ASIGNATURA TRANSVERSAL DE LA ESCUELA CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

ASIGNATURA: Matemáticas II

CORPORACIÓN UNIVERSITARIA REMINGTON

DIRECCIÓN PEDAGÓGICA

2011

CRÉDITOS

El módulo de estudio de la asignatura Transversal Matemáticas II es propiedad de la Corporación Universitaria Remington. Las imágenes fueron tomadas de diferentes fuentes que se relacionan en los derechos de autor y las citas en la bibliografía. El contenido del módulo está protegido por las leyes de derechos de autor que rigen al país.

Este material tiene fines educativos y no puede usarse con propósitos económicos o comerciales.

AUTOR

Elkin Ceballos Gómez
Ingeniero Electricista de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín. Diplomado en Diseño Curricular. Corporación Universitaria Rémington Especialista en Matemáticas Aplicadas y Pensamiento Complejo. Corporación Universitaria Rémington Docente de la organización Rémington Docente de La Corporación Universitaria de Ciencia y Desarrollo (UNICIENCIA)
Docente de matemáticas en educación básica y media en la Institución Educativa Kennedy
eceballos2@yahoo.com elkin.ceballos@remington.educ.co

Nota: el autor certificó (de manera verbal o escrita) No haber incurrido en fraude científico, plagio o vicios de autoría; en caso contrario eximió de toda responsabilidad a la Corporación Universitaria Remington, y se declaró como el único responsable.

RESPONSABLES

Director Escuela De Ciencias Básicas e Ingeniería
Dr. Mauricio Sepúlveda

Director Pedagógico
Octavio Toro Chica
dirpedagogica.director@remington.edu.co
Coordinadora de Medios y Mediaciones
Angélica Ricaurte Avendaño
mediaciones.coordinador01@remington.edu.co

GRUPO DE APOYO

Personal de la Unidad de Medios y Mediaciones
EDICIÓN Y MONTAJE
Primera versión. Febrero de 2011.

TABLA DE CONTENIDO

1. MAPA DE LA ASIGNATURA

MATEMÁTICAS II

PROPÓSITO GENERAL DEL MÓDULO

El cálculo es una herramienta de uso cotidiano en la elaboración de diseños y la implementación y desarrollo de proyectos. El manejo de la conceptualización y aplicación de este modelo permitirá un ejercicio versátil de la acción en las diferentes áreas del conocimiento.

El propósito que se busca con el MATEMÁTICAS II (CÁLCULO DIFERENCIAL) es el estudio de la derivada, su interpretación y su aplicación en las diferentes áreas del conocimiento, entendiéndose la Derivada como una razón de cambio.

El estudiante conocerá las diferentes técnicas para derivar funciones y su aplicación en la solución y planteamiento de situaciones problémicas.

El estudiante de cálculo diferencial desarrollará competencias que tienen que ver con análisis de situaciones problémicas donde las herramientas fundamentales será el cálculo.

Con este módulo se pretende entregar al estudiante las herramienta necesarias que le permitan desenvolverse de la mejor manera en todas las áreas del conocimiento.

OBJETIVO GENERAL

Estudiar comprensivamente los elementos geométricos, algebraicos y analíticos asociados al modelo de representación de situaciones problémicas propuesto por el cálculo en su aproximación diferencial, identificando las características de este modelo de representación con una claridad suficiente que le permitan al estudiante el desarrollo de la habilidad y la destreza de discretización de situaciones problémicas de su cotidianidad que pueden simularse con este esquema de pensamiento.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Analizar el concepto de función y sus diversas representaciones, como una aproximación a la modelación de situaciones problémicas mediante el lenguaje matemático.

Entender el concepto de límite y su aplicación como una aproximación al estudio de la derivada.

Analizar los conceptos básicos de la derivada, así como las diversas reglas para su cálculo y algunas aplicaciones de la misma.

UNIDAD 1
Funciones

Explica los conceptos de: Función, notación de función, dominio, rango, imagen de una función, continuidad, crecimiento y decrecimiento, tipos de funciones.

Explica las diferentes operaciones que pueden ser realizadas con funciones; el concepto de intercepto y la forma de determinar los interceptos de una función.

Explica la clasificación de las funciones, la forma de identificar cada familia de funciones, como se determina su dominio, como se realiza su representación gráfica.

Aplicaciones

Muestra la forma de modelar, con funciones, diferentes situaciones que permiten solucionar problemas utilizando las propiedades de dichas funciones.

UNIDAD 2
Límites

Realiza una descripción breve del concepto de límite, desde el concepto mismo del límite sin profundizar en su definición rigurosa.

Explica la forma de evaluar un límite utilizando las diferentes leyes, la forma de estimar límites al infinito y la forma de eliminar indeterminaciones de la forma cero sobre cero e infinito menos infinito utilizando la factorización y la racionalización.

UNIDAD 3
Derivada

Explica el concepto de razón de cambio promedio y razón de cambio instantáneo como una aproximación al concepto de derivada.

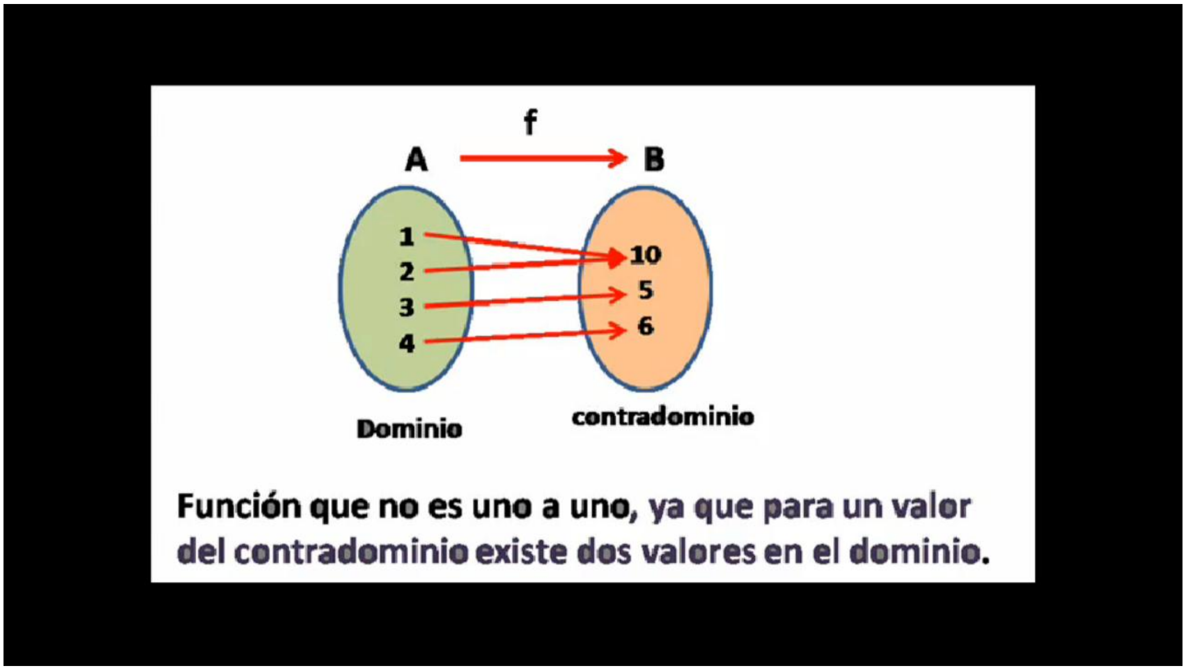
Explica la forma de calcular la derivada de funciones utilizando la fórmula del límite de un cociente incremental.

Explica las diferentes notaciones utilizadas para la primera derivada, así como la notación utilizada para las derivadas de orden superior.

Explica las diferentes fórmulas utilizadas para derivar, no se realiza ninguna demostración de estas.

Se explica el concepto de derivada como la razón de cambio instantánea de una función y se aplica este concepto para solucionar situaciones problémicas de razón de cambio en geometría, economía (ingreso marginal, costo marginal) máximos y mínimos relativos de una función, puntos de inflexión, trazado de curvas y máximos y mínimos aplicados.

2. UNIDAD 1 FUNCIONES



http://www.youtube.com/watch?v=qZMApylUgws&feature=related

OBJETIVO GENERAL

- Analizar el concepto de función y sus diversas representaciones, como una aproximación a la modelación de situaciones problémicas mediante el lenguaje matemático.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Comprender el significado de función y de los conceptos de dominio y rango, crecimiento, decrecimiento y continuidad, evaluando la función para diferentes valores de la variable independiente.

- Identificar los diferentes tipos de funciones, determinando el dominio, el rango, elaborando gráficas de algunas funciones y partiendo de ellas, identifique crecimiento, decrecimiento, continuidad, discontinuidad, puntos de corte con los ejes, máximos y mínimos.

- Modelar diferentes tipos de situaciones problémicas y solucionarlas utilizando funciones.

Prueba Inicial

Para cada una de las siguientes preguntas conteste falso o verdadero, justifique la respuesta.

1. La solución de la ecuación: $x^2 = 9\ es\ x = 3$

$F(\ )$ $V(\ )$

2. Los racionales son aquellos números que se pueden escribir como el cociente entre dos números enteros, siempre que el denominador sea diferente de cero.

$F(\ )$ $V(\ )$

3. Los números imaginarios están formados por la raíz negativa de un número par.

$F(\ )$ $V(\ )$

4. La raíz de los números negativos no existe.

$F(\ )$ $V(\ )$

5. El logaritmo de los números negativos no existe.

$F(\ )$ $V(\ )$

6. El resultado 2^0 de no existe.

$F(\ )$ $V(\ )$

7. Al dividir un número diferente de cero, entre cero, el resultado es igual a cero.

$F(\ )$ $V(\ )$

8. Para cada pregunta seleccione la opción correcta:

9. El resultado de 3^{-2} es:

a. -6
b. -9
c. 9

d. $\frac{1}{9}$

1. La ecuación $x^2 = 25$ tiene como solución:
a. x = 5
b. x = - 5
c. x = - 5 ó x = 5
d. x = 25

2. La expresión: $0\left(\frac{8}{0}\right)$ es igual a:
a. 8
b. 0
c. 1.
d. Indeterminado.

3. Dada la expresión: $\frac{25}{0}$ se puede afirmar que:

a. Es indeterminada.
b. No existe (indefinido)
c. Es igual a 25
d. Es igual a cero.

2.1. Conceptos y definiciones

2.1.1. Concepto de función.

http://www.youtube.com/watch?v=xvn_yy3vcs8&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=f2qmNdC4NUU&feature=related

"Una función es una regla que describe la forma en que una cantidad depende de otra; por ejemplo, al estudiar el movimiento, la distancia recorrida es una función del tiempo." (Stewar, Lothar, & Watson, 2001, p.130).

Se puede decir, sin entrar en detalles que una función es una expresión algebraica que indica la relación que existe entre dos o más variables. En cálculo diferencial se estudian las funciones que relacionan dos variables.

Una de las variables se denomina **variable independiente**, generalmente se le asigna la letra **x**. Otras letras que se utilizan para la variable independiente son: **q** cuando se trata de producción, **t** para el tiempo.
La otra variable se denomina **variable dependiente**, por lo general se le asigna la letra **y.**

2.1.1.1 Notación de función.

Para indicar que la variable dependiente **y** está escrita en términos de la variable independiente **x** (o lo que es lo mismo, depende de la variable independiente **x**), se utiliza la siguiente notación:

$$y = f(x)$$

Que se lee **y** es una función de **x.**

También se puede utilizar otras letras,

$$y = g(x) \qquad\qquad y = c(t)$$
$$y = f(z) \qquad\qquad y = c(q)$$

La variable independiente es la que está dentro del paréntesis.

2.1.2. Dominio y rango.

- **DOMINIO:** El dominio para cualquier función está constituido por todos los valores que puede tomar la variable independiente (**x**) de los números reales.

- **RANGO:** El rango para cualquier función está constituido por todos los números que puede tomar la variable dependiente (**y**). Al rango también se le conoce como la imagen de la función.

¿Qué números o qué cantidades o qué expresiones no pertenecen a los números reales?

La respuesta es que a los números reales no pertenecen ni la división entre cero, ni los números imaginarios (Raíz par de un número negativo), ni el logaritmo de números negativos ó de cero.

Para ampliar más sobre estos temas puede consultar las siguientes páginas en internet:
Los siguientes enlaces corresponden a videos donde se puede ver el concepto de función desde otra óptica.

http://www.youtube.com/watch?v=iBFu6kLa9uY

http://www.youtube.com/watch?v=P4VQgjLI03U&feature=related
http://www.google.com/support/youtube/bin/answer.py?hl=en&answer=143421
http://www.youtube.com/watch?v=fclwNoVpx6Q&feature=related

2.1.2.1 Representación de las funciones

Se tienen cuatro maneras posibles para representar una función:

- Verbalmente (con una descripción de palabras)
- Numéricamente (con una tabla de valores)
- Visualmente (con una gráfica)
- Algebraicamente (con una fórmula explícita)

"Si una sola función se puede representar de las cuatro maneras, a menudo resulta útil pasar de una representación a otra, para adquirir un conocimiento adicional de esa función." (Stewart, 1999, p.15).

Para entender mejor el concepto de función y las diferentes formas de representarlas, analizaremos, a continuación, las siguientes situaciones conceptuales cotidianas.

Situación 1:

Para la relación de nota definitiva en matemáticas generales y los 40 estudiantes de Contaduría Pública que finalizaron el primer semestre en la CORPORACIÓN UNIVESITARIA RÉMINGTON, determine:

¿Qué valores puede asumir la variable nota definitiva en matemáticas generales?

Solución:

Cualquier número entre cero y cinco.

- ¿Qué valores puede asumir la variable estudiante?

- Cualquier número entero entre 1 y 40.

- ¿La nota depende del estudiante ó el estudiante depende de la nota?

Solución:

- La nota depende del estudiante, ya que si conozco el nombre del estudiante puedo saber cuál es su nota mirando en la planilla.
- Pero si lo tomamos al revés, conociendo una nota, no puedo saber a qué estudiante pertenece, por ejemplo, la nota 3.5 ¿a qué estudiante pertenece? La respuesta es que la pueden tener varios estudiantes.

- Si se llama Dominio a todos los valores que puede tomar la variable independiente, ¿cuál es el dominio en esta situación?

Solución:

- Si se asume que en un salón hay 40 estudiantes entonces el dominio corresponde a todos los números enteros entre1 y 40, es decir,

Dom X $\in [1,40]$

- Si se llama Rango a todos los valores que puede asumir la variable dependiente, ¿Cuál es el rango en este caso?

Solución:

- El rango corresponde al valor de todas las notas que puede obtener un estudiante, es decir, cualquier número entre 0 y 5,

- $Rango\ \ y \in [0,5]$

- ¿Es posible que un estudiante tenga dos o más notas diferentes en matemáticas generales?

Solución:

- No es posible, ya que la nota en Matemáticas y en cualquier materia es única.

- ¿Es posible que una misma nota corresponda a dos o más estudiantes diferentes?

Solución:

Si es posible, ya que, puede suceder que dos o más estudiantes tengan la misma nota de 5.0 ó 3.0, ó 2.5, ó cualquier otra nota igual.

Situación 2:

En una fábrica se tiene que hay en total 835 empleados, los sueldos que se pagan mensualmente oscilan entre 1 y 12 salarios mínimos legales.

1. ¿Cuáles variables se relacionan en esta situación problémica?

Solución:

2. Variable independiente: Empleado.
3. Variable dependiente: Salario del empleado.

4. ¿Es posible que un empleado tenga dos o más sueldos diferentes? ¿Por qué?

Solución:

5. No es posible, porque a ninguna persona le pagan dos o más veces por realizar el mismo trabajo.

6. ¿Es posible que un mismo sueldo corresponda a dos o más empleados diferentes? ¿Por qué?

Solución:

7. Si es posible, se puede ver que hay muchas personas ganándose por ejemplo el mínimo.

8. ¿Cuál es la variable dependiente?

Solución:

Salario o sueldo de cada empleado.

¿Cuál es la variable independiente?

Solución:

Empleado o trabajador.

1. ¿Cuál es el dominio?

Solución:

Cualquier número entero entre cero y 835, son 835 trabajadores.

2. **¿Cuál es el rango?**

Solución:

Cualquier número entre 1 y 12 salarios mínimos, el número puede ser decimal o entero.

Situación 3:
La siguiente es una adaptación de una situación planteada por los autores (Uribe & Ortíz, No especificado, p.169)

En cierto país el costo del correo se rige por la siguiente tabla

Peso en gramos	**Costo**
Hasta 20 g	U.S. $ 0.20
Entre 20 g y 50 g	U.S. $ 0.26
Entre 50 g y 110 g	U.S. $ 0.39
Entre 100 g y 250 g	U.S. $ 0.85
Entre 250 g y 500 g	U.S. $ 1.70
Entre 500 g y 1000 g	U.S. $ 2.35
Entre 1000 g y 2000 g	U.S. $ 3.20

Carlos y Manuela le escriben a sus amigos José, Natalia, Lina y Sebastián. La carta de José pesa 15 g, La de Natalia pesa 85 g, la de Lina 90 g y la de Sebastián pesa 525 g. Contesta:

1. ¿Cuánto cuesta poner cada carta?

Solución:
La carta de José cuesta U.S. $ 0.20
La carta de Natalia cuesta U.S. $ 0.39.
La carta de Lina cuesta U.S. $ 0.39.
La carta de Sebastián cuesta U.S. $ 2.35.

2. ¿Es posible que a dos cartas les corresponda el mismo valor?

Solución:
Si es posible, lo podemos ver con las cartas de Natalia y Lina, ya que ambas cuestan U.S $ 0.39 aunque tienen diferentes pesos.

3. ¿A una misma carta le puede corresponder costos distintos?

Solución:
No es posible, ya que no sería lógico pagar dos veces por una misma carta.

4. ¿Cuál de las dos siguientes afirmaciones es correcta? Justifica:
a. El peso de la carta depende del costo de la misma.
b. El costo de la carta depende del peso de la misma.

Solución:
El costo de una carta depende de su peso, ya que como lo podemos ver en la tabla, la tarifa para el costo de cata carta está dada en términos de su peso.

5. ¿Qué valores puede asumir la variable costo de envío?

Solución:

Cualquier valor entre U.S. $ 0.20 y U.S. $ 3.20.

6. ¿Qué valores puede asumir la variable peso de la carta?

Solución:

Cualquier valor entre 0 g y 2000 g, obviamente cero gramos no sería un valor que se incluya, ya que, corresponde a no enviar una carta, y usted no pagaría por no enviar una carta.

Entonces, la respuesta correcta es: De cero gramos en adelante (sin incluir el cero) hasta 2000 gramos.

Situación 4:
La siguiente situación es una adaptación de una de las experiencias de los autores (Uribe & Ortíz, No especificado, p.170)

Carlos tiene una lámina rectangular de cartón de 30 cm de largo por 20 cm de ancho. Recorta cuadrados de lado $x\ cm$ en las cuatro esquinas para construir una caja sin tapa, como lo muestra la secuencia en la figura 1 siguiente:

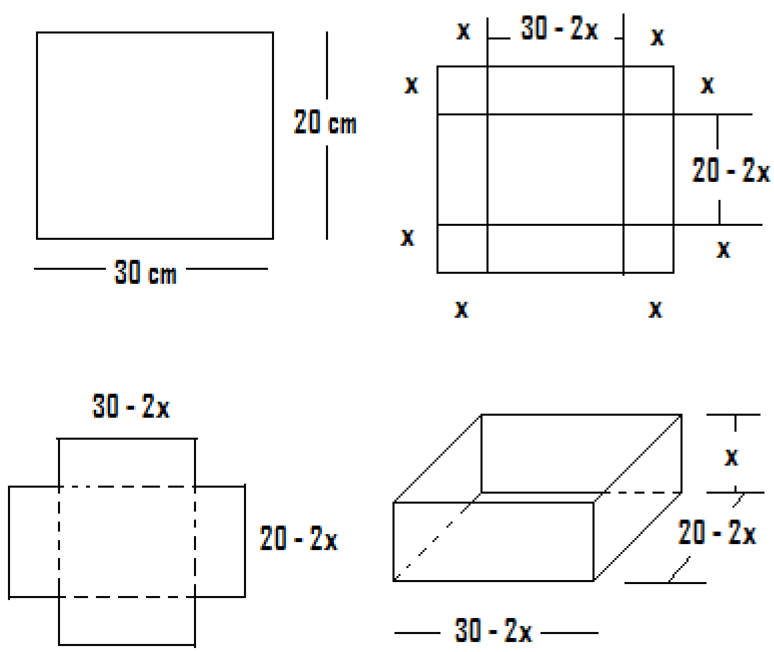


Figura 1: Diseño de una caja
(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 11 de 2011)

Se puede ver que:
El alto de la caja es: $x\ cm$
El ancho de la caja es: $30 - 2x\ cm$
El largo de la caja es: $20 - 2x\ cm$

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿La expresión para el volumen de la caja es?

Solución:

Volumen = alto * ancho * largo
Sea: $\mathrm{v}(\mathrm{x})$ el volumen.
Tenemos que:

$$v(x) = x(30 - 2x)(20 - 2x)$$

Efectuando las multiplicaciones correspondientes y reduciendo términos semejantes:

$$v(x) = (30x - 2x^2)(20 - 2x)$$
$$v(x) = 600x - 60x^2 - 40x^2 - 4x^3$$
$$v(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x\ cm^2$$

2. ¿Qué variables intervienen en esta situación problémica?

Solución:

Intervienen diferentes variables que son:
Altura de la caja, ancho de la caja, largo de la caja y volumen de la caja.
Podemos ver que el largo, el ancho y el volumen de la caja dependen de la altura de la caja.
También podemos ver que el volumen depende del ancho, el largo y la altura de la caja.
Observando la función anterior, podemos afirmar que el volumen depende de la altura de la caja.
Las variables de la situación problémica son:
Variable independiente: Altura de la caja (ó lado del cuadrado a quitar).
Variable dependiente: Volumen de la caja.

1. ¿Cuál es la variable independiente?
   Altura de la caja.

2. ¿Cuál es la variable dependiente?
   Volumen de la caja.

3. ¿Cuál es el domino?

   Para determinar el dominio hagamos la siguiente tabla en Excel.

Plantilla para determinar el dominio y el rango de la función:

$$v(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x\ cm^3$$

En la columna valor de x ingresamos números positivos, en este caso, números del cero al veinte.

En la columna correspondiente a v(x) se escribe la fórmula para el volumen.

=4*A2^3-100*A2^2+600*A2.

Desplegando se obtiene la información de la tabla.

A	B
Valor de x	Valor de v(x)
0	0
1	504
2	832
3	1008
4	1056
5	1000
6	864
7	672
8	448
9	216
10	0
11	-176
12	-288
13	-312
14	-224
15	0
16	384
17	952
18	1728
19	2736
20	4000

Solución:

Recuerde que el dominio consiste en todos los valores que puede asumir la variable independiente, es decir la x.
Para este caso particular, se debe dar valores a x que permitan que se pueda fabricar una caja con la lámina de cartón de 30 cm por 20 cm.

No sobra indicar que:
Con una de las dimensiones igual a cero, no puede haber caja, no es posible construir una caja con dimensiones negativas, es decir, la altura, el largo y el ancho de la caja solo pueden asumir valores positivos.
Para contestar esta pregunta observemos los resultados de la plantilla en Excel, dando valores a x y observando que valores toma v(x).

Se puede ver que para x = 0, se obtiene v(x) = 0, por lo tanto, x = 0 no pertenece al dominio de v(x).

También se observa que el v(x) es positivo:
Desde x = 1 hasta x = 9, (en x = 0 y en x = 10 v(x) = 0)
Desde x = 18 v(x) es positivo.

Recuerde que no puede suceder que una de las dimensiones de la caja sea negativa.

Se puede ver que si x = 18:
El alto de la caja seria: $x = 18\ cm$
El ancho de la caja seria: $30 - 2x = 30 - 2 * 18 = -6\ cm$
El largo de la caja sería: $20 - 2x = 20 - 2 * 18 = -16\ cm$
Esto sucede si se toman valores de 18 en adelante.
Las dimensiones negativas no son permitidas.

Por lo tanto el dominio de v(x) es: $x \in (0, 10)$

El paréntesis quiere decir que no se incluyen los extremos, en este caso ni el valor x = 0 ni el valor x = 10, pero si los valores de x de cero en adelante, hasta el 10 sin incluir el 10.

1. ¿Cuál es el rango?

Solución:

Recuerde que el rango consiste en todos los valores que puede asumir la variable dependiente, en este caso la variable dependiente es el volumen de la caja.
El volumen de la caja no puede ser ni cero, ni negativo.
Para determinar el dominio y el rango utilizando el Excel:

Para el rango observe la columna correspondiente a v(x) para los valores de x entre 0 y 10, podemos ver que v(x) toma valores desde cero hasta 1056 y luego vuelve a llegar a cero.
Rango: $y \in (0, 1056]$

El corchete en un intervalo quiere decir que se incluye el extremo, es decir, el volumen puede alcanzar los 1056 cm^3.

2. ¿El volumen depende del tamaño del cuadrado a quitar o el tamaño del cuadrado a quitar depende del volumen? Justifique.

Solución:

Se puede ver que el volumen depende del tamaño del cuadrado a quitar, ya que dependiendo de este la altura, el largo aumentan o disminuyen, lo mismo sucede con el volumen.

Situación 5:
Un mayorista tiene la siguiente promoción del día:
Vende piñas a 2000 pesos la unidad y ofrece un descuento de 10 pesos por piña comprada.

Contesta las siguientes preguntas.

3. Si vende una piña ¿cuál es su ingreso?

Solución:

Precio = 2000 – 10(1) = 1990.
Ingreso = 1990(1) =1990.

4. Si vende dos piñas ¿Cuál es su ingreso?

Solución:

Precio = 2000 – 10(2) = 1980. Pesos.
Ingreso = 1980(2) = 3960 pesos.

1. Si vende 10 piñas ¿Cuál es su ingreso? ¿Cuál es el precio de venta de cada piña?

Solución:

Precio = 2000 – 10(10) = 1900.
Ingreso = 1900(10) = 19000 pesos.

2. ¿Qué variables intervienen en la situación problémica?

Solución:

Sea q: Número de piñas vendidas.
Sea y = r (q): Ingreso obtenido por la venta de las q piñas.

3. ¿Cuál es la variable dependiente?

Solución:

Ingreso obtenido por la venta de q piñas.

4. ¿Cuál es la variable independiente?

Solución:

Cantidad q de piñas vendidas.

5. ¿Es posible representar esta situación problémica utilizando un modelo?

Solución:

Si.

6. Encuentre un modelo o expresión matemática que represente el ingreso del mayorista.

Solución:

Para construir la función de ingreso en la venta de la q piñas, tenga en cuenta que:

Ingreso = precio de venta multiplicado por la cantidad vendida.

En la siguiente tabla se observa mejor la construcción de la función de ingreso para la venta de q piñas.

Cantidad de piñas vendidas	Precio de venta	Ingreso
1	2000 – 10(1)	[2000 – 10(1)]*1
2	2000 – 10(2)	[2000 – 10(2)]*2
3	2000 – 10(3)	[2000 – 10(3)]*3
4	2000 – 10(4)	[2000 – 10(4)]*4
⋮	⋮	⋮
Q	2000 – 10q	(2000 – 10q)*q

Como y = r (q) es el ingreso obtenido al vender q piñas:

$$r(q) = (2000 - 10q)q = 2000q - 10q^2$$

$$r(q) = 2000q - 10q^2$$

Para contestar las preguntas 9, 10, 11 y 12 se hace la siguiente plantilla en Excel.

Cantidad vendida	Ingreso obtenido
0	0
10	19000
20	36000
30	51000
40	64000
50	75000
60	84000
70	91000
80	96000
90	99000
100	100000

110	99000
120	96000
130	91000
140	84000
150	75000
160	64000
170	51000
180	36000
190	19000
200	0
210	-21000
220	-44000
230	-69000
240	-96000
250	-125000

1. ¿Bajo qué condiciones es esta promoción rentable para el mayorista?
   Cuando vende 100 piñas, ya que de esta manera su ingreso es de 100000 pesos y es el máximo ingreso que puede obtener.

2. ¿Bajo qué condiciones el mayorista obtendrá el máximo ingreso?
   Cuando vende 100 piñas a un precio de 1000 pesos cada una, con un ingreso máximo de 100000 pesos.

3. ¿Cuál es el domino de la expresión anterior?

$$Dom.\ q \in [0,200]$$

4. ¿Cuál es el rango de la expresión anterior?

$$y \in [0,100000]$$

En las situaciones problémicas anteriores se puede ver algunos conceptos que se deben formalizar, tales conceptos son:
Imagen de una función.
Tipos de funciones y su clasificación.
Determinación del dominio.
Grafica de las funciones.

Imagen de una función. Consiste en reemplazar en la función a **x** por el valor indicado y obtener la respectiva **y**.

Ejemplo1:

Si $y = f(x) = 4x - 3x^2 - 6$

Halle: $f(1), \quad f(-2), \quad f(0), \quad f\left(\frac{2}{3}\right)$

Solución

Cálculo de $f(1)$

Cundo se pide hallar $f(1)$, se pide determinar el valor de y , cundo $x = 1$; esto es:

Cundo $x = 1, \quad y = f(1) = 4(1) - 3(1)^2 - 6 = 4 - 3(1) - 6 = 4 - 3 - 6 = -5$

$f(1) = -5$ Quiere decir que cundo $x = 1, \quad y = -5$

Cálculo de $f(-2)$

$f(-2) = 4(-2) - 3(-2)^2 - 6 = -8 - 3(4) - 6 = -8 - 12 - 6 = -26$

$f(-2) = -26$ Quiere decir que cuando $x = -2, \quad y = -26$

Cálculo de $f(0)$

$f(0) = 4(0) - 3(0)^2 - 6 = 0 - 3(0) - 6 = -6$

Cálculo de $f\left(\frac{2}{3}\right)$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 4\left(\frac{2}{3}\right) - 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 6 = \frac{8}{3} - 3\left(\frac{4}{9}\right) - 6 = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} - 6 = -\frac{14}{3}$$

Ejemplo2:

$Si, \quad y = f(x) = \frac{x-4}{x+1}$

$$Halle: \quad f(1), \quad f(-1), \quad f(4), \quad f(-3)$$

Solución

$$f(1) = \frac{1-4}{1+1} = -\frac{3}{2}$$

$$f(-1) = \frac{-1-4}{-1+1} = \frac{-5}{0}.$$

Recuerde que la división entre cero no pertenece a ningún campo numérico, por lo tanto menos uno (-1) no pertenece al dominio de la función (x = - 1 no pertenece al dominio de f(x)).

$$f(4) = \frac{4-4}{4+1} = \frac{0}{5} = 0$$

$$f(-3) = \frac{-3-4}{-3+1} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$$

Ejemplo3:

$$Si, \quad y = g(x) = \sqrt{x-6}$$
$$Halle: \quad g(10), \quad g(0), \quad g(5), \quad g(8)$$

Solución

$$g(10) = \sqrt{10-6} = \sqrt{4} = 2$$

$$g(0) = \sqrt{0-6} = \sqrt{-6}.$$

Recuerde, que la raíz par de un número negativo no pertenece a los números reales, por lo tanto, $x = 0$ no pertenece al dominio del modelo matemático.

$g(5) = \sqrt{5-6} = \sqrt{-1}$. $x = 5$ No pertenece al dominio.

$$g(8) = \sqrt{8-6} = \sqrt{2} = 1{,}414213562...$$

Enlaces evaluación de funciones:
http://www.youtube.com/watch?v=tqGxgRySDXA
http://www.youtube.com/watch?v=fBuRPI0VcGE&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=FmcyySs_doQ&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=FDB1j9Ze-G8&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=hDerTNynXi4&feature=related

2.1.3. Interceptos: (http://www.youtube.com/watch?v=1WzS4FuxKbA)

Un intercepto es un punto donde la gráfica de la función corta cada uno de los ejes.

Las intersecciones con el eje **x** (si los hay) se obtienen haciendo **y = 0** y despejando la **x**.

A partir de una gráfica las intersecciones con el eje x corresponden a los puntos donde la gráfica corta el eje x.

Las intersecciones con el eje **y** (si los hay) se obtienen haciendo **x = 0**.

A partir de una gráfica, las intersecciones con el eje y son los puntos donde la gráfica corta el eje y.

NOTA:
Sí, al buscar las intersecciones con los ejes se obtiene lo siguiente, quiere decir, que en ese caso no hay intersecciones con el respectivo eje

- La ecuación no tiene solución.
- Una igualdad falsa.
- Raíz par de un número negativo.
- División entre cero.
- Cualquier expresión falsa.
- Logaritmo de un número negativo.
- Un exponencial igualado a cero.

Ejemplos: Determine las intersecciones con los ejes de cada una de las siguientes funciones.

Ejemplo1: Determine los interceptos de la función:

$$y = f(x) = x^2 - 7x + 6$$

Solución
Con el eje **x**: Haciendo y = 0

$$Sí, \quad y=0, \quad 0=x^2-7x+6 \quad 0=(x-6)\cdot(x-1)$$
$$x-6=0 \rightarrow x=6$$
$$x-1=0 \rightarrow x=1$$

Las coordenadas de estos interceptos son: $(1{,}0)$ $(6{,}0)$

Con el eje **y**: Haciendo x = 0

$$Sí, \quad x=0, \quad y=f(0)=(0)^2-7(0)+6=6$$

Este punto tiene coordenadas: $(0{,}6)$

Ejemplo2: Halle los interceptos de la función:

$$y=f(x)=5x+3$$

Solución:

Con eje **x**:

$$sí \quad y=0, \quad 0=5x+3 \rightarrow -3=5x \rightarrow -\frac{3}{5}=x$$

Coordenadas del intercepto: $\left(-\frac{3}{5},0\right)$

Con el eje **y**:

$$sí \quad x=0, \quad y=5(0)+3=3$$

Coordenadas del punto: $(0{,}3)$

Ejemplo3: Halle los interceptos de la función:

$$y=h(t)=\sqrt{5t-10}$$

Solución:

Con el eje **t**:

Sí, y = 0, $0=\sqrt{5t-10}$

Para destruir la raíz cuadrada se eleva en ambos lados de la ecuación al cuadrado:

$$0^2=\left(\sqrt{5t-10}\right)^2 \rightarrow 0=5t-10 \rightarrow t=2$$

Con el eje **y**:

Sí, x = 0, $y=\sqrt{5(0)-10}$

$$y = \sqrt{-10} \rightarrow \textit{Esta raíz no existe en los reales}$$

No hay intercepto con el eje **y**. La intersección con el eje **t**, tiene coordenadas (2,0)

Ejemplo4: Halle los interceptos de la función:

$$y = f(x) = \frac{6x+2}{x^2+6x+5}$$

Solución:

Con eje y.

Sí, x = 0: $y = \dfrac{6(0)+2}{0^2+6(0)+5} = \dfrac{2}{5} \rightarrow (0,2/5)$

Con eje **x**:

Sí, y = 0: $0 = \dfrac{6x+2}{x^2+6x+5}$

Multiplicando la ecuación resultante por x^2+6x+5 queda:

$$0(x^2+6x+5) = (x^2+6x+5)\frac{6x+2}{x^2+6x+5} \rightarrow 0 = 6x+2 \rightarrow x = -1/3 \rightarrow (-1/3,0)$$

Ejemplo5: Halle los interceptos de la función

$y = f(x) = 2^{2x-1}$

Solución:

Si x = 0, entonces queda:

$$y = 2^{2*0-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow (0,1/2)$$

Si y = 0, entonces quedaría:

$$2^{2x-1} = 0$$

Esta ecuación no tiene solución, ya que un exponente nunca es igual a cero.

Ejemplo6: Halle los interceptos de la función:

$$y = g(x) = \log 3^{x^2-8}$$

Solución:

Si x = 0, queda:

$y = \log 3^{0^2-8} = \log 3^{-8}$

No existe el logaritmo de ningún número negativo. No hay intersección con el eje y.
Si y = 0, queda:

$0 = \log 3^{x^2-8}$

Aplicando exponencial en ambos lados de la ecuación

$$3^0 = 3^{\log 3^{x^2-8}} \Rightarrow 1 = (x^2-8)*3^{\log 3} \Rightarrow 1 = (x^2-8)*1 \Rightarrow 1 = x^2-8$$

Que es una ecuación cuadrática, igualando a cero queda:

$$0 = x^2-8-1 \Rightarrow 0 = x^2-9 \Rightarrow x = 3 \vee x = -3.$$

Las coordenadas de estos interceptos son: $(-3,0) \wedge (3,0)$

La siguiente dirección corresponde a un applet que permite factorizar.
http://www.cidse.itcr.ac.cr/webMathematica/NewScript/factor.jsp

En esta página se tiene un applet para solucionar ecuaciones
http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/MATEGENERAL/index.htm

2.1.4. Continuidad: (http://www.youtube.com/watch?v=wuAdn84VSoc)

Se dice que una función es continua en todo su dominio, cuando se puede recorrer toda la gráfica sin tener que levantar la mano, cuando no hay huecos o espacios entre sus gráficas, si algo de esto se llega a presentar se dice que la función es discontinua.

La función $y = f(x)$ mostrada en la figura 2 es continua, porque podemos recorrer toda su gráfica sin necesidad de levantar la mano.

La función $y = g(x)$ mostrada en la figura 3 es discontinua (no es continua), porque al recorrer su gráfica hay que levantar la mano para continuar, o porque hay un espacio entre sus gráficas. Esta función es discontinua en el punto x1.

Para indicar puntos de discontinuidad se debe nombrar la x del punto.

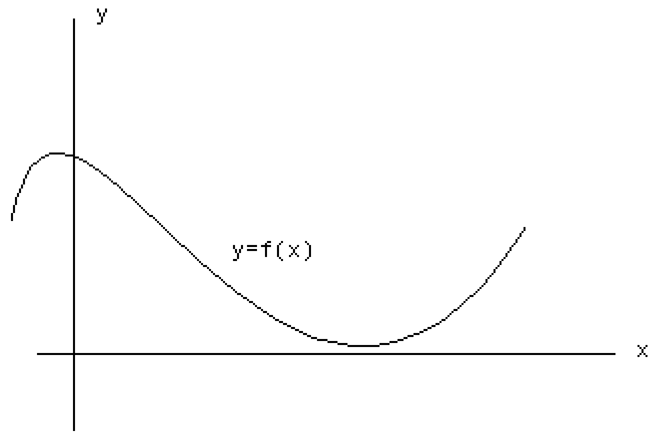


Figura 2. Función continua.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

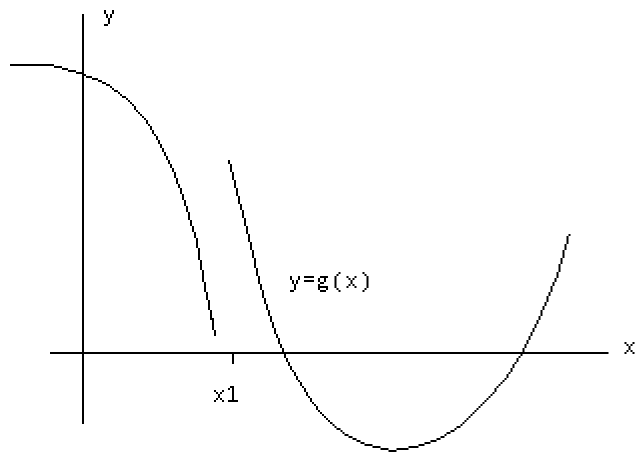


Figura 3. Función discontinua.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento de una función:
http://www.youtube.com/watch?v=mvj_KLgO_5Q&feature=related

- **CRECIMIENTO:** Se dice que una función es creciente cuando al aumentar la **x**, la **y** también aumenta (o viceversa).

- **DECRECIMIENTO:** Se dice que una función es decreciente cuando al aumentar la **x**, la **y** disminuye (o viceversa).

Entiéndase por **x** a la variable independiente, entiéndase por **y** a la variable dependiente.

$$\text{Función creciente}\begin{cases} X\uparrow \quad Y\uparrow \\ \quad\vee \\ X\downarrow \quad Y\downarrow \end{cases}$$

$$\text{Función decreciente:}\begin{cases} X\uparrow \quad Y\downarrow \\ \quad\vee \\ X\downarrow \quad Y\uparrow \end{cases}$$

Gráficamente se puede determinar fácilmente si una función es creciente o decreciente, recorriendo la gráfica de la función de izquierda a derecha, si la sensación es que se sube por la gráfica, quiere decir que en este tramo la función es creciente, y si la sensación es de bajada, quiere decir que en este tramo la función es decreciente.

Para determinar intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento siempre se toma como límites del intervalo el valor de **x** del punto y los intervalos pueden ser abiertos o cerrados.

Para la figura 4 se tiene que los intervalos de crecimiento y de decrecimiento son:

Crecimiento: $x \in (-\infty, x1) \wedge (x2, \infty)$

Decrecimiento: $x \in (x1, x2)$

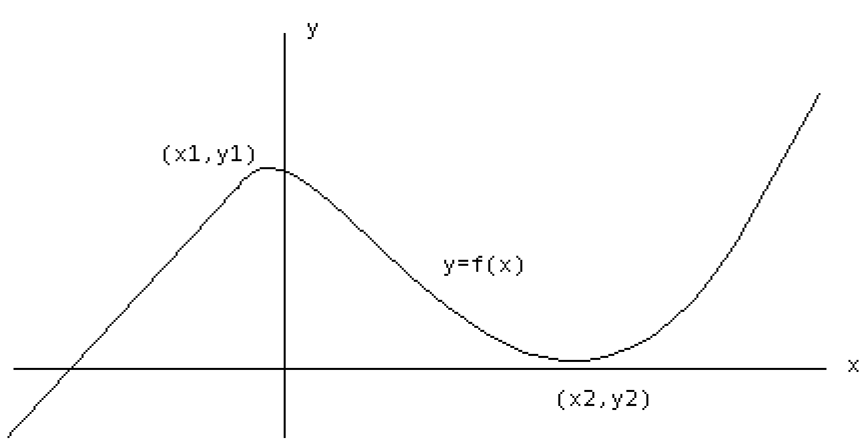


Figura 4. Crecimiento y decrecimiento de una función.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez).

Enlaces para crecimiento y decrecimiento de funciones

http://www.youtube.com/watch?v=Dgl23EjUtRs

http://www.youtube.com/watch?v=5HHdMwt3X6Q

2.1.4.1 Operaciones con funciones

Este tema también recibe el nombre de: ÁLGEBRA DE FUNCIONES:
Dadas dos funciones $f \ y \ g$ se pueden combinar para formar nuevas funciones así:

- Suma de funciones.
- $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- Resta de funciones.
- $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
- Producto de funciones.
- $(f.g)(x)=f(x).g(x)$
- Cociente de funciones.
- $(f/g)(x)=f(x)/g(x)$
- Función compuesta o composición de funciones.
- $(f \ o \ g)(x)=f(g(x))$
- $(g \ o \ f)(x)=g(f(x))$

La función compuesta de f y g se denota como $f \ o \ g$ y se define como: $(f \, o \, g)(x)=f(g(x))$

NOTA:
$(f \, o \, g)(x) \neq (g \, o \, f)(x)$

Ejemplo1:

Si $f(x)=2x^2-3x+1 \wedge g(x)=4x-3$

Halle $(f+g)(x)$

Solución

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=2x^2-3x+1+(4x-3)=2x^2-3x+1+4x-3=2x^2+x-2$$
$$(f+g)(x)=2x^2+x-2$$

Ejemplo2:

Si

$f(x)=3x^2-1 \ y \ g(x)=7x-9$

Halle $(f+g)(x)$

Solución

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=3x^2-1+(7x-9)=3x^2-1+7x-9=3x^2+7x-10$$

$$(f+g)(x)=3x^2+7x-10$$

Ejemplo3:

Si $f(x)=5x+3 \wedge g(x)=x^2$

Halle: $(f-g)(x), (fg)(x) \wedge \frac{g}{f}(x)$

Solución

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=5x+3-x^2=-x^2+5x+3$$

$$(f-g)(x)=-x^2+5x+3$$

$$(fg)(x)=f(x).g(x)=(5x+3)(x^2)=5x^3+3x^2$$

$$(fg)(x) = 5x^3 + 3x^2$$

$$\frac{g}{f}(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2}{5x+3}$$

Ejemplo4:

Si $f(x) = x^2 \wedge g(x) = x - 3$
Halle las funciones compuestas: $(f\,o\,g)(x) \wedge (g\,o\,f)(x)$

Solución

$$(f\,o\,g)(x) = f(g(x)) = f(x-3) = (x-3)^2$$

$$(g\,o\,f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = (x^2) - 3 = x^2 - 3$$

Ejemplo5:
http://www.youtube.com/watch?v=GHITUxxaj4Q

Ejemplo6:
http://www.youtube.com/watch?v=LFpnVDnYKPY&feature=related

Ejemplo7:
http://www.youtube.com/watch?v=2ICR830CkPg&feature=fvwrel

Ejercicio 1

1. **En una fábrica se tiene que hay en total 352 empleados, los sueldos que se pagan mensualmente oscilan entre 1 y 8.5 salarios mínimos legales. Estudie la relación que existe entre los trabajadores y el salario mensual de cada uno de ellos, para ello determine:**

   a. **Variable independiente.**
   b. **Variable dependiente**
   c. **Dominio.**
   d. **Rango.**

2. **Si los valores de "x" son 3, 5, 7, 8 y la función es** $f(x)=\frac{x^2}{2}$ **, encuentre los respectivos valores de "y".**
3. **Determine los interceptos de las siguientes funciones:**
   a. $f(x)=5x^2+8x-4$
   b. $g(x)=\sqrt{20x-5x^2}$
   c. $h(x)=2^{x^2-1}$
   d. $j(x)=\frac{6x^2-7x-3}{x^2+9}$
4. **Para las funciones:**

$$f(x)=5x^2-3x+4 \wedge g(x)=2x^2-7x$$

   a. **Halle:**
   b. $(f-g)(x)$
   c. $(f\cdot g)\left(\frac{2}{5}\right)$
   d. $(f/g)\left(\frac{3}{2}\right)$
   e. $(fog)(x)$
5. **En la figura 5 se observa la gráfica de una función** $f(x)$

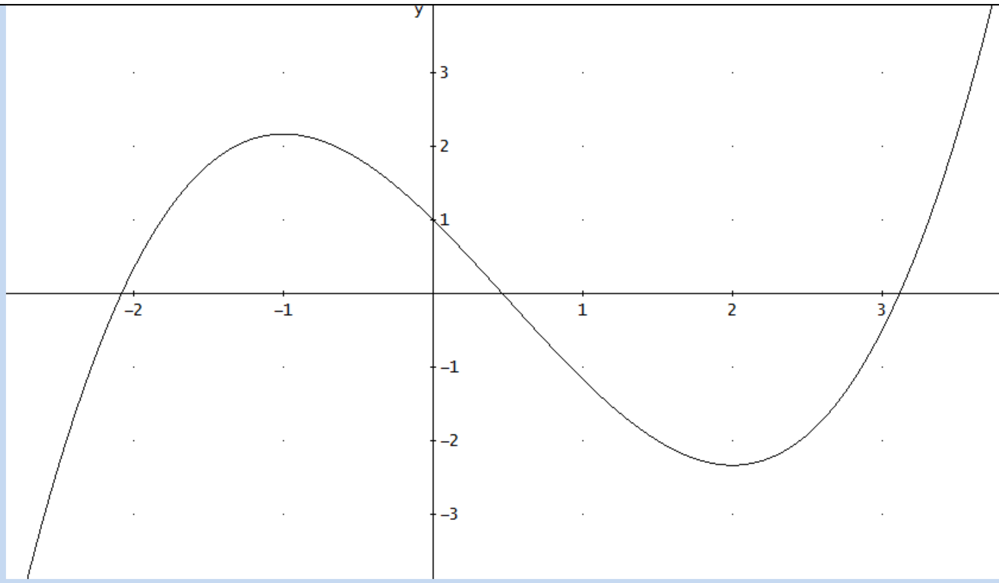


Figura 5. Gráfica de una función $f(x)$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 12 de 2011)

Teniendo en cuenta la figura 5, determine:

a. **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.**
b. **Las coordenadas de los interceptos con una cifra decimal.**
c. **Intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.**
d. **Indique si la función es continua o discontinua, explique.**

2.2. Clasificación de las funciones

Se tratarán los siguientes temas: Identificar el tipo de función, determinar su dominio, representar gráficamente la función (utilizando alguna aplicación en línea), determinar intervalos de decrecimiento e intervalos de crecimiento y determinar continuidad y discontinuidad de funciones (Observando la gráfica).

2.2.1. Función Polinómica

Una función polinómica es toda función de la forma:

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Se identifica porque:

No tiene variable en logaritmos, no tiene variable en el denominador, no tiene variable dentro de una raíz, no es exponencial, no es trigonométrica.

Ejemplos de funciones polinómica

$$y = g(x) = 7x - 3 \qquad y = h(x) = 7x^3 - 10x + 2 \qquad f(x) = 2x^2 - 5x + 6$$

- **DOMINIO:**

El dominio de las funciones polinómicas está formado por el conjunto de todos los números reales.

- **CONTINUIDAD:** Las funciones polinómicas son continuos en todo su dominio.

- **REPRESENTACIÓN GRÁFICA:** La forma de graficar las funciones polinómicas depende de cada tipo de función.

Las funciones polinómicas se clasifican a su vez en:

2.2.2. Función lineal o función de primer grado:

Es una función de la forma:

$$y = f(x) = mx + b$$

Donde m y b son constantes y representan: m la pendiente y b el intercepto o punto de corte de la línea recta con el eje **y**.

NOTA:

Cuando la pendiente es positiva, la función es siempre creciente.
Cuando la pendiente es negativa, la función es siempre decreciente.

La pendiente da información acerca del ángulo de inclinación de la recta con el eje “x” así:
Cuando el ángulo de inclinación es menor de 90° la pendiente tiene signo positivo.
Cuando el ángulo de inclinación es mayor de 90° la pendiente tiene signo negativo.
Cuando el ángulo de inclinación es igual a 90° la pendiente no existe, esto se asocia con división entre cero, en este caso se tiene una recta vertical cuya ecuación es x = c.
Cuando el ángulo de inclinación es igual a cero la pendiente también es igual a cero, en este caso se tiene una recta horizontal cuya ecuación es y = b.

- **GRÁFICA:**

Para graficar una función lineal es suficiente con dos puntos
Los paso a seguir son:

1. Se seleccionan dos valores de **x** arbitrariamente
2. Cada valor de **x** seleccionado se reemplaza en el modelo para obtener la respectiva **y**.
3. Las parejas obtenidas se ubican en el plano cartesiano.
4. Unimos los dos puntos obtenidos mediante una línea recta.

Ejemplo1:
Para la función $y = f(x) = 3x - 5$.

1. Halle su dominio.
2. Realice su gráfica.
3. Determine intervalos de crecimiento e intervalos de crecimiento.
4. Indique si la función es continua ó discontinua, en caso de ser discontinua indique los puntos de discontinuidad.

Solución

1. Dominio. $x \in lR$
   Por ser un polinomio.
2. Gráfica:

Seleccione dos valores de **x** (los que desee) por ejemplo x = 0 y x = 4, con estos valores se obtiene la respectiva **y** reemplazando en la función.

Para $x = 0, \quad y = f(0) = 3(0) - 5 = -5$.
Este punto tiene coordenadas (0, -5).

Para $x = 4, \quad y = f(4) = 3(4) - 5 = 12 - 5 = 7$.
Este punto tiene coordenadas (4,7).
Haciendo una tabla de valores queda.

X	0	4
Y	-5	7

Ubique estos dos puntos en el plano cartesiano y se unen mediante una línea recta. La gráfica se muestra en la figura 6

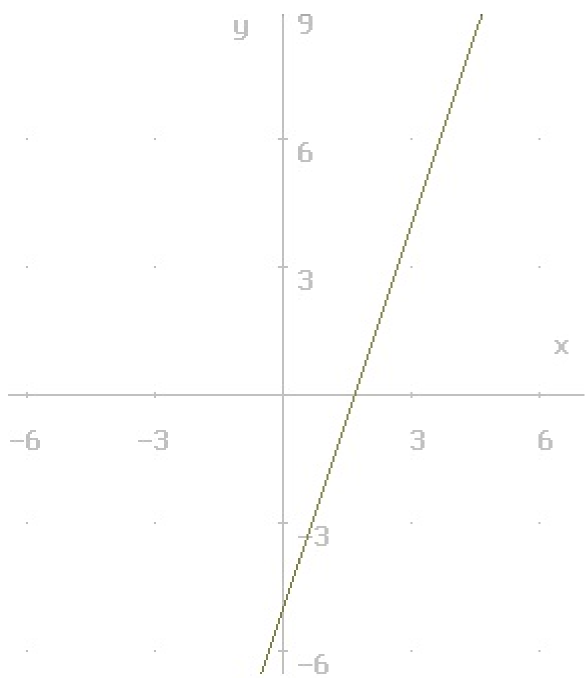


Figura 6. Gráfica de $y = f(x) = 3x - 5$
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Las siguientes direcciones corresponden a applets en línea que permiten realizar la gráfica de funciones.

http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/NUMERICO/index.htm
Por ejemplo: Para utilizar el applet anterior para graficar

$$y = f(x) = 3x - 5$$

Debe digitar: 3*x-5 y dar la opción graficar.

http://www.luventicus.org/articulos/03U004/index.html
Por ejemplo: Para utilizar el applet anterior para graficar

$$y = f(x) = 3x - 5$$

Debe digitar: 3x-5 y dar la opción graficar

1. Determine intervalos de crecimiento e intervalos de crecimiento.

Solución
Observando la gráfica de la figura 7 se puede ver que la función es siempre creciente.

Creciente: $(-\infty, \infty)$

La función no decrece.

2. Continuidad: La función es continua en todo su dominio.

Ejemplo2:
Para la función $y = f(x) = -4x + 10$

1. Halle su dominio.
2. Realice su gráfica.
3. Determine intervalos de crecimiento e intervalos de crecimiento.
4. Indique si la función es continua ó discontinua, en caso de ser discontinua indique los puntos de discontinuidad.

Solución

1. Dominio: $x \in lR$

Gráfica:

Sí $x = 2$ $y = f(2) = -4(2) + 10 = -8 + 10 = 2$.

Sí $x = 5$ $y = f(5) = -4(5) + 10 = -20 + 10 = -10$.

X	2	5
Y	2	-10

La gráfica se muestra en la figura 7

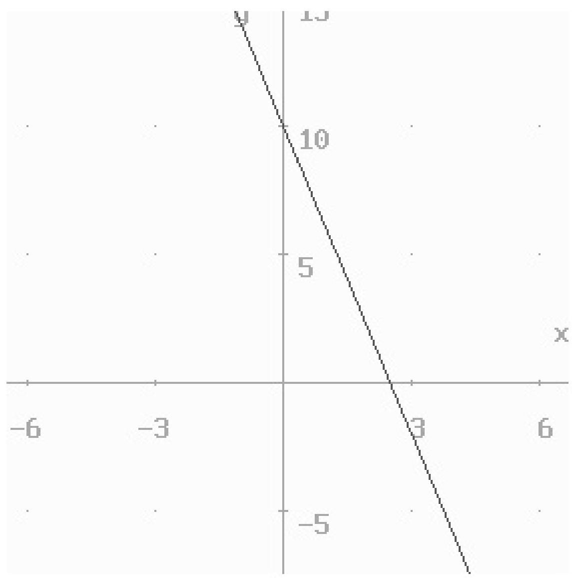


FIGURA 7. Gráfica de $y = f(x) = -4x + 10$
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

1. Determine intervalos de crecimiento e intervalos de crecimiento.

Como la pendiente es negativa, la función es decreciente, esto también se puede observar en la figura 8.

Decrece: $(-\infty, \infty)$

2. Indique si la función es continua ó discontinua, en caso de ser discontinua indique los puntos de discontinuidad. La función es continua en todo su dominio.

Ejemplo3:

Para la función: $y = g(x) = 2$

1. Halle su dominio.
2. Realice su gráfica.
3. Determine intervalos de crecimiento e intervalos de crecimiento.
4. Indique si la función es continua ó discontinua, en caso de ser discontinua indique los puntos de discontinuidad.

Solución

1. Dominio: $x \in (-\infty, \infty)$
2. Gráfica.

Se puede ver que para cualquier valor de **x**, la **y** siempre tendrá el mismo valor. La gráfica se ve en la figura 8

x	- 8	8
y	2	2

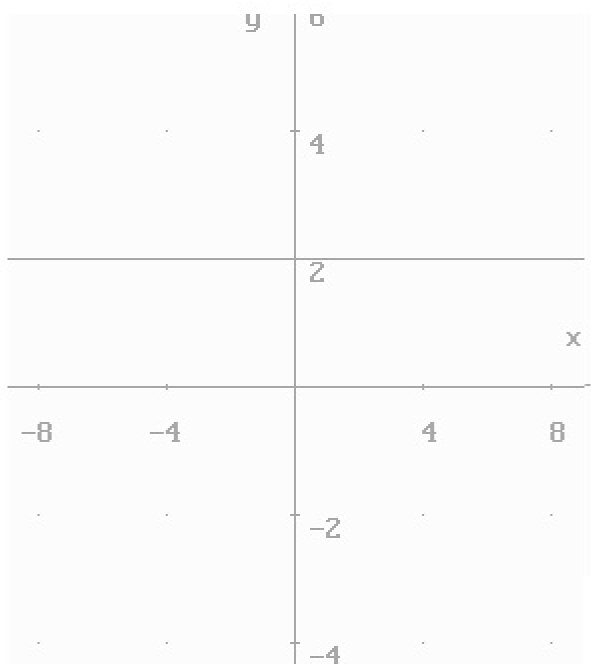


FIGURA 8: Gráfica de $y = g(x) = 2$
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

1. Crecimiento de crecimiento.

Como la pendiente es igual a cero, la función no crece ni decrece, es una función constante.
No crece
No decrece.

2. Continuidad. Es siempre continua.

Los siguientes enlaces tratan la función lineal.

http://www.youtube.com/watch?v=gCqprj3jTzQ&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=BxsVZUHCDMk&feature=related
http//www.youtube.com/watch?v=rIpnGj3Vge0&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=BxsVZUHCDMk&feature=related

2.2.3. Función Cuadrática o Función de Segundo Grado

Es una función de la forma:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde **a**, **b**, **c** son constantes con **a** diferente de cero $(a \neq 0)$.

- **DOMINIO:**

Por ser una función polinómica, su dominio corresponde a todos los números reales.

- **GRÁFICA:**

Esta función corresponde a una parábola y su gráfica depende del valor de **a**.
Sí **a** es positiva $(a > 0)$. La parábola abre hacia arriba, por lo tanto el vértice de la parábola corresponde a un mínimo.
Sí **a** es negativa $(a < 0)$. La parábola abre hacia abajo, por lo tanto el vértice de la parábola es un máximo.

El vértice de una parábola es el punto en el cual la parábola pasa de crecer a decrecer ó de decrecer a crecer.
Se puede ver en las figuras 9 y 10:

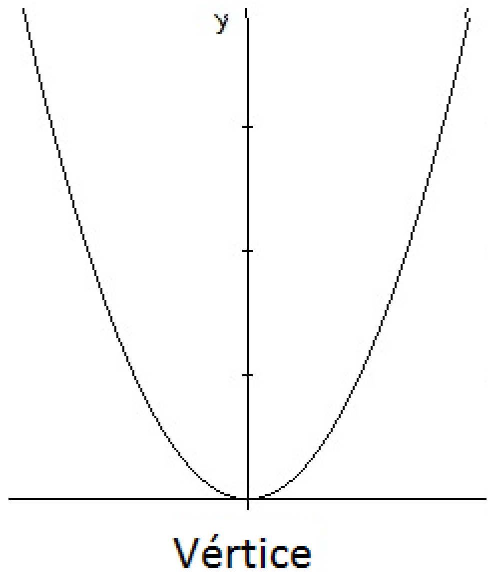


Figura 9. Parábola que abre hacia arriba
(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 11 de 2011)

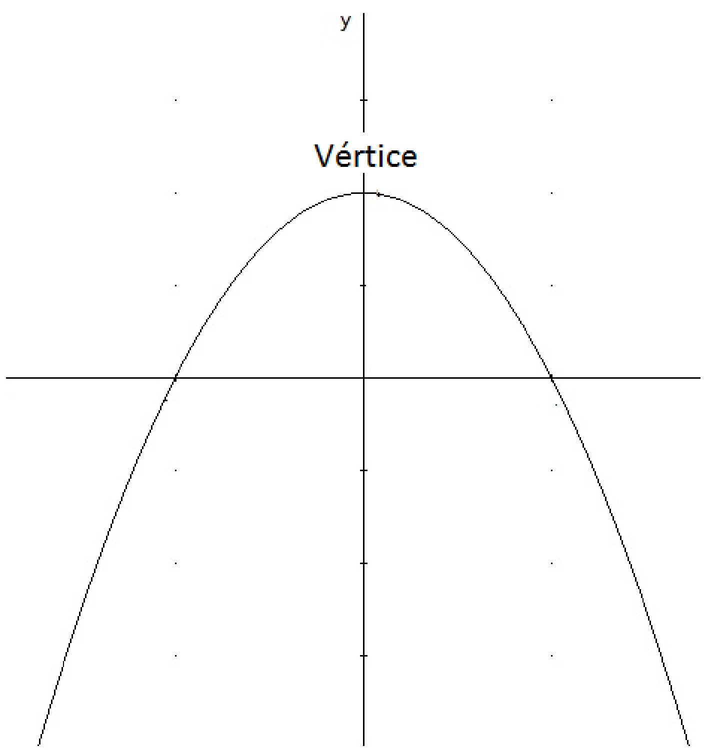


Figura 10. Parábola que abre hacia abajo.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 11 de 2011)

Para graficar una parábola se debe tener en cuenta los siguientes pasos:

1. Identificar los valores de las constantes **a**, **b**, **c**:
   a es el coeficiente de x^2
   b es el coeficiente de x
   c es el término independiente, número que no tiene variable.

2. Dependiendo del signo del número **a** se identifica hacia donde abre la parábola.

3. Encontrar las coordenadas del vértice: El vértice tiene coordenadas (h, k).

$$h = -\frac{b}{2a}$$
$$k = f(h)$$

$$Sí\ a > 0 \begin{cases} Decrece & (-\infty, h) \\ Crece & (h, \infty) \end{cases}, \quad Si \quad a < 0 \begin{cases} Crece & (-\infty, h) \\ Decrece & (h, -\infty) \end{cases}$$

4. Se puede ubicar los interceptos.

5. **<u>Este paso es opcional</u>**: Se da valores a **x** alrededor del vértice aproximadamente 3 a la izquierda y 3 a la derecha. (Estos puntos incluyen el vértice). Obtenga la respectiva **y** reemplazando en la función.

6. Ubique los puntos anteriores en el plano cartesiano y los únalos mediante una curva.

NOTA:
Una función cuadrática es siempre continua.

Ejemplo1:
Para la función**:** $y = f(x) = x^2 + 6x + 8$
Determine: Dominio, grafique, determine intervalos de crecimiento y de decrecimiento, determine si la función es continua o discontinua (indique en qué punto):

Solución

Dom. $x \in lR$ Por ser una función polinómica.

Gráfica.

$a = 1, \quad b = 6, \quad c = 8$

Como a es positiva $(a = 1, \quad 1 > 0)$. La parábola abre hacia arriba.

$$h = -\frac{6}{2(1)} = -\frac{6}{2} = -3 \rightarrow h = -3$$
$$k = f(h) = f(-3) = (-3)^2 + 6(-3) + 8 = 9 - 18 + 8 = -1 \rightarrow k = -1$$

El vértice tiene coordenadas $(-3, -1)$
Puntos alrededor de la **x** del vértice.
A su izquierda:

$$x = -4 \rightarrow y = (-4)^2 + 6(-4) + 8 = 16 - 24 + 8 = 0$$
$$x = -4, \ y = 0$$
$$x = -5 \rightarrow y = (-5)^2 + 6(-5) + 8 = 25 - 30 + 8 = 3$$
$$x = -5, \ y = 3$$
$$x = -6 \rightarrow y = (-6)^2 + 6(-6) + 8 = 36 - 36 + 8 = 8$$
$$x = -6, \ y = 8$$

A su derecha:

$$x = -2 \rightarrow y = (-2)^2 + 6(-2) + 8 = 4 - 12 + 8 = 0$$
$$x = -2, \ y = 0$$
$$x = -1 \rightarrow y = (-1)^2 + 6(-1) + 8 = 1 - 6 + 8 = 3$$
$$x = -1, \ y = 3$$
$$x = 0 \rightarrow y = (0)^2 + 6(0) + 8 = 8$$
$$x = 0, \ y = 8$$

				Vértice			
x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
y	8	3	0	-1	0	3	8

Ubique estos puntos en el plano cartesiano y los unimos mediante líneas.
La gráfica se muestra en la figura 11.

De la gráfica de la figura 11 se tiene que la función es:

Creciente $(-3,\infty)$

Decreciente $(-\infty,-3)$

La función es continua, por ser una función polinómica.

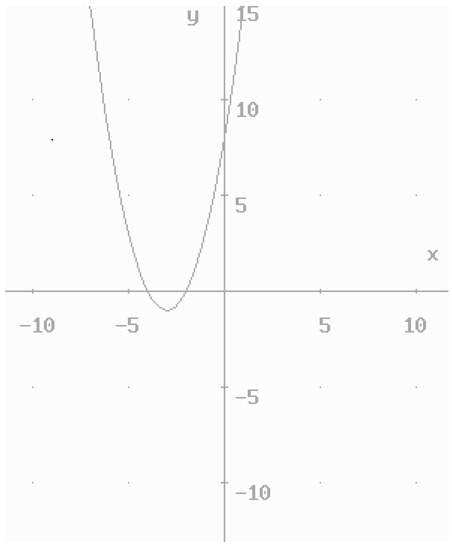


FIGURA 11. Gráfica de: $y = f(x) = x^2 + 6x + 8$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Nota: Esta gráfica se puede realizar utilizando el applet de la siguiente página:
http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/NUMERICO/index.htm

Ejemplo2:

Para la función $y = f(x) = -3x^2 + 4x + 5$

Determine: Dominio, grafique, determine intervalos de crecimiento y de decrecimiento, determine si la función es continua o discontinua (indique en qué punto):

Solución

Dom. $x \in lR$

Gráfica:

$a = -3, \quad b = 4, \quad c = 5$

$Como \quad a\ es \quad negativa.\ a = -3\left(-3 < 0\right) \quad la \quad parábola \quad abre\ hacia\ abajo.$

$$h = -\frac{4}{2(-3)} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$k = f(h) = f\left(\frac{2}{3}\right) = -3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{3}\right) + 5 = -3*\frac{4}{9} + \frac{8}{3} + 5 = \frac{-4}{3} + \frac{8}{3} + 5 = \frac{19}{3}$$

Puntos alrededor del vértice:

A su izquierda: $x = 0, \quad x = -1, \quad x = -2$

A su derecha: $x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3$

Para cada valor se obtiene la respectiva y reemplazando en la función. Los resultados se observan en la tabla.

				Vértice			
x	-2	-1	0	2/3	1	2	3
y	-15	-2	5	19/3	6	1	-10

Ubique estos puntos en el plano cartesiano y se unen con una curva.
La gráfica es la mostrada en la figura 12

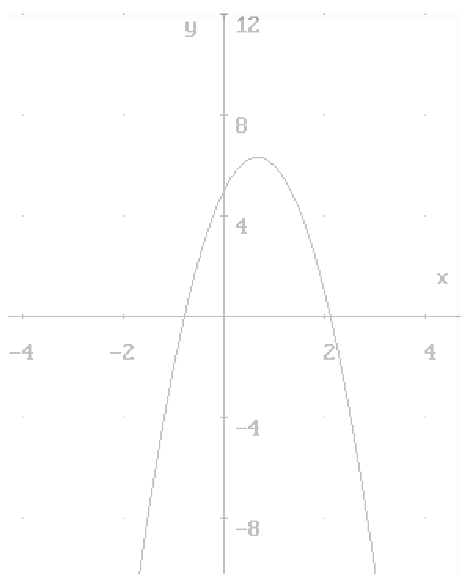


FIGURA 12 Gráfica de: $y = f(x) = -3x^2 + 4x + 5$
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Crece: $(-\infty, 2/3)$
Decrece: $(2/3, \infty)$
Es una función continua.

Ejemplo3: http://www.youtube.com/watch?v=0pUnHF1FJ2s&feature=related

Ejemplo4: http://www.youtube.com/watch?v=IC4ZV4du_Jg&feature=related

Ejemplo5: http://www.youtube.com/watch?v=PDFZm6L_ge0&feature=fvw

Ejemplo6: http://www.youtube.com/watch?v=mVodIKYyRF4&feature=related

Enlaces función cuadrática

http://www.youtube.com/watch?v=eIq654T4mcs&feature=related

http://www.youtube.com/watch?v=oi3inrtM7H0&feature=related

- Función cúbica:
  Es una función de la forma:

$$y = f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Con A, B, C, D constantes y A diferente de cero.
Para graficar estas funciones y funciones de grado superior a tres, se utilizan otras técnicas que se verán más adelante.

Pero se puede utilizar el applet de la página http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/NUMERICO/index.htm para realizar estas gráficas.

Como ejercicio intente realizar con el applet la gráfica de las siguientes funciones:

$f(x) = 3x^3 - 10x^2 + 2x + 5$

$g(x) = x^4 + 2x^3 - 15x^2 + x - 3$

2.2.4. Función Racional

Es una función de la forma:

$$y = f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \quad con \quad h(x) \neq 0$$

Se identifica porque la función tiene **x** en el denominador.
La función racional es la función cociente de dos funciones polinómica.

- **DOMINIO:**
  Están formados por todos los números reales menos las asíntotas verticales y/o huecos de la función.

Una asíntota vertical es un valor de **x** donde el denominador se hace cero.

Un hueco es un valor de x donde el numerador y el denominador son iguales a cero.
Para determinar las asíntotas verticales y/o los huecos de una función racional (si tiene) se procede de la siguiente manera.

1. Iguale el denominador a cero.
2. Solucionamos la ecuación resultante. Si la ecuación no tiene solución, quiere decir que la función racional no tiene ni asíntotas verticales ni huecos.
3. Los valores de **x** obtenidos se deben eliminar del dominio de la función.

Determine el dominio de cada una de las siguientes funciones:

Ejemplo1: $y = w(x) = \dfrac{5x}{2x-5}$

Solución

Igualando el denominador a cero.

$2x - 5 = 0 \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = \dfrac{5}{2}$

$x = \dfrac{5}{2}$ Es una asíntota vertical; se debe excluir del dominio.

$Dom. \quad x \in lR$ Menos x = 5/2. Otra forma de decir lo mismo es: Dom. $x \neq \dfrac{5}{2}$

Ejemplo2: $y = f(x) = \dfrac{4x-7}{2x^2-x-6}$

Solución

$$2x^2-x-6=0 \quad \rightarrow \quad \frac{2}{2}*\left(2x^2-x-6\right)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{4x^2-1(2x)-6}{2}=0$$
$$\frac{(2x-4)(2x+3)}{2}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{2(x-2)(2x+3))}{2}=0 \quad \rightarrow \quad (x-2)(2x+3)=0$$
$$x-2=0 \quad \rightarrow \quad x=2$$
$$2x+3=0 \quad \rightarrow 2x=-3 \quad \rightarrow \quad x=-\frac{3}{2}$$
$$Dom. \quad x \neq 2 \wedge x \neq -\frac{3}{2}$$

Ejemplo3: $y = f(x) = \dfrac{3}{x^2-1}$

Solución

$$x^2-1=0 \quad \rightarrow \quad (x+1)(x-1)=0$$
$$x+1=0 \quad \rightarrow \quad x=-1$$
$$x-1=0 \quad \rightarrow \quad x=1$$
$$Dom, \quad x \neq 1, \quad x \neq -1$$

Ejemplo4: $y = k(x) = \dfrac{3x^2-6x+7}{x^2+3x+3}$

Solución

$$x^2+3x+3=0$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2-4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-12}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Esta ecuación no tiene solución en los IR, quiere decir que la función no tiene ni asíntotas verticales ni huecos, por lo tanto el dominio son todos los números reales.

$$Dom. \quad x \in lR$$

Ejemplo5: http://www.youtube.com/watch?v=opcIlP0qGTI&feature=related
Ejemplo6: http://www.youtube.com/watch?v=8eAfMqRXwbY

NOTA: Una función racional presenta discontinuidad en cada asíntota vertical y en cada hueco.

- Grafica de funciones racionales.
  Se recomienda hacer estas gráficas utilizando algún applet en línea.

Procedimiento:

1. Determine el dominio de la función.
2. Asigne a "x" valores que se encuentren a la izquierda y a la derecha de cada asíntota vertical y/o hueco. Por cada asíntota vertical y/o hueco que haya, asigne como mínimo cinco valores a su izquierda y cinco a su derecha. **Tenga en cuenta que a "x" no se le pueden asignar ni los huecos ni las asíntotas verticales.**
3. Obtenga la respectiva **y** reemplazando en la función.
4. Ubique estos puntos en el plano cartesiano.
5. Ubique las asíntotas verticales en el plano cartesiano. Las asíntotas verticales son líneas rectas verticales que se trazan por cada valor de x que haga cero el denominador de la función. Las asíntotas verticales dividen el plano cartesiano de tal manera que los puntos que se encuentren a la derecha de una asíntota vertical no se pueden unir con los puntos que se encuentren a su izquierda.
6. Ubique las asíntotas horizontales. Para ello identifique cual es la "x" de mayor exponente en la fracción y divida el coeficiente del denominador entre el coeficiente del numerador, el valor obtenido corresponde a la "y" y es la asíntota horizontal. Trace una recta horizontal en "y" igual a dicho valor.
7. Una los puntos resultantes con líneas curvas; pero dichas líneas no pueden tocar las asíntotas.
8. Si se quiere una gráfica mejor, se puede ubicar también los interceptos.

Ejemplo1: Para la función: $y = f(x) = \dfrac{5x}{x+6}$

a. Determine el dominio.
b. Determine intersecciones con los ejes.
c. Grafique.
d. Determine intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.
e. Determine si la función es continua o discontinua, en caso de que sea discontinua, indique los puntos de discontinuidad.

Solución

Dominio:

Igualando el denominador a cero: $x+6=0 \quad \rightarrow Dom.\ x \in lR-\{6\}$

Para graficar se debe dar valores a **x** a la izquierda y a la derecha de menos seis y reemplazando en la función se obtiene la respectiva **y**. Los valores se pueden ver en la siguiente tabla.

x	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
y	11	12,5	15	20	35	Asint.	-25	-10	-5	-2,5	-1

Para hallar la asíntota horizontal, la "x" de mayor exponente es "x elevada a la potencia 1". El coeficiente de "x" en el numerador es 5 y el coeficiente de "x" en el denominador es 1, se dividen, entonces la asíntota horizontal es: $y=5/1=5$

$y=5$ **Es la asíntota horizontal.**

La gráfica de esta función tiene la forma de la gráfica mostrada en la figura 13.

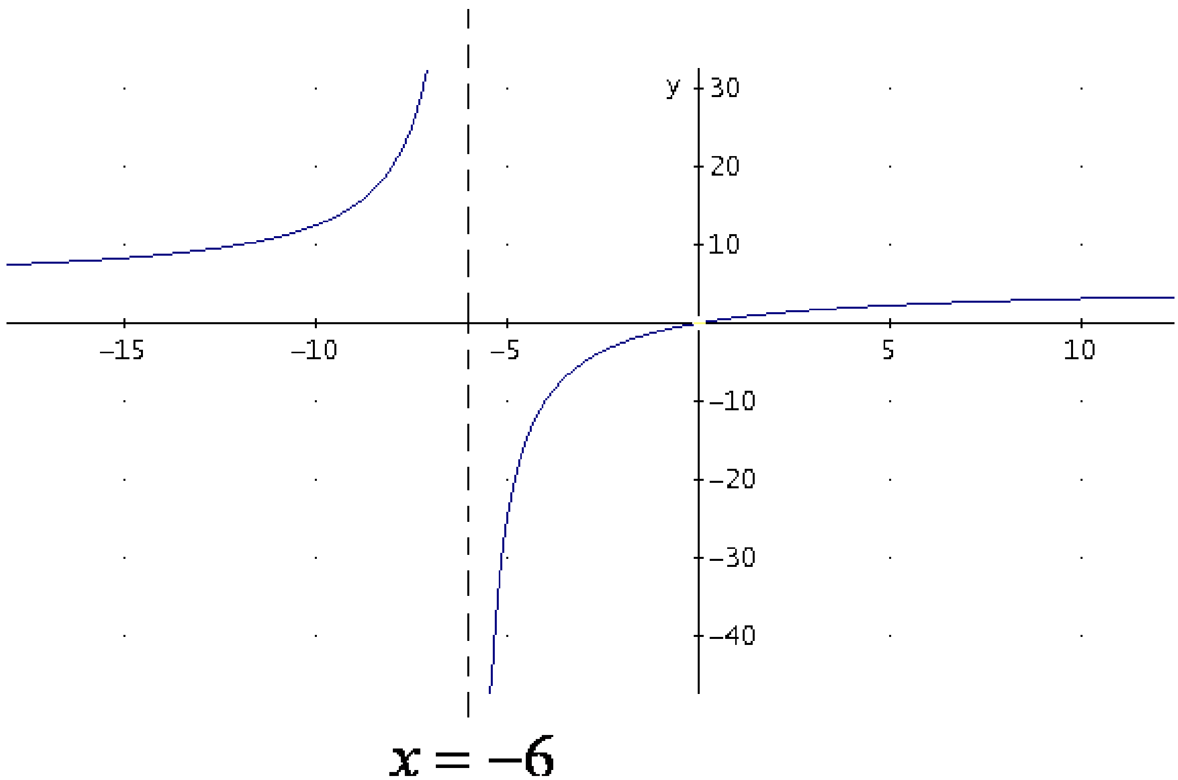


FIGURA 13. Gráfica de: $y = f(x) = \dfrac{5x}{x+6}$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Crece: $(-\infty,-6)\wedge(-6,\infty)$

La función es discontinua en x = - 6.

Ejemplo2: Para la función: $y = f(x) = \dfrac{100x}{x^2 - 10x + 9}$

a. Determine el dominio.
b. Determine intersecciones con los ejes.
c. Grafique.
d. Determine intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.
e. Determine si la función es continua o discontinua, en caso de que sea discontinua, indique los puntos de discontinuidad.

Solución

Dominio:

Igualando el denominador a cero:

$$x^2 - 10x + 9 = 0 \rightarrow (x-1)(x-9) = 0$$
$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$
$$x - 9 = 0 \rightarrow x = 9$$
$$do\min io: \quad x \in Rl - \{1, 9\}$$

Asíntota horizontal. La x de mayor exponente es x^2. En el numerador tiene exponente cero (no hay x^2 en el numerador), en el denominador su exponente es 1.

Asíntota horizontal es: $y = 0/1 = 0$

$y = 0$ **Asíntota horizontal**

Se da valores a la izquierda y a la derecha de x = 1, y a la izquierda y a la derecha de x = 9

Los resultados se observan en la siguiente tabla.

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Y	-6,15	-6,25	-6,06	-5	0	Asint.	-28,57	-25	-26,66	-31,25
X	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Y	-31,25	-40	-58,33	-114,28	Asint.	111,11	55	36,36	27,08	21,53

La gráfica se muestra en la figura 14.

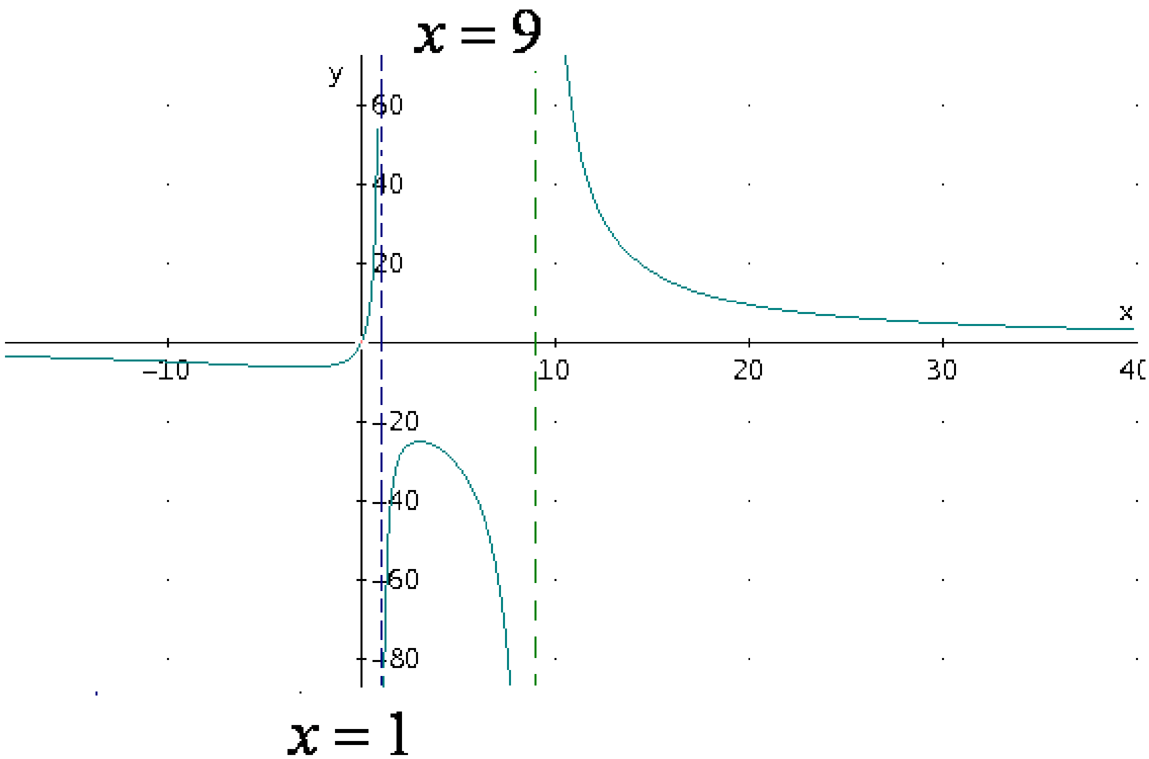


FIGURA 14 Gráfica de $y = f(x) = \dfrac{100x}{x^2 - 10x + 9}$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Decrece: $(-\infty, -3)$, $(3,9) \wedge (9, \infty)$

Crece: $(-3,1)$, $(1,3)$

La función es discontinua en x = 1 y en x = 9.

NOTA:

Si la función racional a graficar tiene como dominio todos los reales (quiere decir que no tiene polos); en este caso para hacer su gráfica podemos dar valore a x partiendo del cero (de valores a la izquierda y a la derecha del cero).

Se asigna a “x” el cero cinco valores a su izquierda y cinco valores a su derecha.

Ejemplo3:

Para la función cuya gráfica se muestra en la figura 15. Indique:

a. Intervalos en los cuales la función es continua.
b. La ecuación de cada asíntota vertical y de cada asíntota horizontal.
c. Intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.

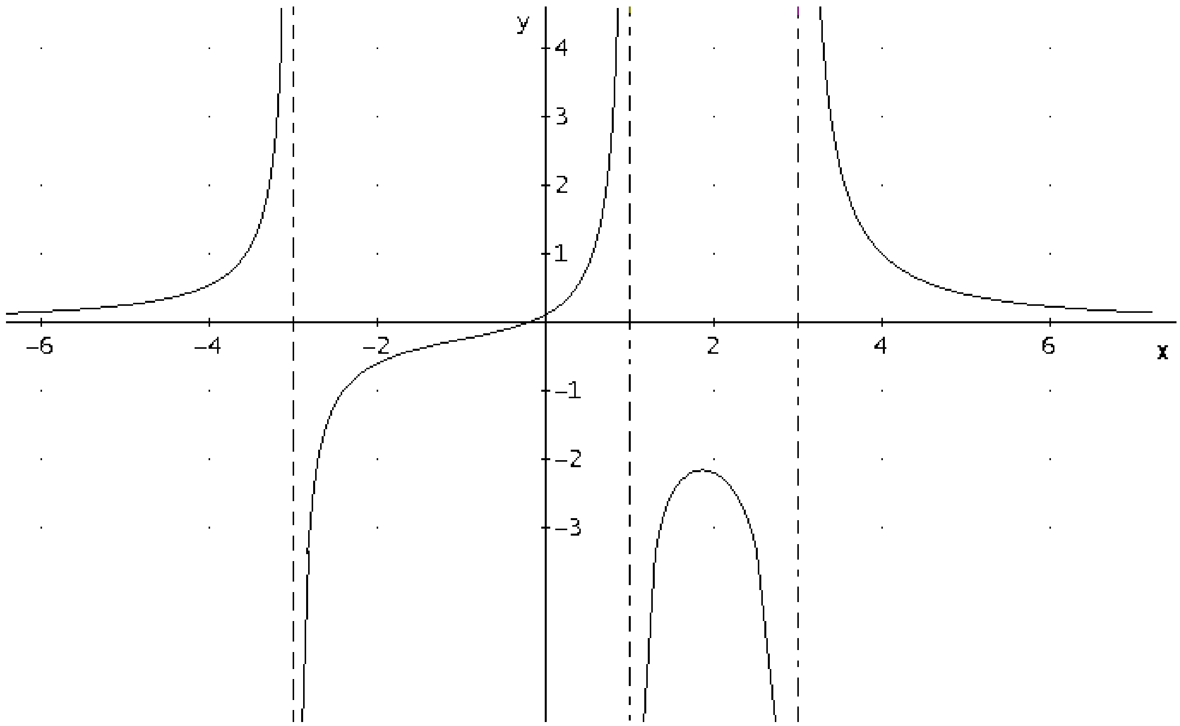


Figura 15: Gráfica de la función $y = f(x)$
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Solución

Para $y = f(x)$

a. La función es continua en : $(-\infty, -3), (-3, 1), (1, 3), (3, \infty)$
b. Asíntotas verticales: $x = -3, x = 1 \wedge x = 3$ Asíntotas horizontales: $y = 0$
c. Crece: $(-\infty, -3), (-3, 1) \ \wedge (1, 2]$ Decrece: $[2, 3) \wedge (3, \infty)$

Ejemplo4:

Para la función $y = f(x) = \frac{5-9x^2}{2x^2+3x-20}$

Determine:

a. Dominio.
b. La ecuación de las asíntotas.
c. Indique en que intervalos la función es continua.
d. Halle: $f\left(-\frac{3}{5}\right)$

Solución

A. Dominio:

$$2x^2+3x-20=0$$
$$2*-20=-40$$
$$Los\ números\ son\ 8\ y-5$$
$$2x^2+8x-5x-20=0$$
$$(2x^2+8x)-(5x+20)=0$$
$$2x(x+4)-5(x+4)=0$$
$$(x+4)(2x-5)=0$$
$$(x+4)=0 \vee (2x-5)=0$$
$$x=-4 \vee x=\frac{5}{2}$$

B. Dominio:

$$x \neq -4 \wedge x \neq \frac{5}{2}$$

Asíntotas verticales:

$$x=-4, x=\frac{5}{2}$$

Asíntotas horizontales: $y=-\frac{9}{2}$

C. Continuidad: $(-\infty,-4),\left(-4,\frac{5}{2}\right),\left(\frac{5}{2},\infty\right)$

D. $f\left(-\frac{3}{5}\right)$

$$f\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{5-9\left(-\frac{3}{5}\right)^2}{2\left(-\frac{3}{5}\right)^2+3\left(-\frac{3}{5}\right)-20}=\frac{5-9\left(\frac{9}{25}\right)}{2\left(\frac{9}{25}\right)-\frac{9}{5}-20}=\frac{5-\frac{81}{25}}{\frac{18}{25}-\frac{9}{5}-20}=\frac{\frac{125-81}{25}}{\frac{18-45-500}{25}}$$

$$=\frac{\frac{44}{25}}{-\frac{527}{25}}=-\frac{44*25}{527*25}=-\frac{44}{527}$$

$$f\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{44}{527}$$

Enlaces función racional
http://www.youtube.com/watch?v=adxHYh-0OHM&feature=fvsr

2.2.5. Función Irracional

Es una función de la forma:

$$y = f(x) = \sqrt[n]{g(x)}\,.$$

Se identifica porque tiene variable dentro de un radical.
Llamamos función irracional a aquella en la que la variable aparece elevada a exponentes racionales no enteros.

- DOMINIO:

Se presentan dos casos:
Caso #1:
Si la raíz es impar el dominio corresponde a todos los números reales: Dom. $x \in lR.$
Caso #2:
Si la raíz es par, se debe garantizar que los valores que se le asignen a “x” hagan positivo todo dentro de la raíz.

Procedimiento:

1. Plantee la inecuación $g(x) \geq 0$.
2. Se soluciona la inecuación.
3. La solución de la inecuación es el dominio de la función irracional.
4. Si la inecuación planteada no tiene solución o si toda dentro de la raíz par es positivo, quiere decir que el dominio de la función es todos los reales: $Dom \quad x \in lR.$

Ejemplo1: Determine el dominio de: $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$

Solución

Esta es una inecuación cuadrática.

PASOS:
1. Todo lo que está dentro de la raíz debe ser mayor o igual que cero, se debe plantear la inecuación: $x^2 + 2x - 15 \geq 0$

2. Encuentre los números críticos de la expresión resultante. Esto es iguale a cero y resuelva la ecuación resultante, los valores obtenidos son los números críticos de la expresión. Un número crítico es un número donde una expresión se hace cero, es decir, donde posiblemente hay cambio de signo en la expresión.

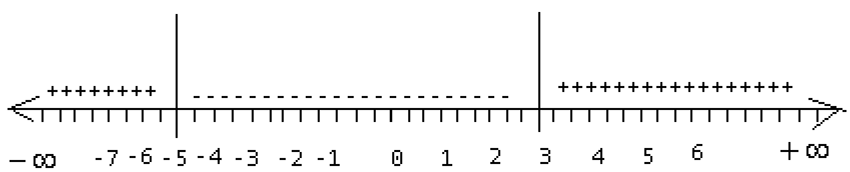
Para el ejemplo: $x^2 + 2x - 15 = 0 \rightarrow x = -5 \vee x = 3$ Estos son los números críticos.

3. Ubique los Números críticos en la recta numérica véase la figura 16.

4. Evalúe el signo de la expresión obtenida en el paso uno. Para ello se toma un número que se encuentre a la izquierda del primer número crítico, se toma un número que se encuentre entre ambos números críticos y se toma un número que se encuentre a la derecha del segundo número crítico. Estos números se reemplazan en la expresión obtenida en el paso uno y el signo del resultado se coloca en la recta numérica, véase la figura 16.

5. La respuesta o solución de la inecuación, se da tomando los intervalos que cumplan con el sentido de la desigualdad. Para ello nos fijamos en el sentido de la desigualdad de la expresión obtenida en el paso dos.

Sí dice: >0 Se toman los ++++, sin incluir los números críticos.
Sí dice: ≥ 0 Se toman los ++++, incluyendo los números críticos.
Sí dice: <0 Se toman los-------, sin incluir los números críticos.
Sí dice: ≤ 0 Se toman los ------, incluyendo los números críticos.
La solución de la inecuación es: $x \in (-\infty, -5] \cup [3, \infty)$
Este es el mismo dominio de la función: Dom. $x \in (-\infty, -5] \cup [3, \infty)$



$x=-6$
$(-6)^2+2(-6)-15=$
$36-12-15=+9$
$Re\ sultado \quad positivo$
$Colocamos +++++$

$x=0$
$(0)^2+2(0)-15=-15$
$Re\ sultado \quad Negativo$
$Colocamos -----$

$x=4$
$(4)^2+2(4)-15$
$16+8-15=+6$
$Re\ sultado \quad Positivo$
$Colocamos \quad +++++$

Figura 16. Dominio de $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Ejemplo2: Determine el dominio de: $y = f(x) = \sqrt{3x - 5}$

Solución

Se debe solucionar la siguiente inecuación:

$$3x-5\geq 0 \rightarrow 3x-5=0 \Rightarrow 3x=5 \rightarrow x=\frac{5}{3}$$

Ubicando en la recta numérica

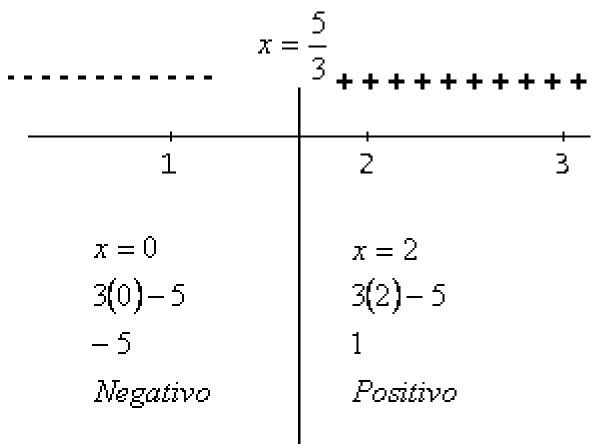


Figura 17. Dominio de la función $y=f(x)=\sqrt{3x-5}$
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

$$Dominio: \quad x\in[5/3,\infty)$$

Ejemplo3: Determine el dominio de: $y=\sqrt{x^2-9}$

Solución

Se debe solucionar la siguiente inecuación:

$$x^2-9\geq 0$$

Se debe resolver la ecuación:

$$x^2-9=0$$

$$x^2-9=0 \Rightarrow (x+3)(x-3)=0 \Rightarrow x+3=0 \vee x-3=0$$

$$x = -3 \vee x = 3$$

Ubicando estos dos valores en la recta numérica y dando valores a la izquierda y a la derecha de cada uno de ellos tenemos:

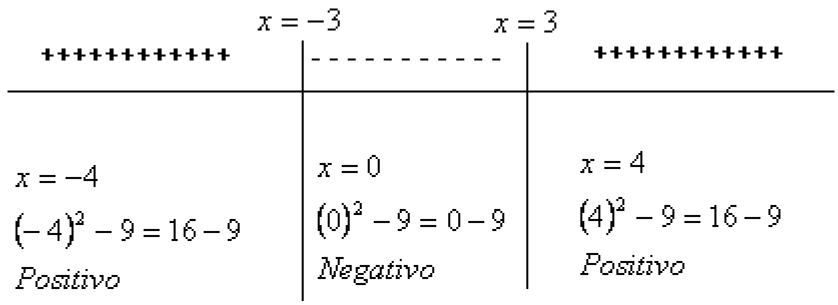


Figura 18. Dominio de la función $y = \sqrt{x^2 - 9}$
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

El dominio es:

$$x \in (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$$

Ejemplo4: Determine el dominio de: $y = g(x) = \sqrt{6x^2 - 7x - 3}$

Solución

Se debe solucionar la desigualdad:

$$6x^2 - 7x - 3 \geq 0$$

Se debe resolver la ecuación:

$$6x^2 - 7x - 3 = 0$$

$$\frac{6}{6}\left(6x^2 - 7x - 3\right) = 0 \Rightarrow \frac{36x^2 - 7(6x) - 18}{6} = 0 \Rightarrow \frac{(6x-9)(6x+2)}{6} = 0$$

$$\frac{3(2x-3)2(3x+1)}{6} = 0 \Rightarrow (2x-3)\,(3x+1) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \vee 3x + 1 = 0$$

$$2x-3=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \vee 3x+1=0 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$$

La solución de la ecuación es:

$$x=\frac{3}{2} \vee x=-\frac{1}{3}$$

Ubicamos estos dos números en la recta numérica y determinamos el signo a la izquierda y a la derecha de cada uno de ellos.

	$x=-\frac{1}{3}$	$x=\frac{3}{2}$
++++++++++++	- - - - - - - - - - - -	++++++++++++
$x=-1$	$x=0$	$x=2$
$6(-1)^2-7(-1)-3$	$6(0)^2-7(0)-3$	$6(2)^2-7(2)-3$
$6+7-3$	-3	$24-14-3$
Positivo	*Negativo*	*Positivo*

Figura 19. Dominio de la función $y=g(x)=\sqrt{6x^2-7x-3}$
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

El dominio de la función es:

$$Dom.\ x \in = \left(-\infty,-\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2},\infty\right)$$

Ejemplo5: Determine el dominio de: $y=g(x)=\sqrt[7]{5x-7}$

Solución

Como la raíz es impar el dominio es todos los números reales

$$Dom. \quad x \in lR$$

Ejemplo6: http://www.youtube.com/watch?v=BCjQrBEBGdU
Ejemplo7: http://www.youtube.com/watch?v=QUCCVAEu4TM

Ejemplo8: http://www.youtube.com/watch?v=GwkbhPJiHDk&feature=related

- **GRÁFICA DE LA FUNCIÓN IRRACIONAL:**
  El procedimiento a seguir es:

1. Determine el dominio de la función.
2. Asigne valores a **x** que estén dentro de cada intervalo empezando por los extremos. Por cada intervalo asigne aproximadamente cinco valore.
3. Para cada valor se obtiene la respectiva **y** reemplazando en la función.
4. Se ubican estos puntos en el plano cartesiano.
5. Se unen los puntos mediante líneas.
6. Los puntos de intervalos diferentes no se pueden unir entre sí.

Ejemplo1: Para la función: $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 5}$

a. Determine el dominio.
b. Grafique.
c. Determine intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
d. Determine si es continuo o discontinuo.

Solución

Se debe determinar primero el dominio.

$$x^2 + 6x + 5 \geq 0$$
$$x^2 + 6x + 5 = 0$$
$$(x+1)(x+5) = 0$$
$$x + 1 = 0 \vee x + 5 = 0$$
$$x = -1 \vee x = -5$$

Ubicando en la recta numérica

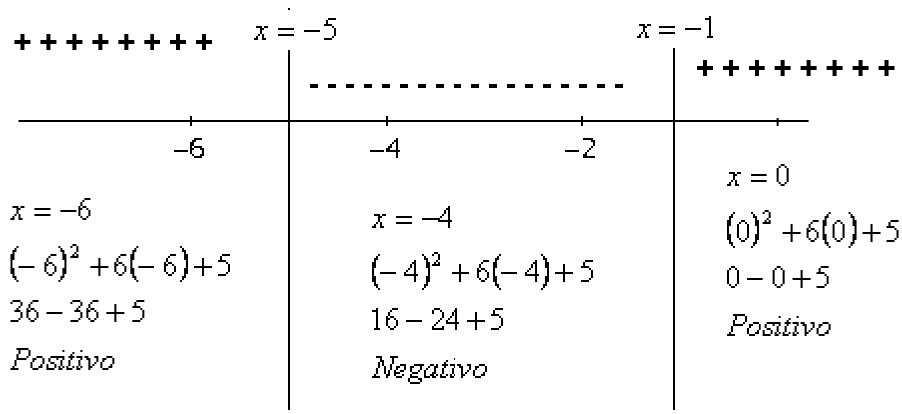


Figura 20. Dominio de la función $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 5}$

El dominio queda.

$$Dom.\ x \in (-\infty, -5] \cup [-1, \infty)$$

Los valores de **x** que a dar son: El menos cinco y cuatro valores a la izquierda de x = - 5 y el menos uno y cuatro valores a la derecha de x = -1.
La gráfica es la mostrada en la figura 21

x	-9	-8	-7	-6	-5	-1	0	1	2	3
y	5,65	4,58	3,46	2,23	0	0	2,23	3,46	4,58	5,65

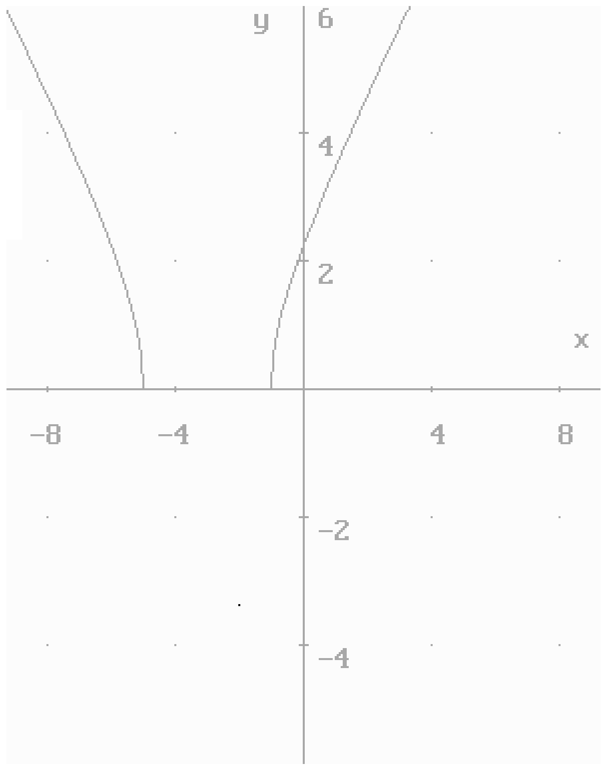


Figura 21. Gráfica de $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 5}$
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Crece: $(-1, \infty)$
Decrece: $(-\infty, -5)$

Ejemplo2: Para la función $y = f(x) = \sqrt{2 - x}$

a. Determine el dominio.
b. Grafique.
c. Determine intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
d. Determine si es continuo o discontinuo.

Solución

Dominio:

$$2 - x \geq 0 \rightarrow -x \geq -2 \rightarrow x \leq 2$$

$$Dom. \quad x \in (-\infty, 2]$$

Se da valores empezando en 2 y menores, se puede ver en la tabla.

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1,73	1,41	1	0

La gráfica se muestra en la figura 22

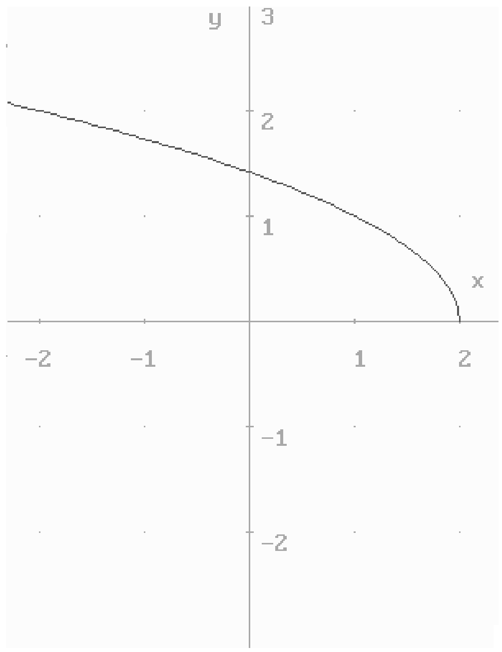


FIGURA 19 Gráfica de: $y = f(x) = \sqrt{2 - x}$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Decrece: $(-\infty, 2)$

La función es continua.

NOTA:

Si el dominio de una función irracional son todos los números reales (esto se presenta cuando la raíz es impar o cuando la inecuación no tiene solución). Para hacer su gráfica se puede tomar como referencia el cero (De valores a **X** a la izquierda y a la derecha del cero).

NOTA:

Una función irracional es continua en todo su dominio.

Ejemplo3:

Para la función $y = \sqrt{-3x^2 - 10x + 48}$

Determine:

a. Dominio.
b. Halle: $f\left(-\frac{8}{3}\right)$

Solución

A. Dominio

$$-3x^2 - 10x + 48 \geq 0$$
$$-3x^2 - 10x + 48 = 0$$
$$3x^2 + 10x - 48 = 0$$
$$3 * -48 = -144$$
$$Los\ números\ son\ el\ 18\ y\ el - 8$$
$$3x^2 + 18x - 8x - 48 = 0$$
$$3x^2 + 18x - 8x - 48 = 0$$
$$3x(x+6) - 8(x+6) = 0$$
$$(x+6)(3x-8) = 0$$
$$(x+6) = 0 \vee (3x-8) = 0$$
$$x = -6 \vee x = \frac{8}{3}$$

Dominio:

$$x \in \left[-6, \frac{8}{3}\right]$$

B. $f\left(-\frac{8}{3}\right)$

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = \sqrt{-3\left(-\frac{8}{3}\right)^2 - 10\left(-\frac{8}{3}\right) + 48} = \sqrt{-3\left(\frac{64}{9}\right) + \frac{80}{3} + 48}$$
$$= \sqrt{-\frac{64}{3} + \frac{80}{3} + 48} = \sqrt{\frac{-64 + 80 + 144}{3}}$$

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = \sqrt{\frac{160}{3}}$$

Función algebraica

Se llama función algebraica a una función f que puede expresarse como combinaciones de sumas, restas, divisiones, potencias o raíces de funciones polinómicas.

Entonces todas las funciones polinómicas, racionales e irracionales son algebraicas, pero también lo son cualquier combinación de estas.

Ejemplo1:

$$y = g(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{5x+1}}$$

Ejemplo2:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{5x+2}$$

Para determinar el dominio de estas funciones se debe tener en cuenta el tipo de funciones que se están combinando.

Determine el dominio de las siguientes funciones

Ejemplo1: $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$

Solución

Se debe cumplir que $x \geq 0 \wedge x-1 \neq 0$
Es decir: $x \geq 0 \wedge x \neq 1$
Ubicando en la recta numérica se tiene:

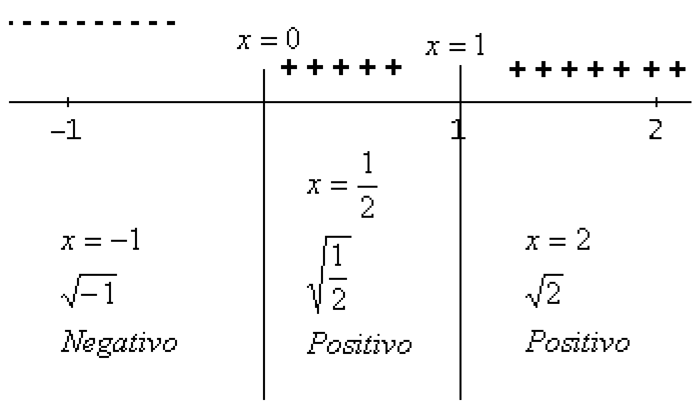


Figura 23. Dominio de la función $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Dominio: $x \in [0,1) \cup (1,\infty]$

Ejemplo2: $y = f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-9}{2x-1}}$

Solución

Se debe cumplir que:

$$\frac{x^2-9}{2x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x^2-9=0 \wedge 2x-1=0$$
$$x=-3 \vee x=3 \vee x=1/2$$

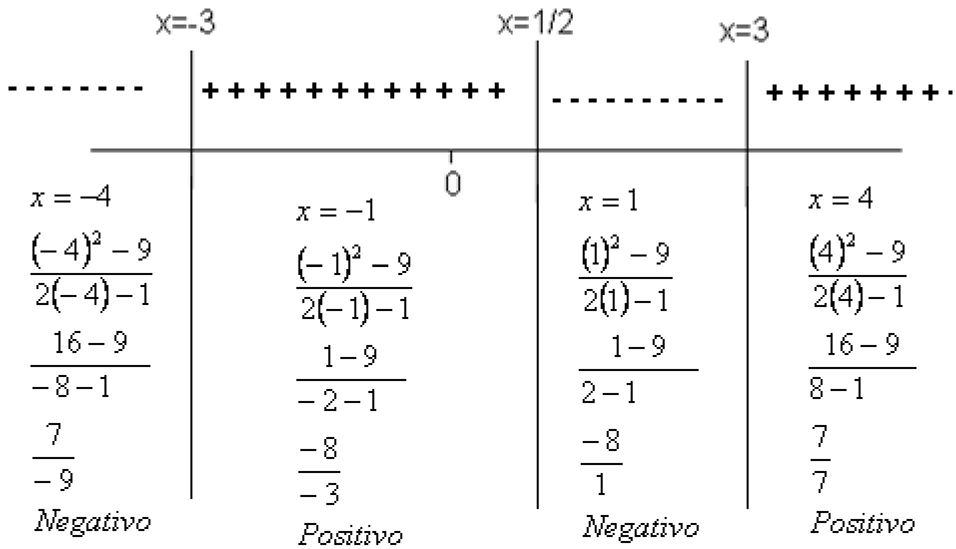


Figura 24. Dominio de $y = f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-9}{2x-1}}$

Dominio: $x \in \left[-3, \dfrac{1}{2}\right) \cup [3, \infty)$

En $x = \dfrac{1}{2}$ el intervalo es abierto, ya que en dicho valor el denominador se hace cero, es decir, $x = \dfrac{1}{2}$ es un polo.

Ejemplo3: $y = g(x) = \dfrac{20x-7}{\sqrt{5-3x}}$

Solución

Se debe cumplir que $5-3x>0$

$$5-3x=0$$
$$5=3x$$
$$\frac{5}{3}=x$$

Ubicando en la recta numérica:

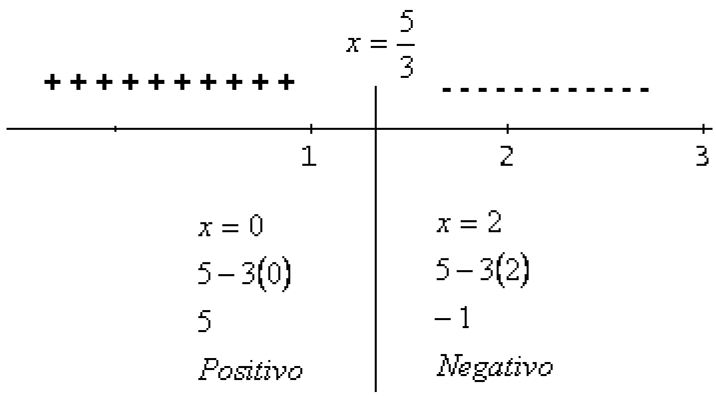


Figura 25. Dominio de la función $y=g(x)=\dfrac{20x-7}{\sqrt{5-3x}}$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Dominio: $x\in\left(-\infty,\dfrac{5}{3}\right)$

NOTA:

Una función algebraica es continua en todo su dominio.

Para graficar estas funciones se verán más adelante técnicas apropiadas, utilizando la derivada. Se puede hacer la gráfica, utilizando el applet de la página: http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/NUMERICO/index.htm
También lo podemos hacer utilizando una herramienta informática como el Excel ó el Derive.

Enlaces dominio funciones algebraicas.

http://www.youtube.com/watch?v=N-5-UZszfWo&feature=fvw
http://www.youtube.com/watch?v=IOY19h2EUqk&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=y7pyPffU0kA&feature=fvsr

FUNCIONES TRASCENDENTES

Son funciones que no son algebraicas, entre estas están las funciones exponenciales, las funciones trigonométricas, las funciones logarítmicas, las funciones trigonométricas inversas y las funciones hiperbólicas entre otras.

- FUNCIÓN EXPONENCIAL
  http://www.youtube.com/watch?v=cXnw6kzqASI&feature=related

Es una función de la forma:

$$y = f(x) = b^{g(x)} \quad Exponencial \quad general$$
$$Con \quad b > 0, \quad b \neq 1$$

- DOMINIO:

El dominio depende de g(x).
Ejemplos: Determine el dominio de las siguientes funciones:

Ejemplo1: $y = f(x) = 5^x$

Solución

Es una función exponencial que tiene en el exponente un polinomio, su dominio corresponde a todos los números reales.

Dom. $x \in lR$

Ejemplo2: $y = f(x) = e^{2x+1}$

Solución

Como en el exponente hay una función lineal: Dom. $x \in lR$.

Ejemplo3: $y = f(x) = e^{\frac{5x}{x-4}}$

Solución

Como en el exponente hay una función racional, el dominio será todos los reales menos las asíntotas verticales y/o los huecos.

$$x-4=0 \Rightarrow x=4$$

Dom. $x \in lR-\{4\}$.

- **Gráfica de funciones exponenciales:**

Si el dominio es $x \in lR$ para su grafica asigne a **X** el cero y aproximadamente 2 ó 3 valores a su izquierda y 2 ó 3 valores a su derecha.

Si el dominio no es todos los reales, para graficar siga las pautas de la gráfica de la expresión que está en el exponente.

Ejemplo1:

Para la función: $y=f(x)=5^x$

1. Determine el dominio: Dom. $x \in lR$.
2. Determine los interceptos:

x = 0, $y=5^0=1 \quad (0,1)$

Intersección con el eje **y**. Con el eje **x** no tiene intersecciones, ya que si y = 0 queda $0=5^x \Leftrightarrow \log_5 0=x$, el logaritmo de cero no existe, por lo tanto la ecuación no tiene solución**.**

3. Grafique. Los puntos para la gráfica se muestran en la siguiente tabla y la gráfica se muestra en la figura 26.

Si x = - 3, $y=5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}=0.008$

Si x = - 2, $y=5^{-2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}=0.04$

Si x = - 1, $y=5^{-1}=\frac{1}{5}=0.2$

Si x = 0, $y=5^0=1$

$Si\ x=1,\ y=5^1=5$

$Si\, x=2,\ y=5^2=25$

$Si\, x=3,\ y=5^3=125$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	0,008	0,04	0,2	1	5	25	125

4. Determine intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento. Crece $(-\infty, \infty)$

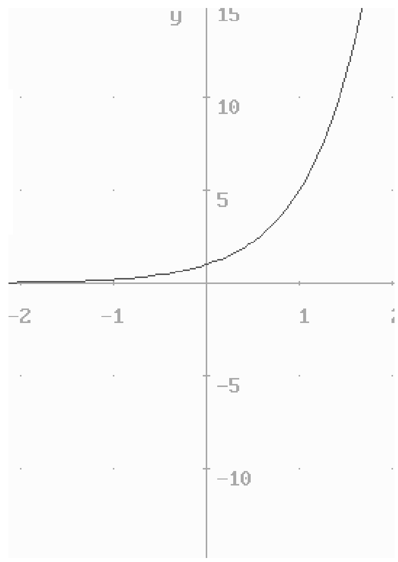


FIGURA 26. Gráfica de: $y = f(x) = 5^x$
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Ejemplo2:

Para la función: $y = f(x) = 3^{5x+1}$

1. Determine el dominio: El dominio es todos los reales, ya que en el exponente hay un polinomio. Dom. $x \in lR$.

2. Determine los interceptos:

$$x = 0 \Rightarrow y = 3^{5(0)+1} = 3^1 = 3 \Rightarrow (0,3)$$

Esta es la intersección con el eje **y**.

Con el eje **x** no tiene intersecciones, ya que si y = 0, la ecuación $0 = 3^{5x+1}$, no tiene solución.

3. Grafique.

Para hacer la gráfica, se debe asignar a x: El cero y cinco valores a su izquierda y cinco a su derecha, como lo muestra la tabla.

X	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	3	729	17714	43046721	10460353203	2541865828329

La grafica se muestra en la figura 27.

3. Determine intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.

La función crece $(-\infty,\infty)$

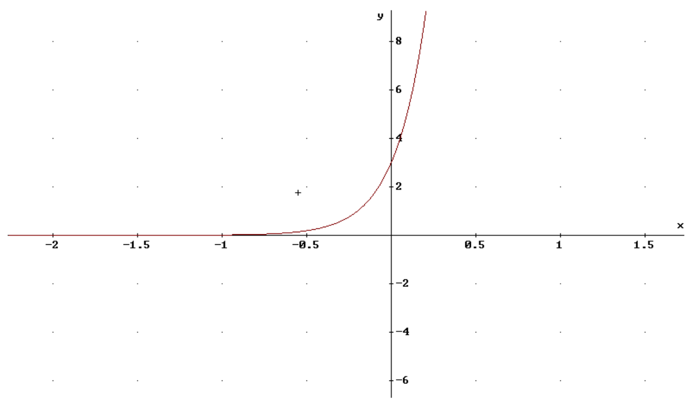


Figura 27: Grafica de $y = f(x) = 3^{5x+1}$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Ejemplo3:

Para la función: $y = f(x) = e^{\frac{2x-1}{x^2-4}}$

4. Determine el dominio:

Como en el exponente hay una función racional para determinar su dominio se hace el denominador del exponente igual a cero

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \vee x+2 = 0$$
$$x = 2 \vee x = -2$$

Dominio: $x \neq 2 \wedge x \neq -2$

1. Determine interceptos:

$$x = 0 \Rightarrow y = e^{\frac{2(0)-1}{(0)^2-4}} \Rightarrow y = e^{\frac{-1}{-4}} \Rightarrow y = e^{1/4} \Rightarrow y = 1{,}284...$$

$(0{,}1{,}284...)$ Es el intercepto con el eje **y**.

Con el eje **x** no tiene intercepto.

2. Grafique.

Para la gráfica asigne a x cinco valores a la izquierda de –2, cinco valores entre –2 y 2 y cinco valores a la derecha de 2. A continuación se muestra estos valores en la tabla.

X	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
Y	0.7	0.6	0.5	0.4	0.2	nada	2.7	1.2	0.7	nada	2.7	1.7	1.5	1.4	1.3

La grafica se muestra en la figura 28.

3. Determine intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.

La función crece $(-\infty, \infty)$

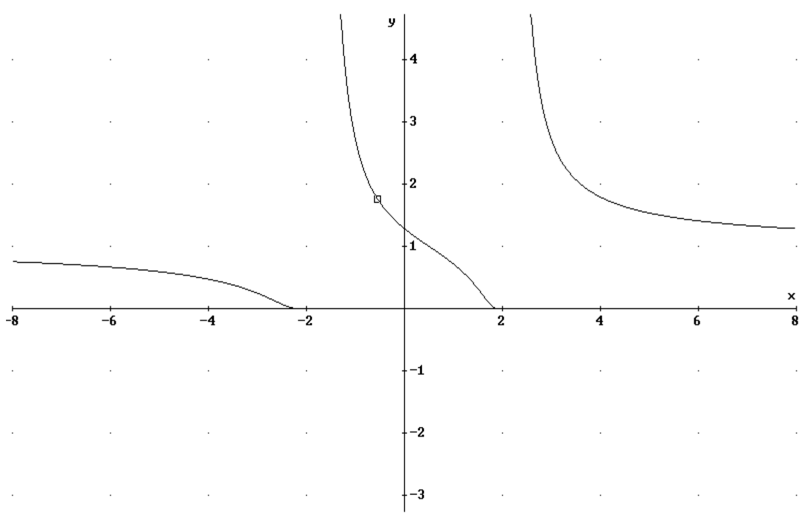


Figura 24. Grafica de $y = f(x) = e^{\frac{2x-1}{x^2-4}}$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Ejemplo4: http://www.youtube.com/watch?v=Uee7HeiCkt4
Ejemplo5: http://www.youtube.com/watch?v=pogo0SmmSbE

Ejemplo6: Solución de ecuaciones exponenciales.
http://www.youtube.com/watch?v=aPVTZAxOykY&feature=PlayList&p=77286F52BE3722A4&index=0&playnext=1
Ejemplo7: Solución de ecuaciones exponenciales.
http://www.youtube.com/watch?v=wW7UQGAw_sA&feature=PlayList&p=77286F52BE3722A4&playnext=1&playnext_from=PL&index=2

NOTA:
Una función exponencial es continua en todo su dominio.

- FUNCIÓN LOGARÍTMICA

http://www.youtube.com/watch?v=FGwxP3F5Qj0
http://www.youtube.com/watch?v=MMXOEhzSsYY
http://www.youtube.com/watch?v=avU9orGN_oc

Es una función de la forma:

$$y = f(x) = \log_b g(x).$$
$$Con \quad b > 0, \quad b \neq 1$$

- **DOMINIO:**

Para hallar el dominio se debe resolver la inecuación: $g(x) > 0$

Determine el dominio y los interceptos de las siguientes funciones:

Ejemplo 1: $y = f(x) = \log_3 x$

Solución

DOMINIO: Se debe plantear y solucionar la inecuación: $x > 0$ Dom. $x \in (0, \infty)$.

INTERCEPTOS:
Con el eje **y** si x = 0, $y = \log_3 0$ No existe, no hay intersecciones con el eje y.
Con el eje **x**: $y = 0 \Rightarrow 0 = \log_3 x = 0 \Rightarrow x = 3^0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ (1, 0).

Ejemplo 2: $y = f(x) = \log_2(2x - 3)$

Solución

DOMINIO: $2x-3>0 \Rightarrow 2x-3=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$

Ubicando en la recta numérica:

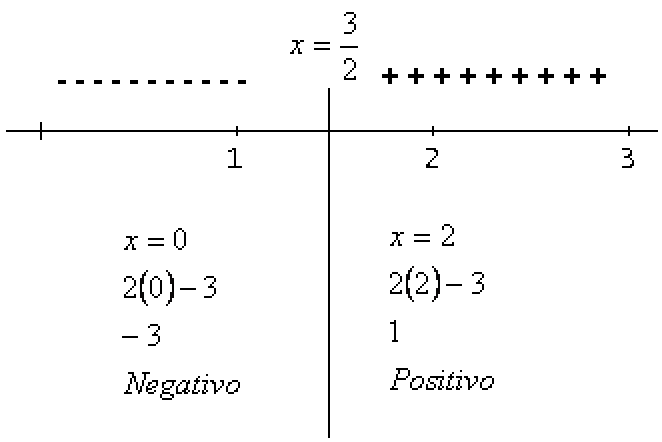


Figura 29. Dominio de $y=f(x)=\log_2(2x-3)$
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

INTERCEPTOS:

Si $x=0 \Rightarrow y=\log_2(2(0)-3)=\log_2(-3)\quad No \quad existe$. No hay intersección con el eje **y**.

Si $y=0 \Rightarrow 0=\log_2(2x-3) \Rightarrow 2x-3=2^0$

2x-3=1, 2x= 1+3, 2x=4, x=4/2, x=2

(2,0) Intersección con el eje X

Ejemplo 3: $y=f(x)=\log\left(x^2-4\right)$

Solución

DOMINIO: $x^2-4>0$

$$x^2-4=0 \Rightarrow (x+2)(x-2)=0 \Rightarrow x+2=0 \vee x-2=0$$
$$x=-2 \vee x=2$$

Ubicando en la recta numérica:

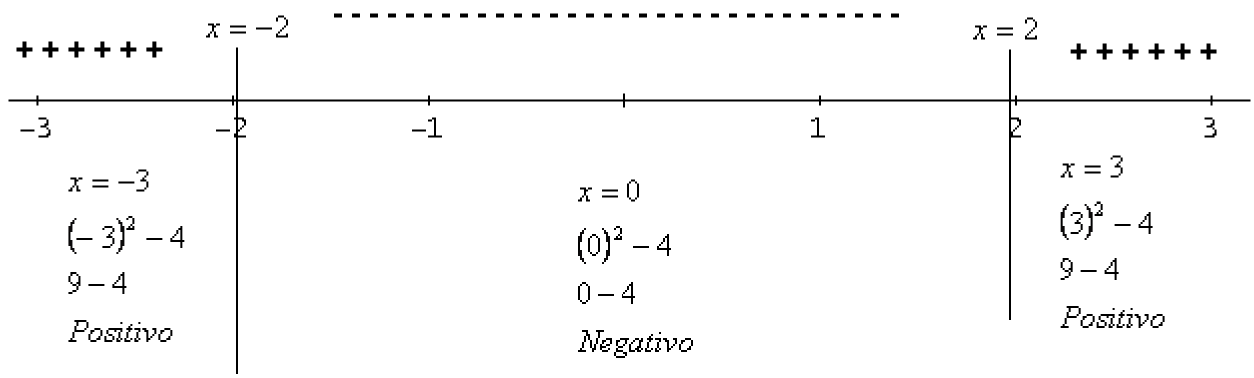


Figura 30. Dominio de $y = f(x) = \log\left(x^2 - 4\right)$
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

$$Dom.\quad x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

INTERCEPTOS:

Si $x = 0 \Rightarrow y = \log((0)^2 - 4) = \log(-4)$ *no existe*. No hay intersección con el eje **y**.

Si $y = 0 \Rightarrow 0 = \log(x^2 - 4) \Rightarrow x^2 - 4 = 10^0$

$x^2 - 4 = 1 \Rightarrow x^2 - 4 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 5 = 0$

$x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$

$(\sqrt{5}, 0) \wedge \left(-\sqrt{5}, 0\right)$ Intersecciones con el eje x.

Ejemplo 4: $y = \ln(5x + 10)$

Solución

DOMINIO: $5x + 10 > 0$

$$5x + 10 = 0 \Rightarrow 5x = -10 \Rightarrow x = -10/5 \Rightarrow x = -2$$

$$Dom.\quad x \in (-2, \infty)$$

INTERCEPTOS:

Si $x = 0 \Rightarrow y = \ln(5(0) + 10) \Rightarrow y = \ln 10 \Rightarrow y = 2{,}302 \Rightarrow (0,\quad 2{,}302\ldots)$ con el eje y.

Si $y = 0 \Rightarrow 0 = \ln(5x + 10) \Rightarrow 5x + 10 = e^0$

$5x + 10 = 1 \Rightarrow 5x = 1 - 10 \Rightarrow 5x = -9 \Rightarrow x = -9/5$

$(-9/5,0)$ Con el eje **x**.

Ejemplo 5: http://www.youtube.com/watch?v=h-6XK99tcVo
Ejemplo 6: http://www.youtube.com/watch?v=ugxhemt8fcI&feature=related

ASPECTOS A TENER EN CUENTA PARA OPERAR CON LOGARITMOS:

La calculadora solo tiene dos teclas para trabajar logaritmos:
La tecla $\log$ que significa $\log_{10}$
La tecla $\ln$ que significa $\log_e$
Extraer log o ln con estas calculadoras es sencillo.
En una calculadora Casio $fx-82MS$ o similar, que se identifican porque ellas operan igual que como se escribe, el procedimiento es el siguiente:

Ejemplo1:
Obtenga:

Solución

- $\log 20$. Digite la tecla $\log$, digite el número 20, digite la tecla igual y el resultado obtenido es: 1.30109996
  La secuencia es:

$\boxed{\log}$ $\boxed{2}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ 1.301029996

Ejemplo 2: $\ln 135$
Obtenga:

Solución

$\ln 135$. Digite la tecla $\ln$, digite el número 135, digite la tecla igual, el resultado obtenido es: 4.905274778

Cuando la base del logaritmo es diferente a 10 o del número e, se debe hacer cambio de base, para ello se aplica la siguiente fórmula:

$$\log_A B = \frac{\ln B}{\ln A} = \frac{\log B}{\log A}$$

Ejemplos:

Calcule los siguientes logaritmos:

- $\log_2 24 = \dfrac{\log 24}{\log 2} = \dfrac{\ln 24}{\ln 2} = 4.584962501$
- $\log_3 625 = \dfrac{\log 625}{\log 3} = \dfrac{\ln 625}{\ln 3} = 5.859894083$

- GRAFICA DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS:

Se debe asignar valores a **X** dentro de cada intervalo, se recomienda asignar a **X** aproximadamente cinco valores por intervalo, empezando en un valor ligeramente mayor o menor que cada extremo del intervalo.

Los extremos de cada intervalo son asíntotas verticales.

Ejemplo 1: Para la función: $y = f(x) = \log_2 x$

1. Determine el dominio:

Solución

$$x > 0$$

Dom. $x \in (0, \infty)$.

2. Determine interceptos:

Solución

Con el eje x:

Si y = 0, $0 = \log_2 x \Rightarrow 2^0 = x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow Inter\sec ción : (1{,}0)$

No tiene con el eje y, ya que si x = 0, $y = \log_2 0,\ no\ existe$.

3. Grafique:
   Los valores se muestran en la tabla, la gráfica se muestra en la figura 31.
   x = 0 es una asíntota vertical

4. Determine intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento. Crece $(0, \infty)$

X	0,2	0,5	1	2	3	4
Y	-2,32...	-1	0	1	1,58...	2

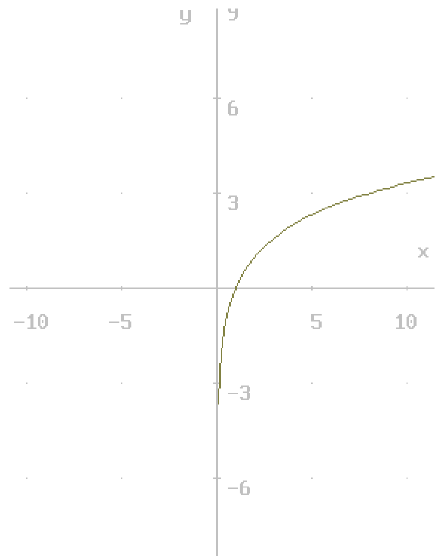


FIGURA 31. Gráfica de $y = f(x) = \log_2 x$
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Ejemplo2:

Para la función: $y = f(x) = \log_5(2x - 10)$

1. Determine el dominio:

Solución

$$2x - 10 > 0$$
$$2x - 10 = 0 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 10/2 \Rightarrow x = 5$$

Dom. $x \in (5, \infty)$.

2. Determine interceptos:

Solución

Si x = 0, $y = \log_5(2(0) - 10) = \log_5(-10)$ *No existe*

No tiene con el eje **y.**

Con el eje **x** Si y = 0,

$$0=\log_5(2x-10)\Rightarrow 5^0=2x-10\Rightarrow 1=2x-10\Rightarrow 1+10=2x$$

$$11=2x\Rightarrow \frac{11}{2}=x$$

Intercepto con el eje x es: (11/2,0).

3. Grafique:

Los valores se muestran en la tabla, la gráfica se muestra en la figura 32.

x = 5 es una asíntota vertical.

X	5	6	7	8	9	10	11
y	Asíntota vertical.	0.43...	0.86...	1.11...	1.29...	1.463...	1.54...

4. Determine intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento. Crece

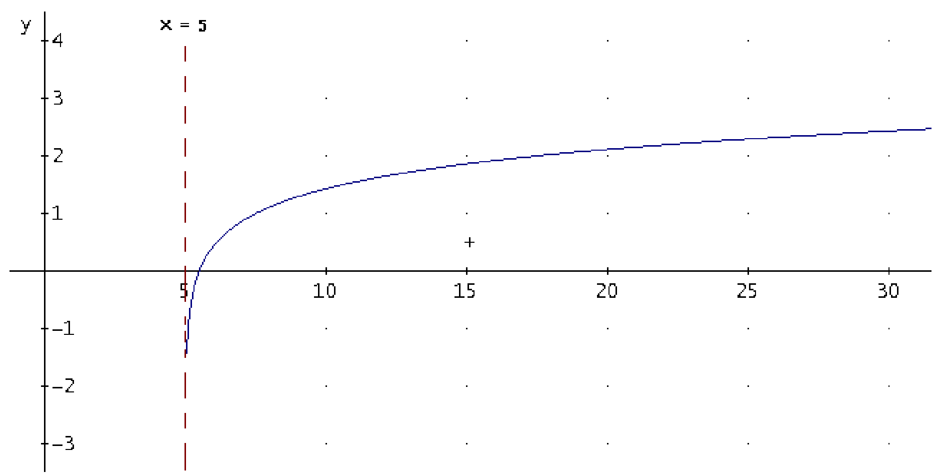


Figura 26. Grafica de $y=f(x)=\log_5(2x-10)$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

NOTA:

Una función logarítmica es continua en todo su dominio.

En el siguiente enlace presentan una visión de las funciones cuadráticas, logarítmicas y exponenciales.

http://www.youtube.com/watch?v=bSgmlSW-RVY&feature=related

2.2.6. Función definida por tramos

Este tipo de funciones también reciben el nombre de:
FUNCIÓN DEFINIDA POR PARTES O FUNCIÓN DEFINIDA POR TRAMOS O FUNCIÓN SECCIONALMENTE DEFINIDA.

Ejemplo1: Grafique la función:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 - x & si \ x \leq 1 \\ x^2 & si \ \ x > 1 \end{cases}$$

Solución

Cuando $x \leq 1$ Se debe utilizar $f(x) = 1 - x$, como es una línea recta se asigna a dos valores a x, el 1 y el menos dos para hacer su gráfica.

x	1	-2
$y = 1 - x$	0	3

El valor correspondiente a $x = 1$ si hace parte de esta gráfica, por esto se coloca en dicho punto un punto lleno.

Cuando $x > 1$, se debe utilizar $f(x) = x^2$, es una parábola, se da a x valores de 1 en adelante:

x	1	2	3	4	5
$y = x^2$	1	4	9	16	25

Tenga en cuenta que para este tramo el valor $x = 1$ no hace parte de esta figura, para indicar esto en la gráfica se hace con un punto hueco.
La gráfica se muestra en la figura 33.

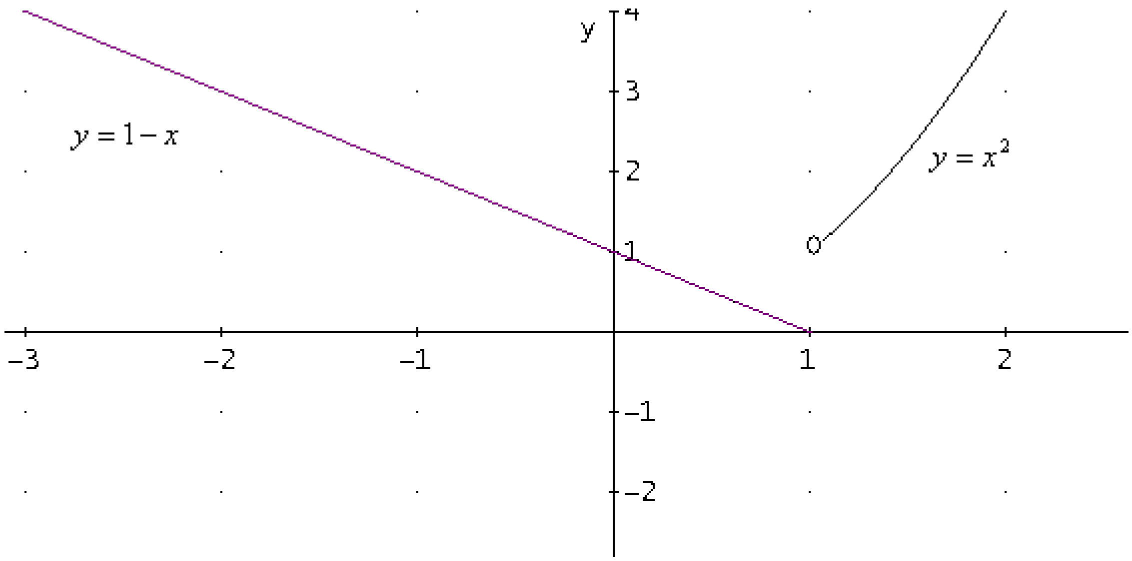


Figura 33. Grafica de la función: $y = f(x) = \begin{cases} 1 - x \ si \ x \le 1 \\ x^2 \ \ si \ \ x > 1 \end{cases}$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Ejemplo2: Para la función:

$$y = f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & si \quad x \le -2 \\ x^2 + 1 & si \quad x > -2 \end{cases}$$

Halle:

$$f(0), \quad f(-1), \quad f(-2), \quad f(10), \quad f(-5), \; f(-2)$$

Solución

Como $x = 0$ es mayor que – 2, debemos reemplazar en el tramo: $x^2 + 1$

$$f(0) = (0)^2 + 1 = 1$$

Como $x = -1$ es mayor que – 2, debemos reemplazar en el tramo: $x^2 + 1$

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

Como $x = 10$ es mayor que – 2, debemos reemplazar en el tramo: $x^2 + 1$

$$f(10) = (10)^2 + 1 = 100 + 1 = 101$$

Como $x = -5$ es menor que – 2, debemos reemplazar en el tramo: $3x + 2$

$$f(-5) = 3(-5) + 2 = -15 + 2 = -13$$

Como $x = -2$ es igual a – 2, debemos reemplazar en el tramo: $3x + 2$

$$f(-2) = 3(-2) + 2 = -6 + 2 = -4$$

Grafique:

Solución

Para graficar esta función se da 5 valores a x menores o iguales a – 2 (incluyendo el – 2) y se reemplazan en $3x + 2$. Y se da 5 valores a x mayores que – 2 (sin incluir el – 2) y se reemplazan en $x^2 + 1$.

Para ello se completa la siguiente tabal de valores:

x	-6	-5	-4	-3	-2
$y = 3x + 2$	-16	-13	-10	-7	-4
x	-1	0	1	2	3
$y = x^2 + 1$	2	1	2	5	10

La grafica es la mostrada en la figura 34.

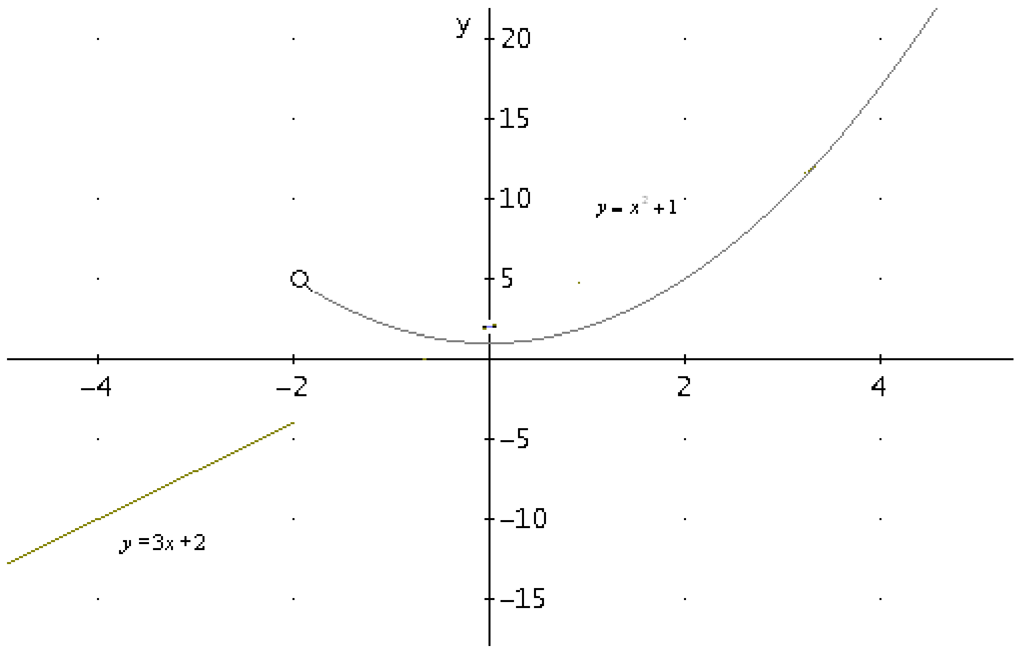


Figura 34.

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN: $y = f(x) = \begin{cases} 3x+2 & si \quad x \leq -2 \\ x^2+1 & si \quad x > -2 \end{cases}$

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Enlaces para funciones por tramos

http://www.youtube.com/watch?v=jkUW3dtMSyU&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=F8lDKlw4N-U&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=5Z52EpuyYOw&feature=related

2.2.6.1 Algunas funciones especiales:

- **Función valor absoluto de x** que se escribe como:
  $y = f(x) = |x|$

Esta función toma cualquier número y lo convierte a positivo.
Se define así:

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x \; si \; x \geq 0 \\ -x \; si \; x < 0 \end{cases}$$

El dominio de esta función es todos los reales.

Ejercicio: Grafique esta función.

Ejemplo:

Si $y = f(x) = |x|$

Halle:

1. $f(2) = |2| = 2$
2. $f(-3) = |-3| = 3$
3. $f(0) = |0| = 0$
4. $f(-3/5) = \left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$

- **Función mayor entero menor o igual a x.**

  $y = f(x) = [\![x]\!]$

Esta función toma cualquier número y lo convierte en el entero más próximo menor o igual que el número de entrada.
El dominio de esta función es todos los números reales

Ejemplo:

Si $y = f(x) = [\![x]\!]$

Halle:

1. $f(5) = [\![5]\!] = 5$
2. $f(9.5) = [\![9.5]\!] = 9$
3. $f(0) = [\![0]\!] = 0$
4. $f(-4.65) = [\![-4.65]\!] = -5$
5. $f(2/5) = [\![2/5]\!] = [\![0.4]\!] = 0$
6. $f(\sqrt{30}) = [\![\sqrt{30}]\!] = [\![5.47..]\!] = 5$

Queda como ejercicio graficar esta función e indicar si es continua o discontinua, en caso de ser discontinua indique en que valores de x lo es.

- **Función signo de x:**

$$f(x) = signo(x)$$

Se define como:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x > 0 \\ 0, & si \quad x = 0 \\ -1, & si \ x < 0 \end{cases}$$

Para la función halle:

1. $f(10) = 1$
2. $f(-2) = -1$
3. $f(0) = 0$
4. $f(\sqrt{3}) = 1$
5. $f(-2/3) = -1$

Ejercicio 2.

1. Determine el dominio, los interceptos y grafique cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 6x^2 - 11x + 4$

b. $f(x)\sqrt{x^2 - 25}$

c. $f(x) = \dfrac{7x - 3}{5x^2 + x - 4}$

Para las funciones anteriores determine intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento. Diga en qué puntos la función es discontinua.

2. Grafique: $y = f(x) = |2x + 1|$

3. Grafique: $y = f(x) = |x^2 - 5x + 4|$

4. Para la función: $y = f(x) = [\![2x - 3]\!]$ **Determine:**

1. $f(0)$

2. $f(2/3)$

3. $f(5)$

4. $f(\sqrt{3})$

5. $f(e)$

6. $f(\pi)$

2.3. Aplicaciones

Ejemplo1:

Se tiene una lámina rectangular de cartón de dimensiones a y b conocidas, véase la figura 35.

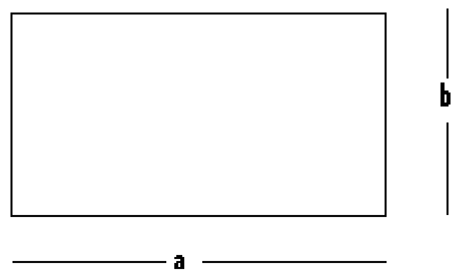


Figura 35.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Con esta lámina de cartón se pueden fabricar cajas sin tapa y de altura **X**. Para ello en cada esquina de la caja se cortan cuadrados idénticos de lado x. Véase figura 36.

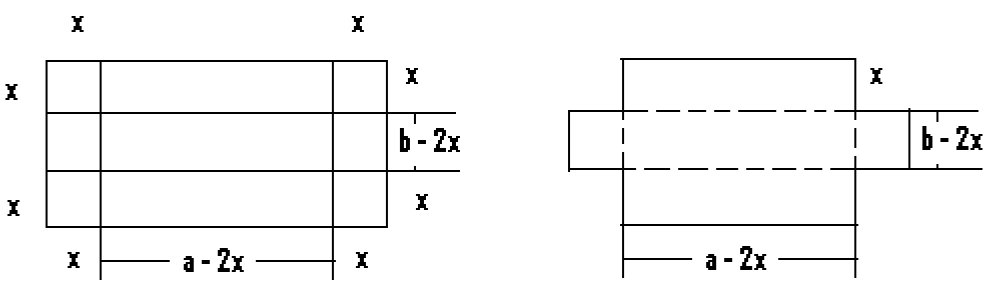


Figura 36
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Luego se doblan los lados hacia arriba. Véase la figura 37

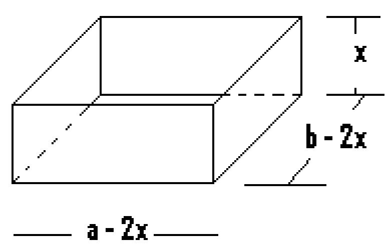


Figura 37
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

El volumen de una caja de base rectangular se obtiene como:
Volumen = altura multiplicada por el largo multiplicado por el ancho, en unidades cúbicas.
Para la caja se tiene que:
Altura = x
Largo = a – 2x
Ancho = b – 2x

Por lo tanto el volumen, simbolizado como v es igual a:

$$v = x(a-2x)(b-2x)$$

Efectuando la multiplicación:

$$v(x) = (ax-2x^2)(b-2x) = abx - 2ax^2 - 2bx^2 + 4x^3 \Rightarrow 4x^3 - (2ax^2 + 2bx^2) + abx$$

La expresión para el volumen es:

$$v = 4x^3 - 2x^2(a+b) + abx$$

TENIENDO EN CUENTA LA SITUACIÓN ANTERIOR RESUELVA EL SIGUIENTE PROBLEMA PARTICULAR:

Se desea construir una caja de forma rectangular sin tapa a partir de una lámina de cartón de 20 cm por 15 cm. Para ello se cortarán cuadrados idénticos en las cuatro esquinas y se doblarán los lados hacia arriba.

1. Escriba la función para el volumen.

Solución
Se tiene que la función para el volumen es:

$$v = 4x^3 - 2x^2(a+b) + abx$$

Con: $a = 20\ cm \wedge b = 15\ cm$

Reemplazando en la función de volumen:

$$v = 4x^3 - 2x^2(20+15) + (20)(15)x$$
$$v = 4x^3 - 70x^2 + 300x\ cm^3$$

2. Determine el dominio matemático para esta función.

Solución

Por ser una función polinómica su **Dominio es:** $x \in lR$

3. Determine el dominio desde el punto de vista de una situación real para la función de volumen.

Solución

Se debe cumplir que el volumen sea mayor que cero.

$v > 0 \Rightarrow x(a-2x)(b-2x) > 0$

Reemplazando los valores de a y de b en la desigualdad:

$$x(20-2x)(15-2x) > 0$$

$x > 0 \vee 20-2x > 0 \vee 15-2x > 0$

Se tiene que: $x = 0 \vee x = 10 \vee x = \frac{15}{2}$

La solución de la desigualdad es:

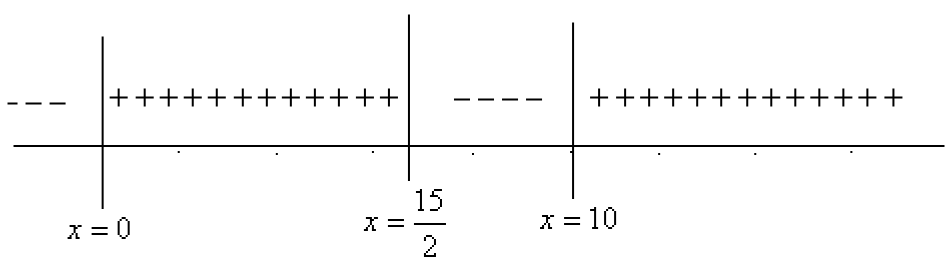


Figura 38. Solución de la desigualdad.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

El domino es: $x \in \left(0,\ \frac{15}{2}\right) \cup (10,\ +\infty)$

Pero con valores de **X** en el intervalo

$$(10,\ +\infty)$$

Se tendría dimensiones negativas, lo cual, no es posible en problemas reales.

Por lo tanto, el dominio desde el punto de vista de una situación real es:

$$x \in \left(0,\ \frac{15}{2}\right)$$

Los valores $x = 0 \wedge x = \dfrac{15}{2}$ no se incluyen, ya que con estos valores el volumen sería igual a cero, es decir, no habría caja.

1. Determine las dimensiones de la caja de tal manera que su volumen sea de 378 cm^3. De su respuesta con una precisión de tres decimales.

Solución

Se bebe plantear y solucionar la ecuación:

$$4x^3 - 70x^2 + 300x = 378$$

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN

$$4x^3 - 70x^2 + 300x - 378 = 0$$
$$2\left(2x^3 - 35x^2 + 150x - 189\right) = 0$$
$$2x^3 - 35x^2 + 150x - 189 = 0$$

La ecuación se soluciona Factorizando el polinomio de grado 3 de esta ecuación utilizando el método por evaluación.

Recuerde que los posibles factores del polinomio $2x^3 - 35x^2 + 150x - 189$ son los divisores del término independiente:

Los posibles factores son:

$x = -1 \Rightarrow (-1)^3 - 35(-1)^2 + 150(-1) - 189 = -376$ No es factor

$x = 1 \Rightarrow (1)^3 - 35(1)^2 + 150(1) - 189 = -72$ No es factor.

$x = -3 \Rightarrow (-3)^3 - 35(-3)^2 + 150(-3) - 189 = -1008$ No es factor.

$x = 3 \Rightarrow (3)^3 - 35(3)^2 + 150(3) - 189 = 0$ Esto quiere decir que: $x - 3$ es un factor. Para encontrar el otro factor debemos efectuar la división:

$$\frac{2x^3 - 35x^2 + 150x - 189}{x - 3}$$

Utilizando división sintética:

2	35	150	189	3
	6	87	189	
2	29	63	0	

La ecuación queda:

$$(x-3)(2x^2 - 29x + 63) = 0$$

$x - 3 = 0 \vee 2x^2 - 29x + 63 = 0$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$2x^2 - 29x + 63 = 0$

Esta última ecuación la resolvemos utilizando fórmula general.

$$2x^2 - 29x + 63 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-29) \pm \sqrt{(-29)^2 - 4(2)(63)}}{2(2)} \Rightarrow x = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 504}}{4}$$

$$x = \frac{29 \pm \sqrt{377}}{4} \Rightarrow x = \frac{29 + \sqrt{377}}{4} \approx 11.839 \vee x = \frac{29 - \sqrt{377}}{4} \approx 2.661$$

Con $x = 3$, las dimensiones de la caja son:

Altura: $x \Rightarrow 3\ cm$

Largo: $20 - 2x \Rightarrow 20 - 2(3) \Rightarrow 14\ cm$

Ancho: $15 - 2x \Rightarrow 15 - 2(3) \Rightarrow 9\ cm$

Con $x = 2.661$, las dimensiones de la caja son:

Altura: $x \Rightarrow 2.661\ cm$

Largo: $20 - 2x \Rightarrow 20 - 2(2.661) \Rightarrow 14.678\ cm$

Ancho: $15 - 2x \Rightarrow 15 - 2(2.661) \Rightarrow 9.678\ cm$

Con $x = 11.839$, no es posible, ya que:

Altura: $x \Rightarrow 2.661\ cm$

Largo: $20 - 2x \Rightarrow 20 - 2(11.839) \Rightarrow -3.678\ cm$ Daría una dimensión negativa, no es posible.

1. Determine la cantidad de material utilizado.

Solución

Con $x = 3$ la cantidad de material utilizado es:

Cantidad de material utilizado = $14*9+2*14*3+2*9*3=236\ cm^2$

Con $x = 2.661$ la cantidad de material utilizado es:

Cantidad de material utilizado:

$14.678*9.678+2*14.678*2.661+2*9.678*2.661=271.676316\ cm^2$

1. Utilice las dimensiones apropiadas de tal manera que el desperdicio de material sea el más bajo dentro de los posibles para un volumen de 378 cm^3.

Solución

Observando el resultado anterior, se ve que el menor desperdicio se presenta cuando las dimensiones de la caja son:

Altura: $2.661\ cm$

Largo: $14.678\ cm$

Ancho: $9.678\ cm$

Ejemplo2: Se tiene una lámina cuadrada de cartón de lado x, véase la figura 39.

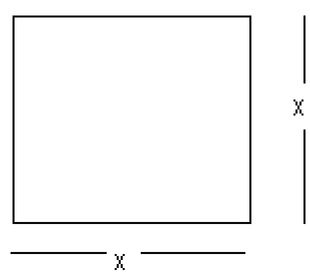


Figura 39.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Con esta lámina de cartón se pueden fabricar cajas sin tapa y de altura h. Para ello en cada esquina de la caja se cortan cuadrados idénticos de lado h. Véase figura 40.

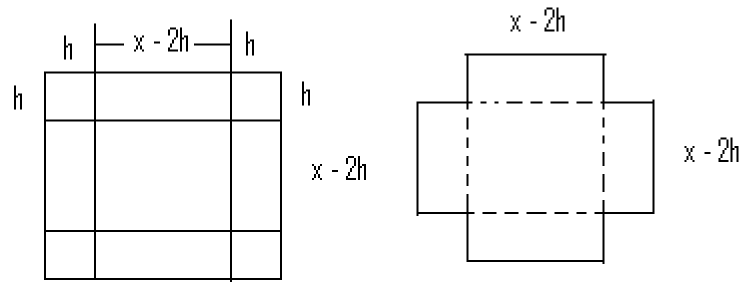


Figura 40
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Luego se doblan los lados hacia arriba. Véase la figura 41.

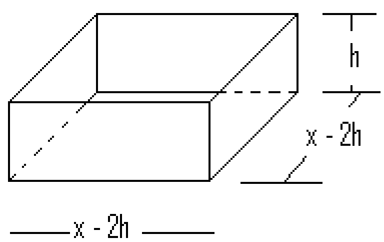


Figura 41.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

El volumen de una caja de base rectangular se obtiene como:
Volumen = altura multiplicada por el largo multiplicado por el ancho unidades cúbicas.
Para la caja podemos ver que:

Altura = h

Largo = x – 2h

Ancho = x – 2h

Por lo tanto el volumen, que lo podemos simbolizar como v es igual a:

$$v = h(x - 2h)(x - 2h)$$

Efectuando la multiplicación la expresión para el volumen es:

$$v = hx^2 - 4h^2x + 4h^3$$

Teniendo en cuenta la situación problémica anterior resuelva:

Se desea construir una caja sin tapa. Para ello se tomará una lámina cuadrada de cartón y se cortarán en las cuatro esquinas cuadrados idénticos de 5 cm de lado y se doblarán hacia arriba. Determine el dominio de la función de volumen.

1. Escriba la función para el volumen.
2. Determine el dominio matemático para esta función.

3. Determine el dominio desde el punto de vista real para el modelo de volumen.
4. Determine las dimensiones de la lámina de cartón a utilizar, si la caja será hecha para contener un volumen de 2000 cm^3.
5. Determine las dimensiones de la caja.
6. Determine la cantidad de material utilizado.

Solución:

1. Escriba la función de volumen de la caja.

Una forma es reemplazando $h = 5$ en la expresión

$$v = hx^2 - 4h^2x + 4h^3$$

$$v = 5x^2 - 4(5)^2x + 4(5)^3 = 5x^2 - 100x + 500 \ \ cm^3$$

Se tiene que:

$$v(x) = 5x^2 - 100x + 500 \ \ cm^3$$

Otra forma puede ser de la siguiente manera:

Un cuadrado es un rectángulo que tiene los cuatro lados iguales, véase la figura 42.

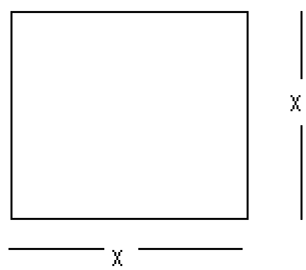


Figura 42.

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Sea **x** el lado del cuadrado; se va a quitar en las cuatro esquinas 5 cm a cada lado de la esquina. Véase la figura 43.

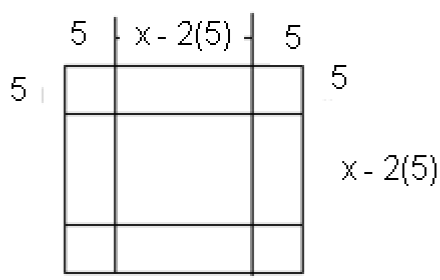


Figura. 43

(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Quitando 5 cm en cada esquina el lado de la caja será x –5 –5 = x – 10. Véase la figura 44.

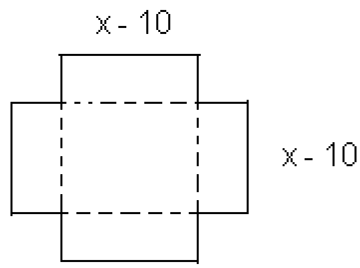


Figura 44.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Doblando los lados hacia arriba la caja queda:

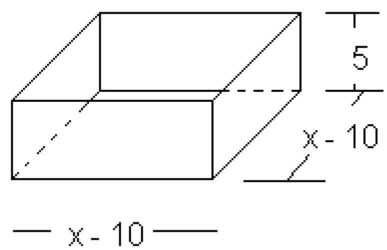


Figura 45

La función para el volumen es: $v(x) = 5(x-10)(x-10)$

Simplificando queda:

$$v(x) = 5x^2 - 100x + 500\ cm^3$$

1. Dominio matemático:

Solución

Por ser un polinomio su dominio es: $x \in lR$

2. Determine el dominio desde el punto de vista real para el modelo de volumen:

Solución

Se debe cumplir que:

$$v(x) > 0$$

Esto implica que:

$$5(x-10)(x-10) > 10 \Rightarrow x > 10$$

Dominio: $x \in (10, \infty)$

3. Determine las dimensiones de la lámina de cartón a utilizar, Si la caja será hecha para contener un volumen de 2000 cm^3.

Solución

Se debe plantear y solucionar:

$$v(x) = 2000$$

Esto implica que:

$$5x^2 - 100x + 500 = 2000$$

$$5(x^2 - 20x + 100) = 2000$$

$$x^2 - 20x + 100 = \frac{2000}{5} \rightarrow x^2 - 20x + 100 = 400$$

$$x^2 - 20x + 100 - 400 = 0$$

$$x^2 - 20x - 300 = 0$$

$$(x + 10)(x - 30) = 0$$

$$x + 10 = 0 \quad \vee \quad x - 30 = 0$$

$$x = -10 \ NO \quad \vee \quad x = 30$$

Las dimensiones de la lámina de cartón deben ser: 30 cm por 30 cm.

1. Determine las dimensiones de la caja.

Solución

Observando la figura 45, se tiene que:
Largo: $x - 10 = 30 - 10 = 20\ cm$
Ancho: $x - 10 = 30 - 10 = 20\ cm$
Alto: $5\ cm$

2. Determine la cantidad de material utilizado:

Solución

Observando las figuras 43 y 44 se puede deducir que la cantidad de material utilizado es:

Cantidad de material utilizado es igual a: El área de la base más 4 veces el área de un costado.

Cantidad de material = 20 cm * 20 cm + 4 * 20 cm * 5 cm

$$Cantidad\ de\ material = 800\ cm^2$$

Ejemplo3: Se cuenta con 1200 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y sin tapa.

3. Encuentre una expresión para el volumen de la caja en términos de una sola variable.

Solución

Sean:
x: Cada lado de la base cuadrada.
y: La altura de la caja Véase la figura 46

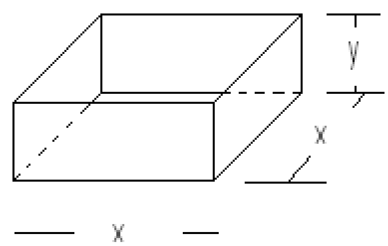


Figura 46
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)
El volumen de esta caja es:

$$v = x * x * y \Rightarrow v = x^2 y\ cm^3$$

Para escribir ''y'' en términos de ''x'', se utiliza la condición para la cantidad de material.

Cantidad de material es: 1200 cm^2

Para la caja de la figura 46 la cantidad de material es igual a:

La cantidad de material de la base cuadrada más 4 veces la cantidad de material de los cuatro costados, esto es:

$$1200 = x * x + 4x * y \Rightarrow 1200 = x^2 + 4xy$$

Despejando ''y'':

$$1200 = x^2 + 4xy \Rightarrow 1200 - x^2 = 4xy \Rightarrow \frac{1200 - x^2}{4x} = y$$

Reemplazando la expresión anterior en $v = x^2 y \ cm^3$

$$v = x^2 y \Rightarrow v = x^2\left(\frac{1200 - x^2}{4x}\right) \Rightarrow v = \frac{1200x - x^3}{4} cm^3$$

La expresión para el volumen de la caja es:

$$v(x) = \frac{1200x - x^3}{4} cm^3$$

1. Determine el dominio de la expresión anterior.

Solución

Por ser una función polinómica su dominio es: $x \in lR$

Por ser una situación problémica y para que pueda ser construida la caja, su dominio se debe limitar sólo a los números reales que cumplan que:

$$v(x) = \frac{1200x - x^3}{4} > 0$$

SOLUCIÓN DE LA DESIGUALDAD

$$\frac{1200x - x^3}{4} > 0 \Rightarrow 1200x - x^3 > 0 \Rightarrow x\left(1200 - x^2\right) > 0 \Rightarrow x\left(\sqrt{1200} + x\right)\left(\sqrt{1200} - x\right) > 0$$

Las raíces son:

$$x = 0,\ x = \sqrt{1200},\ x = -\sqrt{1200}$$

La solución de la desigualdad, que es el dominio de la función es:

$$x \in \left(0,\ \sqrt{1200}\right)$$

NOTA: $x = \sqrt{1200} = 34.64101615...$

2. Encuentre el volumen máximo posible de la caja.

Solución

Dando valores a la variable x, reemplazando en la función de volumen y utilizando el Excel.

X	v(x)
1	299,75
2	598
3	893,25
4	1184
5	1468,75
6	1746
7	2014,25
8	2272
9	2517,75
10	2750
11	2967,25
12	3168
13	3350,75
14	3514
15	3656,25
16	3776
17	3871,75
18	3942
19	3985,25
20	4000
21	3984,75
22	3938
23	3858,25
24	3744
25	3593,75
26	3406
27	3179,25

28	2912
29	2602,75
30	2250
31	1852,25
32	1408
33	915,75
34	374
35	-218,75

Se ve que el volumen máximo es 4000 cm^3 y se obtiene cuando x = 20

Como piden hallar las dimensiones de la caja cuando el volumen es máximo, se debe halla el valor de y.

$$y=\frac{1200-x^2}{4x}\Rightarrow y=\frac{1200-(20)^2}{4(20)}=\frac{1200-400}{80}=\frac{800}{80}=10\ cm$$

Las dimensiones de la caja que permiten obtener el máximo volumen son:
20 cm X 20 cm X 10 cm.

El volumen máximo también se puede determinar a partir de la gráfica de la parte pertinente de la función de volumen, como se ve en la figura 47

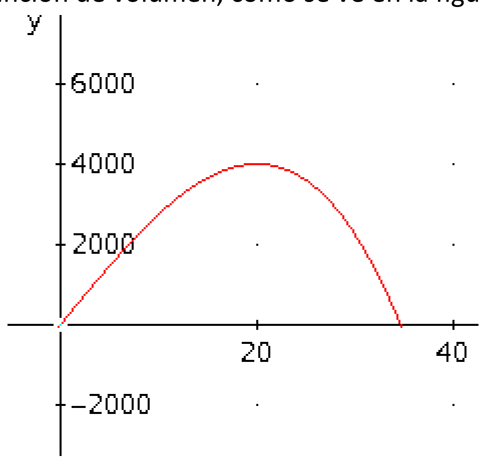


Figura 47
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

Ejemplo4: El siguiente ejercicio es una adaptación de un ejercicio propuesto por (Haeussler & Richard, 1997).

Una empresa de TV por cable tiene 4800 suscriptores que pagan cada uno en promedio $18000 mensuales por el servicio, un estudio determinó que puede conseguir 150 suscriptores más por cada $500 menos en la cuota mensual.

Encuentre una expresión para el ingreso de la empresa de TV.

Solución
Para determinar la función de ingreso, es conveniente llenar la siguiente tabla:

Número de disminuciones de 500	Valor de la cuota mensual	Número de suscriptores	Ingreso
1	$18000-500(1)$	$4800+150(1)$	$[18000-500(1)]\cdot[4800+150(1)]$
2	$18000-500(2)$	$4800+150(2)$	$[18000-500(2)]\cdot[4800+150(2)]$
3	$18000-500(3)$	$4800+150(3)$	$[18000-500(3)]\cdot[4800+150(3)]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
q	$18000-500(q)$	$4800+150(q)$	$[18000-500(q)]\cdot[4800+150(q)]$

Sea q: Número de disminuciones de $ 500 en la cuota.
La función de ingreso se obtiene efectuando las multiplicaciones en la expresión del último renglón y última columna.
Ingreso:

$$r(q)=[18000-500(q)]\cdot[4800+150(q)]=86'400000+2'700000q-2'400000q-75000q^2$$

Reduciendo términos semejantes:

$$r(q)=-75000q^2+300000q+86'400000\ \$$$

Ejercicio 3.

1. **Se desea cercar un campo rectangular en el cual el ancho es 20 metros más pequeño que el largo.**
    a. **Encuentre una expresión para el perímetro en términos de una sola variable.**
    b. **Encuentre una expresión para el área cercada en términos de una sola variable.**
    c. **Determine el dominio de la función de área.**
    d. **Utilizando una herramienta de informática represente gráficamente la función de área, a partir de la gráfica, determine el área máxima cercada.**
    e. **Si el área cercada es igual a 8000 m^2, determine las dimensiones del terreno.**

2. **Una compañía está diseñando un empaque para su producto. Una parte del empaque será una caja abierta construida de un cuadrado de aluminio cortando cuadros de 3 centímetros en cada esquina y doblando los lados hacia arriba.**
    a. **Encuentre un modelo para el volumen de la caja.**
    b. **Determine el dominio de la expresión anterior.**
    c. **Si la caja debe ser hecha para contener un volumen de 588 cm^3, determine la cantidad de material utilizado.**

3. **Se desea construir un envase cilíndrico de base circular que tenga una capacidad de 125 metros cúbicos.**

    a. **Halle una expresión para la cantidad de lámina utilizada en términos de una sola variable.**
    b. **Halle las dimensiones que debe tener para que la cantidad de lámina empleada sea mínima.**
    c. **Si la altura del envase es 10 cm, determine su radio.**

4. **El siguiente ejercicio es una adaptación de un ejercicio propuesto por los autores (Haeussler & Richard, 1997).**

El fabricante de un producto encuentra que para las primeras 500 unidades que produce y vende la utilidad es de $50 por unidad. La utilidad disminuye en $0,10 por cada unidad que produce más allá de 500. Por ejemplo la utilidad total cuando produce y vende 502 unidades es de 500(50)+2(49,8).

a. **Encuentre una expresión para la utilidad del fabricante.**
b. **A partir de una gráfica determine el nivel de producción que maximiza la utilidad.**

5. **Un mayorista ofrece un precio de venta de $ 5.200 menos un descuento de $ 5 por cada artículo de las mismas especificaciones comprado.**
    a. **Determine una función para el precio de venta de cada artículo.**

b. **Determine una función para el ingreso.**
c. **Encuentre un intervalo apropiado en el cual sea óptimo para el mayorista sostener estas condiciones.**
d. **Grafique la función de ingreso.**

A partir de la gráfica determine:

e. **El nivel de producción que maximice el ingreso.**
f. **El ingreso máximo.**

6. **Un fabricante estima que si cada pedido de materias primas contiene "x" unidades, el costo total de adquirir y almacenar el suministro anual de materias primas será:**

$$c(x) = 4x + \frac{100.000}{x}$$ **Dólares**

a. **Represente la parte pertinente de la gráfica de este modelo de costo y a partir de ella estime el tamaño óptimo de un pedido, es decir bajo qué condiciones se obtiene el costo mínimo y cual es este costo mínimo.**
b. **Cuando el costo es de 1000 dólares, estime cuantas unidades fueron adquiridas y almacenadas.**
c. **Si se adquiere y se almacenan 500 unidades, ¿el costo es?**

7. **Un fabricante estima que si se emplean X máquinas, el costo de un período de producción será:**

$$c(x) = 10x + \frac{1500}{x}$$ **Dólares.**

a. **Represente la parte pertinente de la gráfica de este modelo y a partir de ella calcule cuantas máquinas deberá utilizar el fabricante para minimizar el costo.**
b. **¿Si los costos en un período de producción son de 500 dólares, estime cuantas máquinas fueron utilizadas?**
c. **Determine el costo cuando se utilizan 50 máquinas.**

8. **Un proyectil es lanzado al aire con una velocidad inicial de 192 metros por segundo. Después de t segundos su altura es:**

$$S(t) = 192t - 16t^2$$

a. **Elabore la gráfica de la parte pertinente de este modelo.**
b. **A partir de la gráfica determine el tiempo en el cual el proyectil alcanza su altura**

máxima.

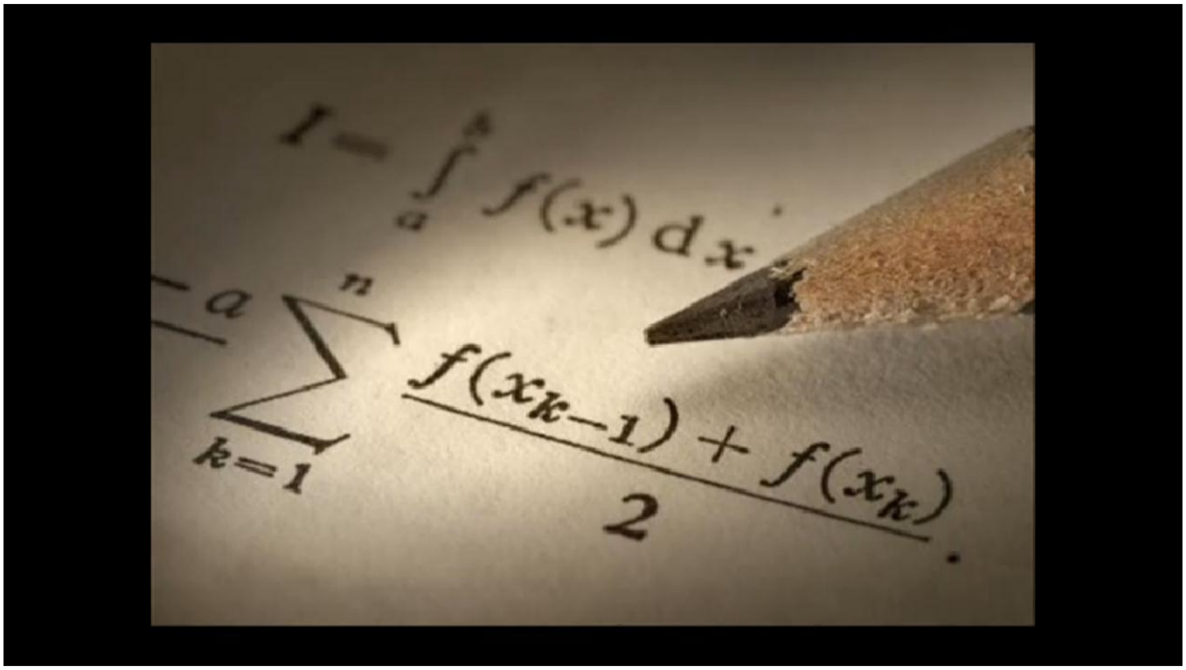
c. **Halle la altura máxima que alcanza.**

d. **Determine el tiempo en el cual la velocidad es de 576 m / s.**

9. **Un terreno rectangular de 500m² de área va a ser cercado. La cerca para el frente del terreno, como da a una carretera, tiene un costo de US$ 50 el metro instalado, para los otros tres lados, el metro instalado tiene un costo de US$ 35.**

   a. **Obtenga un modelo para el costo total del cercado del terreno en términos del lado que da a la carretera.**
   b. **Elabore la gráfica de este modelo.**
   c. **A partir de la gráfica, estime las dimensiones del terreno que permitan minimizar los costos.**
   d. **Determine cuál es el costo mínimo.**

3. UNIDAD 2 LÍMITES



http://www.youtube.com/watch?v=yAB1Z5F0imI&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=oM7u5wjYFUo&feature=related

OBJETIVO GENERAL

- Entender el concepto de límite y su aplicación como una aproximación al estudio de la derivada.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Determinar el límite de una función teniendo en cuenta una tabla numérica de aproximaciones a un valor deseado de la variable independiente.
- Estudiar las leyes básicas para la estimación de límites, identificando indeterminaciones de la forma cero sobre cero e infinito menos infinito y el procedimiento para la eliminación de éstas indeterminaciones y la posterior evaluación del límite.

- Determinar la continuidad o discontinuidad de una función en un punto.

Prueba Inicial

1. Sea: $f(x)=\dfrac{x-2}{9-x^2}$ Halle:
   a. $f(0)$
   b. $f(-3)$
   c. $f(2)$
   d. $f\left(\dfrac{5}{3}\right)$
   e. $f(3)$
   f. $f(-4)$
   g. ¿Para qué valores de x la función f no está definida?

2. Sea $g(x)=5-2x-x^2$ Halle:
   a. $f(2)$
   b. $g(3/7)$
   c. $g(0)$
   d. $g(5)$
   e. $g(-3)$
   f. $g(2/5)$
   g. ¿Para qué valores de x la función g no está definida?

3. Sea $h(x)=\sqrt{x-5}$ Halle:
   a. $h(1)$
   b. $h(9)$
   c. $h(5)$
   d. $h(-2)$
   e. $h(0)$
   f. $h(20/3)$
   g. $h(1/2)$
   h. ¿Para qué valores de x la función h no está definida?

4. $f(x)=2^{3-x}$ Halle:
   a. $h(0)$
   b. $h(3)$
   c. $h(1)$

d. $h(-3)$
e. $h(5)$
f. $h(1/2)$
g. ¿Para qué valores de x la función h no está definida?

5. Identifique y clasifique cada uno de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 2x + 1$
b. $f(x) = \dfrac{6x-2}{x+1}$
c. $f(x) = \sqrt{3x-2}$
d. $f(x) = e^{3x-5}$
e. $f(x) = \ln(4x+1)$
f. $f(x) = x^2 - 6x + 1$

3.1. Definición Intuitiva de Límite

Se pretende determinar que sucede con una función **f(x)** cuando la variable independiente (o sea la **x**) se aproxima tanto como pueda a un valor **a**, sin llegar a ser igual a dicho valor. Si el límite existe, se dice que es igual a un número L. Lo anterior se simboliza de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

En términos conceptuales, el límite cuando **x** se aproxima a un valor **a** de la función **f(x)**, es diferente a **f(a)**.

Para entender un poco mejor; se propone el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1: Este ejercicio es propuesto por los autores (Haeussler & Richard, 1997). Para la función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Determine:

a. $f(1)$

b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

Solución

a. Cálculo de $f(1)$

$$f(1) = \frac{(1)^3 - 1}{1 - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}.$$

Se obtiene una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$

b. Cálculo de $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

La herramienta que se tiene para calcular este límite, es por definición intuitiva del concepto de límite, es decir, se va a determinar que sucede con **f(x)** cuando la variable **x** se aproxime lo más que pueda a **1**, tanto por izquierda como por derecha, esto es por valores ligeramente menores que uno y por valores ligeramente mayores que uno. Para ello se llena la siguiente tabla.

$x \to 1^- \quad (x < 1)$	$f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$	$x \to 1^+ \quad (x > 1)$	$f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$
0,9	2,71	1,1	3,31
0,99	2,9701	1,01	3,0301
0,999	2,997001	1,001	3,003001
0,9999	2,9997	1,0001	3,0003
0,99999	2,99997	1,00001	3,00003

Se puede ver que cuando la variable **x** se aproxima a uno, tanto por izquierda como por derecha, la función se aproxima a 3; esto es:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

Ejemplo 2: Determine por definición intuitiva de límite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$$

Solución

Para ello se llena la siguiente tabla.

$x \to 2^- \ (x < 2)$	$f(x) = \dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$	$x \to 2^+ \quad (x > 2)$	$f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x - 2}$
1,9	29,679	2,1	34,481
1,99	31,76079902	2,01	32,24180099
1,999	31,9760081	2,001	32,0240079
1,9999	31,997602	2,0001	32,002399
1,99999	31,99977	2,00001	32,00022

De acuerdo a los resultados.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} = 32$$

Ejemplo 3: Límites a partir de una gráfica. http://www.youtube.com/watch?v=EYcwxYab0Qk

Ejemplo 4: Límite a partir de una gráfica.

Utilizando la gráfica de la figura 48 estime:

$$\lim_{x \to -1} f(x)$$

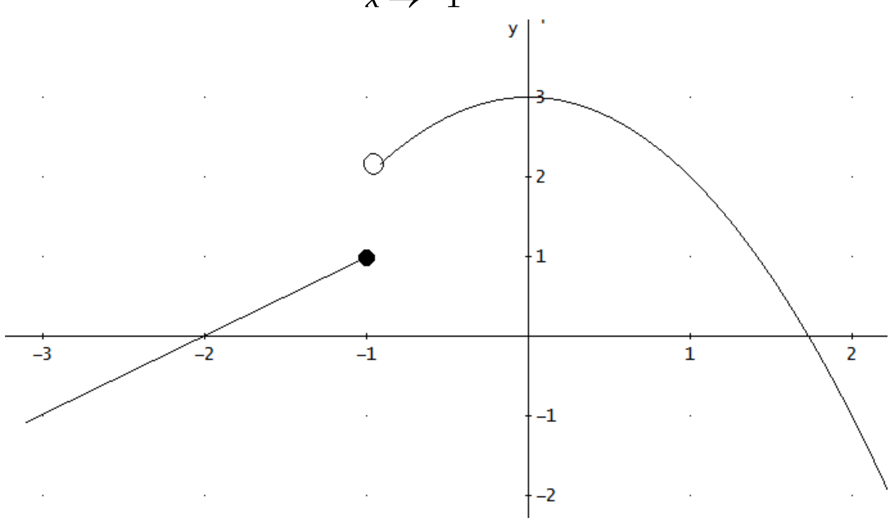


Figura 48. Estimación de límites a partir de una gráfica.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 13 de 2011)

Solución

Para determinar este límite, se debe estimar dos límites que son:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) \wedge \lim_{x \to -1^+} f(x)$$

Estimación de

$$\lim_{x \to -1^-} f(x)$$

Observando la figura 49, se puede ver que a medida que la **X** se aproxima a **menos 1** por la izquierda, la **Y** se aproxima **a 1**, esto es:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1$$

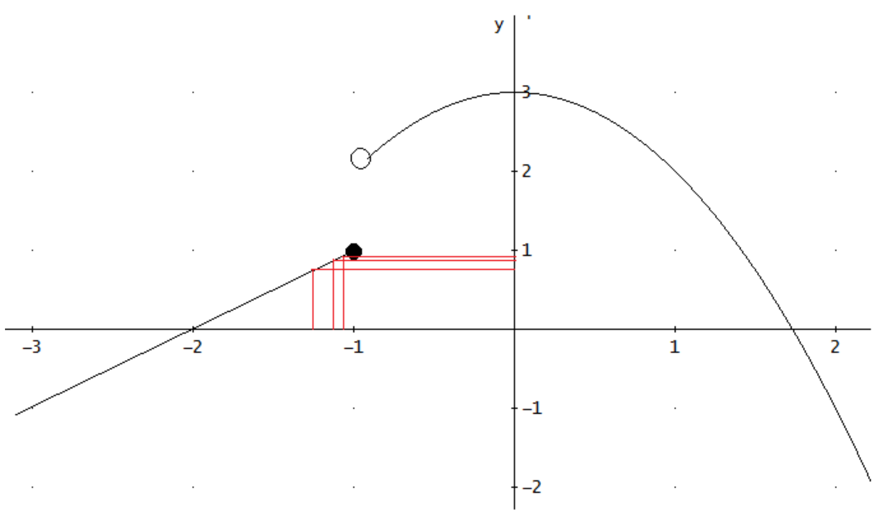


Figura 49. X se aproxima a menos uno por la izquierda
(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 13 de 2011)

Estimación de

$$\lim_{x \to -1^+} f(x)$$

Observando la figura 50, se puede ver que a medida que la **X** se aproxima a **menos 1** por la derecha, la **Y** se aproxima **a 2**, esto es:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 2$$

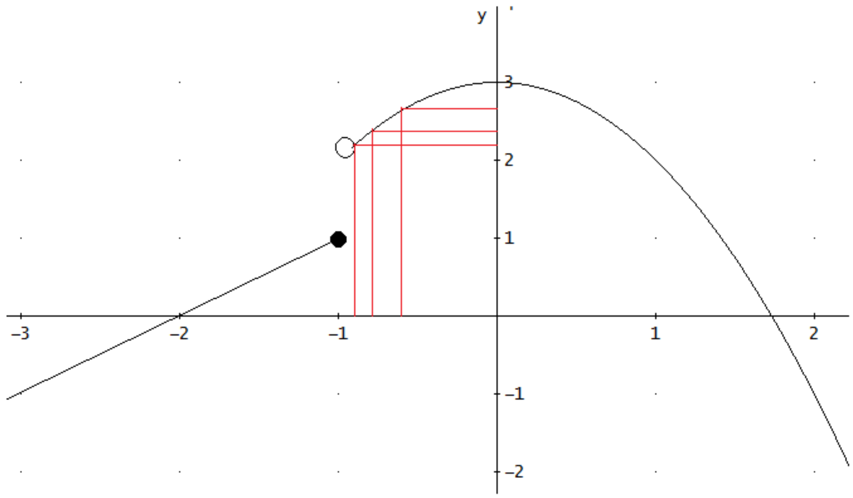


Figura 50. X se aproxima a menos uno por la derecha.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 13 de 2011)

Como:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \to -1^+} f(x) = 2$$

Entonces:

$$\lim_{x \to -1} f(x) \ \textit{No existe}$$

Ejemplo 5: Límite a partir de una gráfica.
Utilizando la gráfica de la figura 51. Estime:

$$\lim_{x \to -3} f(x)$$

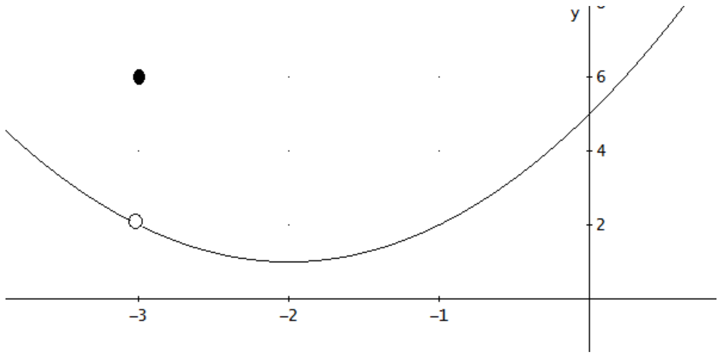


Figura 51. Límite a partir de una gráfica.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 13 de 2011)

Solución
Para determinar este límite, se debe estimar dos límites que son:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) \wedge \lim_{x \to -3^+} f(x)$$

Estimación de

$$\lim_{x \to -3^-} f(x)$$

Observando la figura 52, se puede ver que a medida que la **X** se aproxima a **menos 3** por la izquierda, la **Y** se aproxima **a 2**, esto es:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = 2$$

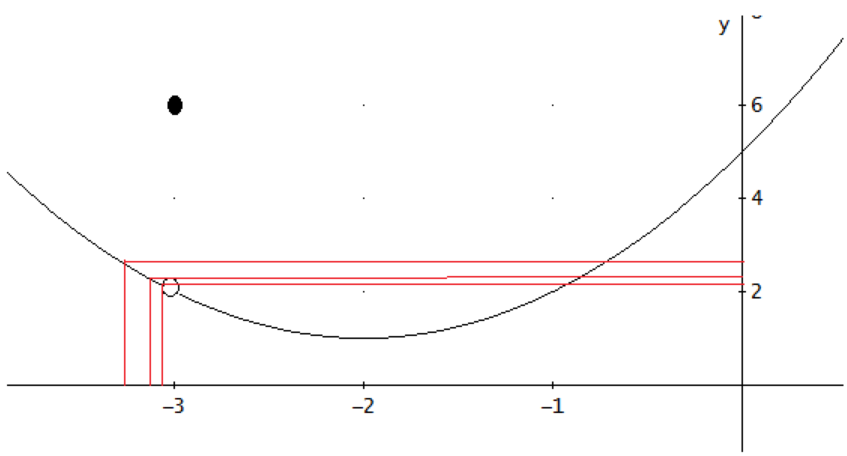


Figura 52.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 13 de 2011)

Estimación de

$$\lim_{x \to -3^+} f(x)$$

Observando la figura 53, se puede ver que a medida que la**X** se aproxima a **menos 3** por la derecha, la **Y** se aproxima **a 2**, esto es:

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = 2$$

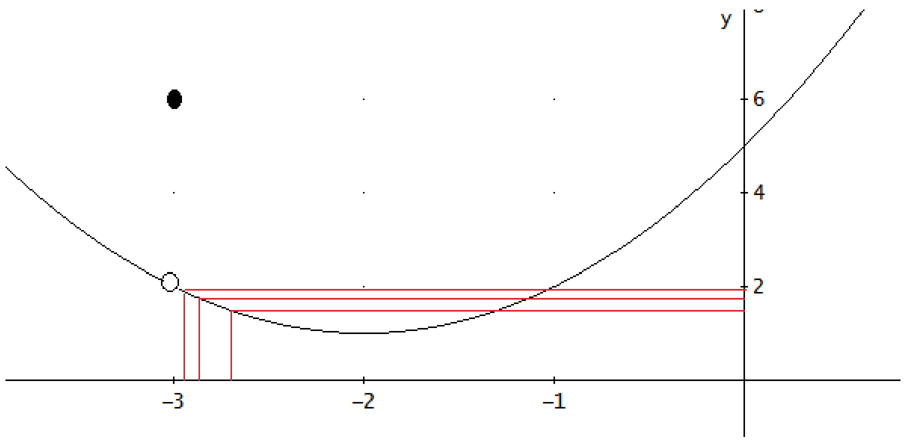


Figura 53.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 13 de 2011)

Como:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = 3 = \lim_{x \to -3^+} f(x) = 2$$

Entonces:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 2$$

Ejemplo6: http://www.youtube.com/watch?v=92HuEpnvWyw&feature=related

Ejercicio 4

Utilizando la definición intuitiva de límite, estime:

1. $\lim_{x \to -5} 3x^2 - 2x + 3$

2. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 16}{4x - 8}$

3. $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

4. **Dada la gráfica de la figura 54. Estime:** $\lim_{x \to -2} f(x) \wedge \lim_{x \to 2} f(x)$

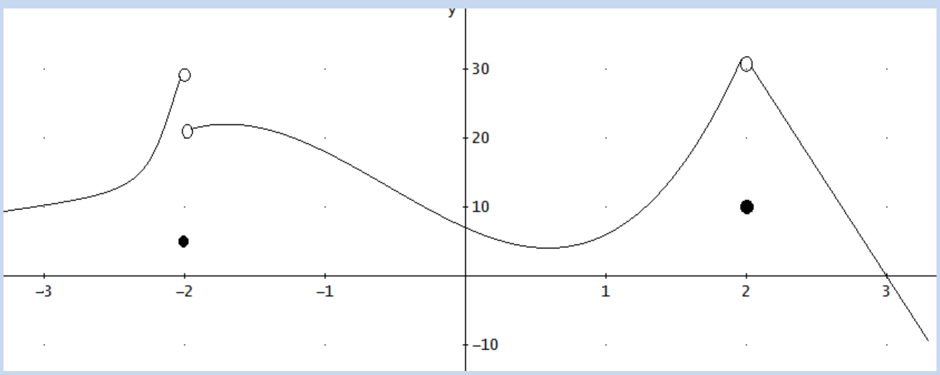


Figura 54.

(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 13 de 2011)

5. **Dada la gráfica de la figura 55. Estime:** $\lim_{x \to -2} f(x) \wedge \lim_{x \to 2} f(x)$

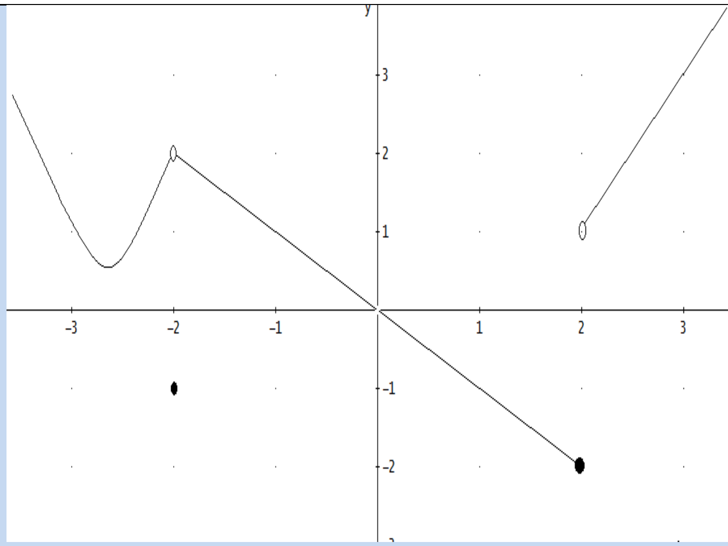


Figura 55

(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 13 de 2011)

3.2. Leyes para Estimar Límites

http://www.youtube.com/watch?v=rYcr2I423Fs

Applet para calcular límites:
http://www.solvemymath.com/online_math_calculator/calculus/limit_calculator/index.php

3.2.1. El límite de una constante es igual a la constante

$$\lim_{x \to a} c = c$$

Ejemplo1:

$$\lim_{x \to 7} 10 = 10$$

Ejemplo2:

$$\lim_{x \to -20} 2 = 2$$

- **Límite de x elevada a una potencia n.**

$$\lim_{x \to a} x^n = (a)^n = a^n$$

Ejemplo1: $\lim_{x \to 3} x^4$

Solución:

$$\lim_{x \to 3} x^4 = (3)^4 = 81$$

Ejemplo2: $\lim_{x \to -5} x^3$

Solución:

$$\lim_{x \to -5} x^3 = (-5)^3 = -125$$

Ejemplo3: $\lim_{x \to 4} x^{-2}$

Solución:

$$\lim_{x \to 4} x^{-2} = (4)^{-2} = \frac{1}{(4)^2} = \frac{1}{16}$$

- **Límite de una constante por x elevada a una potencia n**

$$\lim_{x \to a} cx^n == c \lim_{x \to a} x^n = c(a)^n$$

Ejemplo1:

$$\lim_{x \to 2} 3x^5 = 3(2)^5 = 3*32 = 96$$

Ejemplo2:

$$\lim_{x \to -1} 4x^2 = 4(-1)^2 = 4*1 = 4$$

Ejemplo3: $\lim_{x \to -3} 7x^2$

Solución

$$\lim_{x \to -3} 7x^2 = 7(-3)^2 = 7(9) = 63$$

- **El límite de una suma es igual a la suma de los límites.**

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x) \ldots \pm h(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) \ldots \pm \lim_{x \to a} h(x)$$

Ejemplo1.

$$lim_{x \to 3} 3x^2 - 6x + 5 = 3(3)^2 - 6(3) + 5 = 27 - 18 + 5 = 14$$

Ejemplo2.

$$\lim_{x \to -5} 6x-2 = 6(-5)-2 = -30-2 = -32$$

- **El límite de un producto es igual al producto de los límites.**

$$\lim_{x \to a} [f(x) * g(x)] = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right) * \left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

Ejemplo1.

$$\lim_{x \to -3} (2x+1)(3x-2) = \left(\lim_{x \to -3} 2x+1\right) * \left(\lim_{x \to -3} 3x-2\right) =$$
$$(2(-3)+1) * (3(-3)-2) = (-5) * (-11) = 55$$

Ejemplo2.

$$\lim_{x \to 2} (3x-2)\cdot(2x+5) = (3*2-2)\cdot(2*2+5) = (6-2)\cdot(4+5) = 4*9 = 36$$

- **El límite de un cociente es igual al cociente de los límites.**

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}, \quad si, \quad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

Ejemplo1.

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2+x-3}{x^3+4} = \frac{\lim_{x \to 1} 2x^2+x-3}{\lim_{x \to 1} x^3+4} = \frac{2(1)^2+(1)-3}{(1)^3+4} = \frac{2+1-3}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

Ejemplo2.

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-2x+1}{x^2+3} = \frac{\lim_{x\to 5} x^2-2x+1}{\lim_{x\to 1} x^2+3} = \frac{(5)^2-2(5)+1}{(5)^2+3} = \frac{25-10+1}{25+3} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$$

- **El límite de una raíz es igual a la raíz del límite.**

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} \quad si,\ n\ es\ par,\ \lim_{x\to a} f(x)\ debe\ ser\ positivo.$$

Ejemplo1:

$$\lim_{x\to 3} \sqrt[3]{x^2+7} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 3}\left(x^2+7\right)} = \sqrt[3]{(3)^2+7} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8*2} = \sqrt[3]{8}*\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

Ejemplo2.

$$\lim_{x\to -1} \sqrt{4-5x} = \sqrt{\lim_{x\to -1}(4-5x)} = \sqrt{4-5(-1)} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$$

3.2.2. Límites y manipulación algebraica.

Cundo al evaluar un límite el resultado es cero sobre cero, se debe factorizar o racionalizar la expresión, simplificar y volver a evaluar el límite las veces que sea necesario.

Ejemplo1: $\lim_{x\to -4} \dfrac{5x^2+17x-12}{3x^2+13x+4}$

Solución:

$$\lim_{x\to -4} \frac{5x^2+17x-12}{3x^2+13x+4} = \frac{5(-4)^2+17(-4)-12}{3(-4)^2+13(-4)+4} = \frac{80-68-12}{48-52+4} = \frac{0}{0}$$

Hay que factorizar.
Factorización del numerador:

$$5x^2+17x-12=\frac{5}{5}\left(5x^2+17x-12\right)=\frac{25x^2+17(5x)-60}{5}=\frac{\left(5x+20\right)*\left(5x-3\right)}{5}=$$
$$\frac{5(x+4)*(5x-3)}{5}=(x+4)*(5x-3)$$

Factorizando el denominador:

$$3x^2+13x+4=\frac{3}{3}\left(3x^2+13x+4\right)=\frac{9x^2+13(3x)+12}{3}=\frac{\left(3x+12\right)*\left(3x+1\right)}{3}=$$
$$\frac{3(x+4)*(3x+1)}{3}=\left(x+4\right)*(3x+1)$$

Reemplazando en la expresión inicial:

$$\lim_{x\to -4}\frac{5x^2+17x-12}{3x^2+13x+4}=\lim_{x\to -4}\frac{(x+4)*(5x-3)}{(x+4)*(3x+1)}=\lim_{x\to -4}\frac{(5x-3)}{(3x+1)}=$$
$$\frac{5(-4)-3}{3(-4)+1}=\frac{-20-3}{-12+1}=\frac{-23}{-11}=\frac{23}{11},\ con\ \ x\neq -4$$

Ejemplo2: $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$

Solución

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)*(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=1^2+1+1=3\ con\ \ x\neq 1$$

Ejemplo3: $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

Solución

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)*(x^2+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)*(x+2)*(x^2+4)}{x-2}$$
$$\lim_{x\to 2}(x+2)*(x^2+4)=(2+2)*(2^2+4)=4*8=32,\ con\ \ x\neq 2$$

Ejemplo4: $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

Solución

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{4-4}{\sqrt{4}-2} = \frac{0}{0}$$ Se debe racionalizar.

Racionalizando:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\right) = \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2-(2)^2} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} =$$

$$\lim_{x \to 4} (\sqrt{x}+2) = = \sqrt{4}+2 = 2+2 = 4$$

Ejemplo5: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$

Solución

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3} = \frac{3-3}{\sqrt{3+6}-3} = \frac{0}{\sqrt{9}-3} = \frac{0}{3-3} = \frac{0}{0}$$

Racionalizando:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3} \cdot \left(\frac{\sqrt{x+6}+3}{\sqrt{x+6}+3}\right) = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+6})^2-(3)^2}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}+3)}{x+6-9} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}+3)}{x-3}$$

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{x+6}+3 = \sqrt{3+6}+3 = \sqrt{9}+3 = 3+3 = 6$$

Ejemplo6: http://www.youtube.com/watch?v=5kyW-JJpR9o
Ejemplo7: http://www.youtube.com/watch?v=nAmIO3HpR54&feature=fvwrel

Ejemplo8: http://www.youtube.com/watch?v=PwBdwnc621g&feature=related

Ejemplo9: http://www.youtube.com/watch?v=k6fB0JD2bvM

Ejemplo10: http://www.youtube.com/watch?v=tEaYRekR9Ik

Ejemplo11: http://www.youtube.com/watch?v=AcSwtKOwtLU&feature=related

3.2.2.1 Límites al infinito.

Se pretende determinar el siguiente límite:

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

Se presentan varias posibilidades:

- **Si la expresión es constante,** el límite es la constante.
- $\lim_{x \to \infty} c = c$

Ejemplo1:

$$\lim_{x \to \infty} 20 = 20$$

Ejemplo2.

$$\lim_{x \to \infty} -5 = -5$$

- **Si la función es polinómica** el límite tiende a infinito.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$$

Siempre que f(x) sea polinómica.

Ejemplo1:

$$\lim_{x \to \infty} x^2 - 7x + 8 = \infty$$

Ejemplo2:

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{4x - 7} = \infty$$

- **Si la función es racional.**
  Para obtener este límite se procede de la siguiente manera:
  Se dividen todos los términos de la fracción por la **x** de mayor exponente.
  Se simplifica.
  Se aplican las siguientes propiedades.

- $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{c}{x^n} = 0$

Ejemplo1: $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^3 - 4x^2 + 7}{3x^2 - 10x^3 + x - 7}$

Solución

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^3 - 4x^2 + 7}{3x^2 - 10x^3 + x - 7} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{5x^3}{x^3} - \frac{4x^2}{x^3} + \frac{7}{x^3}}{\frac{3x^2}{x^3} - \frac{10x^3}{x^3} + \frac{x}{x^3} - \frac{7}{x^3}} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^3}}{\frac{3}{x} - 10 + \frac{1}{x^2} - \frac{7}{x}} = \frac{5 - 0 + 0}{0 - 10 - 0} = \frac{5}{-10} = -\frac{1}{2}$$

Ejemplo2: $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x + 3x^2}{1 - x^4} - 20 \right)$

Solución

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x + 3x^2}{1 - x^4} - 20 \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\frac{2x}{x^4} + \frac{3x^2}{x^4}}{\frac{1}{x^4} - \frac{x^4}{x^4}} - 20 \right) =$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x^4} - 1} - 20 \right) = \frac{0+0}{0-1} - 20 = 0 - 20 = -20$$

Ejemplo3: http://www.youtube.com/watch?v=kydUxS3-rc0&feature=related

3.2.2.2 Límites trigonométricos

- $\lim_{x \to a} senx = sena,\ a \in lR$
- $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a,\ a \in lR$
- $\lim_{x \to 0} \frac{senkx}{kx} = 1,\ kx \neq 0,\ k \in lR$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos kx}{kx} = 0,\ kx \neq 0,\ k \in lR$

Ejemplo1: Halle

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{sen2x}{2x} * 2 = \lim_{x\to 0} \frac{sen2x}{2x} \lim_{x\to 0} 2 = 1 * 2 = 2$$

Ejemplo 2: Halle

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 5x}{5x} = 0$$

Ejemplo3: Halle

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{senx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-cosx}{x}}{\frac{senx}{x}}=\frac{0}{1}=0$$

Ejemplo4: http://www.youtube.com/watch?v=PgOU6hYfk4s

Ejemplo5: http://www.youtube.com/watch?v=ZTqCxPaiMTI&feature=related

Ejemplo7: http://www.youtube.com/watch?v=81lK5WVdUV0&feature=related

3.2.2.3 Límites Laterales

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L$$

Este límite se lee: "límite cuando x se aproxima a un valor a por la izquierda de $f(x)$ es igual a L". Quiere decir, la x se está acercando al valor a por valores menores que a.

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L$$

Este límite se lee: "límite cuando x se aproxima a un valor a por la derecha de $f(x)$ es igual a L". Quiere decir que la x se acerca al valor a por valores mayores que a.

Se tiene que:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \ si\ y\ solo\ si: \lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)$$

Ejemplo1: $\lim_{x\to 2^+}\frac{5}{x-2}=+\infty$

Ejemplo2: $\lim_{x\to 3^+}\frac{20}{3-x}=-\infty$

NOTA:

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$**, la recta** $x = a$**, se llama asíntota vertical.**

Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$, la recta $y = L$, se llama asíntota horizontal

Ejercicio 5.

Estime los siguientes límites.

1. $\lim_{x \to 7} \frac{5x^2 - 32x - 21}{2x^2 - 9x - 35}$

2. $\lim_{x \to 2} \frac{5x^2 - 6x - 8}{4x^2 - 7x - 2}$

3. $\lim_{x \to -1} \frac{6x^2 + 11x + 5}{7x^2 + 6x - 1}$

4. $\lim_{x \to -11} \frac{3x^2 + 35x + 22}{5x^2 + 54x - 11}$

5. $\lim_{x \to 6} \frac{10x^2 - 61x + 6}{9x^2 - 52x - 12}$

6. $\lim_{x \to 5} \frac{8x^2 - 37x - 15}{x^2 - 25}$

7. $\lim_{x \to -1} \frac{5x^2 + 5x}{3x^2 - 4x - 7}$

8. $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 3x}{6x^2 + 23x + 15}$

9. $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2+4x}{7x^2+26x-8}$

10. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{6x^2-23x-35}{x^2-5x}$

11. $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x^2-6x}{x^2+2x-48}$

12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x-4)^2-16}{8x}$

13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2x+5)^2-25}{10x}$

14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(4x+1)^2-1}{4x}$

15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(3x-8)^2-64}{4x}$

16. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3-27}{5x^2-11x-12}$

17. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{7x^2+19x+10}{x^3+8}$

18. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{8x^2-37x-15}{x^3-125}$

19. $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^3+125}{x^2+5x}$

20. $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{x^2-64}{x^3-512}$

21. $\lim_{x \to -7} \frac{x^2 + 7x}{x^3 - 343}$

22. $\lim_{x \to 0} \frac{49 - (2x+7)^2}{5x + 4x^2}$

23. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$

24. $\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x+2} - 2}$

25. $\lim_{x \to 0} \frac{5x}{\sqrt{x+9} - 3}$

26. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{5x+4} - 3}{x - 1}$

27. $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{2x-1} - 3}{x^2 - 25}$

3.3. Límite y continuidad

http://www.youtube.com/watch?v=wuAdn84VSoc&feature=related

3.3.1. Continuidad en un punto:

Una función f es continua en x = a, si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. $f(a)$ Existe

2. $\lim_{x \to a} f(x)$ Existe

3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si f no es continua en a, se dice que existe una discontinuidad en $x = a$

Ejemplo1:

Analice si f(x)= 5x+1 es continua en x=2

a. f**(2)=5(2)+1=10+1=11 se define en x=2**
b. $lim_{x\to 2}(5x + 1) = 5(2) + 1 = 11$
c. $lim_{x\to 2}f(x) = f(2)$

Esta verificación de la tres condiciones de continuidad en esa función permite asegurar que esa función es continua, en x = 2.

Más aun, por ser una función polinómica es continua en todo su dominio.

Ejemplo2:

Determine si $f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x-2}$ es continua en x = 1

a. f (1)=$\frac{1^2+2(1)-2}{1-2} = -1$

b. $\frac{x^2+2x-2}{x-2} = lim_{x\to 1}(-1) = -1$

c.$lim_{x\to 1}f(x) = f(1) = -1$ Se puede observar claramente que se están cumpliendo las tres condiciones que son propuestas por la teoría de la continuidad en límites.

Pero se sabe que esta función es discontinua en x = 2 (¿por qué?).

Ejemplo3:

Determine si f(x)= $\sqrt{x+4}$ es continua en $x = -2$

a. f (-2)= $\sqrt{-2+4} = \sqrt{2}$.
b. $lim_{x\to -2}\sqrt{x+4}$=$\sqrt{-2+4} = \sqrt{2}$
c. $lim_{x\to -2}f(x) = f(-2) = \sqrt{2}$

Como se puede observar se están dando las tres condiciones de continuidad, lo que asegura que su trazado es continuo y no tiene saltos.

Ejemplo4:

Determine si $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ es continua en x = 2

a. $f(4) = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$ f(x) no se define en x = 2

b. $lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ =$lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$ =$lim_{x\to 2}(x + 2) = 4$ el límite está definido

$c.\ lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$

Lo que quiere decir: que por no cumplir todas las condiciones de continuidad, la función es discontinua en x = 2, por lo tanto su trazado tiene esa discontinuidad.

Ejemplo5: http://www.youtube.com/watch?v=oA32Ze8pJTk&feature=related

Ejemplo6: http://www.youtube.com/watch?v=VvILwqxWG8g&feature=related

3.3.1.1 **Continuidad en un intervalo.**

Se dice que una función $f(x)$ es continua en un intervalo abierto (a, b), si es continua en cada x del intervalo.

Se dice que $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, si:

1. $f(x)$ es continua en el intervalo abierto (a, b)
2. Sí: $\lim_{x \to a^+} = f(a)$
3. Sí: $\lim_{x \to b^-} = f(b)$

Nota:

Las funciones vistas hasta el momento son continuas en todo su dominio, es decir: También se puede tener en cuenta algunas propiedades de la continuidad, las cuales se cumplen para todo número real x.

1. Todas las funciones polinómicas son continuas.
2. Todas las funciones racionales son continuas en su dominio.
3. Las funciones racionales son continuas en todo su dominio.
4. Las funciones algebraicas son continuas en todo se dominio
5. Las funciones exponenciales son continuas en todo su dominio.
6. Las funciones logarítmicas son continuas en todo su dominio
7. Las funciones trigonométricas son continuas en todo su dominio
8. Las funciones trigonométricas inversas son continuas en todo su dominio
9. Las funciones hiperbólicas son continuas en todo su dominio.
10. Toda función es continua en su dominio.

11. Todas las funciones racionales son continuas, excepto en aquellos puntos donde la función no está definida, es decir en aquellos puntos donde su denominador se hace cero.
12. La sumatoria f(x) $\pm$ g(x), es continua
13. f(x)$*$g(x) es continua
14. $\frac{f(x)}{g(x)}$ es continua, siempre que g(x)$\neq 0$
15. $\sqrt[m]{f(x)}$ es continua siempre y cuando $\sqrt[m]{f(x)}$ este definida.

Ejemplo1: Analice la continuidad de la función $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$, en el intervalo $[-2,\ 3]$

Solución:

Esta función es racional, por lo tanto es continua en todos los reales excepto en $x=3$ (porque acá el denominador se hace cero, por lo tanto $x=3$ es una asíntota vertical).

Se pude afirmar que $f(x)$ es continua en el intervalo abierto $(-2,\ 3)$, pero no es continua en el intervalo $[-2,\ 3]$, puesto que es discontinua en $x=3$, que es uno de los extremos de dicho intervalo.

Ejemplo2: Determine si la función $f(x)=3x^2-9x+5$ es continua en $x=3$.

Solución:

Por ser una función polinómica, esta función es continua en todo su dominio, por lo tanto también es continua en $x=3$

Ejemplo3: Determine si $f(x)=\dfrac{x^2+7x+5}{x-2}$ es continua en $x=10$. Determine donde es discontinua $f(x)$.

Solución:

Se puede ver que $f(x)$ es una función racional, por lo tanto sólo es discontinua en $x=2$ y se puede afirmar que $f(x)$ es continua en $x=10$.

Ejercicio 6

1. **Para cada una de las siguientes funciones analice su continuidad indicando los intervalos en los cuales cada una de ellas es continua, indique además los puntos de discontinuidad si los hay.**

a. $f(x) = 5x^2 - 3x - 9$

b. $f(x) = \sqrt{7x - 3}$

c. $f(x) = \dfrac{4x+1}{2x^2 + 3x - 9}$

d. $f(x) = \dfrac{x^2 + 10}{\sqrt{7x^2 - 14x}}$

e. $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 + 1}$

2. **Evalúe la continuidad de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1, & para\ x \le -3 \\ x^2 + 1, & para\ x > -3 \end{cases}$$

En el punto x = - 3

3. **Evalúe la continuidad de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & para\ x \le 0 \\ x^2 - 3, & para\ x > 0 \end{cases}$$

En el punto x = - 0

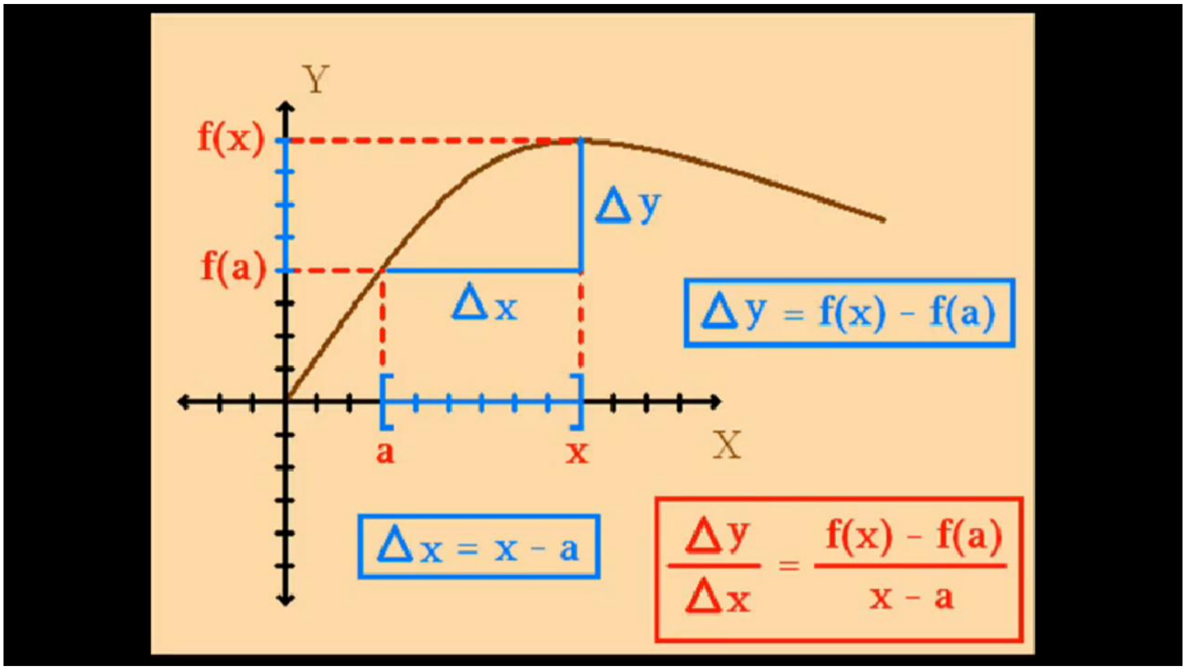
4. **Evalúe la continuidad de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x+2}{x^2-4}, & para\ \ x < -2 \\ 5x+1, & para\ -2 \le x \le 3 \\ \dfrac{10}{x^2-9}, & para\ x > 3 \end{cases}$$

En el punto x = - 3

Applets Para límites
http://www.solvemymath.com/online_math_calculator/calculus/limit_calculator/index.php

4. UNIDAD 3 DERIVADA



http://www.youtube.com/watch?v=KHuO1CK5fhs
http://www.youtube.com/watch?v=A6Vp18ctfWc&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=yW-jtRgmrC8&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=lA_eVbQH4No&feature=related

OBJETIVO GENERAL

Analizar los conceptos básicos de la derivada, así como las diversas reglas para su cálculo y algunas aplicaciones de la misma.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Explorar conceptos y procedimientos asociados con el tema de las derivadas.
- Describir procedimientos asociados con las técnicas para el cálculo de derivadas.
- Comparar mediante la ejemplificación resultados de cálculos de derivadas optimizando así los distintos procedimientos empleados

Prueba Inicial

Para la función $f(x) = 4x^2 - 5x + 3$ halle:

1. $f(a)$
2. $f(h)$
3. $f(x+h)$
4. $f(x+h) - f(x)$
5. $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Para la función $f(x) = \dfrac{4x-3}{5x-2}$ halle:

1. $f(a)$
2. $f(h)$
3. $f(x+h)$
4. $f(x+h) - f(x)$
5. $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

4.1. Conceptos y definiciones asociados con la derivada

4.1.1. Razón de cambio promedio y razón de cambio instantáneo.

Dados dos puntos de coordenadas $(x_0, y_0) \wedge (x, y)$

Se define el cambio en **y** como:
$\Delta y = y_0 - y$

Se define el cambio en **x** como:

$$\Delta x = x_0 - x$$

Se acostumbra cambiar Δx por h

Entonces el cambio en x se define como:

$$h = x_0 - x$$

Se define la razón de cambio promedio como:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \ o \ \frac{\Delta y}{h}$$

Adicionalmente se define la razón de cambio instantánea como:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{h}$$

Como $\Delta y = y_0 - y$

Se tiene que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{y_0 - y}{h}$$

Pero $y_0 = f(x_0) \wedge y = f(x)$

Por lo tanto la expresión queda:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x)}{h}$$

Pero $h = x_0 - x$

Despejando x_0

Queda: $x_0 = x + h$

Reemplazando se tiene que:

La razón de cambio instantánea es:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

4.1.1.1 Definición de derivada:

La derivada de una función f(x) es otra función que se obtiene o se deriva de la función anterior. Para indicar que se está derivando una función f(x) se utiliza cualquiera de las siguientes notaciones.

Si se tiene la función: $y = f(x)$

La primera derivada se simboliza por: $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d[f(x)]}{dx} = D_x[f(x)]$

La segunda derivada la podemos indicar por: $y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2[f(x)]}{dx^2}$

La tercera derivada la podemos indicar por: $y''' = f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d^3[f(x)]}{dx^3}$

La cuarta derivada la podemos indicar por: $y^{(4)} = f^{(4)}(x) = \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d^4[f(x)]}{dx^4}$

La derivada de orden n se puede indicar por: $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n[f(x)]}{dx^n}$

La derivada es la razón de cambio instantáneo, es decir:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Desde esta expresión, se puede explicar el concepto de derivada como un cambio en la función f(x) cuando se produce un pequeño cambio en la variable independiente (en este caso la variable independiente es **x**).

Se entiende la derivada de una función como un cambio en dicha función.

El proceso mediante el cual obtenemos la derivada de una función se llama diferenciación.

Ejemplo1:

Para. $y = f(x) = 3x^2 + 5$; determine la primera derivada de esta función con respecto a la variable x.

Se pide determinar: $f'(x)$

Solución

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^2 + 5 - (3x^2 + 5)}{h}$$

Se resuelven primero las potencias

$$\lim_{h \to 0} \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) + 5 - 3x^2 - 5}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 + 5 - 3x^2 - 5}{h} =$$

Reduciendo términos semejantes queda:

$$\lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2}{h}$$

Factorizando, factor común, queda:

$$\lim_{h \to 0} \frac{h(6x + 3h)}{h}$$

Eliminando la indeterminación queda:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} 6x + 3h$$

Evaluando el límite:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} 6x + 3h = 6x + 3(0) = 6x \to f'(x) = 6x$$

Ejemplo2:

Para: $f(x)=\frac{3x}{x+2} \quad Halle \quad f'(x)$

Solución

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3(x+h)}{(x+h)+2}-\frac{3x}{x+2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3(x+h)(x+2)-3x\left[(x+h)+2\right]}{\left[(x+h)+2\right](x+2)}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3x^2+6x+3xh+6h-3x^2-3xh-6x}{(x+h+2)(x+2)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{6h}{(x+h+2)(x+2)}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{6h}{h(x+h+2)(x+2)}=\lim_{h\to 0}\frac{6}{(x+h+2)(x+2)}=\frac{6}{(x+0+2)(x+2)}$$

$$=\frac{6}{(x+2)(x+2)}\to f'(x)=\frac{6}{(x+2)^2}$$

Ejemplo3:
http://www.youtube.com/watch?v=A66wZnq5PE0&feature=related

Ejemplo4:
http://www.youtube.com/watch?v=ZmOTH6emM2E&feature=related

Ejemplo5:
http://www.youtube.com/watch?v=5FqTmF5rJQ4&feature=fvwrel

Ejemplo6:
http://www.youtube.com/watch?v=wQ8PoGXLyJ4&feature=relmfu

Ejercicio 7

Obtenga la primera derivada de cada una de las siguientes funciones utilizando la fórmula:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

1. $f(x) = 6x^2 - 7x + 3$

2. $f(x) = \dfrac{3x-1}{4x+7}$

3. $f(x) = \dfrac{9x}{2x^2 - 3}$

4. $f(x) = \sqrt{8x+3}$

5. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$

4.2. Leyes para derivar

Este tema también recibe el nombre de **leyes de diferenciación.**

4.2.1. Derivada de una constante:

Si: $y = f(x) = c$ donde c es una constante.

$$y' = f'(x) = 0$$

Esta ley dice que la derivada de una constante es igual a cero.

Ejemplo1.

$y = f(x) = 25$
$y' = 0$

Ejemplo2:

$$y = g(x) = -350$$
$$g'(x) = 0$$

Derivada de una potencia de x

$$y = f(x) = x^n \rightarrow \quad y' = f'(x) = nx^{n-1}$$

Ejemplo 1:

Si $f(x) = x^5$

Halle $f'(x)$

Solución

$$f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$$

Ejemplo 2:

Si $y = h(x) = x^{7/3}$

Halle $h'(x)$

Solución

$$h'(x) = \frac{7}{3}x^{7/3-1} = \frac{7}{3}x^{\frac{7-3}{3}} = \frac{7}{3}x^{4/3} = \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}$$

Derivada de una constante por una función potencia:

$$y = f(x) = cx^n \rightarrow \quad y' = f'(x) = c * nx^{n-1}$$

Para aplicar esta ley la variable debe estar en el numerador.

Si hay radicales, para aplicar esta ley se deben llevar a potencia con exponente fraccionario, aplicar la ley y luego volver a convertir a radical.

Ejemplo 1

$$y = h(x) = 5x^{-3}$$

$$y' = h'(x) = 5 * D_x\left[x^{-3}\right] = 5 * (-3)x^{-3-1} = -15x^{-4} = -\frac{15}{x^4}$$

Ejemplo 2

$$y = f(x) = \sqrt[5]{x^2} = x^{2/5}$$

$$f'(x) = \frac{2}{5}x^{2/5-1} = \frac{2}{5}x^{-3/5} = \frac{2}{5x^{3/5}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$$

Ejemplo 3

$$y = f(x) = \frac{7}{x} = 7x^{-1}$$

$$f'(x) = 7 * (-1)x^{-1-1} = -7x^{-2} = -\frac{7}{x^2}$$

Ejemplo 4

$$y = f(t) = 5t^3 \qquad \frac{dy}{dt} = 15t^2 \qquad \frac{dy}{dx} = 0$$

Ejemplo5:
http://www.youtube.com/watch?v=4E0_L08y_r0&feature=related

Ejemplo6:
http://www.youtube.com/watch?v=A-xrIDIHVlI&feature=related

Ejemplo7:
http://www.youtube.com/watch?v=HM1XCOXaQuA&feature=related

Enlaces para las leyes anteriores

http://www.youtube.com/watch?v=4E0_L08y_r0&feature=related

http://www.youtube.com/watch?v=RiqwT_xoDSw&feature=related

http://www.youtube.com/watch?v=dmi1gk9RwME&feature=related

Derivada de una suma:

$$y = f(x) = h(x) \pm g(x) \pm k(x) \pm \ldots$$

$$f'(x) = h'(x) \pm g'(x) \pm k'(x) \pm \ldots$$

Esta ley dice que la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de cada función; es decir cuando hay una suma, se deriva cada función por separado y luego se juntan los resultados con el signo correspondiente.

Ejemplo 1:

$$y = f(x) = 3x^2 + 5$$
$$f'(x) = 3*2x^{2-1} + 0 = 6x$$

Ejemplo 2:

$$y = g(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x - 10$$
$$Hallar \quad g'''(x)$$

Para hallar la tercera derivada hay que partir siempre de la primera derivada y luego de la segunda.

$$g'(x) = 4*3x^{3-1} - 5*2x^{2-1} + 3 - 0 = 12x^2 - 10x + 3$$
$$g''(x) = 12*2x^{2-1} - 10 + 0 = 24x - 10$$
$$g'''(x) = 24$$

Ejemplo 3:

$$f(x) = 6x^4 - 9x^3 + 5x^2 + 3x + 2$$
$$f'(x) = 6(4)x^{4-1} - 9(3)x^{3-1} + 5(2)x^{2-1} + 3 + 0 = 24x^3 - 27x^2 + 10x + 3$$

Ejemplo 4:

http://www.youtube.com/watch?v=8XDLFQ5qLz0&feature=related

Derivada de un producto:

$$y = f(x) = g(x) * h(x)$$
$$y' = f'(x) = g'(x) * h(x) + h'(x) * g(x)$$

Derivada de un cociente:

$$y = f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \qquad h(x) \neq 0$$
$$y' = f'(x) = \frac{g'(x) * h(x) - h'(x) * g(x)}{[h(x)]^2}$$

Ejemplo 1:

Si $y = f(x) = (5x-7)(2x+9)$

Halle $f'(x)$

Solución

Se debe aplicar la regla del producto.

$y = f(x) = (5x-7)(2x+9)$

$g(x) = 5x-7$

$g'(x) = 5$

$h(x) = 2x-7$

$h'(x) = 2$

$y' = 5*(2x+9) + 2(5x-7) = 10x + 45 + 10x - 14 = 20x + 31$

Ejemplo 2:

Si $y = f(x) = \dfrac{4x-5}{x^2-3x+2}$

Halle $f'(x)$

Solución

Se debe aplicar la regla del cociente.

$$y = f(x) = \frac{4x-5}{x^2-3x+2}$$
$$g(x) = 4x-5 \rightarrow g'(x) = 4$$
$$h(x) = x^2-3x+2 \rightarrow h'(x) = 2x-3$$
$$f'(x) = \frac{4*(x^2-3x+2)-(2x-3)(4x-5)}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{4x^2-12x+8-8x^2+10x+12x-15}{(x^2-3x+2)^2} =$$
$$f'(x) = \frac{-4x^2+10x-7}{(x^2-3x+2)^2}$$

Ejemplo 3:

Si $f(x) = \dfrac{5}{2x-7}$

Halle $f'(x)$.

Solución

$$g(x) = 5 \rightarrow g'(x) = 0$$
$$h(x) = 2x-7 \rightarrow h'(x) = 2$$
$$f'(x) = \frac{0(2x-7)-5(2)}{(2x-7)^2} = -\frac{10}{(2x-7)^2}$$
$$f'(x) = -\frac{10}{(2x-7)^2}$$

Ejemplo 4: No siempre es necesario utilizar la regla del cociente, como se ilustra en los siguientes ejemplos:

$$f(x) = \frac{4x^2-5x+1}{3} = \frac{1}{3}(4x^2-5x+1)$$
$$f'(x) = \frac{1}{3}*\frac{d}{dx}(4x^2-5x+1) = \frac{1}{3}(8x-5)$$

NOTA:

Si: $f(x) = c*g(x)$, entonces, $f'(x) = c*g'(x)$

Ejemplos:

$$f(x) = 9(x^2 - 6x + 15)$$
$$f'(x) = 9(2x - 6) = 18(x - 3)$$

$$f(x) = \frac{5x^4 - 7x^3 + 5}{8} = \frac{1}{8}\left(5x^4 - 7x^3 + 5\right)$$
$$f'(x) = \frac{1}{8}(20x^3 - 21x^2)$$

Ejemplo 5:
http://www.youtube.com/watch?v=f8RyNOKteAE&feature=related

4.2.1.1 Regla de la cadena (o regla de la potencia)

Si $y = f(x) = u^n$, donde u es una función que está escrita en términos de x, entonces:

$$y' = f'(x) = nu^{n-1}u'$$

Otra forma de escribir lo mismo es:

$$f(x) = [g(x)]^n \qquad f'(x) = n[g(x)]^{n-1} * g'(x)$$

Esta ley dice que si se tiene una expresión elevada a cualquier exponente, la derivada es igual al exponente multiplicado por la misma expresión elevada al exponente menos uno y multiplicada por la derivada de lo que está dentro del paréntesis.

Ejemplo 1:

Si $y = f(x) = \left(3x^2 - 5x + 4\right)^7$. Halle $f'(x)$

Solución

Se hace u igual a todo lo que está dentro del paréntesis:

$$u = 3x^2 - 5x + 4$$

Derivando u

$$u' = 6x - 5$$

En términos de u queda:

$$y = f(x) = (u)^7 \rightarrow y = f(x) = u^7$$
$$f'(x) = 7u^{7-1} * u' = 7u^6u'$$

Recuperando la variable inicial

$$f'(x) = 7(3x^2 - 5x + 4)^6 * (6x - 5)$$

Ejemplo 2:

Si $y = h(x) = \sqrt[3]{6x^3 - 8x + 7}$ halle su primera derivada.

Solución

$$y = h(x) = \sqrt[3]{6x^3 - 8x + 7} = \left(6x^3 - 8x + 7\right)^{1/3}$$

$$y' = h'(x) = \frac{1}{3}\left(6x^3 - 8x + 7\right)^{\frac{1}{3}-1}(18x - 8) = \frac{(6x^3 - 8x + 7)^{-2/3}(18x - 8)}{3} = \frac{18x - 8}{3(6x^3 - 8x + 7)^{2/3}}$$

$$h'(x) = \frac{18x - 8}{3\sqrt[3]{(6x^3 - 8x + 7)^2}}$$

Ejemplo 3:

http://www.youtube.com/watch?v=P0Bq3CsvMkc&feature=related,

Ejemplo 4:

Si $y = (2x + 1)^5\left((x^3 - x + 1\right)^4$ Halle su primera derivada.

Solución

$$y' = 2(2x + 1)^4\left(x^3 - x + 1\right)^3\left(17x^3 + 6x^2 - 9x + 3\right)$$

Ejemplo 5:

http://www.youtube.com/watch?v=iXbz7uvjc8I&feature=related,

Ejemplo6:

http://www.youtube.com/watch?v=nBiVLxtzM5w&feature=related

Ejemplo7:

http://www.youtube.com/watch?v=RiqwT_xoDSw&feature=related

Ejemplo8:

http://www.youtube.com/watch?v=FPUPE1D9G84&feature=related

Ejemplo 9:
http://www.youtube.com/watch?v=777494gvxg4&feature=related

Ejemplo10:
http://www.youtube.com/watch?v=8upWMuvw_Sw&feature=related

4.2.1.2 Derivada de funciones exponenciales.

$$y = a^u \quad con \quad a > 0, a \neq 1$$
$$y' = a^u * u' * \ln a$$

Esta ley dice que la derivada de una función exponencial es igual a la misma función exponencial multiplicada por la derivada del exponente y multiplicada por el logaritmo natural de la base. El logaritmo natural del número **e** es igual a uno **(**lne =1**)**

Ejemplo1:
Si $y = f(x) = 5^{3x-10}$, halle su primera derivada.

Solución

$$y = f(x) = 5^{3x-10}$$
$$y' = f'(x) = 5^{3x-10} * 3 * \ln 5$$

Ejemplo2:
Si $y = e^{7x^2-5x-4}$, $halle \ y'$

Solución

$$y = e^{7x^2-5x-4}$$
$$y' = e^{7x^2-5x-4} * (14x-5) * \ln e = e^{7x^2-5x-4} * (14x-5)$$

Ejemplo3
Si $y = f(x) = x^2 * e^{4x^2+5x-3}$, halle la primera derivada.

Solución

$$y' = \frac{d}{dx}\left(x^2\right) * e^{4x^2+5x-3} + \frac{d}{dx}(e^{4x^2+5x-3}) * x^2 = 2xe^{4x^2+5x-3} + e^{4x^2+5x-3} * \frac{d}{dx}\left(4x^2+5x-3\right) * x^2$$

$$y' = 2xe^{4x^2+5x-3} + e^{4x^2+5x-3} * \left(8x+5\right) * x^2$$

Ejemplo4:
http://www.youtube.com/watch?v=SgETNp-GsXs

Ejemplo5:
http://www.youtube.com/watch?v=k8w8P03VqNA&feature=related

4.2.1.3 Derivada de la función logarítmica.

$$y = f(x) = \log_b u$$
$$y' = f'(x) = \frac{u'}{u \ln b}$$

Ejemplo 1.
Si $y = f(x) = \ln\left|3x-10\right|,\ halle\ \ f'(x)$

Solución

$$f'(x) = \frac{D_x\left(3x-10\right)}{(3x-10)\ln e} = \frac{3}{3x-10}$$ Recuerde que lne = 1

Ejemplo 2:
Si $y = \ln\left|5x^4+8x-12\right|,\ halle,\ y'$

Solución

$$y' = \frac{D_x\left(5x^4+8x-12\right)}{\left(5x^4+8x-12\right)\ln e} \Rightarrow y' = \frac{20x^3+8}{5x^4+8x-12}$$

Ejemplo 3:
http://www.youtube.com/watch?v=N5BsXgg6xxU

Ejemplo 4:
http://www.youtube.com/watch?v=ijvgbTBA8jA&feature=related

Ejemplo 5:
http://www.youtube.com/watch?v=6GBLkGLkRJY&feature=related

En algunos casos para derivar funciones logarítmicas es necesario aplicar previamente una o varias de las propiedades de los logaritmos. Dichas propiedades se enuncian a continuación:

- Logaritmo de una potencia:

$$\log_b a^n = n \log_b a$$

Ejemplo 1: Obtenga la primera derivada de:

$$y = \ln(3x-4)^4 = 4\ln(3x-4)$$

$$SOLUCIÓN$$

$$y' = 4 * \frac{3}{3x-4} = \frac{12}{3x-4}$$

Ejemplo 2: Obtenga la primera derivada de.

$$y = f(x) = \log_7 \sqrt[5]{5x^3 + 6x - 9}$$

Aplicando la propiedad

$$y = f(x) = \log_7 (5x^3 + 6x - 9)^{1/5} = \frac{1}{5} \log_7 (5x^3 + 6x - 9)$$

Ahora si se deriva:

$$y' = \frac{1}{5\ln 7} * \frac{15x^2 + 6}{5x^3 + 6x - 9}$$

- Logaritmo de un producto:

$$\log_b (ac) = \log_b a + \log_b c$$

- Logaritmo de un cociente:

$$\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$$

Ejemplo 1: Halle la primera derivada de.

$$y = f(x) = \ln\left[(7x^2 + 4x - 1)^3 \sqrt{5x-3}\right]$$

Aplicando la propiedad del producto:

$$y = f(x) = \ln(7x^2 + 4x - 1)^3 + \ln\sqrt{5x-3} = \ln(7x^2 + 4x - 1)^3 + \ln(5x-3)^{1/2}$$

Aplicando la propiedad número uno:

$$y = f(x) = 3\ln(7x^2 + 4x - 1) + \frac{1}{2}\ln(5x-3)$$

Por último derivando:

$$y' = 3 * \frac{14x+4}{7x^2+4x-1} + \frac{1}{2} * \frac{5}{5x-3} = \frac{3(14x+4)}{7x^2+4x-1} + \frac{5}{2(5x-3)}$$

Ejemplo 2: Halle la derivada de.

$$y = h(x) = \log_2\left[\frac{10x+3}{5x+1}\right]$$

Aplicando la propiedad del cociente:

$$y = \log_2(10x+3) - \log_2(5x+1)$$

Derivando:

$$y' = \frac{1}{\ln 2} * \frac{10}{10x+3} - \frac{1}{\ln 2} * \frac{5}{5x+1}$$

Ejemplo 3:
http://www.youtube.com/watch?v=le1cUxAZJBw&feature=related

4.2.1.4 Derivada de funciones trigonométricas:

- $y = f(x) = \operatorname{sen} u$

$$y' = \cos u . u'$$

Ejemplo 1: Halle la primera derivada de

$$y = f(x) = sen(3x^2 + 5x - 1)$$

Solución

$$Sea \quad u = 3x^2 + 5x - 1 \rightarrow u' = 6x + 5)$$
$$y = senu \rightarrow y' = \cos u.u'$$
$$y' = \cos(3x^2 + 5x - 1).(6x + 5)$$

Ejemplo 2: Halle la primera derivada de:

$$y = \operatorname{sen}\left(\frac{3x+1}{2x-3}\right)$$

Solución

$$Sea \quad u = \frac{3x+1}{2x-3} \rightarrow u' = \frac{3(2x-3) - 2(3x+1)}{(2x-3)^2} = \frac{6x - 9 - 6x - 6}{(2x-3)^2} \rightarrow u' = -\frac{15}{(2x-3)^2}$$
$$y' = \cos\left(\frac{3x+1}{2x-3}\right) * \left(-\frac{15}{(2x-3)^2}\right)$$

Ejemplo 3: Halle la primera derivada de

$$y = f(x) = \operatorname{sen}^5(8x^2 + 3)$$

Solución

Se tiene la siguiente igualdad: $y = f(x) = \operatorname{sen}^5(8x^2 + 3) = \left[\operatorname{sen}(8x^2 + 3)\right]^5$

Para derivar esta expresión se debe aplicar primero la regla de la potencia o regla de la cadena:

$$y' = 5\left[sen(8x^2 + 3)\right]^4 * \cos(8x^2 + 3) * (16x)$$
$$y' = 80x\left[sen(8x^2 + 3)\right]^4 * \cos(8x^2 + 3)$$
$$y' = 80x \cdot sen^4(8x^2 + 3) \cdot \cos(8x^2 + 3)$$

Las siguientes leyes a enumerar se aplican de manera similar a la primera ley, cuyos ejemplos se acaban de explicar.

- $y = f(x) = \cos u$

$$y' = -\operatorname{sen} u.u'$$

- $y = f(x) = tanu$

$$y' = \sec^2 u.u'$$

- $y = f(x) = \sec u$

$$y' = \sec u.tanuu'$$

- $y = f(x) = \csc u$

$$y' = -\csc u . \cot u . u'$$

- $y = f(x) = \cot u$

$$y' = -\csc^2 u . u'$$

Ejemplo 1: Halle la primera derivada de.

$$y = f(x) = tan(4x - 7)$$

Solución

$y' = \sec^2(4x-7) * 4 = 4\sec^2(4x-7)$

Ejemplo 2: Halle la primera derivada de.

$$y = \csc^3(5x^2 - 8x + 3)$$

Solución

$$y' = 3\csc^2(5x^2 - 8x + 3) * [-\csc(5x^2 - 8x + 3)\cot(5x^2 - 8x + 3) * (10x - 8)\ ]$$
$$y' = -3(10x+8)\csc^3(5x^2 - 8x + 3) * \cot(5x^2 - 8x + 3)$$

Ejemplo 3: Halle la primera derivada de

$$y = \cos(2x+1) * x$$

Solución

Acá se tiene un producto, por lo tanto, para derivarlo se debe aplicar la regla del producto:

$$y' = -\mathrm{sen}(2x+1) * 2 * x + 1 * \cos(2x+1) = -2x\,\mathrm{sen}(2x+1) + \cos(2x+1)$$

Ejemplo 4: Obtenga la primera derivad de:

$$y = f(x) = sen[\ln(3x-2)]$$

Solución

$y' = \cos[\ln(3x-2)] * \dfrac{3}{3x-2}$

Ejemplo 5:

http://www.youtube.com/watch?v=lu1H_ljGF44

Ejemplo 6:

http://www.youtube.com/watch?v=_Fq9vROMCnQ&feature=related

Ejemplo 7:

http://www.youtube.com/watch?v=DchcMA739MQ&feature=related

Ejemplo 8:
http://www.youtube.com/watch?v=eAlRGsCR_nY&feature=related

Ejercicio 8

Halle la primera derivada para cada una de las siguientes funciones.

1. $f(x)=9x^3-\dfrac{3}{5x^2}+4\sqrt{3x-1}+x$
2. $f(x)=(4x-3)\cdot(7-3x^2)$
3. $f(x)=(5x-3)^3(7-2x)$
4. $f(x)=(6x^2-7x+4)^4$
5. $y=\dfrac{7x-2}{5x+3}$
6. $y=\dfrac{4x+2}{(3-2x)^3}$
7. $h(x)=\sqrt[3]{\dfrac{5x+2}{3x-4}}$
8. $g(x)=sen\left(\sqrt{7x+1}\right)$
9. $f(x)=\tan\left(\dfrac{10+3}{x-2}\right)$
10. $f(x)=\sec\left(5x-2^{3x+5}\right)$
11. $h(x)=\ln\left(\dfrac{11x+3}{7x^2+2x-9}\right)$
12. $g(x)=\sqrt{3^{2x}-e^x}$
13. $f(x)=senx\cdot\ln x$
14. $f(x)=\dfrac{\cos 3x-1}{\sqrt{8-3x}}$
15. $f(x)=\dfrac{senx}{\cos x}$

Direcciones de applets para derivar.

http://www.cidse.itcr.ac.cr/webMathematica/NewScript/derivar.jsp

http://math.uprag.edu/derivadas.html

4.3. Aplicación e interpretación de la derivada.

4.3.1. Aplicaciones en geometría:

La derivada como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto conocido.
http://www.geogebra.org/en/upload/files/inma_gijon_cardos/Derivadas/derivada.html

Recta tangente es una recta que toca una curva en un punto; como lo muestra la figura. 56

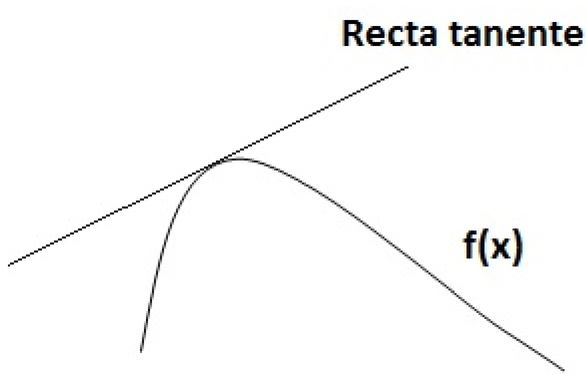


FIGURA. 56. Recta tangente.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 15 de 2011)

Es demostrable que la pendiente de la recta tangente en cualquier punto se obtiene derivando la curva y = f(x).

Lo que se afirma es lo siguiente:

$$m = f'(x)$$

La pendiente en cualquier punto se obtiene derivando la función f(x).

Ejemplo 1:
Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva:

$$y = 3x^2 - 5x - 4$$

En el punto donde **x = 2.**

Solución

El procedimiento a seguir es:

1. Se debe conocer la **y** del punto; para ello se reemplaza la **x** la función dada.

$$Para\ x=2, \quad y=f(2)=3(2)^2-5(2)-4=12-10-4=-2$$
$$El\ \ punto\ tiene\ coordenadas\ (2,-2)$$

2. Para hallar la pendiente se deriva la función y se reemplaza el valor de **x** en la derivada.

$$f'(x)=6x-5$$

Determinación de la pendiente de la recta tangente en x = 2

$$m=f'(2)=6(2)-5=7 \Rightarrow m=7$$

Con el punto y la pendiente se encuentra la ecuación de la recta tangente utilizando la ecuación punto pendiente de la línea recta:

$$y-y_{conocida}=m(x-x_{conocida})$$

$$y-(-2)=7(x-2)$$
$$y=7x-14-2$$
$$y=7x-16$$

Esta es la ecuación de la recta tangente a la curva, $y=f(x)=\mathbf{3}x^2-\mathbf{5}x-\mathbf{4}$, en el punto donde **x = 2**.
Queda como ejercicio efectuar las dos gráficas sobre un mismo plano cartesiano.

Ejemplo 2:

Encuentre la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva $y=f(x)=\sqrt{25-x^2}$ en el punto donde x = -4.

Solución
Se debe hallar primero la "y" del punto:
Para $x=-4, \quad y=\sqrt{25-(-4)^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$

$$x=-4, \quad y=3$$

Para hallar la pendiente, se deriva la función y se reemplaza el valor de "x" en la derivada.

Derivando:

$$y = f(x) = \sqrt{25-x^2} = (25-x^2)^{1/2}$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(25-x^2\right)^{1/2-1}\left(-2x\right) = -x\left(25-x^2\right)^{-1/2} = -\frac{x}{\left(25-x^2\right)^{1/2}} = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$$

Reemplazando x = - 4 en la derivada.

$$m = f'(-4) = -\frac{(-4)}{\sqrt{25-(-4)^2}} = \frac{4}{\sqrt{9}} \Rightarrow m = 4/3$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y-3 = \frac{4}{3}(x-(-4)) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{16}{3} + 3 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$$

Para hallar la pendiente de la recta normal recuerde que cuando dos ecuaciones son normales o perpendiculares, el producto de sus pendientes es igual a menos uno, es decir:

m1 * m2 = -1

Se puede decir que la pendiente de la recta normal es m1, la ecuación queda:

$$\frac{4}{3} * m2 = -1$$

Despejando m2 que es la pendiente de la recta perpendicular:

$$m2 = -1 \div 4/3 \Rightarrow m2 = -3/4$$

Para hallar la ecuación de la recta normal (o perpendicular) se tiene la siguiente información:

$$m = -3/4, \quad x = -4 \quad \wedge \quad y = 3$$

Reemplazando estos valores en la ecuación punto pendiente de la línea recta:

$$y-3 = -\frac{3}{4}(x-(-4)) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - 3 + 3 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x$$

La ecuación de la recta tangente es: $y = \frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$

La ecuación de la recta normal es: $y = -\frac{3}{4}x$

Ejemplo 3:

Encuentre la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva: $y = f(x) = x^2 - 2x - 6$, en el punto donde x = 3.

Solución

Primero se halla la **y** del punto:

$$Para\ x = 3,\ y = f(3) = (3)^2 - 2(3) - 6 = 9 - 6 - 6 = -3 \rightarrow (3,-3)$$

Luego se deriva para hallar la pendiente:

$$f'(x) = 2x - 2 \rightarrow m = f'(3) = 2(3) - 2 = 4$$
$$m = 4$$

Luego se halla la ecuación de la recta tangente:

$$y - (-3) = 4(x - 3) \rightarrow y = 4x - 12 - 3$$
$$y = 4x - 15$$

Para hallar la ecuación de la recta normal, primero se hallas la pendiente de dicha recta. Cuando dos rectas son normales o perpendiculares el producto de sus pendientes es igual a –1.

$m * m_{\perp} = -1$. Despejando queda: $m_{\perp} = \frac{-1}{m}$

Reemplazando:

$$m_{\perp} = \frac{-1}{4} \rightarrow m_{\perp} = -\frac{1}{4}$$

Con esta pendiente y el punto (3,- 3), se encuentra la ecuación de la recta normal:

$$y - (-3) = -\frac{1}{4}(x - 3) \rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} - 3 \rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{9}{4}$$

La ecuación de la recta tangente es: $y = 4x - 15$

La ecuación de la recta normal es: $y = -\frac{1}{4}x - \frac{9}{4}$

Ejemplo 4:

http://www.youtube.com/watch?v=sefneheJGY4

Ejemplo 5:

http://www.youtube.com/watch?v=81CGqmle-jE&feature=fvsr

Ejemplo 6:

http://www.youtube.com/watch?v=H3Ydr96kbUA&feature=related

4.3.1.1 Aplicaciones en economía (razón de cambio).

En esta sección analizaremos la derivada como el modelo matemático para el ingreso marginal y la derivada como el modelo matemático para el costo marginal.

- **Costo marginal**: Se define en economía como el incremento que se presenta en el costo cuando se fabrica una unidad adicional del producto, es decir, el valor que cuesta producir una unidad adicional a las unidades que se tenía planeado producir.

Sí, $c(q)$ es la función para el costo total o simplemente la función de costo cuando se produce **q** unidades de cierto artículo; la función para el costo marginal se obtiene derivando la función de costo.

$Función\ de\ costo\ marginal = c'(q)$.

Analizando un poco más este concepto , desde la derivada, se puede decir que el costo marginal es el costo que resulta de cambiar en una unidad el número de unidades a producir; en otras palabras, es el cambio en el costo cuando se cambia en una unidad el número de unidades a producir.

Muchas veces lo que se conoce la función para el costo promedio denotado por $\bar{c}(q)$. En este caso la función de costo se obtiene como: $c(q) = q * \bar{c}(q)$

- Ingreso marginal: Si se tiene que. $r(q)$ es la función para el ingreso, en este caso cuando se venden **q** unidades de cierto artículo; la función para el ingreso marginal se obtiene derivando la función de ingreso.

$Función\ de\ ingreso\ marginal = r'(q)$

El ingreso marginal, en economía, se define como el ingreso que se obtiene cuando se vende una unidad adicional.

Ejemplo 1.

La función para el costo promedio en la producción de “q” unidades de un artículo está dada por:

$$\bar{c}(q) = 550q + 4000 + \frac{15}{q}\ \$.$$

Determine la función para el costo marginal.

Solución

Para hallar la función de costo marginal primero se debe hallarla función de costo. La función de costo promedio y la función de costo están relacionadas por la siguiente fórmula:

$$\bar{c}(q) = \frac{c(q)}{q}$$

Despejando queda.

$$c(q) = \bar{c}(q) * q = \left(550q + 4000 + \frac{15}{q}\right) * q = 550q^2 + 4000q + \frac{15}{q} * q$$
$$c(q) = 550q^2 + 4000q + 15 \ \$$$

Ahora si se puede hallar la función de costo marginal derivando la función de costo.

$$c'(q) = 1000q + 4.000$$. Función de costo marginal.

Ejemplo 2:

La función para la demanda o precio p (q) en la venta de q unidades de cierto artículo esta dado por:

$$p(q) = 5200 - 0.3q \quad \$(miles).$$

Determine el ingreso marginal cundo se venden 100 unidades del producto.

Solución

Para hallar el ingreso marginal se debe partir del ingreso que no se conoce.
El ingreso y el precio se relacionan por la siguiente ecuación:

$$r(q) = p(q) * q$$

Determinación de la función de ingreso:

$$r(q) = (5200 - 0.3q) * q = 5200q * 0.3q^2 \quad \$(miles)$$

Determinación de la función de ingreso marginal:

$$Como: \ r(q) = 5200q * 0.3q^2 \ \$(miles), \ entonces:$$
$$r'(q) = 5200 - 0,6q \quad \$(miles)$$

Determinación del ingreso marginal para la venta de 100 unidades

$$r'(100) = 5200 - 0{,}6(100) \quad \$(miles) = 5200 - 60 = 5140\$(miles) = 5'140000\$$$

Cundo se vende una unidad adicional a las 100 se obtiene un ingreso de \$5'140000.

Ejemplo 3:
El modelo de costo en cierta fábrica esta dado por:

$$c(q) = 920q^2 + 2q + 700 \quad \$$$

Determine el costo marginal en la producción de 20 unidades del producto.

Solución

Piden hallar $c'(20)$

$$c'(q) = 1840q + 2$$
$$c'(20) = 1840(20) + 2 = 36802\$$$

Producir la unida adicional número veintiuno le cuesta a la fábrica \$36802.

Ejemplo 4:
http://www.youtube.com/watch?v=oyRNxD7axUQ

Ejemplo 5:
http://www.youtube.com/watch?v=8nFOVbNqAE4&feature=related

Ejemplo 6:
http://www.youtube.com/watch?v=0sJ5IYlCTe4

4.3.1.2 Aplicación en física (razón de cambio)

http://www.youtube.com/watch?v=K2RTLTlUdFE

Para que un objeto cambie de posición debe estar en movimiento, implica esto tener una velocidad determinada. Por esto se define la velocidad como un cambio en la posición del objeto en un tiempo determinado. En cálculo siempre que se hable de cambio, se está refiriendo o

hablando de derivada. El cambio en la posición (que es lo que se llama velocidad) se obtiene derivando la función de posición.
Si se conoce la función de posición $s(t)$ de un objeto que se mueve a lo largo de un eje coordenado; la velocidad se obtiene derivando esta función de posición.

V (t) = s' (t) Función de velocidad.

Así mismo cuando se cambia la velocidad sé está produciendo una aceleración.

a (t) = v' (t) = s'' (t) Función de aceleración

Donde **t** es el tiempo. (Segundos, horas, minutos). El tiempo se dará en segundos, a no ser que se de otra indicación al respecto.

$s(t)$. Tiene unidades de distancia (metros, kilómetros, centímetros)
$v(t)$. Tiene unidades de distancia dividido unidades de tiempo (segundos, minutos, horas).
$a(t)$. Tiene unidades de distancia dividido unidades de tiempo al cuadrado.

Ejemplo 1:
La función de posición de un objeto que se mueve a lo largo de un eje coordenado esta dada por:

$$s(t) = 6t^3 + 3t^2 + 5\ m$$

a. Determine la función de velocidad.

Solución

$$v(t) = s'(t) = 18t^2 + 6t\ m/s$$

b. Determine la función de aceleración.

Solución

$$a(t) = v'(t) = 36t + 6\ m/s^2$$

c. Determine posición de reposo.

Solución

Esta se obtiene con $s(0)$

$$s(0) = 6(0)^3 + 3(0)^2 + 5 = 5m$$

d. Determine velocidad inicial.

Solución

Esta se obtiene hallando $v(0)$

$$v(0) = 18(0)^2 + 6(0) = 0 \; m/s$$

Ejemplo 2:

Un objeto se mueve de acuerdo a la función:

$$y = s(t) = 16t^3 - 2t + 1 \text{Metros.}$$

Calcule: Posición, velocidad y aceleración después de 1segundo.

$$s(1) = 16(1)^3 - 2(1) + 1 = 15m$$
$$v(t) = s'(t) = 48t^2 - 2 \rightarrow v(1) = 48(1)^2 - 2 = 46\, m/s$$
$$a(t) = v'(t) = 96t \rightarrow a(1) = 96(1) = 96\, m/s^2$$

Ejemplo 3:

Un camión recorre una distancia en kilómetros en t horas dada por la función:

$$w(t) = 3t^2 + 5t + 20$$

Obtenga: Posición, velocidad y aceleración después de 3 horas.

Solución

Posición para $t = 3$

$$w(3) = 3(3)^2 + 5(3) + 20 = 62km$$

Velocidad para $t = 3$

$$v(t) = w'(t) = 6t + 5\, km/h$$

$$v(3) = 6(3) + 5 = 23\,km/h$$

Aceleración para $t = 3$

$$a(t) = v'(t) = 6\,km/h^2$$

$$a(3) = 6km/h^2$$

Ejemplo 4:
Un objeto se mueve de acuerdo a la función:

$$y = S(t) = -2t^3 - 3t^2 + 36t + 120 \quad m$$

a. Determine en que tiempo la velocidad es igual a cero.

Solución

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = -6t^2 - 6t + 36 \rightarrow v(t) = 0 \rightarrow -6t^2 - 6t + 36 = 0$$
$$t = -3s \vee t = 2s$$

La velocidad se hace cero en t = 2 segundos.

b. ¿Qué distancia ha recorrido el objeto desde que se empezó a mover hasta que se detiene?

Solución
Hay que calcular: $S(2) - S(0)$

Para t = 2, $y = S(2) = -2(2)^3 - 3(2)^2 + 36(2) + 120$ =164m
Para t = 0, y = S(0) = 120m

La distancia recorrida es de 164 – 120 = 44m

c. ¿Cuál es la posición del objeto en el momento en que se detiene?

Solución
Del numeral a se sabe que el objeto se detiene en t = 2 s.

S (2) = 164m.

Ejemplo5:
http://www.youtube.com/watch?v=LqvXvnyYiYg

- Máximos y mínimos relativos.
- http://www.youtube.com/watch?v=0HEgk9mqp40&feature=related
- http://www.youtube.com/watch?v=B1mJbvTwhm4

Para la explicación de este tema tenga en cuenta la gráfica de la figura 57.

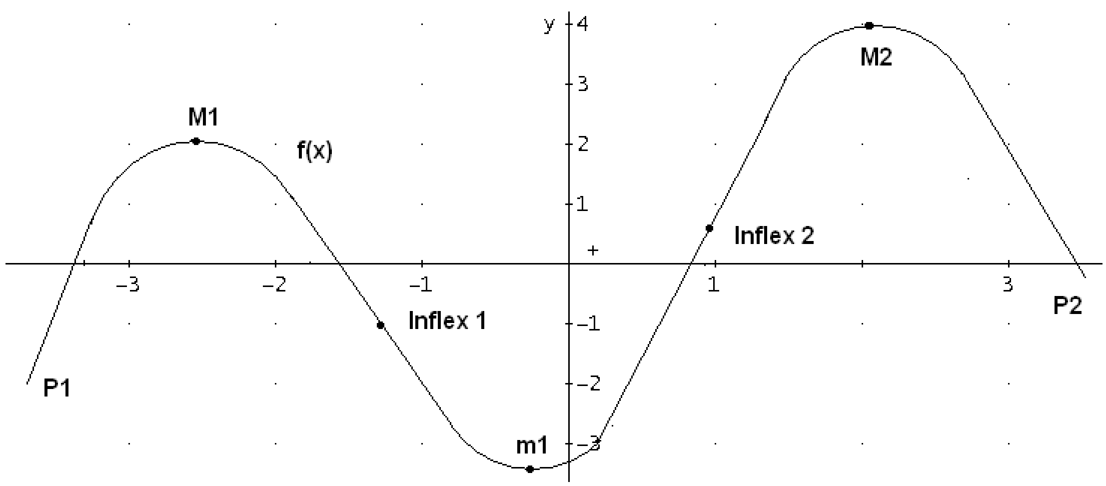


Figura 57. Puntos críticos de una función
(Autor. Elkin Ceballos Gómez)

La figura 57 muestra la gráfica de una función $y = f(x)$ cualquiera.
Los puntos M_1 y M_2 son los máximos relativos de la función $y = f(x)$. Posiblemente no sean los únicos valores máximos de la función.

El punto m_1 es el mínimo relativo de la función. No necesariamente es el único.

Los puntos $M_1, M_{2,} m_{,1} p_1, p_2$...Se llaman los puntos críticos de la función $y = f(x)$.

Se puede ver que en los puntos críticos $M_1, M_{2,} m_{,1}$ la recta tangente es horizontal; lo que es lo mismo en algunos puntos críticos la pendiente tiene como valor cero.

NOTA: Los puntos $M_1, M_{2,} ..., m_{,1} ...$ También reciben el nombre de extremos locales.

- **Punto crítico:**

Es un punto donde sucede algo en una función, como por ejemplo, la derivada no existe o la derivada es igual a cero.

Hay puntos donde también existe un corte en la gráfica de la función, hay un cambio de concavidad.

Donde hay cambio de concavidad son los puntos Inflex1 e Inflex2 ó puntos de inflexión, puede haber más.

Interesan los puntos críticos donde la derivada vale cero, ya que en estos puntos se determina si hay puntos máximos o mínimos.

También interesan los puntos donde hay cambio de concavidad, es decir los puntos de inflexión.
Además se puede ver de la gráfica de la figura 57 que en un máximo la función abre hacia abajo, es decir, es cóncavo hacia abajo. La concavidad tiene que ver con el signo de la segunda derivada.

En conclusión la segunda derivada evaluada en un máximo es negativa.

Los puntos críticos $M_1, M_{2,} m_{,1},$ Son los puntos que interesa determinar.

Así mismo en un mínimo la función abre hacia arriba, la función en un mínimo es cóncavo hacia arriba. La segunda derivada evaluada en un mínimo tiene como resultado signo positivo.

En la figura 57, también se puede observar que a la izquierda de un máximo la función es creciente y a la derecha del máximo es decreciente.
A la izquierda de un mínimo la función es decreciente y a su derecha es creciente. Y también que entre un máximo y un mínimo la función es decreciente y entre un mínimo y un máximo es creciente.

Procedimiento para determinar los máximos y mínimos de una función.

1. Obtenga la primera derivada de la función $y = f(x)$.
2. Iguale la derivada a cero y resuelva la ecuación resultante. Los valores obtenidos son los puntos críticos de la función. Sí la ecuación resultante no tiene solución o se llega a una afirmación falsa quiere decir que no tiene puntos críticos.
3. Obtenga la segunda derivada de la función $y = f(x)$.
4. Reemplace cada punto crítico en la segunda derivada. Se pueden presentar cuatro opciones.
   a. $f''(x_{crítico}) < 0$. $x_{crítico}$ $es\ \text{máx}\,imo$ relativo

La segunda derivada evaluada en el punto crítico sea negativa; en este caso el punto crítico corresponde a un máximo relativo.

   b. $f''(x_{crítico}) > 0$. $\text{x}_{\text{crítico}}$ $es\ \text{mín}\,imo$ relativo

La segunda derivada evaluada en un punto crítico sea positiva; en este caso el punto crítico corresponde a un mínimo.

   c. $f''(x_{crítico}) = 0$.

La segunda derivada evaluada en el punto crítico sea igual a cero; en este caso no se puede afirmar nada.

   d. $f''(x_{crítico})\ no\ exista$.

La segunda derivada evaluada en el punto crítico no exista; El punto crítico no corresponde ni a un máximo ni a un mínimo; en este caso es posible que el punto crítico corresponda a una asíntota vertical.

5. Si se desea obtener máximos y mínimos absolutos, se debe indicar un intervalo; para determinar cuál es el máximo absoluto y el mínimo absolutos en dicho intervalo, se debe evaluar en la función los puntos críticos y los extremos del intervalo. El mayor valor será el máximo absoluto, el menor valor será el mínimo absoluto.

Ejemplo 1: Para la función:

$$y = h(x) = 2x^3 - 24x^2 + 72x - 15$$

a. Halle los máximos y mínimos relativos.
b. Halle el máximo absoluto y el mínimo absoluto en el intervalo $[-3,5]$

Solución

a. **Derivando.**

$$h'(x) = 6x^2 - 48x + 72$$

Igualando la primera derivada a cero y solucionando la ecuación que resulta.

$$h'(x) = 6x^2 - 48x + 72$$
$$6x^2 - 48x + 72 = 0 \to 6(x^2 - 8x + 12) = 0 \to 6(x-6)(x-2) = 0$$
$$x - 6 = 0 \to x = 6$$
$$x - 2 = 0 \to x = 2$$

Hallando la segunda derivada

$$h''(x) = 12x - 48$$
$$h''(6) = 12(6) - 48 = +24 \to x = 6 \quad es\ mínimo \quad relativo.$$
$$h''(2) = 12(2) - 48 = -24 \to x = 2\ es\ máximo \quad relativo.$$

Reemplazando cada punto crítico en la segunda derivada:

$$h''(6) = 12(6) - 48 = +24 \to x = 6 \quad es\ mínimo \quad relativo.$$
$$h''(2) = 12(2) - 48 = -24 \to x = 2\ es\ máximo \quad relativo.$$

b. Para determinar el máximo y el mínimo absoluto en el intervalo $[-3,5]$

Se debe determinar el valor de la función en los puntos extremos del intervalo y en los puntos críticos que están dentro del intervalo, es decir, en $x = -3, \quad x = 5 \wedge x = 2$, el valor $x = 6$ no se evalúa porque no pertenece al intervalo $[-3,5]$

$$h(-3) = 2(-3)^3 - 24(-3)^2 + 72(-3) - 15 = -501$$
$$h(2) = 2(2)^3 - 24(2)^2 + 72(2) - 15 = 49$$

$$h(5) = 2(5)^3 - 24(5)^2 + 72(5) - 15 = -5$$

El mayor valor de todos es 49 que corresponde a x = 2
El menor valor de todos es – 501 que corresponde a x = - 3

Máximo absoluto en el intervalo $[-3,5]$ es x = 2
El mínimo absoluto en el intervalo $[-3,5]$ es x = - 3.

Ejemplo 2: Para la función:

$$y = g(x) = x^4 - 72x^2 + 1000$$

Halle los máximos y mínimos relativos
Solución

$$g'(x) = 4x^3 - 144x$$
$$4x^3 - 144x = 0 \rightarrow 4x(x^2 - 36) = 0 \rightarrow 4x(x-6)(x+6) = 0$$
$$4x = 0 \rightarrow x = \frac{0}{4} \rightarrow x = 0$$
$$x - 6 = 0 \rightarrow x = 6$$
$$x + 6 = 0 \rightarrow x = -6$$
$$g''(x) = 12x^2 - 144$$
$$g''(0) = 12(0)^2 - 144 = -144 \rightarrow x = 0 \text{ máx}\,imo$$
$$g''(-6) = 12(-6)^2 - 144 = 12(36) - 144 = 432 - 144 = +288 \rightarrow x = -6 \text{ mín}\,imo$$
$$g''(6) = 12(6)^2 - 144 = 12(36) - 144 = 432 - 144 = +288 \rightarrow x = 6 \text{ mín}\,imo$$

- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento e intervalos de concavidad hacia arriba y hacia debajo.

Se puede afirmar sin temor a equivocaciones que:

A la izquierda de un máximo y hasta el máximo una función es creciente
A la derecha de un máximo una función es decreciente.
A la izquierda de un mínimo y hasta el mínimo una función es decreciente.
A la derecha de un mínimo una función es creciente.
Entre un máximo y un mínimo una función es decreciente.
Entre un mínimo y un máximo una función es creciente
En un máximo una función es cóncava hacia abajo y cambia de concavidad en los puntos de inflexión.
En un mínimo una función es cóncava hacia arriba y cambia de concavidad en los puntos de inflexión.

Ejemplos 1:
Para la función:

$$y = f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 + 6x + 8$$

Determine intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento, intervalos donde la función es cóncava hacia arriba e intervalos donde la función es cóncava hacia abajo.
Solución

Se debe encontrar primero los máximos y los mínimos de la función:

$$f'(x) = -x^2 + x + 6 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$
$$x = 3 \vee x = -2 \rightarrow Puntos\ críti\cos$$
$$f''(x) = -2x + 1$$
$$f''(3) = -2(3) + 1 = -5 \rightarrow x = 3 \max.$$
$$f''(-2) = -2(-2) + 1 = +5 \rightarrow x = -2 \min.$$

Escribiéndolos en orden quedarían: x = -2 mínimo relativo y x = 3 máximo relativo.

Se sabe que entre un mínimo y un máximo la función es creciente.

La función es creciente en:

$$x \in [-2, 3]$$

También se sabe que a la izquierda de un mínimo la función es decreciente.

La función es decreciente en:

$$x \in (-\infty, -2]$$

Y por último a la derecha de un máximo la función es decreciente.

La función es decreciente en:

$$x \in [3, +\infty)$$

Determinación de los puntos de inflexión.

Para determinar donde hay cambio de concavidad, se debe conocer los puntos de inflexión y, recuerde, que estos se obtienen solucionando la ecuación:

$$f''(x) = 0.$$

Se tiene que:

$$f''(x) = -2x + 1 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/2$$

El punto de inflexión corresponde a $x = 1/2$.

Se sabe que en un mínimo y en todos los puntos vecinos al mínimo la función es cóncava hacia arriba y cambia de concavidad en el punto de inflexión, por lo tanto:

Cóncava hacia arriba:

$$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$$

En un máximo y en todos los puntos vecinos al máximo la función es cóncava hacia abajo

Concavidad hacia abajo:

$$\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Ejemplo 2:
Para la función:

$$y = f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x - 2$$

Determine intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento, intervalos donde la función es cóncava hacia arriba e intervalos donde la función es cóncava hacia abajo.

Solución

Se debe encontrar primero los máximos y los mínimos de la función:
Obteniendo la primera derivando, igualando a cero y solucionando la ecuación:

$$f'(x) = 6x^2 - 5x + 1 \to 6x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\frac{6}{6}\left(6x^2 - 5x + 1\right) = 0 \Rightarrow \frac{36x^2 - 5(6x) + 6}{6} = 0 \Rightarrow \frac{(6x-3)(6x-2)}{6} = 0$$

$$\frac{3\cdot(2x-1)\cdot 2\cdot(3x-1)}{3\cdot 2} = 0 \Rightarrow (2x-1)\cdot(3x-1) = 0$$

$$2x - 1 = 0 \vee 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{3}$$

Reemplazando cada punto en la segunda derivada

$$f''(x) = 12x - 5$$
$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 12\left(\frac{1}{3}\right) - 5 = 4 - 5 = -1 \to x = \frac{1}{3}\ \max.$$
$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 12\left(\frac{1}{2}\right) - 5 = 6 - 5 = 1 \to x = \frac{1}{2}\ \min.$$

Escribiéndolos en orden quedarían: x = 1/3 máximo relativo y x = 1/2 mínimo relativo.

Se sabe que a la izquierda de un máximo la función es creciente.

La función es creciente en:

$$x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$$

También se sabe que un máximo y un mínimo la función es decreciente.

La función es decreciente en:

$$x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$$

Y por último a la derecha de un mínimo la función es creciente.

La función es decreciente en:

$$x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Determinación de los puntos de inflexión.

Para determinar donde hay cambio de concavidad, se debe conocer los puntos de inflexión y, recuerde, que estos se obtienen solucionando la ecuación:

$$f''(x) = 0 .$$

Se tiene que:

$$f''(x) = 12x - 5 \Rightarrow 12x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5/12$$

El punto de inflexión corresponde a $x = 5/12$.

Se sabe que en un mínimo y en todos los puntos vecinos al mínimo la función es cóncava hacia arriba y cambia de concavidad en el punto de inflexión, por lo tanto:

Cóncava hacia arriba:

$$\left[\frac{5}{12}, +\infty\right)$$

En un máximo y en todos los puntos vecinos al máximo la función es cóncava hacia abajo

Concavidad hacia abajo:

$$\left(-\infty, \frac{5}{12}\right]$$

La gráfica de las funciones anteriores, puede ser realizada con el applet de la siguiente página.

http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/NUMERICO/index.htm

Ejemplo 3:
http://www.youtube.com/watch?v=OoKdlZkDGQk&feature=related

Ejemplo 4:
http://www.youtube.com/watch?v=yklL_7e41kU&feature=fvwrel

4.3.1.3 Optimización.

Consiste en problemas de aplicación, donde el objetivo es encontrar los máximos o los mínimos de una función o modelo matemático.
En este tema, se parte de una función y posteriormente, por medio de las técnicas de la primera y de la segunda derivada, se deben encontrar los valores máximos o los valores mínimos de dicha función.

Se sugiere el siguiente procedimiento:

1. Identifique cual es la función objetivo. (Función que se desea maximizar o minimizar).
2. Por lo general la función no es conocida, constrúyala de acuerdo a las condiciones del problema.
3. Obtenga los máximos o los mínimos de dicha función. Cuando el enunciado del problema incluya un intervalo, para hallar los máximos o los mínimos, se deben tener en cuenta los extremos del intervalo.
4. Conteste las preguntas del problema.

Ejemplo 1: Problema planteado por los autores (Haeussler & Richard, 1997).
La función de costo total de un fabricante esta dado por:

$$c(q) = \frac{q^2}{4} + 3q + 400\ US\$$$

¿Para qué nivel de producción el costo promedio por unidad será mínimo? ¿Cuál es el costo promedio mínimo?

Solución:

La función objetivo es el de costo promedio y se desea minimizar. Se debe encontrar dicha función, ya que no es dada.

Determinación de la función de costo promedio:

$$\bar{c}(q) = \frac{c(q)}{q} = \frac{\frac{q^2}{4} + 3q + 400\,US\$}{q} = \frac{q}{4} + 3 + \frac{400}{q}$$

Para determinar los mínimos de la función de costo promedio, se debe derivar.
Para derivar la función de costo promedio, una posibilidad es escribir dicha función de la siguiente manera:

$$\bar{c}(q) = \frac{1}{4}q + 3 + 400q^{-1}$$

Derivando la expresión anterior:

$$\bar{c}'(q) = \frac{1}{4} + 0 + 400(-1)q^{-1-1} \Rightarrow \bar{c}'(q) = \frac{1}{4} - \frac{400}{q^2}$$

Se iguala a cero y se soluciona la ecuación resultante:

$$\bar{c}'(q) = \frac{1}{4} - \frac{400}{q^2}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{400}{q^2} = 0 \rightarrow \frac{q^2 - 1.600}{4q^2} = 0$$

$$q^2 - 1.600 = 0 \rightarrow (q+40)(q-40) = 0$$

$$q + 40 = 0 \rightarrow q = -40 \; no\ sirve.$$

$$q - 40 = 0 \rightarrow q = 40 \; punto\ crítico.$$

El valor negativo (q = -40) no sirve porque no podemos hablar de producción negativa.

Se obtiene la segunda derivada:

$$\bar{c}'(q) = \frac{1}{4} - \frac{400}{q^2} = \frac{1}{4} - 400q^{-2} \Rightarrow \bar{c}''(q) = 0 - 400(-2)q^{-3} \Rightarrow \bar{c}''(q) = \frac{800}{q^3}$$

Se reemplaza cada punto crítico en la segunda derivada:

$$\bar{c}''(q) = \frac{800}{q^3}$$

$$\bar{c}''(q) = \frac{800}{40^3} = \frac{800}{64000} = +0{,}0125$$

$$q = 40 \; min.$$

Con una producción de 40 unidades se garantiza que el costo promedio es mínimo.

Para hallar el costo promedio mínimo reemplace 40 en la función de costo promedio:

$$\bar{c}(40) = \frac{40}{4} + 3 + \frac{400}{40} = 23\,US\$$$

Ejemplo 2:

Un monopolista vende un artículo por un precio de $ 30.000, y le ofrece a uno de sus clientes un descuento de diez pesos por cada unidad comprada.
Determine:

1. La función de ingreso.
2. El ingreso máximo.

Solución

1. Sea q el número de unidades vendidas, entonces el precio de cada unidad será:

$ 30.000 menos 10 pesos por cada unidad vendida, esto es:

Pero se debe tener en cuenta que el precio no puede ser negativo, entonces la condición para el precio es:

$$30.000 - 10q \geq 0$$

Resolviendo la inecuación queda $q \in [0,\ 3000]$

Ingreso = precio por número de unidades vendidas. $r(q) = p(q) * q = (30.000 - 10q) * q$
La función de ingreso queda:

$$r(q) = 30.000q - 10q^2 \ \$$$

Con $q \in [0,\ 3000]$

2. S e debe encontrar los máximos de la función de ingreso.

$$r'(q) = 30.000 - 20q \rightarrow 30.000 - 20q = 0$$
$$q = \frac{30.000}{20} = 1500$$
$$r''(q) = -20 \rightarrow r''(1.500) = -20$$
$$q = 1.500 \ Máximo$$

Pero para encontrar el máximo absoluto en el intervalo

$$q \in [0,\ 3000]$$

Se debe hallar:

$$r(0) = 0$$
$$r(3.000) = 30.000 * (3.000) - 10(3.000)^2 \ = 0$$
$$r(1.500) = 30.000(1.500) - 10(1.500)^2 \ = \$22'500.000$$

El máximo absoluto en el intervalo $q \in [0,\ 3000]$ es $q = 1500$

El ingreso máximo se obtiene con la venta de 1.500 unidades

El ingreso máximo es:

$$r(1.500) = 30.000(1.500) - 10(1.500)^2 = \$22'500.000$$

El máximo ingreso que puede obtener es de $ 22'500.000

Ejemplo 3:

Un mayorista tiene la siguiente promoción del día:
Vende piñas a 2000 pesos la unidad y ofrece un descuento de 10 pesos por piña comprada.

3. Encuentre una función que represente el ingreso del mayorista.

Solución:

Para construir la función de ingreso en la venta de la q piñas, tenga en cuenta que:

Ingreso = precio de venta multiplicado por la cantidad vendida.

En la siguiente tabla se observa mejor la construcción de la función de ingreso para la venta de q piñas.

Cantidad de piñas vendidas	Precio de venta	Ingreso
1	2000 – 10(1)	[2000 – 10(1)]*1
2	2000 – 10(2)	[2000 – 10(2)]*2
3	2000 – 10(3)	[2000 – 10(3)]*3
4	2000 – 10(4)	[2000 – 10(4)]*4
⋮	⋮	⋮
Q	2000 – 10q	(2000 – 10q)*q

Como y = r(q) es el ingreso obtenido al vender q piñas:

$$r(q) = (2000 - 10q)q = 2000q - 10q^2$$

$$r(q) = 2000q - 10q^2$$

4. ¿Bajo qué condiciones el mayorista obtendrá el máximo ingreso?

Solución.

$$r'(q) = 2000 - 20q$$

$$r'(q) = 0 \Rightarrow 2000 - 20q = 0 \Rightarrow q = \frac{-2000}{-20} \Rightarrow q = 100$$

$$r''(q) = -20$$

$$r''(100) = -20 \Rightarrow q = 100 \text{ } \textit{máximo relativo}$$

Con la venta de 100 piñas se obtiene el ingreso máximo.

El ingreso máximo es:

$$r(100) = 2000(100) - 10(100)^2 = 100000 \text{ \$}$$

Ejemplo 4: Ejemplo propuesto como ejercicio por los autores (Haeussler & Richard, 1997)

Una empresa dispone de US$ 3000 para cercar una porción rectangular de terreno adyacente a un río usando a este como un lado del área cercada. El costo de la cerca paralela al río es de US$ 5 por metro instalado y el de la cerca para los otros dos lados es de US$ 3 por metro instalado. Encuentre las dimensiones del área máxima cercada. Véase la figura 58.

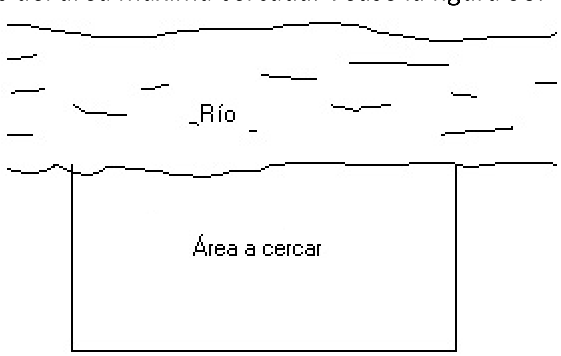


Figura 58. Área a cercar.
(Autor. Elkin Ceballos Gómez. Mayo 18 de 2011)

Solución

De acuerdo con la figura 58:
Sea **"x"** la longitud de la cerca paralela al río, sea "**y"** la longitud de cada uno de los lados del terreno adyacente al río.

Se debe encontrar una relación entre **"x"** y **"y"** por los datos que dan, se sabe que el costo total del área es de US$ 3000, por tanto:

3000 = 5x + 6y
3000 – 5x = 6y
(3000 - 5x)/6 = y

Recuerde que a = b*h, par el ejemplo a = x*y

Al sustituir en a = x*y:

$$a(x) = x * \left(\frac{3000 - 5x}{6}\right)$$
$$a(x) = x(3000 - 5x)/6$$
$$a(x) = \frac{3000x}{6} - \frac{5x^2}{6}$$
$$a(x) = 500x - \frac{5x^2}{6}$$

Determinación del dominio de esta función:

$$a(x) = 500x - \frac{5x^2}{6}$$

como el área no puede ser negativa, entonces :

$$500x - \frac{5x^2}{6} > 0$$
$$x(500 - \frac{5x}{6}) > 0$$
$$x = 0 \vee 500 - \frac{5x}{6} = 0$$
$$3000 - 5x = 0$$
$$x = -3000/-5$$
$$x = 600$$
$$do\min io\; x \in (0, 600)$$

Aplicando la derivada:

$$a'(x) = 5000 - \frac{10}{6}x$$

$$5000 - \frac{10}{6}x = 0$$

$$-10x = -3000$$

$$x = \frac{-3000}{-10}$$

$$x = 300$$

Determinando la segunda derivada: $a''(x) = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$

Reemplazando en la segunda derivada:

$$a''(300) = -\frac{5}{3}$$

X = 300 es un máximo relativo.

Se debe encontrar el valor de y

$$y = \frac{300 - 5x}{6} = \frac{3000 - 5(300)}{6} = 250$$

Por lo tanto, las dimensiones son: 300 metros y 250 metros

Ejemplo 5:

http://www.youtube.com/watch?v=TSVK1vFifQ0&feature=relmfu

Ejemplo 6:
http://www.youtube.com/watch?v=x9oQOz95kyA&feature=related

Ejemplo 7:
http://www.youtube.com/watch?v=1QckQJcpcKo&feature=related
Ejemplo 8:
http://www.youtube.com/watch?v=LuIyYqlfdoQ&feature=related

Ejemplo 9:
http://www.youtube.com/watch?v=pcr4ikpQlLo&feature=related

Ejercicio 9

1. **Encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva:**

En el punto x = 1

2. **Encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva:**

   En el punto x = 2

3. **La función de costo en la fabricación de q unidades de cierto artículo es:**

   Determine el costo marginal y el costo promedio en la producción de 25 unidades del producto.

4. **La función de demanda en la venta de q unidades de cierto artículo es:**

   Determine el ingreso marginal en la venta de 10 unidades del producto.

5. **La función de posición de un objeto está dada por:**

   Determine la velocidad y la aceleración para un tiempo de 10 segundos.

6. **La función de posición de un objeto está dada por:**

Determine la velocidad y la aceleración para un tiempo de 3 horas.

Determine el instante en el cual el objeto se detiene.

7. **Para la función**

Determine:

Máximos y mínimos relativos.

Puntos de inflexión.

Intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.

Intervalos de concavidad arriba e intervalos de concavidad abajo.

8. **Para la función**

Determine:

Máximos y mínimos relativos.

Puntos de inflexión.

Intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.

Intervalos de concavidad arriba e intervalos de concavidad abajo.

9. **Un monopolista ofrece a uno de sus clientes vender un producto de la siguiente**

manera:

Un precio de $8000 y un descuento de 0,02 pesos por cada unidad comprada. Determine el máximo ingreso que puede obtener el monopolista bajo estas condiciones.

10. Se desea construir una caja rectangular sin tapa con una lámina de cartón de 80 cm por 35 cm, para ello se quita en cada esquina un cuadrado de x cm de longitud. Determine las dimensiones de la caja de tal manera que permita almacenar el máximo volumen. Determine el volumen máximo.

5. PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria: Para determinar intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento de una función, se debe recorrer la gráfica de la función de izquierda a derecha, si la sensación es que se sube por la gráfica, en este tramo la función es creciente y si la sensación es que se baja por la gráfica, en este tramo la función es decreciente.

Traer a la memoria: Que a los números reales no pertenecen expresiones de la forma: cero dividido cero, un número diferente de cero dividido cero, la raíz par de los números negativos, el logaritmo de cero, el logaritmo de los números negativos, entre otros.

Tener en cuenta: Para hallar los interceptos de una función con el eje x, se hace y = 0. Para encontrar los interceptos con el eje y, se hace x = 0.

Tenga presente: Para determinar si una expresión cuya gráfica es dada, es función, se traza una recta vertical, si corta la gráfica en un solo punto corresponde a una función; si corta la gráfica en dos o más puntos no es una función.

Traer a la memoria: Una función racional es discontinua en todos aquellos valores de x en los cuales el denominador es igual a cero.

Tener en cuenta: Toda función es continua en su dominio.

Traer a la memoria: Si al evaluar un límite da como resultado una expresión de la forma , este no es un resultado válido que se llama una indeterminación de la "forma cero sobre cero". Las indeterminaciones de la forma se pueden eliminar factorizando y/o racionalizando.

Tener en cuenta: Para determinar los puntos críticos de una función, se debe solucionar la ecuación: primera derivada igual a cero.

Traer a la memoria: Para determinar si un punto crítico corresponde a un máximo o a un mínimo relativo, debe reemplazar cada punto crítico en la segunda derivada. Si la segunda derivada evaluada en el punto crítico es positiva, el punto crítico corresponde a un mínimo relativo y si el resultado es negativo, el punto crítico corresponde a un máximo.

Tener en cuenta: Para determinar los puntos de inflexión de una función, se debe solucionar la ecuación: segunda derivada igual a cero.

Tenga presente: Que los cambios de concavidad de una función se presentan en los puntos de inflexión de la misma.

Traer a la memoria: Que el costo marginal se interpreta como: el dinero que cuesta producir una unidad adicional a las unidades planeadas.

6. GLOSARIO

Función: "Una función es una regla que describe la forma en que una cantidad depende de otra; por ejemplo, al estudiar el movimiento, la distancia recorrida es una función del tiempo." (Stewar, Lothar, & Watson, 2001, p.130).

Dominio: el dominio para cualquier función está constituido por todos los valores que puede tomar la variable independiente (la **x**). Todos los valores tomados de los números reales.

Rango: el rango para cualquier función está constituido por todos los números que puede tomar la variable dependiente (la **y**). Al rango también se le conoce como la imagen de la función

Interceptos: Un intercepto es un punto en el cual la gráfica de la función corta un eje.

Crecimiento: Se dice que una función es creciente cuando al aumentar la x, la y también aumenta o viceversa.

Decrecimiento: Se dice que una función es decreciente cuando al aumentar la x, la y disminuye o viceversa.

Continuidad: Conceptualmente, se dice que una función es continua, cuando al observar su gráfica, esta se puede recorrer sin necesidad de levantar el lápiz.

Discontinuidad: Conceptualmente, se dice que una función es discontinua, cuando al observar su gráfica, es necesario levantar el lápiz para recorrerla.

Punto crítico*:* Es un valor de x en el cual la primera derivada de una función es igual a cero o no existe.

Punto de inflexión: Es un valor de x en el cual la segunda derivada de una función es igual a cero.

Asíntota vertical: Es una línea recta vertical que presenta la característica que la gráfica de la función tiende a tocarla; pero nunca la toca, ni la corta, ni la cruza.

7. BIBLIOGRAFÍA

- Dávila, A., Navarro, P., & Carvajal, J. (1996). INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO. Caracas: McGraw-Hill.

- Edwar, T. D. (1996). Cálculo Para Administración, Economía y Ciencias Sociales. SANTAFE DE BOGOTA.: McGraw Hill.

- emagister.com. (27 de septiembre de 2007). Wikilearning. Recuperado el 18 de Mayo de 2011, de http://www.wikilearning.com/apuntes/funciones_matematicas-funciones/3503-1

- especificado, N. (s.f.). monografías.com. Recuperado el 18 de Mayo de 2011, de Matemática.: http://www.monografias.com/trabajos7/mafu/mafu.shtml#fun

- Fernández, A. S. (s.f.). *web social*. Recuperado el 18 de mayo de 2011, de Solución problemas de Matemáticas y Física Vía Email: http://www.jfinternational.com/funciones-matematicas.html

- Haeussler, E., & Richard, P. S. (1997). Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. México: Prentice hall.

- Hoffmann, L. D., & Bradley, G. L. (1995). CÁLCULO Aplicado a Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales. Santafé de Bogotá: McGRAW-HILL.

- Norma, G. e. (2010). eleducador.com. Recuperado el 18 de Mayo de 2011, de http://www.eleducador.com/col/contenido/contenido.aspx?catID=110&conID=307

- Purcell, E., & Varberg, D. (1993). Cálculo con geometría analítica. México: Prentice Hall.

- S.T.Tan. (1998). Matemáticas para administración y economía. México: International Thompson editores, S.A.
- Soler, F. F., Núñez, R., & Aranda, S. M. (2002). Fundamentos de Cálculo con aplicaciones a ciencias Económicas y Administrativas. Bogotá: ECOE EDICIONES.

- Stewar, J. (1999). CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. México: International Thomson Editores, S. A. De C. V.

- Stewar, J., Lothar, R., & Watson, S. (2001). Precálculo. Madrid: International Thomson Editores, S.A.

- Stewart, J. (1999). Cálculo conceptos y contexto. México: International Thomso Editore.
- Uribe, C. J. (1990). Matemáticas una propuesta curricular. Un décimo grado educación media vocacional. Medellín: Bedout editores S.A.
- Uribe, C. J., & Ortíz, D. M. (No especificado). Matemática Experimental *8.* Medellín: Uros editores.