



ESCUELA DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

ASIGNATURA: Ecuaciones Diferenciales

Unidad II

CORPORACIÓN UNIVERSITARIA REMINGTON
DIRECCIÓN PEDAGÓGICA

Este material es propiedad de la Corporación Universitaria Remington (CUR), para los estudiantes de la CUR en todo el país.

2011

CRÉDITOS



El módulo de estudio de la asignatura Ecuaciones Diferenciales unidad II es propiedad de la Corporación Universitaria Remington. Las imágenes fueron tomadas de diferentes fuentes que se relacionan en los derechos de autor y las citas en la bibliografía. El contenido del módulo está protegido por las leyes de derechos de autor que rigen al país.

Este material tiene fines educativos y no puede usarse con propósitos económicos o comerciales.

AUTOR

Carlos Guillermo Londoño Herrera Diplomado en Diseño Curricular y Herramientas significativas de Autoaprendizaje. Segundo semestre del 2008. Docente de Estadística y Matemáticas Centro de atención de tutoría virtual para el aprendizaje de la estadística en la Corporación Universitaria REMINGTON durante el año 2011
Carlos.londono@remington.edu.co
Crow43@gmail.com

Nota: el autor certificó (de manera verbal o escrita) No haber incurrido en fraude científico, plagio o vicios de autoría; en caso contrario eximió de toda responsabilidad a la Corporación Universitaria Remington, y se declaró como el único responsable.

RESPONSABLES

Director Escuela de Ciencias Básicas e Ingeniería
Dr. Mauricio Sepúlveda

Director Pedagógico

Octavio Toro Chica
dirpedagogica.director@remington.edu.co

Coordinadora de Medios y Mediaciones

Angélica Ricaurte Avendaño
mediaciones.coordinador01@remington.edu.co

GRUPO DE APOYO

Personal de la Unidad de Medios y Mediaciones

EDICIÓN Y MONTAJE

Primera versión. Febrero de 2011.

Derechos Reservados

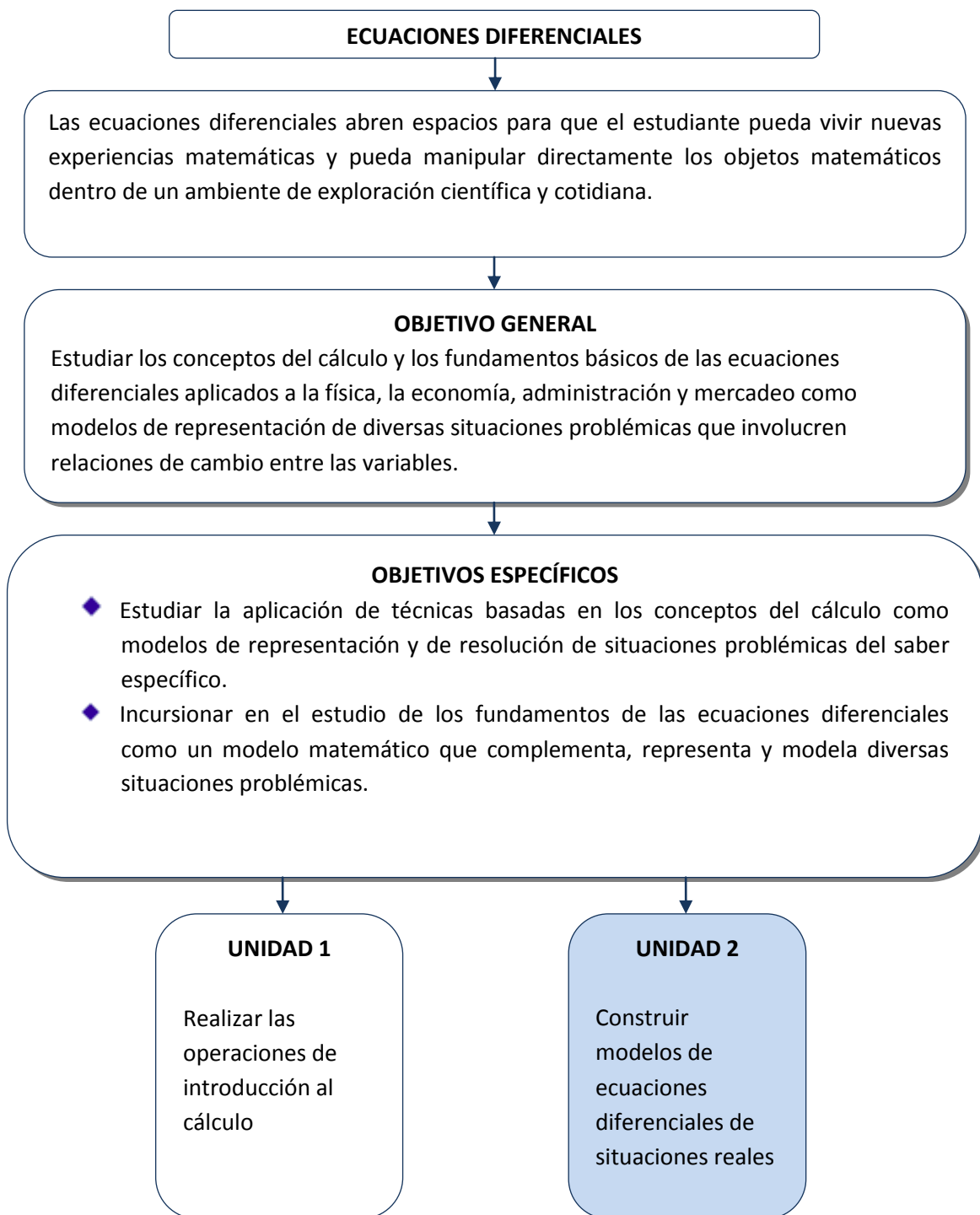


Esta obra es publicada bajo la licencia Creative Commons. Reconocimiento-No Comercial-Compartir Igual 2.5 Colombia.

TABLA DE CONTENIDO

1.	MAPA DE LA ASIGNATURA.....	4
2.	INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORIGEN DE LAS ECUACIONES	5
2.1.	Definición y terminología	6
2.1.1.	Problemas de valor inicial	6
2.2.	Ecuaciones diferenciales como modelos de problemas	8
2.2.1.	Ecuaciones Diferenciales de primer orden y primer grado.....	8
2.3.	Ecuaciones Exactas y Reducción a Diferenciales Exactas.....	10
2.4.	Ecuaciones Lineales y Reducibles a Lineales	12
2.5.	Aplicaciones Geométricas y Físicas con Problemas que se Resuelven con Ecuaciones Diferenciales.....	14
2.5.1.	Ecuaciones Bernoulli	14
2.6.	Ecuaciones Diferenciales como Modelos de Problemas.....	16
2.6.1.	Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden y Primer Grado.....	17
2.7.	Relación con otros Temas	23
2.8.	Bibliografía	23
2.9.	Fuentes Digitales	25

1. MAPA DE LA ASIGNATURA



2. INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORIGEN DE LAS ECUACIONES

OBJETIVO GENERAL

Incursionar en el estudio de los fundamentos de las ecuaciones diferenciales como un modelo matemático que complementa, representa y modela diversas situaciones problémicas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ◆ Formular de manera sistemática un problema de ecuaciones diferenciales
- ◆ Solucionar aplicaciones de problema de ecuaciones diferenciales
- ◆ Determinar el procedimiento de los diferentes métodos de ecuaciones diferenciales.

Prueba inicial

1. Plantee en un párrafo lo que usted entiende por ecuaciones diferenciales.

Elija la respuesta correcta a la siguiente cuestión, encerrando en un círculo la letra correspondiente:

- 2 ¿Qué es una ecuación?

- a. Proceso matemático.
- b. Unión de variables cuantitativas con un signo.
- c. Cálculo de variables.
- d. Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

- 3 Intente una explicación clara y concisa sobre qué es la ecuación de Bernoulli.

4 En la columna A encontrara términos de los métodos gráficos y los métodos simples; en la columna B encontrará conceptos. Coloque en el paréntesis de A la letra de B que le corresponda

TERMINOS	CONCEPTOS
() Problema	
() Derivada	a. Es una cuestión que propone una finalidad y resolverla por medio de una metodología.
() Integral	b. Son parte del cálculo.
	c. Disminución del valor de una expresión matemática.
	d. Aumento del valor de una expresión matemática.
	.

2.1. Definición y terminología

Se dice que si una ecuación contiene la derivada de una o más variables dependientes de una con respecto a otra o más variables independientes se denomina ecuaciones diferenciales.

Ejemplos

$$5 \frac{dy}{dx} + 8y = 12$$

$$(x^3 - y^2)dx + (x^4 + y^{-3})dy = 10$$

2.1.1. Problemas de valor inicial

Es un problema permite encontrar la solución de un problema mediante una ecuación lineal sujeta a una función que se desconoce y las derivadas de una variable independiente.

2.1.1.1 Definición de Orden

La derivada de más alto orden determina el orden de los factores de la ecuación diferencial.

Ejemplo

$$X^4 \frac{d^3 y}{d^3 x} - X^3 \frac{d^2 y}{d^2 x} - X^2 \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$6X^4 \frac{d^3 y}{d^3 x} - 12X^3 \frac{d^2 y}{d^2 x} - 11X^2 \frac{dy}{dx} = \ln x$$

Definición

Se dice que una función en un intervalo en el dominio de una solución de una ecuación diferencial, si esta satisface la ecuación diferencial en el intervalo.

Teorema de Picard

Sea K una región rectangular en el plano XY definida por $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$ en el cual contiene el punto de X_0, Y_0 en el interior. De donde $f(x;y)$ y su derivada de y con respecto a x , es una función continua en K, entonces existe un intervalo con centro en X_0 y con una sola función en $y(x)$ la cual satisface el valor inicial.

Teorema de Euler

Este consiste en un método de un solo paso con el cual se obtiene aproximaciones de valores para la solución de una P.V.I., en el cual se tiene una solución.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), x_0 \leq x \leq X$$

$$Y(X_0) = Y_0$$

Y hace uso de la recta tangente.

Teorema de Runge Kutta

Este método se fundamenta en el método de la serie de Taylor, en el cual se busca la exactitud del método pero sin tener que determinar derivadas parciales de la función definida.

El orden de la derivada de este método lo determina la serie de Taylor donde se determina.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), x_0 \leq x \leq X$$

$$Y(X_0) = Y_0$$

Con sola una única solución.

2.2. Ecuaciones diferenciales como modelos de problemas

Por medio de ecuaciones diferenciales se solucionan problemas enfocados a las diferentes ciencias experimentales del conocimiento.

En el cual se aplican métodos, técnicas procedimientos de las ecuaciones diferenciales para la solución de problemas aplicados a la economía, física, administración e ingeniería, entre otras.

Ejemplo:

Si $F = F(t)$ denota el número de habitantes de una población de Colombia en función del tiempo, se denomina tasa de crecimiento de la población a la función definida como el cociente $y' = y$.

Caracterizar (encontrar la ecuación) de las poblaciones con tasa de crecimiento constante.

(b) Dibujar el gráfico de $y(t)$ para poblaciones con tasa de crecimiento constante, Positiva y negativa.

(c) ¿Cuáles son las poblaciones con tasa de crecimiento nula?

(d) Una población tiene tasa de crecimiento constante. El 1 de enero de 1995 tenía 2500 individuos, y cuatro meses después tenía 1210. Estimar el número de individuos que tendría el 1 de diciembre del año 2012, usando los resultados anteriores.

2.2.1. Ecuaciones Diferenciales de primer orden y primer grado

Una ecuación es aquella donde interviene la derivada de una o más funciones en las cuales se tienen una o más incógnitas.

Esta ecuación de primer orden esta dada por

$$Mdx + N dy = 0$$

De donde M y N son funciones de X y de Y

$$\int Mdx + \int Ndy = k$$

Estas pueden dividirse en cuatro grupos principalmente: ecuaciones con variables separables, ecuaciones diferenciales homogéneas, ecuaciones de orden superior y ecuaciones de orden superior con coeficientes constantes.

2.2.1.1 Ecuaciones con solución de separación de variables

Una ecuación es separable cuando se realiza la separación de variables por medio del cálculo.

Se dice que es una ecuación con solución de variables separables cuando esta dada de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{hx}{hy}$$

Es separable en la función original.

Esta ecuación se puede escribir de la siguiente manera: $h(y)dy = h(x)dx$

E integrarse en:

$$\int h(y)dy = \int h(x)dx + C$$

En la cual se obtiene una solución un paramétrica.

Además estas ecuaciones separables son de gran utilidad en los cambios de masa, cambios de temperatura y cambios de la población en el tiempo.

Ejemplo

Dado el siguiente ejercicio aplicar la ecuación de separación de variables:

$$\frac{dy}{dx} = e^{4x-2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{4x} e^{-2y}$$

De donde la separación de variables queda:

$$\frac{dy}{e^{-2y}} = e^{4x} dx$$

E integrando

$$\int \frac{dy}{e^{-2y}} = \int e^{4x} dx$$

Resolviendo la integración

$$\frac{1}{2} e^{-2y} + C = \frac{e^{4x}}{4}$$

La solución general es:

$$\frac{1}{2} e^{-2y} + \frac{e^{4x}}{4} = K$$

2.3. Ecuaciones Exactas y Reducción a Diferenciales Exactas

Una ecuación diferencial exacta es cuando se tiene una función de $M(x,y) dx + N(x,y) dy$ donde la derivada interactúa con respecto al plano cartesiano con respecto a la función $f(x,y)$.

Sea $H = F(x,y)$. Entonces

$$dh = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{df}{dy} dy$$

Es la diferencial de la función. En el caso de que $h=k= F(x,y)$, luego nos queda:

$$dh = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{df}{dy} dy$$

Teorema de ecuaciones diferenciales exactas

Se tiene que $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones continuas y cuyas derivadas parciales de primer orden continuas están en una región del plano XY, por tanto la condición esta dada por:

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy$$

Se tiene una diferencial exacta con:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Ejemplo

Hallar el valor de t para que se una ecuación diferencial exacta con la siguiente función:

$$(xy^2 + t x^2y) dx + (x + y)x^2 dy = 0$$

Solución

Como se tiene que las derivadas parciales con respecto a $M(x,y)$ y $N(x,y)$ con $b = -2$:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy + bx^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 2xy$$

Por lo tanto e integra:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xy^2 - 2x^2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + x^2y$$

Se integra así:

$$F(x,y) = \int (xy^2 - 2x^2y) dx = \frac{x^2}{2} y^2 - 2 \frac{x^3}{3} y + g(y)$$

Derivando con respecto a y se obtiene:

$$F(x, y) = x^2 y - \frac{2x^3}{3} + g'(y)$$

Igualando ecuaciones queda:

$$x^3 + x^2 y = \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{2x^3 y}{3} + g'(y)$$

Cuando $g'(y)=0$

Luego de que la función $g(y)$ y teniendo la constante C y reemplazando en la función de $F(x,y)$ se obtiene:

$$F(x, y) = \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{2x^3 y}{3} + C$$

Y por lo tanto se tiene que la solución general es:

$$C = \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{2x^3 y}{3}$$

2.4. Ecuaciones Lineales y Reducibles a Lineales

Es una ecuación lineal donde se tiene una forma de $a_1(x) dx/dy + a_0(x)y=h(x)$; en la cual $a_1(x) \neq 0$, con respecto a una función integral de donde $a_1(x)$, $a_0(x)$, $h(x)$ son ecuaciones diferenciales y de primer orden.

Sea $F(x,y)$ cuyo grado es n si existe un real n tal que para todo, que para toda w esta dada por $F(wx,wy)= w^n F(x,y)$

Teorema

Si se tiene ecuación diferencial con respecto a $M(x,y)$ y $N(x,y)$, entonces:

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$$

Se tiene la propiedad de que $M(wx,wy)=w^n M(x,y)$ y $N(wx,wy)=w^n N(x,y)$, entonces se dice que se tienen coeficientes lineales o una ecuación diferencial homogénea.

Nota:

Cuando se tenga una Ecuación diferencial homogénea, está podrá ser reducida por el método de sustitución adecuándose una ecuación de variables separables.

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación lineal:

$$-6y'' + 4y' = 0$$

Solución

a. Encontrar el cambio

$$y = ux \rightarrow y' = u + xu'$$

Reemplazando la ecuación: $u + xu' = u^2 + u - 1$

De donde $xu' = u^2 - 1$

Si:

$$\frac{du}{u^2 - 1} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{u-1}{u+1} = \ln x + k$$

De donde

$$\frac{u-1}{u+1} = kx^2$$

Por lo tanto queda

$$\frac{y-x}{y+x} = kx^2$$

2.5. Aplicaciones Geométricas y Físicas con Problemas que se Resuelven con Ecuaciones Diferenciales

Es la aplicación de las diferentes técnicas, métodos y procedimientos para la solución de problemas aplicados a ecuaciones diferenciales en las áreas de geometría, física, económicas, financieras, entre otras.

2.5.1. Ecuaciones Bernoulli

Es una ecuación diferencial de primer orden descrita como una función de la forma $dy/dx + P(x)y = Q(x)y^n$ donde las funciones reales son P y Q con respecto a x y dentro de un intervalo de valores entre a y b y n es un valor diferente de 0 y 1.

Ejemplo

Encontrar la solución de general de la siguiente ecuación:

$$xy' - 12y = 4xy^2$$

De donde

$$y' - 12x^{-1}y = 4y^2$$

Esta ecuación es una ecuación de Bernoulli don $P(x) = -12x^{-1}$, $Q(x) = 4$ y $n=2$.

2.5.1.1 Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

Una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes es cuando ocurre la siguiente situación:

$$a_0 y[n] + a_1 y[n+1] + \dots + a_n y[n+N] = b_0 x[n] + b_1 x[n+1] + \dots + b_M x[n+M].$$

Ejemplo

$$5y'' + 3y' - 6y = 0$$

De donde

$$r^2 + 3y - 6 = 0, r_{1,2} = 2 \pm i$$

Dando como solución:

$$y = k_1 e^{2x} \cos x + k_2 e^{2x} \sin x$$

Y por último

$$y = e^2 (k_1 \cos x + k_2 \sin x)$$

Ejercicios por temas

Ejercicios del Problemas de valor inicial

1. $(1 - k)y'' + 2ky' + 5y = 21$
2. $5(2 - k)y'' + 6ky' + 15y = 212$
3. $12(2 - 2k)y'' + 16ky' + 25y = 112$
4. $15y'' + (16 - k)y' + 25y = 132$
5. $18y'' + (26 - 2k)y' + 22y = 235$
6. $(18 - 12k)y'' + (21 - 23k)y' + 32y = 323$
7. $(91 - 112k)y'' + (121 - 123k)y' + 43y = 1325$
8. $(291 - 342k)y'' + (425 - 155k)y' + 543y = 5355$
9. $(\sin x - 42k)y'' + (\cos x - 155k)y' + 43y = 345$
10. $(\sin x - 542k)y'' + (\cos x - 345k)y' + 45y = 245$
11. $(\sin x - \cos x)y'' + (\cos x - \tan x)y' + 55y = 545$
12. $(\sin x - \cos x)y'' + (\cos x - \tan x)y' + 55y = 545$
13. $(\sin x - \cos x)y'' + (\cos x \tan x)y' + 55y = 545$
14. $(\sin x - \cos x)y'' + (\cos x \tan x)y' + \cot x y = 245$
15. $(\sin x \cos x)y'' + (\cos x \tan x)y' + \cot x y = \frac{\sin x}{\tan x}$

2.6. Ecuaciones Diferenciales como Modelos de Problemas

1. Un tubo largo de acero de conductividad térmica $k = 0.25$ unidades cgs, tiene un radio interior de 13 cm y un radio exterior de 25 cm. La superficie interna se mantiene a 22°C y

La superficie exterior se mantiene a 40°C .

- a. Encuentre la temperatura como una función de la distancia r del eje como de los cilindros concéntricos.
- b. Encuentre la temperatura cuando $r = 18$ cm y (c) ¿Cuánto calor se pierde por minuto en la parte del tubo de 24m de largo?

Determine los valores aproximados de la solución de cada uno de los siguientes problemas de valor inicial, usando el método de los tres primeros términos de la serie de Taylor y el método de Runge-Kutta de orden cuatro con tamaño de paso $h = 0.25$ y $h = 0.025$. Haga una gráfica que muestre los puntos (t_k, y_k) correspondientes a las aproximaciones calculadas y la gráfica de la solución exacta. Discuta sus resultados.

- a. $F' = -y^2$
- b. $F' = -2y + 2\sin x$
- c. $F' = -4y + 6\tan x$

- 3 Se tiene que un proyectil tiene una masa $m = 0.12$ Kgrs. El cual se lanza verticalmente hacia arriba desde el piso con una velocidad inicial $v(0) = 8.1\text{m./seg.}$ Y se va frenando debido a la fuerza de la gravedad $F_g = -mg$ y a la resistencia del aire $F_r = -kv^2$, donde $g = 9.8\text{m./seg}^2$. y $k = 0.0018\text{kg./m.}$

- a. $-mg - K V(T)^2$ en el momento que está subiendo.
- b. $-mg + K V(T)^2$ en el momento que está bajando

- 4 Una partícula K se mueve a lo largo del eje x de manera que tal su aceleración en cualquier tiempo t mayor o igual que 0 está dada por $a(t) = 15t^2 - 17t + 9$. Determine la posición de $x(t)$ de la partícula en cualquier tiempo t , suponiendo que el punto inicial está en $x=1$ y está viajando a una velocidad constante.

2.6.1. Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden y Primer Grado

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 5x - 3}{x^4}$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{5x^2 + 12x - 13}{12x^2}$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{17x^2 + 21x - 11}{12x^2 - 11}$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{21x^2 + 11x - 12}{15x^2 - 10x + 7}$
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{25x^2 - 20x + 17}{23x^2 + 13x - 22}$
6. $\frac{dy}{dx} = \frac{33x^2 + 41x - 32}{11x^2 - 12x + 22}$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{45x^2 + 54x - 33}{32x^2 - 22x + 17}$
8. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x^2 + 53x - 31}{22x^2 - 21x + 19}$
9. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x^2 + \cos x - 31}{22x^2 - 21x + 19}$
10. $\frac{dy}{dx} = \frac{\log_2 4 - 21x + 19}{\sin x^2 + \cos x - \tan x}$
11. $\frac{dy}{dx} = \frac{\log_2 4 - \sin x + \cos x}{9}$

Ejercicios de Ecuaciones con solución de separación de variables

1. $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$
2. $y' + y^2 \cot x = 0$
3. $y' + y^2 \cos x = 0$
4. $y' + y^2 \sec x = 0$
5. $4e^x \tan y dx + (2 - e^x) \sec y^2 dy = 0$
6. $6e^x \csc y dx + (4 - e^x) \cot y^2 dy = 0$
7. $\sin y y' = \ln y y$
8. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 6x - y - 8}{xy - 5x - 4y - 12}$

9. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 16x - 12y - 24}{xy - 15x - 11y - 19}$
10. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy - 21x + 23y - 23}{xy - 31x - 13y - 39}$
11. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy - \sin x + \cos y - 24}{xy - \ln x - \ln y - 49}$
12. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy - \sin x + \cos y - 52}{xy - \cos x \sin x + \sec y \cos y - 59}$
13. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy - \sin x \ln x - \tan y \ln y - 59}{xy - \cos x \sin x + \sec y \cos y}$
14. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy - \sin x \ln x - \tan y}{xy - \cos x \tan x + \sec y \cos y}$
15. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy - \cot x \ln x - \tan y}{xy - \cos x \tan x + \sec y \cos y}$

Ejercicios de Ecuaciones exactas y reducción a diferenciales exactas

1. $(\tan x - \sin x \sin y)dx - \cos x \cos y dy = 0$
2. $(\csc x - \cos x \cos y)dx + \sin x \sin y dy = 0$
3. $(1 - \tan x)dx + \cot y dy = 0$
4. $(1 - \tan x \sec y)dx + \cot y \cot x dy = 0$
5. $(1 - \cos x \sec y)dx + \cos y \cot x dy = 0$
6. $(2 - \cos x \tan y)dx + \tan y \cot x dy = 0$
7. $(15 - \sec x \sec y)dx + \csc y \cot x dy = 0$
8. $(\ln x - \sec x \sec y)dx + \csc y \cot x dy = 0$
9. $(\sec y \ln x - \ln x \sec y)dx + \ln y \cot x dy = 0$
10. $(12 \ln x - \ln x \cot y)dx + \ln y \cot x dy = 0$
11. $(21 \sec x - 12 \cot y)dx + \sec y \cot x dy = 0$
12. $\frac{\sec x}{\cot x} dx + \sec y dy = 0$
13. $\frac{\cos x}{\sec x} dx + \frac{\sec x}{\cos y} \sec y dy = 0$
14. $\frac{\cos x}{\csc x} dx + \frac{\sec x}{\cos y} \sec y dy = 0$
15. $\frac{\cot x}{\csc x} dx + \cot x \sec y dy = 0$
16. $\sec x \cot x dx + \cot x \sec y dy = 0$
17. $\cos x \cot x dx + \cot x \sec y dy = 0$
18. $\cos x \cos x dx + \sec x \sec y dy = 0$

Ejercicios de Ecuaciones Lineales y reducibles a lineales

1. $6y'' - 5y' = 0$
2. $12y'' - 15y' = 0$
3. $26y'' + 21y' = 0$
4. $31y'' + 11y' = 0$
5. $(12x + 13y + 23)dx - (11x - 15y - 12)dy = 0$
6. $(121x + 143y + 231)dx - (22x - 21y - 123)dy = 0$
7. $(213x + 343y + 531)dx - (622x - 712y - 234)dy = 0$
8. $(322x + 314y + 213)dx - (125x - 211y - 213)dy = 0$
9. $\frac{dy}{dx} = \frac{15x - 12y - 21}{11x - 31y + 45}$
10. $\frac{dy}{dx} = \frac{35x - 19y - 213}{13x - 21y + 256}$
11. $\frac{dy}{dx} = \frac{134x - 192y - 243}{313x - 321y + 555}$
12. $\frac{dy}{dx} = \frac{234x - 312y - 432}{23x - 32y + 345}$
13. $\frac{dy}{dx} = \frac{213x - 333y - 889}{98x - 99y + 995}$
14. $\frac{dy}{dx} = \frac{621x - 676y - 778}{981x - 299y + 396}$
15. $\frac{dy}{dx} = \frac{162x - 167y - 178}{298x - 234y + 345}$

2.6.1.1 Aplicaciones geométricas y físicas con problemas que se resuelven con ecuaciones diferenciales

1. Se tiene una tabla circular que tiene como radio 60 cm. De la que se quiere cortar un rectángulo de mayor área. ¿Cuáles son sus medidas y su área máxima?
2. Se tiene una mesa circular que tiene como radio 70 cm. De la que se quiere cortar un rectángulo de mayor área. ¿Cuáles son sus medidas y su área máxima?
3. Se tiene un reloj circular que tiene como radio 12 cm. De la que se quiere cortar un rectángulo de mayor área. ¿Cuáles son sus medidas y su área máxima?

4. De una laminilla de 60 cm * 30cm. Se desea construir caja sin tapa, del mayor volumen recortando en cuadrados iguales de las esquinas de estas y doblándolas las esquinas hacia arriba para tomar las caras laterales. ¿Cuáles deberían ser las dimensiones de la caja para que el volumen sea el máximo?
5. De una tabla de 125 cm * 80cm. Se desea construir caja sin tapa, del mayor volumen recortando en cuadrados iguales de las esquinas de estas y doblándolas las esquinas hacia arriba para tomar las caras laterales. ¿Cuáles deberían ser las dimensiones de la caja para que el volumen sea el máximo?
6. De una tabla rectangular de 90 cm * 45cm. Se desea construir caja sin tapa, del mayor volumen recortando en cuadrados iguales de las esquinas de estas y doblándolas las esquinas hacia arriba para tomar las caras laterales. ¿Cuáles deberían ser las dimensiones de la caja para que el volumen sea el máximo?
7. Se lanza un balón hacia arriba, desde una altura de 50 metros a una velocidad inicial de 35 metros por segundo. Considerando La gravedad en 9.81 metros por segundo cuadrado. Calcular la altura máxima que alcanza esta con respecto al piso.
8. Del ejercicio anterior, determinar el tiempo que tarda en subir y bajar en el recorrido
9. Se lanza un balón hacia arriba, desde una altura de 70 metros a una velocidad inicial de 38 metros por segundo. Considerando La gravedad en 9.81 metros por segundo cuadrado. Calcular la altura máxima que alcanza esta con respecto al piso.
10. Del ejercicio anterior, determinar el tiempo que tarda en subir y bajar en el recorrido
11. Se lanza un balón horizontalmente y luego rebota en el piso en forma ondulada, con una trayectoria en subida de 25 centímetros a una velocidad inicial de 0 metros por segundo. Considerando La gravedad en 9.81 metros por segundo cuadrado. Calcular la altura máxima que alcanza esta con respecto al piso.
12. Del ejercicio anterior, determinar el tiempo que tarda en subir y bajar en el recorrido
13. Un tanque esta lleno con 12 galones de agua salada en el cual está disuelto en 5 libras de sal. Si el agua salada esta contenida en 2 libras por galón que entra al tanque por minuto y esta se encuentra agitada en la misma tasa. Determinar la cantidad de sal en cualquier tiempo. ¿Cuánta sal se encuentra en 15 minutos?
14. Del ejercicio anterior si la cantidad de libras de sal disminuye en un tercio, ¿Cuánta sal hay en 5 minutos?

15. Dos productos químicos, reaccionan entre sí para formar un nuevo químico. Se encuentra que la tasa del nuevo químico varía de acuerdo a las cantidades de los dos químicos. La formación de este requiere del primero de 4 libras por cada una del segundo. Si tiene que inicialmente los dos productos tienen 10 y 15 libras, respectivamente, y si 7 libras del nuevo producto se forman en 12 minutos, determinar la cantidad del nuevo químico en cualquier tiempo.
16. En un tanque de 1000 litros de una solución salada empieza a fluir a una velocidad de 7 litros por minuto. Esta solución se encuentra bien agitada y fluye en el exterior con la misma velocidad. Se sabe que la concentración de la sal que entra es de 1 de un kilogramo por litro, calcule cuando la concentración de sal será de un tercio. Si la velocidad es de 4 litros por minuto en función del tiempo.
17. Una bola de nieve se derrite debido al cambio del volumen de la proporción del área de la superficie. Si el diámetro inicial es de 6 pulgadas y al cabo de 20 minutos es 4 pulgadas, ¿Cuándo desaparecerá la bola de nieve?
18. Un cuerpo que cuyo peso es de 4libras. Se estira con un resorte de 8 pulgadas. Este se suelta con un tiempo inicial de 0 desde un lugar que está a 10 pulgadas de posición de equilibrio, con una velocidad dirigida hacia arriba de un tercio de pie por pulgada. Determine la función del movimiento libre que resulta.
19. Un cuerpo que cuyo peso es de 10libras. Se estira con un resorte de 12 pulgadas. Este se suelta con un tiempo inicial de 0 desde un lugar que está a 15 pulgadas de posición de equilibrio, con una velocidad dirigida hacia arriba de un tercio de pie por pulgada. Determine la función del movimiento libre que resulta.
20. Un torpedo se desplaza con una velocidad de 50 kilómetros por hora, en el momento que se termina el combustible. Si el agua se opone al movimiento con una fuerza proporcional a su velocidad y si en 2 kilómetros de recorrido esta va disminuyendo a 25 kilómetros por hora. Cuál será la distancia a la que se detendrá.

Ejercicios de Ecuaciones Bernoulli

1. $xy' + 12y = -36xy^{-2}$
2. $xy' + 24y = -25xy^{-2}$
3. $xy' - 43y = 25xy^{-3}$
4. $xy' - 54y = -32xy^{-3}$

5. $\frac{x}{3}y' - 55y = -21xy^{-3}$
6. $2\frac{x}{3}y' - \frac{45}{56}y = -45xy^{-3}$
7. $\frac{4x}{36}y' - \frac{22}{33}y = \frac{32}{21}xy^{-3}$
8. $\frac{\text{sen}x}{12}y' - \frac{\text{cos}x}{21}y = \frac{13}{11}xy^{-3}$
9. $\frac{\text{sen}x}{\text{cot}x}y' - \frac{\text{cos}x}{\text{sec}x}y = \tan x xy^2$
10. $\frac{\text{csc}x}{\text{cot}x}y' - \frac{\text{cot}x}{\text{sec}x}y = \text{sen}x y^2$
11. $\frac{\text{csc}x}{\text{cos}x}y' - \frac{\text{sec}x}{\text{cos}x}y = \text{csc}x y^2$
12. $\frac{12\text{cos}x}{13\text{csc}x}y' - \frac{14\text{cos}x}{15\text{sec}x}y = \text{cos}x\text{csc}x y^2$

Ejercicios de Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

1. $12y'' + 13y' - 16y = 0$
2. $21y'' + 33y' - 26y = 0$
3. $25y'' + 321y' - 196y = 0$
4. $\frac{21}{22}y'' + \frac{321}{19}y' - \frac{195}{5}y = 0$
5. $\frac{221}{321}y'' + \frac{145}{13}y' - \frac{111}{15}y = 0$
6. $\frac{2124}{2233}y'' + \frac{345}{1456}y' - \frac{1678}{89}y = 0$
7. $\frac{\text{sec}x}{\text{sen}x}y'' + \frac{\text{cos}x}{\text{csc}x}y' - \frac{\tan x}{\text{cos}x}y = 0$
8. $\frac{\text{sen}x}{\text{csc}x}y'' + \frac{\text{csc}x}{\text{sec}x}y' - \frac{\tan x}{\text{cot}x}y = 0$
9. $\frac{12\text{sen}x}{13\text{csc}x}y'' + \frac{13\text{csc}x}{11\text{sec}x}y' - \frac{10\tan x}{\text{cot}x}y = 0$
10. $\frac{\ln x}{21\text{cos}x}y'' + \frac{7\ln x}{12\text{sec}x}y' - \frac{10\text{cot}x}{6\tan x}y = 0$
11. $\frac{\ln x}{21\ln x}y'' + \frac{10\text{sen}x}{27\ln x}y' - \frac{10\text{cos}x}{6\tan x}y = 0$
12. $\frac{\text{cos}x}{21\ln x}y'' + \frac{32\ln x}{11\text{sec}x}y' - \frac{19\text{csc}x}{16\tan x}y = 0$

ACTIVIDAD GENERAL

1. ¿Cómo define usted el concepto de Ecuaciones diferenciales?
2. ¿Cómo define usted el concepto de Ecuación lineal y de un ejemplo?
3. ¿Qué es un análisis de Ecuaciones Bernoulli?
4. Con una aplicación en su empresa, calcule los parámetros de una ecuación lineal de primer grado.
5. El estudiante debe realizar un proyecto aplicando las ecuaciones diferenciales y analizar si es viable o no teniendo en cuenta el análisis de cálculos y gráficas.

2.7. Relación con otros Temas

Los temas programáticos de las matemáticas en las enseñanzas de la física, la geometría, la biología, la economía y la administración deben hacer hincapié fundamental a utilización de los diferentes métodos cuantitativos de análisis, en los que el alumno se vea involucrado a la solución de problemas, y sepa identificar la naturaleza de los mismos y sus premisas, reconocer la información que se dispone y como aplicarla para encontrar los mejores resultados e interpretarla.

Cuando se desea abordar un factor de cualquier disciplina o sector económico, como una situación bajo estudio se desea observar la variación de las diferentes variables que relacionan una con otra, las cuales se parte de ideas o de la identificación de un problema específico y por medio del diseño de modelos matemáticos se llega a identificar las causas que lo generan y las soluciones que me permiten tomar la mejor decisión para la solución de una situación dada que me permita dar solución a un problema y que está pueda ser aplicada a otros problemas.

Se puede concluir que las ecuaciones diferenciales es una de las herramientas matemáticas que permiten dar soluciones a problemas de los campos de la física, la geometría, la biología, la economía y la administración principalmente.

2.8. Bibliografía

- ◆ EDWARDS C. Henry, PENNEY David E. Ecuaciones diferenciales. 4 edición. Pearson Educación, 2001. 800 páginas
- ◆ ZILL Dennis G., SANCHEZ FRAGOSO Francisco. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. 8 Edición. Cengage Learning Editores, 2006. 464 páginas

- ◆ JOVER Isabel Carmona. Ecuaciones Diferenciales. Edición 4. Pearson Educación, 1992. 648 páginas
- ◆ ZILL Dennis, CULLEN Michael. Ecuaciones diferenciales: con problemas de valores en la frontera. 7 edición. Cengage Learning Editores, 2009. 616 páginas.
- ◆ RICARDO Henry. Ecuaciones diferenciales: una introducción moderna. Reverte, 2008. 445 páginas.
- ◆ NAGLE R. Kent, SAFF Edward B., SNIDER Arthur David. Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4 edición. Pearson Educación, 2005. 816 páginas.
- ◆ ACERO, Ignacio, LÓPEZ, Mariló. Ecuaciones diferenciales: teoría y problemas. 2 edición. Editorial Tebar, 2007. 236 páginas.
- ◆ BORRELLI Robert L COLEMAN Courtney S. Ecuaciones diferenciales: una perspectiva de modelación. Ilustrada edición. Oxford University Press, 2002. 828 páginas.
- ◆ SIMMONS George F., ROBERTSON John S. Ecuaciones diferenciales: con aplicaciones y notas históricas. 2 edición. McGraw-Hill, 2002. 658 páginas

2.9. Fuentes Digitales

Se deben manejar las normas APA

- ◆ matematicas.udea.edu.co/~jescobar/
- ◆ www.matematicas.unal.edu.co/cursos/./ecudadif.html
- ◆ copernico.escuelaing.edu.co/ceciba/facultad./upload//ECDI.pdf
- ◆ copernico.escuelaing.edu.co/ceciba/facultad./file/./EDPA.pdf
- ◆ fisica.udea.edu.co/Docs/CNM-305.htm
- ◆ copernico.escuelaing.edu.co/ceciba/facultad.../upload/.../ECDI.pdf
- ◆ cienciasbasicas.lasalle.edu.co/.../ecuaciones-diferenciales.html