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) \right) + c$$

$$\int x^2 \cos(2x) dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{sen}(2x) - \left(-\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) \right) + c$$

Ejemplo11

Resuelva:

$$\int x^3 \ln x^2 dx$$

SOLUCIÓN

$$\int x^3 \ln x^2 dx = 2 \int x^3 \ln x dx$$

$$u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x^3, v = \frac{x^4}{4}$$

$$2 \int x^3 \ln x dx = 2 \left(\ln x \frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4} * \frac{1}{x} dx \right) = 2 \left(\frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx \right)$$

$$\int x^3 \ln x^2 dx = 2 \left(\frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{16} x^4 \right) + c = \frac{x^4}{2} \ln x - \frac{1}{8} x^4 + c$$

Ejemplo12

Dada la región limitada por la curva: $y = f(x) = \ln x$ y el eje x entre $x = 1$ y $x = e$.
Determine:

a. El área de la región.

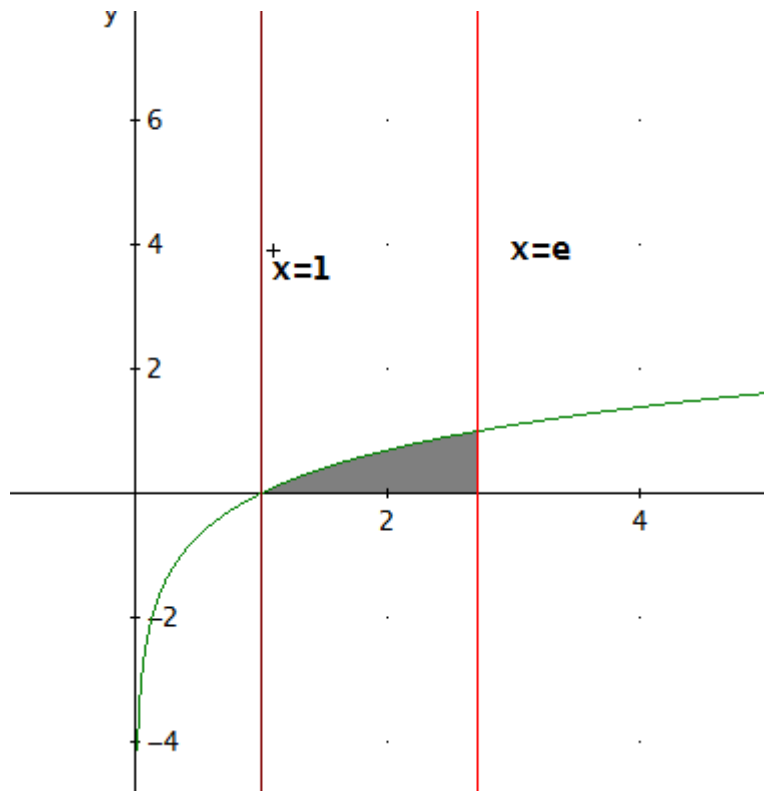
- b. El volumen del sólido generado al rotar la región alrededor del eje “x”.

SOLUCIÓN

Los puntos para la gráfica son los mostrados en la tabla.

X	1	1.5	2	2.5	e
Y	0	0.4	0.7	0.91	1

La gráfica de la región se muestra en la siguiente figura:



Grafica de $y = f(x) = \ln x$

1. $A = \int_1^e \ln x dx$

$$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx \rightarrow v = x$$

$$A = \int_1^e \ln x dx = x \ln x - \int x * \frac{1}{x} dx = x \ln x - x \Big|_1^e = e - e - 1 * \ln 1 + 1 = 1 \text{ unidades cuadradas}$$

$$2. \quad v = \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx$$

$$u = (\ln x)^2 \rightarrow du = 2 \ln x * \frac{1}{x} * dx$$

$$dv = dx \rightarrow v = x$$

$$v = \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx = \pi [x(\ln x)^2 - \int x * 2 \ln x * \frac{1}{x} dx]$$

$$v = \pi [x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x] \Big|_1^e = \pi(e - 2) \text{ unidades cúbicas}$$

Integración por fracciones parciales. Una expresión racional es una expresión de la forma:

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

La idea es obtener la siguiente integral:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Cuando deseamos efectuar una integral de este tipo, pueden suceder tres casos:

1. Que la integral se pueda efectuar directamente por el método de sustitución o cambio de variable (esta forma ya la hemos realizado en clase)

Ejemplo1

Resuelva:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-7} dx$$

SOLUCIÓN

$$w = x^2 + x - 7 \quad \frac{dw}{dx} = 2x + 1 \rightarrow dx = \frac{dw}{2x+1}$$

$$\int \frac{2x+1}{w} \frac{dw}{2x+1} = \int \frac{dw}{w} = \ln|w| + c = \ln|x^2 + x - 7| + c$$

Ejemplo2

Resuelva:

$$\int \frac{2x}{(x^2 + 10)^5} dx$$

SOLUCIÓN

$$v = x^2 + 10 \quad \frac{dv}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{dv}{2x}$$

$$\int \frac{2x}{v^5} \frac{dv}{2x} = \int v^{-5} dv = \frac{v^{-5+1}}{-5+1} + c = \frac{v^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{4v^4} + c = -\frac{1}{4(x^2 + 10)^4} + c$$

2. Puede suceder también que haya que efectuar primero la división. $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Esta división es posible si la fracción es impropia, es decir, el grado del polinomio $P(x)$ es mayor que el grado del polinomio $Q(x)$. Este tipo de integral ya tuvimos la oportunidad de desarrollar.

Este método ya explicado en la UNIDAD 2.

3. La otra posibilidad sería descomponer, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ En una suma de fracciones simples llamada fracciones parciales. Esto es posible cuando la fracción es propia, es decir, el grado del polinomio $P(x)$ es menor que el grado del polinomio $Q(x)$. Puede suceder que para efectuar una integral de este tipo, sea necesario combinar con el método anterior, es decir, hacer primero la división y luego descomponer en fracciones parciales.

Nos interesa desarrollar una metodología para este último caso. Antes de desarrollar el método, veamos un ejemplo de suma de fracciones; que es un proceso contrario al método que tenemos que desarrollar.

Efectuemos la siguiente suma.

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1}$$

El mínimo común múltiplo entre $(x-1)$ y $(x+1)$ es $(x-1)(x+1)$

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{2(x+1) + 3(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x+2+3x-3}{x^2+x-x-1} = \frac{5x-1}{x^2-1}$$

Supongamos que nos pide determinar la integral del resultado anterior, es decir hay que obtener.

$$\int \frac{5x-1}{x^2-1} dx$$

Esta integral no se puede efectuar por ninguno de los métodos conocidos hasta el momento, por lo tanto debemos descomponer la fracción en una suma de fracciones más simples y así poder determinar la integral de una expresión equivalente.

$$\int \frac{5x-1}{x^2-1} dx = \int \left[\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} \right] dx = \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{3}{x+1} dx = 2\ln|x-1| + 3\ln|x+1| + c$$

Acá lo hicimos directamente porque conocíamos el resultado de las fracciones parciales, a continuación vamos a explicar el método para descomponer una fracción en fracciones parciales.

MÉTODO PARA DESCOMPONER UNA FRACCIÓN EN FRACCIONES PARCIALES

Para descomponer una expresión $\frac{P(x)}{Q(x)}$, en fracciones parciales, dicho cambio depende de la naturaleza del polinomio $Q(x)$. Y se debe cumplir además que el grado del polinomio $P(x)$ debe ser menor que el grado del polinomio $Q(x)$, se presentan cuatro casos.

CASO1: Cuando el polinomio $Q(x)$ se puede factorizar como un producto de factores lineales distintos.

$$Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c)...$$

Entonces la fracción se puede escribir como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + ...$$

Ejemplo:

Resuelva:

$$\int \frac{5x-1}{x^2-1} dx$$

Como no se puede efectuar esta integral directamente, descomponemos la fracción en fracciones parciales.

PROCEDIMIENTO

1. Factorizamos $Q(x)$, sino esta factorizado.

$$Q(x) = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5x - 1}{(x + 1)(x - 1)}$$

2. Escribimos la fracción como una suma de fracciones utilizando todos los factores de $Q(x)$.

$$\frac{5x - 1}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1}$$

La idea es encontrar los valores A y B

3. Efectuamos la suma.

$$\frac{5x - 1}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{A(x - 1) + B(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)}$$

Para eliminar los denominadores se multiplica toda la expresión por el m.c.m. de los denominadores.

$$(x + 1)(x - 1) * \frac{5x - 1}{(x + 1)(x - 1)} = (x + 1)(x - 1) * \frac{A(x - 1) + B(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)}$$

Simplificando queda:

$$5x - 1 = A(x - 1) + B(x + 1)$$

4. Como los denominadores son iguales, también lo son los numeradores (los denominadores desaparecen). Igualamos los numeradores; resulta una identidad.

$$5x - 1 = A(x - 1) + B(x + 1)$$

5. Damos valores apropiados a x , los reemplazamos en la identidad; de esta manera hallamos el valor de cada constante.

$$\text{Si, } x=1 \rightarrow 5(1)-1=A(1-1)+B(1+1) \rightarrow 4=2B \rightarrow B=2$$

$$\text{Si, } x=-1 \rightarrow 5(-1)-1=A(-1-1)+B(1-1) \rightarrow -6=-2A \rightarrow A=3$$

6. Reemplazamos los valores obtenidos en el paso anterior en cada fracción y efectuamos la integral por alguno de los métodos conocidos.

$$\int \frac{5x-1}{x^2-1} dx = \int \left(\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-1} \right) dx = 3 \ln|x+1| + 2 \ln|x-1| + c$$

Ejemplos2

Resuelva:

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x-6} dx$$

SOLUCIÓN

$$\frac{3x-1}{x^2-x-6} = \frac{3x-1}{(x-3)(x+2)}$$

$$\frac{3x-1}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x+2)(x-3)}$$

$$3x-1=A(x+2)+B(x-3)$$

$$\text{Si } x=-2 \Rightarrow 3(-2)-1=A(-2+2)+B(-2-3) \Rightarrow -7=-5B \Rightarrow B=\frac{7}{5}$$

$$\text{Si } x=3 \Rightarrow 3(3)-1=A(3+2)+B(3-3) \Rightarrow 8=5A \Rightarrow A=\frac{8}{5}$$

$$\text{Resolver: } \int \frac{3x-1}{x^2-x-6} dx \text{ es igual que resolver: } \int \left(\frac{8/5}{x-3} + \frac{7/5}{x+2} \right) dx$$

$$\int \left(\frac{8/5}{x-3} + \frac{7/5}{x+2} \right) dx = \frac{8}{5} \int \frac{1}{x-3} dx + \frac{7}{5} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{8}{5} \ln|x-3| + \frac{7}{5} \ln|x+2| + c$$

Ejemplo3

El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor PURCELL²⁸

Resuelva:

$$\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} dx$$

SOLUCIÓN

$$\frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} = \frac{5x+3}{x(x^2-2x-3)} = \frac{5x+3}{x(x-3)(x+1)}$$

$$\frac{5x+3}{x(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1}$$

$$\frac{5x+3}{x(x-3)(x+1)} = \frac{A(x-3)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-3)}{x(x-3)(x+1)}$$

$$5x+3 = A(x-3)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-3)$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow 5(0)+3 = A(0-3)(0+1) + B(0)(0+1) + C(0)(0-3)$$

$$3 = -3A \Rightarrow A = -1$$

$$\text{Si } x=3 \Rightarrow 5(3)+3 = A(3-3)(3+1) + B(3)(3+1) + C(3)(3-3)$$

$$18 = +12B \Rightarrow B = \frac{18}{12} \Rightarrow B = \frac{3}{2}$$

$$\text{Si } x=-1 \Rightarrow 5(-1)+3 = A(-1-3)(-1+1) + B(-1)(-1+1) + C(-1)(-1-3)$$

$$-2 = 4C \Rightarrow C = \frac{-2}{4} \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

Se debe resolver la integral:

28 PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993. p. 441

$$\int \left(\frac{-1}{x} + \frac{3/2}{x-3} + \frac{-1/2}{x+1} \right) dx \Rightarrow -\int \frac{1}{x} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-3} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$-\ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x-3| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$$

CASO2: Cuando $Q(x)$ se puede factorizar como un producto de factores lineales repetidos:

$$Q(x) = (x-a)^n;$$

Entonces.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)^3} + \dots$$

El procedimiento para hallar las constantes A, B y C es similar al descrito en el caso anterior.

Ejemplo1

Resuelva

$$\int \frac{2x+5}{x^2+6x+9} dx$$

SOLUCIÓN

Factorizamos el denominador:

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)(x+3) = (x+3)^2$$

Por lo tanto:

$$\frac{2x+5}{x^2+6x+9} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} = \frac{A(x+3)+B}{(x+3)^2}$$

Igualando los numeradores queda:

$$2x+5 = A(x+3) + B$$

Damos valores a x :

$$\text{Sí, } x = -3 \rightarrow 2(-3) + 5 = A(-3 + 3) + B \rightarrow -1 = B$$

Reemplazamos el valor de B y damos otro valor a x :

$$\text{Sí, } x = 0 \rightarrow 2(0) + 5 = A(0 + 3) - 1 \rightarrow 5 = 3A - 1 \rightarrow A = 2; \text{ Entonces,}$$

$$\frac{2x+5}{x^2+6x+9} = \frac{2}{x+3} - \frac{1}{(x+3)^2}$$

Luego

$$\int \frac{2x+5}{x^2+6x+9} dx = \int \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{(x+3)^2} \right) dx = 2 \ln|x+3| + \frac{1}{x+3} + c$$

Ejemplo2

Resuelva:

$$\int \frac{3x^2 - 8x + 13}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$$

SOLUCIÓN

El estudiante debe comprobar que:

$$\int \frac{3x^2 - 8x + 13}{(x+3)(x-1)^2} dx \quad R: A = 4; \quad B = -1; \quad C = 2$$

Y debe terminar el ejercicio hasta resolver las integrales que resultan.

Ejemplo3

Resuelva:

$$\int \frac{x}{x^2 - 6x + 9} dx \quad R: A = 1; \quad B = 3$$

Ejemplo4

Resuelva:

$$\int \frac{2x^2 - 11x + 18}{x^2 - 6x + 9} dx$$

CASO 3: Cuando $Q(x)$ se puede factorizar como un producto de factores cuadráticos irreducibles distintos:

$$Q(x) = (ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f)(gx^2 + hx + i) \dots$$

Entonces $P(x)/Q(x)$ se puede descomponer en:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} + \frac{Cx + D}{dx^2 + ex + f} + \frac{Ex + F}{gx^2 + hx + i} + \dots$$

CASO4: Cuando $Q(x)$ se puede factorizar como un producto de factores cuadráticos repetidos.

$$Q(x) = (ax^2 + bx + c)^n$$

Entonces:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} + \frac{Cx + D}{(ax^2 + bx + c)^2} + \frac{Ex + F}{(ax^2 + bx + c)^3} + \dots$$

Ejemplo

El siguiente ejemplo fue tomado de una de las obras del autor HEUSSLER²⁹

Resuelva:

$$\int \frac{-2x - 4}{x^3 + x^2 + x} dx$$

²⁹ HAEUSSLER. Ernest. F. Jr; RICHARD S. Paul. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. 8 ed. México: Prentice Hall, 1997. p. 806.

SOLUCIÓN

Factorizando el denominador, queda:

$$x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$$

Que corresponden a un factor lineal y a un factor cuadrático, entonces, la fracción queda:

$$\frac{-2x-4}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$\frac{-2x-4}{x(x^2+x+1)} = \frac{A(x^2+x+1) + (Bx+C)x}{x(x^2+x+1)}$$

$$-2x-4 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)x$$

$$\begin{aligned} \text{Si } x=0 \Rightarrow -2(0)-4 &= A((0)^2 + (0)+1) + (B(0)+C)(0) \\ -4 &= A \Rightarrow A = -4 \end{aligned}$$

Como el factor $(x^2 + x + 1)$ no da cero en los reales, se debe dar dos valores a x y al mismo tiempo reemplazar el valor $A = -4$ resultando un sistema de ecuaciones 2×2 .

$$\text{Si } x=1 \text{ y } A=-4 \Rightarrow -2(1)-4 = -4((1)^2 + (1)+1) + (B(1)+C)(1)$$

$$-6 = -12 + B + C \Rightarrow B + C = 6 \text{ ecuación 1}$$

$$\text{Si } x=2 \text{ y } A=-4 \Rightarrow -2(2)-4 = -4((2)^2 + (2)+1) + (B(2)+C)(2)$$

$$-8 = -28 + 4B + 2C \Rightarrow 4B + 2C = 20 \text{ Ecuación 2}$$

Se debe solucionar el sistema:

$$B + C = 6 \text{ ecuación 1}$$

$$4B + 2C = 20 \text{ Ecuación 2}$$

SOLUCIÓN DEL SISTEMA 2 X 2

$$B + C = 6 \text{ ecuación 1} * -2$$

$$4B + 2C = 20 \text{ Ecuación 2} * 1$$

$$-2B - 2C = -12$$

$$4B + 2C = 20$$

Sumando término a término las dos ecuaciones anteriores

$$\begin{array}{rcl} -2B & -2C & = -12 \\ 4B & +2C & = 20 \\ \hline 2B & + 0 & = 8 \end{array}$$

Solucionado la ecuación que resulta, tenemos que:

$$2B = 8 \Rightarrow B = \frac{8}{2} \Rightarrow B = 4$$

Reemplazando $B = 4$ en la ecuación 1

$$B + C = 6 \text{ ecuación 1} \Rightarrow 4 + C = 6 \Rightarrow C = 6 - 4 \Rightarrow C = 2$$

Tenemos que:

$$\int \frac{-2x-4}{x^3+x^2+x} dx = \int \frac{-4}{x} dx + \int \frac{4x+2}{x^2+x+1} dx$$

La integral: $\int \frac{4x+2}{x^2+x+1} dx$ se debe resolver por sustitución:

$$\text{Sea } u = x^2 + x + 1, \frac{du}{dx} = 2x + 1 \Rightarrow \frac{du}{2x + 1} = dx$$

$$\int \frac{4x + 2}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{4x + 2}{u} \frac{du}{2x + 1} = \int \frac{2(2x + 1)}{u} \frac{du}{2x + 1} = \int \frac{2}{u} du = 2 \ln u = 2 \ln |x^2 + x + 1|$$

$$\int \frac{-2x - 4}{x^3 + x^2 + x} dx = \int \left(\frac{-4}{x} + \frac{4x + 2}{x^2 + x + 1} \right) dx = -4 \ln |x| + 2 \ln |x^2 + x + 1| + c$$

EJEMPLOS VARIOS

Ejemplo1

Resuelva

$$\int \frac{3x + 1}{x^2 - 7x + 10} dx$$

SOLUCIÓN

Factorizando el numerador:

$$x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$$

Los factores son lineales diferentes. La fracción queda:

$$\frac{3x + 1}{x^2 - 7x + 10} = \frac{3x + 1}{(x - 2)(x - 5)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 5}$$

$$\frac{3x + 1}{(x - 2)(x - 5)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 5}$$

Multiplicando por: $(x - 2)(x - 5)$

$$(x - 2)(x - 5) * \frac{3x + 1}{(x - 2)(x - 5)} = (x - 2)(x - 5) \frac{A}{x - 2} + (x - 2)(x - 5) \frac{B}{x - 5}$$

$$3x + 1 = A(x - 5) + B(x - 2)$$

Dando valores a x.

$$x = 2 \Rightarrow 3(2) + 1 = A(2 - 5) + B(2 - 2) \Rightarrow 7 = -3A \Rightarrow A = -\frac{7}{3}$$

$$x = 5 \Rightarrow 3(5) + 1 = A(5 - 5) + B(5 - 2) \Rightarrow 16 = 3B \Rightarrow B = \frac{16}{3}$$

Se debe resolver:

$$\int \frac{3x+1}{x^2-7x+10} dx = \int \left(\frac{-7/3}{x-2} + \frac{16/3}{x-5} \right) dx$$

Las integrales: $-\frac{7}{3} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{16}{3} \int \frac{1}{x-5} dx$ se deben resolver por sustitución, el resultado es:

$$\int \frac{3x+1}{x^2-7x+10} dx =$$

$$-\frac{7}{3} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{16}{3} \int \frac{1}{x-5} dx = -\frac{7}{3} \ln(x-2) + \frac{16}{3} \ln(x-5) + C$$

Ejemplo2

Resuelva:

$$\int \frac{4x^3 + 2x^2 + 8x + 8}{x^4 - 16} dx$$

SOLUCIÓN

Factorizando el denominador:

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$$

$x^2 + 4$ Es un factor cuadrático irreducible

$(x+2)(x-2)$ Son factores lineales diferentes

La fracción queda:

$$\frac{4x^3 + 2x^2 + 8x + 8}{x^4 - 16} = \frac{4x^3 + 2x^2 + 8x + 8}{x^4 - 16} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{x - 2} + \frac{D}{x + 2}$$

Multiplicando por: $(x^2 + 4)(x - 2)(x + 2)$

La expresión queda:

$$4x^3 + 2x^2 + 8x + 8 = (Ax + B)(x - 2)(x + 2) + C(x^2 + 4)(x + 2) + D(x^2 + 4)(x - 2)$$

Dando valores a x:

$$x = 2 \Rightarrow 4(2)^3 + 2(2)^2 + 8(2) + 8 = +C((2)^2 + 4)((2) + 2)$$

$$64 = 32C \Rightarrow C = 2$$

$$x = -2 \Rightarrow 4(-2)^3 + 2(-2)^2 + 8(-2) + 8 = +D((-2)^2 + 4)((-2) - 2)$$

$$-32 = -32D \Rightarrow D = 1$$

Reemplazamos $D = 1$, $C = 2$ con $x = 0$

$$4(0)^3 + 2(0)^2 + 8(0) + 8 = (A(0) + B)((0) - 2)((0) + 2) + 2((0)^2 + 4)((0) + 2) + 1((0)^2 + 4)((0) - 2)$$

$$8 = -4B + 16 - 8 \Rightarrow B = 0$$

Reemplazamos $D = 1$, $C = 2$ con $x = 1$

$$4(1)^3 + 2(1)^2 + 8(1) + 8 = (A(1) + (0))((1) - 2)((1) + 2) + 2((1)^2 + 4)((1) + 2) + 1((1)^2 + 4)((1) - 2)$$

$$22 = -3A + 30 - 5 \Rightarrow A = 1$$

Tenemos que:

$$\int \frac{4x^3 + 2x^2 + 8x + 8}{x^4 - 16} dx = \int \left(\frac{x}{x^2 + 4} + \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + 2 \ln(x-2) + \ln(x+2) + C$$

Ejemplo3

Resuelva:

$$\int \frac{3x^3 + 6x^2 - 27}{x^4 - 9x^2} dx$$

SOLUCIÓN

Factorizando el denominador:

$$x^4 - 9x^2 = x^2(x^2 - 9) = x^2(x-3)(x+3)$$

La fracción queda:

$$\frac{3x^3 + 6x^2 - 27}{x^2(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{x+3}$$

Multiplicando por: $x^2(x-3)(x+3)$

La identidad queda:

$$3x^3 + 6x^2 - 27 = Ax(x-3)(x+3) + B(x-3)(x+3) + Cx^2(x+3) + Dx^2(x-3)$$

Asignándole valores a x:

$$x = 0 \Rightarrow 3(0)^3 + 6(0)^2 - 27 = B(0-3)(0+3) \Rightarrow B = \frac{-27}{-9} \Rightarrow B = 3$$

$$x = 3 \Rightarrow 3(3)^3 + 6(3)^2 - 27 = C(3)^2(3+3) \Rightarrow C = \frac{108}{54} \Rightarrow C = 2$$

$$x = -3 \Rightarrow 3(-3)^3 + 6(-3)^2 - 27 = D(-3)^2(-3-3) \Rightarrow D = \frac{-54}{-54} \Rightarrow D = 1$$

Reemplazamos B = 3, C = 2, D = 1 con x = 1

$$3(1)^3 + 6(1)^2 - 27 = A(1)(1-3)(1+3) + 3(1-3)(1+3) + 2(1)^2(1+3) + 1(1)^2(1-3)$$

$$-18 = -8A - 24 + 8 - 2 \Rightarrow A = 0$$

Integral a resolver:

$$\int \frac{3x^3 + 6x^2 - 27}{x^4 - 9x^2} dx = \int \left(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+3} \right) dx = -\frac{3}{x} + 2\ln(x-3) + \ln(x+3) + C$$

Ejercicios de autoevaluación

Utilizando integración por partes resuelva:

$$\int x^4 \ln x^2 dx$$

$$\int x\sqrt{3x+8} dx$$

Utilizando fracciones parciales resuelva las siguientes integrales:

$$\int \frac{5}{2x^2 - x - 10} dx$$

$$\int \frac{5x-1}{25x^2 + 70x + 49} dx$$

Ejercicio de auto evaluación

Utilizando integración por partes resuelva:

$$\int (x + e^{2x})^2 dx$$

$$\int x^4 \cos x dx$$

Utilizando fracciones parciales resuelva:

$$\int \frac{8x^2 + 8x + 9}{2x^3 - 5x^2 - 3x} dx$$

$$\int \frac{47x^3 - 268x^2 + 51x - 102}{5x^4 - 26x^3 + 20x^2 - 78x + 15} dx$$

Sea la región limitada por la curva: $y = 3xe^{x/3}$ entre $x = 0 \wedge x = 9$

- Determine su área.
- Determine el volumen cuando la región gira en torno al eje x.

Resuelva Las siguientes integrales

$$\int (x^3 - 2x)e^x dx$$

$$\int 7x^2 \cos x dx$$

$$\int \frac{19x^2 + 48}{x^3 + 16x} dx$$

$$\int \cot^3(5x) dx$$

$$\int \frac{7x - 1}{25x^2 + 30x + 9} dx$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{9x^3 - 4x} dx$$

$$\int \frac{2x-7}{x^2+x-20} dx$$

$$\int \frac{3x-1}{x^3+x} dx$$

$$\int x^6 \ln x^2 dx$$

$$\int x^4 \operatorname{sen}(9x) dx$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{49-x^2}} dx$$

4.3. Relación con otros Temas

Con los conceptos de antiderivada ó integración y las técnicas básicas de integración, se alcanza una interrelación con otras áreas del conocimiento, que permiten abordar temáticas generales del saber específico en el campo profesional.

5. BIBLIOGRAFÍAS

ARANDA, E., URENA, F. **Problemas de Cálculo en una variable**. 2008. (compra on-line a través de la página www.bubok.es)

DÁVILA, Antonio; NAVARRO, Pedro; CARVAJAL, José. Introducción al Cálculo. 1 ed. Caracas: Mc Graw Hill, 1966.

DOWLING, Edward T. Cálculo para Administración, Economía y Ciencias Sociales. 1 ed. México: Mc Graw Hill, 1966.

Estela, M.R.; Saà, J; “Cálculo con soporte interactivo en Moodle”; Ed. Pearson-Prentice Hall; Madrid, 2008.

GARCÍA, A., LÓPEZ, A., RODRIGUEZ, G., ROMERO, S., DE LA VILLA, A. **Cálculo II**. Ed. Clagsa, 2002.

HAEUSSLER. Ernest. F. Jr; RICHARD S. Paul. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. 8 ed. México: Prentice Hall, 1997.

HOFFMANN, Laurence D; BRADLEY, Gerald L. Cálculo aplicado a Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales. 5 ed. Bogotá: Mc Graw Hill.

LEITHOLD, Louis. El Cálculo con geometría analítica. 7a edición. México: Oxford University, 2003.

PURCELL, Edwin J; VARVERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. 6 ed. México: Prentice Hall, 1993.

_____. Cálculo diferencial e integral. Novena edición. México: Prentice Hall Hispanoamericana, 2007.

SOLER FAJARDO, Francisco; NUÑEZ, Reinaldo; ARANDA SILVA, Moisés. Fundamentos de Cálculo con aplicaciones a ciencias Económicas y Administrativas. 2 ed. Bogotá: Ecoe ediciones, 2002.

STEWART, James. Cálculo conceptos y contexto. 1 ed. México: International Thomson Editores, 1999.

_____. Cálculo diferencial e integral. Segunda edición. Bogotá: International Thompson editores, 2007.

_____Pre cálculo. 3 ed. México: International Thompson editores, 2001.

5.1. Fuentes digitales o electrónicas

http://www.matematicasbachiller.com/temario/calculin/tema_01/indice.html

Fecha Enero de 2010

<http://www.matematicasbachiller.com/temario/calculin/index.html>

Fecha Enero de 2010

http://video.google.com.co/videosearch?sourceid=navclient&hl=es&rlz=1T4WZPC_esCO342CO345&q=calculo+integral&um=1&ie=UTF-8&ei=5oNXS7D-Asi0tgfcwdCoBA&sa=X&oi=video_result_group&ct=title&resnum=4&ved=0CB0QqwQwAw#

Fecha Enero de 2010

<http://www.aulafacil.com/matematicas-integrales/curso/Temario.htm>

Fecha Enero de 2010

<http://apuntes.rincondelvago.com/calculo-integral.html>

Fecha Enero de 2010

<http://www.monografias.com/trabajos73/calculo-integral/calculo-integral.shtml>

Fecha Enero de 2010

<http://elcentro.uniandes.edu.co/cr/mate/calculo/integral.htm>

Fecha Enero de 2010

<http://www.xtec.cat/~jlagares/integral.esp/integral.htm#E1>

Fecha Enero de 2010

<http://personal.redestb.es/javfuetub/analisis/calculo/integral.htm>

Fecha Enero 2010

http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/CALCULODIFERENCIAL/curso-elsie/integral_indefinida/html/index.html

Fecha Enero 2010

http://es.wikibooks.org/wiki/C%C3%A1lculo_en_una_variable/C%C3%A1lculo_integral/T%C3%A9cnicas_de_integraci%C3%B3n

Fecha Enero de 2010

http://www.matematicasbachiller.com/videos/cintegral/ind_int01.htm#1

Fecha Enero de 2010

<http://www.matematicasypoesia.com.es/ProbIntegral/ProbCalIntPreg.htm>

Fecha Enero de 2010

<http://www.biopsychology.org/apuntes/calculo/calculo3.htm>

Fecha Enero de 2010

http://books.google.com.co/books?id=wwD5_lve6f4C&pg=PA427&lpg=PA427&dq=calculo+integral&source=bl&ots=Cf95_WqoYa&sig=khiNK6ESgLwRURReZOK6v1p32Uwk&hl=es&ei=H41XS4PRGs2PtgfFvcyqBA&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=6&ved=0CCYQ6AEwBTgy#v=onepage&q=calculo%20integral&f=false

Fecha Enero de 2010

http://books.google.com.co/books?id=YFXiagjvmDYC&printsec=frontcover&dq=calculo+integral&ei=B45XS_ydH6rGywSHuejWDw&cd=7#v=onepage&q=&f=false

Fecha Enero de 2010

<http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/CALCULODIFERENCIAL/index.htm>

Fecha Enero de 2010

<http://www.scribd.com/doc/5052129/CALCULO-DIFERENCIAL-E-INTEGRAL-II-FAS1-LA-INTEGRAL-DEFINIDA->

Fecha Enero de 2010

<http://huitoto.udea.edu.co/Matematicas/intro.html>

Fecha enero de 2010

http://www.brujula.net/wiki/Funci%C3%B3n_matem%C3%A1tica.html

Fecha enero de 2010.

<http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/20/matematicas-20.html>

Fecha enero de 2010.

<http://www.ejercitando.com.ar/probmate/inecua01.htm>

Fecha enero de 2010.

<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html>

Fecha enero de 2010.

<http://www.monografias.com/trabajos10/historix/historix.shtml>

Fecha enero de 2010.

<http://www.matematicasbachiller.com/videos/cintegral/index.htm>

Fecha febrero de 2010.

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/UnidadesDidacticas/03-2-u-graficas.html#ACTI_3

Fecha enero de 2010.

http://math.uprm.edu/~santiago/Calculus_II/HOMEWORK/HOMEWORK_HTML/HTML_Homework_Integration_Applications_Volume/index.html

Fecha febrero de 2010.

<http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/CALCULODIFERENCIAL/curso-elsie/aplicacionesintegral/html/node6.html>

Fecha febrero de 2010.