ASIGNATURA TRASVERSAL DE LA ESCUELA CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS I

CORPORACIÓN UNIVERSITARIA REMINGTON

DIRECCIÓN PEDAGÓGICA

2011

CRÉDITOS

El módulo de estudio de la asignatura transversal Matemáticas I es propiedad de la Corporación Universitaria Remington. Las imágenes fueron tomadas de diferentes fuentes que se relacionan en los derechos de autor y las citas en la bibliografía. El contenido del módulo está protegido por las leyes de derechos de autor que rigen al país.

Este material tiene fines educativos y no puede usarse con propósitos económicos o comerciales.

AUTOR

Elkin Ceballos Gómez.
Ingeniero Electricista de la Universidad Nacional Diplomado en Diseño Curricular. Especialista en Matemáticas Aplicadas y Pensamiento Complejo
Docente de La Corporación Universitaria de Ciencia y Desarrollo Docente de matemáticas en educación básica y media en la Institución Educativa Kennedy Docente de la organización Rémington.
eceballos2@yahoo.com

Nota: el autor certificó (de manera verbal o escrita) No haber incurrido en fraude científico, plagio o vicios de autoría; en caso contrario eximió de toda responsabilidad a la Corporación Universitaria Remington, y se declaró como el único responsable.

RESPONSABLES

Director de la Escuela de Ciencias Básicas e Ingeniería
Dr. Mauricio Sepúlveda

Director Pedagógico
Octavio Toro Chica
dirpedagogica.director@remington.edu.co

Coordinadora de Medios y Mediaciones
Angélica Ricaurte Avendaño
mediaciones.coordinador01@remington.edu.co

GRUPO DE APOYO

Personal de la Unidad de Medios y Mediaciones
EDICIÓN Y MONTAJE
Primera versión. Febrero de 2011.

TABLA DE CONTENIDO

1. MAPA DE LA ASIGNATURA

MATEMÁTICAS I

PROPÓSITO GENERAL

Con este módulo se pretende entregar al estudiante las herramientas necesarias que le permitan desenvolverse de forma eficiente en todas las áreas del conocimiento.

OBJETIVO GENERAL

Habilitar a los estudiantes para que, a través de un lenguaje matemático simple, construyan modelos matemáticos que les permitan la explicación de los fenómenos cotidianos, generando una conciencia del trabajo en equipo bajo la firme convicción de responsabilidad y respeto, para el afianzamiento de las fortalezas y superación de las debilidades, capacitando al estudiante para el uso de los conceptdel álgebra en situaciones problémicas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Capacitar al estudiante para que use adecuadamente operaciones con números fraccionarios, las leyes de potenciación y radicación, operaciones con polinomios, la factorización y las fracciones algebraicas, facilitando que los alumnos tengan una base para trabajos posteriores en el área de las matemáticas.

- Conducir a los estudiantes al manejo de relaciones matemáticas que involucren una o dos variables, permitiendo el análisis y solución de una situación específica dada.

- Analizar el modelo lineal, a través de la representación de situaciones problémicas mediante el lenguaje matemático, facilitando de esta manera la manipulación matemática, soluciones

UNIDAD 1
MATEMÁTICAS GENERALES

Realiza talleres experimentales y trabajo colaborativo con campos numéricos, ley de signos, leyes de los números reales, operaciones con números fraccionarios, potenciación, radicación y racionalización;

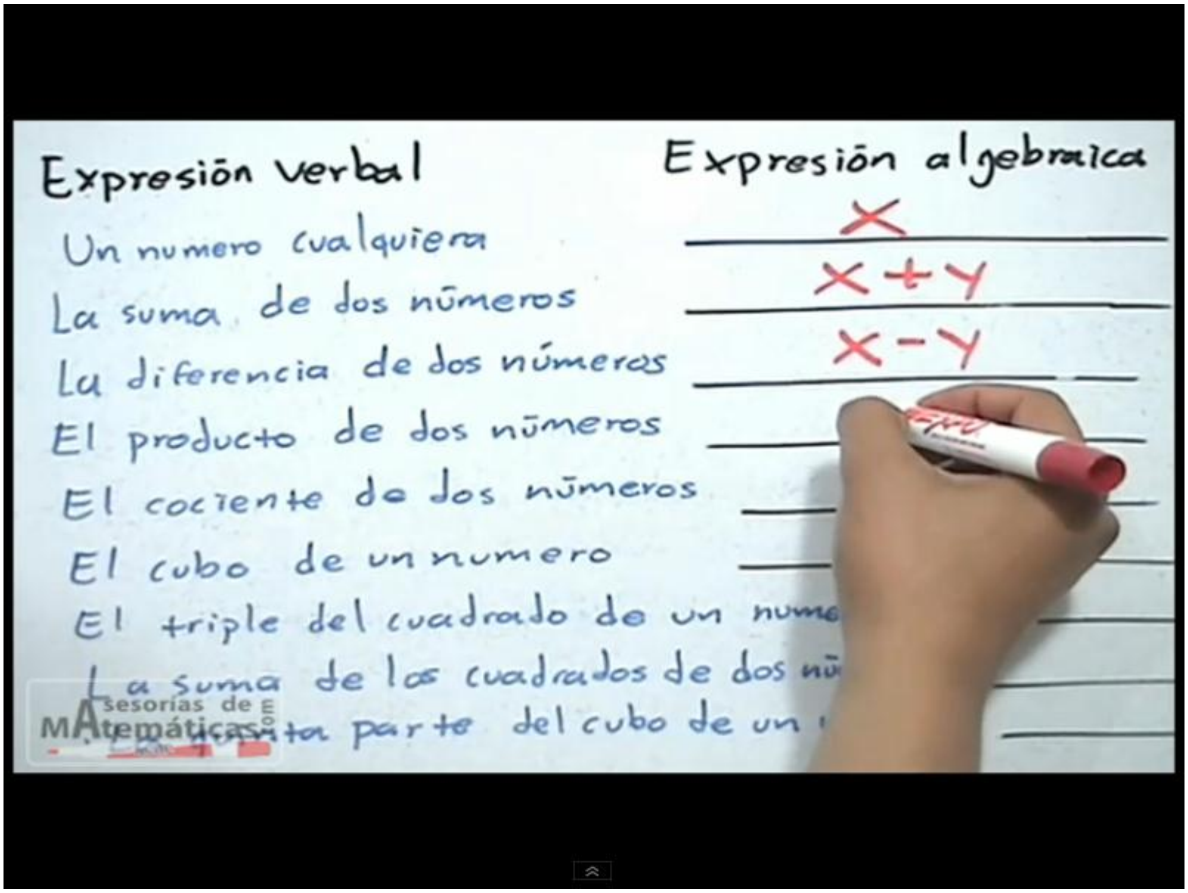
UNIDAD 2
SOLUCIÓN DE ECUACIONES E INECUACIONES

Soluciona ecuaciones lineales, cuadráticas, racionales, irracionales, logarítmicas y exponenciales con una incógnita.
Resuelve situaciones problémicas cotidianas por medio de ecuaciones con

UNIDAD 3
CONCEPTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA.

Representa situaciones problémicas cotidianas para ser solucionadas y representadas por medio del modelo lineal.
Aplica correctamente el modelo lineal en la solución de problemas.
Determina la ecuación

2. MATEMÁTICAS GENERALES



http://www.youtube.com/watch?v=zut8H1BaoFU&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=QEBqnFS5Mi4&feature=fvwrel
http://www.youtube.com/watch?v=NYz6PEEdY4M&feature=related

OBJETIVO GENERAL

- Capacitar al estudiante para que use adecuadamente operaciones con números fraccionarios, las leyes de potenciación y radicación, operaciones con polinomios, la factorización y las fracciones algebraicas, facilitando que los alumnos tengan una base para trabajos posteriores en el área de las matemáticas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar los diferentes grupos en los cuales pueden incluirse los números, identificando expresiones matemáticas que conducen a operaciones no válidas en el campo de los números reales.

- Operar con potencias enteras y fraccionarias, revisando los exponentes enteros positivos, el exponente cero, los exponentes enteros negativos, los exponentes racionales, los procedimientos para la racionalización de numeradores y denominadores.

- Definir los conceptos algebraicos.

- Realizar las diferentes operaciones con polinomios y expresiones algebraicas.

- Establecer las reglas básicas de la factorización , utilizándolas para la descomposición factorial de expresiones

- Simplificar expresiones algebraicas racionales.

Prueba Inicial

Efectúe las siguientes operaciones:

1. $\frac{5}{0}$
2. $\frac{0}{10}$
3. $(-6)(-3)+8(-1)$
4. $\frac{3}{2}-\frac{5}{3}+\frac{7}{8}$
5. $(-2)^2 * 3-5(-2)^4-2^2$
6. $x^2 * x^3$
7. $\frac{x^4}{x}$
8. $2^n * 2^3$

2.1. Saberes previos

2.1.1. Saberes previos

2.1.1.1 CAMPOS NUMÉRICOS

- **Números dígitos:** Conjuntó compuesto por los números con los cuales se forman los demás números. Por lo tanto los números dígitos están formados por los números 0, 1, 2, 3, 4, 5,6, 7, 8 y 9. A estos números se les asigna la letra D.

- **Números naturales:** Conjunto formado por todos los enteros positivos. A estos números se les asigna la letra N. Son los números que utilizamos para contar. (http://www.youtube.com/watch?v=QqSy17-8Wsg&feature=fvwrel)

- $N = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,....\}$

- **Números enteros**: Conjunto formado por los enteros positivos, enteros negativos y el cero. A estos números se les asigna la letra Z. (http://www.youtube.com/watch?v=Vtd8_XmJPE4)

$Z = \{...,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,...\}$

Nota: $N = Z^+$

- **Números racionales:** Un número racional es todo número que se pueda escribir como un cociente entre dos números enteros, con el denominador diferente de cero (http://www.youtube.com/watch?v=TAZcU5JUd0s). Los matemáticos le asignaron la letra Q. De tal manera que la definición matemática de los números racionales es:

$Q = \frac{p}{q}$ Donde $p \; y \; q$ son números enteros y q no puede ser cero ($q \neq 0$).

A los números racionales pertenecen:

Todos los enteros,

Todos los fraccionarios

Los decimales finitos.

Como 1.324 que tiene tres decimales

Como 0.25 que tiene dos decimales.

Como 0.3 que tiene un decimal.

Los decimales infinitos periódicos. Son aquellos que tienen infinitos decimales pero que todos o algunos se repiten con cierta secuencialmente.
Ejemplos:

$5.3434343434...$ Se repite el tres y el cuatro.

$3{,}5322222222...$ Se repite el dos.

$0{,}023512512512...$ Se repite el cinco, el uno y el dos.

Los números mixtos: Un número mixto es un número que tiene una parte entera y una parte que es un fraccionario. Es un número de la forma $a\frac{b}{c}$, donde $a, b\ y\ c$ son números enteros y $c \neq 0$.

Ejemplo: $3\frac{2}{7},\ 4\frac{5}{8},\ 8\frac{1}{2}$

Conversión de número mixto en fraccionario.

Para convertir un número mixto en fraccionario, el numerador del fraccionario que se obtendrá se forma multiplicando la parte entera por el denominador del número mixto y sumándole al resultado el numerador; el denominador del fraccionario es el mismo denominador del mixto.
Es decir, se debe aplicar la siguiente igualdad.

$$a\frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}.$$

Ejemplos: Convierta los siguientes números mixtos en números fraccionarios:

Ejemplo1:

$$7\frac{2}{3} = \frac{7*3+2}{3} = \frac{23}{3}$$

Ejemplo2:

$$2\frac{1}{5} = \frac{2*5+1}{5} = \frac{11}{5}$$

Ejemplo3:

$$4\frac{6}{11}=\frac{4*11+6}{11}=\frac{50}{11}$$

Ejemplo4:

$$-3\frac{4}{7}=-\frac{3*7+4}{7}=-\frac{25}{7}$$

Conversión de fraccionario en número mixto

Para poder efectuar esta conversión se debe cumplir que el numerador sea mayor que el denominador, es decir, que el fraccionario sea impropio. Para convertir un fraccionario a mixto, se divide el numerador del fraccionario entre su denominador, el cociente de esta división pasará a ser la parte entera del mixto, el residuo pasará a ser su numerador y el denominador será el mismo del fraccionario.

Ejemplos: Convertir a número mixto:

Ejemplo1:

$\frac{21}{4}$ Al dividir 21 entre 4 el cociente es 5(parte entera del número mixto), el residuo es 1(numerador del número mixto), entonces nos queda, $5\frac{1}{4}$

Se puede comprobar la validez de este resultado convirtiendo el mixto a fraccionario.

Ejemplo2:

Convertir $\frac{13}{5}$ en número mixto. $\frac{13}{5}=2\frac{3}{5}$

Ejemplo3:

Convertir $\frac{5}{6}$ en número mixto. No es posible, ya que el numerador no es mayor que el denominador.

- **Números irracionales:** Un número irracional es todo número que no se puede escribir como un cociente entre dos números enteros (http://www.youtube.com/watch?v=WBsdEIfeVfw). Podemos ver que un número no puede ser racional e irracional al mimo tiempo, o sea si es racional no puede ser irracional, o lo contrario, si es irracional no puede ser racional. A los irracionales los matemáticos le asignaron la letra H o la Q'.

A los irracionales pertenecen las raíces reales no exactas y los decimales infinitos no periódicos. Son ejemplo de estos números:

$$\sqrt{5}, \quad \sqrt[5]{28}, \quad 2{,}5732596451...$$

- **Números decimales infinitos no periódicos:** En estos números sus cifras decimales no se repiten con ningún tipo de periodicidad. Por ejemplo 4,25674136..., 0,0254785... . Estos números resultan de las raíces no exactas.

- **Números reales.** Están formados por la suma de los racionales más los irracionales. Son los números con los cuales vamos trabajar en este curso. Los matemáticos le asignaron la letra IR (http://www.youtube.com/watch?v=fLpDD_mIk4o&feature=fvst). Todos los campos numéricos anteriores pertenecen a los números reales.

- **Números imaginarios:** A estos números pertenece la raíz par de todo número negativo. Se distinguen por la letra I. Por ejemplo $\sqrt{-4}$. Si dices que $\sqrt{-4} = -2$ te digo que no hay un número que multiplicado por sí mismo dos veces (y más general un número par de veces) de cómo resultado un número negativo. Para solucionar este problema y poder operar con este tipo de números nacieron los números imaginarios en los cuales se definen:

- $\sqrt{-1} = i$, y entonces la raíz par de cualquier número negativo se puede escribir en términos de **i**. Por ejemplo.

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1*4} = \sqrt{-1}*\sqrt{4} = i*2 = 2i$$
$$\sqrt{-25} = \sqrt{-1*25} = \sqrt{25}*\sqrt{-1} = 5i$$

- **Números complejos:** Están formados por la suma de los reales más los imaginarios. A ellos pertenecen todos los conjuntos numéricos. Se simbolizan con la letra C y $C = R + I$.

- **Ley de signos**

- **Para la multiplicación y para la división (http://www.youtube.com/watch?v=qHdUDPqyrxI)**

La ley de signos para la multiplicación dice que el producto de signos iguales tiene como resultado signo positivo y el producto de signos contrarios tiene como resultado signo negativo.
La ley de signos para la división se aplica igual que la ley de signos para el producto.
Lo podemos ver en el siguiente cuadro.

$$\text{Pr}\,oducto\begin{cases} +.+=+ \\ -.-=+ \\ +.-=- \\ -.+=- \end{cases} \qquad Cociente\begin{cases} \dfrac{+}{+}=+ \\ \dfrac{-}{-}=+ \\ \dfrac{+}{-}=- \\ \dfrac{-}{+}=- \end{cases}$$

Ejemplos.

$$-3.2=-6 \qquad \frac{10}{-5}=-2$$

$$-5(-4)=20 \qquad \frac{-12}{-8}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2} \qquad \frac{28}{36}=\frac{7}{9}$$

- **Propiedad de los signos para la suma.**
  La propiedad de los signos para la suma dice que signos iguales se suman y se conserva el signo que tienen los números y signos contrarios se restan y se conserva el signo del número mayor.

Ejemplos.

$$3+5=+8 \qquad 5-2=+3$$

$$-5-4=-9 \qquad 3-7=-4$$

$$-2+1=-1 \qquad -7+10=+3$$

$$-70+40=-30 \qquad 36a+50a=86a$$

$$b-6b=-5b \qquad 301z-520z=-219z$$

- **Valor absoluto**.

El valor absoluto de un número a, se expresa como $|a|$, representa la distancia del número a al número cero, es por esta razón que el valor absoluto de cualquier número es positivo. (http://www.youtube.com/watch?v=4mSl7-FezoA&feature=relmfu)

Ejemplos:

1. $|3| = 3$
2. $|-2| = 2$
3. $\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$
4. $7 + |-2| = 7 + 2 = 9$
5. $|3 - 5 * 2 + 1| = |3 - 10 + 1| = |-8| = 8$

- **Algunas propiedades de los números reales**.

- LEY CONMUTATIVA: $\begin{cases} a + b = b + a & Suma \\ ab = ba & \text{Pr}oducto \end{cases}$

Ejemplos:

$3 + 7 = 7 + 3 = 10$

$(5)(3) = (3)(5) = 15$

- LEY DISTRIBUTIVA:

Esta propiedad solo se cumple para la multiplicación con respecto a la suma, y dice:

$$a(b + c) = ab + ac$$

Ejemplo: $3(4 + 2) = 3 * 4 + 3 * 2 = 18$

- LEY ASOCIATIVA: $\begin{cases} a + (b + c) = (a + b) + c & Suma \\ a(bc) = (ab)c & Multiplicación \end{cases}$

Ejemplos:

$3 + 5 + 10 = 3 + (5 + 10) = (3 + 5) + 10 = 18$

$2(3)(4) = (2 * 3)4 = 2(3 * 4) = 24$

- LEY DEL MODULO:

PARA LA SUMA: El número real **0** es llamado el módulo de la suma, ya que para todo número real **a** se cumple que: $a + 0 = 0 + a = a$

Ejemplo: $3 + 0 = 0 + 3 = 3$

PARA LA MULTIPLICACIÓN: El número real **1** es llamado el módulo de la multiplicación, ya que para todo número real **a**, se cumple: $a * 1 = 1 * a = a$

Ejemplo: $7 * 1 = 1 * 7 = 7$

- LEY DEL INVERSO:
  PARA LA SUMA: Para todo número real **a** existe un único número real (llamado inverso aditivo de a o negativo de a), representado por **– a**, de tal manera que: $a + (-a) = -a + a = 0$

Ejemplo:

El inverso aditivo de 3, es -3, ya que 3 – 3 = 0.
El inverso aditivo de –5, es 5, ya que -5 + 5 = 0.

PARA LA MULTIPLICACIÓN: Para todo número real **a** $\neq 0$ existe un único número real (llamado recíproco o inverso multiplicativo de a), representado por $\frac{1}{a}$, de tal manera que: $a * \frac{1}{a} = \frac{1}{a} * a = 1$

Ejemplos:

El recíproco de 7 es 1/7, ya que 7*1/7 = 1.
El recíproco de 1/3 es 3, ya que 1/3*3 = 1.
El recíproco de –7/5 es –5/7, ya que (-7/5)*(-5/7) = 1.

Para ayudar a la comprensión de este tema puede visitar la siguiente página en internet: http://www.youtube.com/watch?v=x2EEmTWVhq8

- **DIVISIÓN DE CERO Y DIVISIÓN ENTRE CERO**.
  (http://www.youtube.com/watch?v=7p0dfjhOTGc)

$$0 \div b = \frac{0}{b} = 0, \quad b \neq 0$$

$$0 \div 0 = \frac{0}{0} \quad es \quad indeterminado$$

$$a \div 0 = \frac{a}{0} \quad es \quad indefinido$$

Signos de agrupación

Los signos de agrupación se emplean para indicar que las cantidades encerradas en ellos deben considerarse como **un todo,** o sea, como una sola cantidad; por esto siempre se deben efectuar primero las operaciones indicadas dentro de los signos de agrupación. Por ejemplo en la siguiente operación.

$3(5-2)$ Primero se debe efectuar la operación dentro del paréntesis (cinco menos dos) y luego efectuar la multiplicación por tres.

$3(5-2)=3(3)=3*3=9$

Los signos de agrupación son de cuatro clases:

$(\ )$ Paréntesis ordinario o **paréntesis.**

$[\ ]$ Paréntesis angular o **corchete.**

$\{\ \}$ **Llaves.**

$\overline{\quad}$ **Vínculo o barra**.

La forma en que se emplean los signos de agrupación es por lo general la siguiente:

$\{[(\ )]\}$

$\leftarrow \rightarrow$ Las operaciones se deben efectuar de adentro hacia fuera.

Prioridad en las operaciones

Cuando se efectúan operaciones aritméticas o algebraicas se debe tener el siguiente orden.

1. Potencias o exponentes.
2. Multiplicaciones y divisiones.
3. Sumas y restas.

Tenga en cuenta que cuando hay signos de agrupación se debe desarrollar primero las operaciones que hay dentro de ellos. (http://www.youtube.com/watch?v=IzBhMmg-H8I&feature=fvst), (http://www.youtube.com/watch?v=JfduXbPZWAA&feature=related).

Ejemplo 1: Resuelva: $3*4+5$

SOLUCIÓN:

Primero se efectúa la multiplicación y luego la suma

$3*4+5=12+5=17$

Ejemplo2: Resuelva: $3*(4+5)$

SOLUCIÓN

Primero se efectúa lo que tenemos dentro del paréntesis.

$$3*(4+5)=3*(9)=3*9=27$$

Ejemplo 3: Resuelva: $5+20\div(18-2*4)$

SOLUCIÓN

$$5+20\div(18-2*4)=5+20\div(18-8)=5+20\div(10)=5+20\div 10=5+2=7$$

Primero efectúo todo lo del paréntesis empezando por la multiplicación de 2*4=8 luego 18-8=10, este es el resultado del paréntesis. Queda $5+20\div 10$

Se debe efectuar primero la división $20\div 10=2$ quedando 5+2 por último

Se efectúa esta suma 5+2=7.

Ejemplo 4: Resuelva: $10-3\{4+5[7-4(6-2)]\}$

SOLUCIÓN

$$10-3\{4+5[7-4(6-2)]\}=10-3\{4+5[7-4(4)]\}=10-3\{4+5[7-16]\}=$$
$$10-3\{4+5[-9]\}=10-3\{4-45\}=10-3\{-41\}=10+123=133$$

Ejemplo 5: Resuelva: $7-\frac{15}{3+2}$

SOLUCIÓN

$$7-\frac{15}{3+2}=7-\frac{15}{5}=7-3=4$$

Ejemplo 6: Resuelva: $7-15\div(3+2)$

SOLUCIÓN

$$7-15\div(3+2)=7-15\div(5)=7-3=4$$

Ejemplo 7: Resuelva: $3^2*6+5=$

SOLUCIÓN

$$3^2*6+5=6*6+5=36+5=41$$

Ejemplo8: Resuelva: $7-6\div 3+2$

SOLUCIÓN

$7-6\div3+2=7-2+2=7$

- **Mínimo común múltiplo m. c. m.**

El mínimo común múltiplo entre dos o más números es el menor número que los contiene exactamente.

Cuando se afirma que un número **a** contiene exactamente a número **b** se quiere decir que si se divide el número **a** entre el número **b** el resultado será un número entero. (http://www.youtube.com/watch?v=OsaX_IbhxNg)

Tenga en cuenta que cuando se dice que el m.c.m. entre dos o más números es el menor número que los contiene exactamente, no se está afirmando que sea el menor de los números. De hecho el m.c.m. de dos o más números nunca será el menor de los números. Será el número que los contiene a todos en menor proporción. Para entender mejor lo anterior se tiene los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.

Determine el m.c.m. entre 2 y 4. Si pensaste que es el número 2 recuerda que el m.c.m nunca será el número menor. Si dijiste que es el número 4 estas en lo correcto, ya que si dividimos el 4 entre el 2 el resultado es 2 que es un número entero y si dividimos el 4 entre el 4 el resultado es 1 que es un número entero.

Ejemplo 2.

Determine el m.c.m. entre 6 y 4 Si pensaste que es el número 12 estas en lo correcto ya que el 12 contiene 2 veces al número 6 y contiene 3 veces al número 4 y podemos ver que ambos son números enteros. Si pensaste que es el número 6 recuerda que si dividimos el 6 entre el 4 el resultado no es un número entero. Si pensaste que es el número 24 recuerda que aunque el 24 contiene exactamente al 6 y al 4 no es el menor número que los contiene exactamente. El menor número que contiene exactamente al 6 y al 4 es el número 12.

Ejemplo 3.

Determine el m.c.m. entre 10, 50, 70, 14, 20. Puedes ver que ya no es tan fácil saber cuál es el m.c.m. de estos números por esto debemos describir un método para determinarlo.

Método para determinar el m.c.m.

1. Factorizar o descomponer cada número como un producto de sus factores primos. Esto es dividir cada número primero por 2 luego por 3, por 5, por 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43,... que son los números primos.

Como tarea consulta cual es la definición de los números primos y cita algunos ejemplos.

2. El m.c.m. resulta de multiplicar los factores primos entre sí sin repetirlos y cada uno con su mayor exponente.

Retomando el ejemplo 3 se puede observar que el 10 es divisible sólo entre el 2 y el 5.
Por lo tanto, $10 = 2*5$
Así mismo, $70 = 2.5.7$

$50 = 2*5^2$
$14 = 2.7$
$20 = 2^2.5$

Se puede observar que los únicos factores de estos números son el 2, el 5 y el 7 también que el mayor exponente del 2 es el 2, del 5 es el 2 y del 7 es el 1.
Por lo tanto: $m.c.m. = 2^2 * 5^2 * 7 = 4*25*7 = 700$

Ejemplo 4.

Determine el m.c.m. entre 36, 45, 40 y 6.

$36 = 2^2.3^2$
$45 = 3^2.5$
$40 = 2^3.5$
$6 = 2.3$

Los únicos factores de estos números son el 2, el 3 y el 5. Y el mayor exponente de cada número es: Del 2 es el 3, del 3 es el 2 y del 5 es el 1.
Por lo tanto: $m.c.m. = 2^3 * 3^2 * 5 = 8*9*5 = 360$

Ejemplo 5:
Determine el m.c.m. entre 44, 48, 66 y 18.

$44 = 2^2 * 11$

$48 = 2^4 * 3$

$66 = 2*3*11$

$18 = 2*3^2$

$$m.c.m = 2^4 * 3^2 * 11 = 16*9*11 = 1584$$

- **números fraccionarios**.

Concepto de fraccionario: A continuación se presenta un concepto muy general sin profundizar mucho acerca del tema.

Un número fraccionario es todo número de la forma $\frac{p}{q}$, donde p es un número entero y q también es un número entero pero no puede ser cero ($q \neq 0$). El número p se llama **numerador** y el número q se llama **denominador**. Tenga en cuenta que el signo de un fraccionario puede ir en el medio, en el numerador o en el denominador; esto es:

$$-\frac{p}{q} = \frac{-p}{q} = \frac{p}{-q}$$

Aplicando la ley de los signos para la división se justifica lo anterior.

Fracción propia: Es aquella donde el numerador es menor que el denominado.

Ejemplo: $\frac{3}{5}, \frac{7}{9}$

Fracción impropia: Es aquella donde el numerados es mayor que el denominador, estos fraccionarios se pueden convertir a número mixto.

Ejemplo: $\frac{5}{2}, \frac{13}{3}$

http://www.youtube.com/watch?v=S1vm9Mp2YWY&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=FrmL5gldBjA&feature=related

- **Operaciones con fraccionarios:**

Multiplicación: Se debe multiplicar numeradores entre sí y denominadores entre sí. Recuerde que primero se debe efectuar la ley de signos y posteriormente simplificar si es necesario.
(http://www.youtube.com/watch?v=x1-9xugvcm8Entonces)

De manera general

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a*c}{b*d} \quad b \neq 0 \wedge d \neq 0$$

Ejemplos:

$$\frac{2}{3}*\frac{5}{7}=\frac{2*5}{3*7}=\frac{10}{21} \qquad \frac{-14}{9}*\frac{6}{35}=-\frac{4}{15}$$

División: Se efectúa una multiplicación en cruz o lo que es lo mismo se invierte el fraccionario divisor y luego se multiplica. (http://www.youtube.com/watch?v=va9eoz7q_vQ&feature=fvwrel)

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a*d}{b*c} \quad c\neq 0, \quad b\neq 0 \wedge d\neq 0$$

Ejemplos

$$\frac{6}{5}\div\frac{-2}{3}=\frac{6*3}{5*(-2)}=-\frac{9}{5} \qquad \frac{\frac{10}{3}}{\frac{5}{4}}=\frac{10*4}{3*5}=\frac{8}{3}$$

Suma y resta: Para sumar o restar números fraccionarios se presentan dos casos. Fraccionarios de igual denominador y fraccionarios de diferente denominador.

Suma (resta) de fraccionarios de igual denominador: Se deja el mismo denominador y se suman (y/o restan numeradores).

Ejemplos.

$$\frac{3}{7}+\frac{5}{7}-\frac{10}{7}=\frac{3+5-10}{7}=-\frac{2}{7}$$

$$\frac{-9}{5}+\frac{16}{5}-\frac{3}{5}=\frac{-9+16-3}{5}=\frac{4}{5}$$

$$\frac{13}{x}-\frac{25}{x}+\frac{4}{x}+\frac{28}{x}=\frac{13-25+4+28}{x}=\frac{20}{x}$$

Suma (resta) de fraccionarios de diferente denominador: Inicialmente fraccionarios de diferente denominador no se pueden sumar de forma directa; para poderlos sumar se deben llevar a un denominador común, dicho denominador común es el m.c.m. de los denominadores de los fraccionarios a sumar. En realidad lo que se hace es que se amplifican todos los fraccionarios, de tal manera que el denominador común para todos sea el m.c.m. de sus denominadores.

El procedimiento a efectuar es el siguiente.

1. Halle el m.c.m. de los denominadores.
2. El m.c.m. será el denominador común para todos los fraccionarios.
3. Como se cambió el denominador, también se deben cambiar los numeradores de cada fraccionario. Para cada fraccionario el nuevo numerador se obtiene al dividir el m.c.m. por el denominador y el resultado multiplicarlo por el numerador.
4. Después de esto se procede como en el caso anterior.

(http://www.youtube.com/watch?v=1ktyVZthSX4&feature=fvsr)

Ejemplos.

1) $\frac{7}{5}-\frac{4}{3}+\frac{10}{9}$

El m.c.m. de los denominadores (del 5, el 3 y del 9) es el 45. Esto es m.c.m.= 45. Ahora debemos transformar cada fraccionario de manera que todos queden con 45 como denominador, entonces:

$$\frac{7}{5}=\frac{\frac{45}{5}*7}{45}=\frac{63}{45} \qquad \frac{4}{3}=\frac{\frac{45}{3}*4}{45}=\frac{60}{45} \qquad \frac{10}{9}=\frac{\frac{45}{9}*10}{45}=\frac{50}{45}$$

Entonces

$$\frac{7}{5}-\frac{4}{3}+\frac{10}{9}=\frac{63}{45}-\frac{60}{45}+\frac{50}{45}=\frac{63-60+50}{45}=\frac{53}{45}$$

2) $\frac{3}{4}-\frac{7}{10}-\frac{5}{8}=\frac{\frac{40}{4}*3}{40}-\frac{\frac{40}{10}*7}{40}-\frac{\frac{40}{8}*5}{40}=\frac{30}{40}-\frac{28}{40}-\frac{25}{40}=\frac{30-28-25}{40}=-\frac{23}{40}$

3) $\left(\frac{3}{2}\div\frac{5}{4}\right)-\left(\frac{7}{3}*\frac{1}{2}\right)$

En estos ejercicios primero se debe efectuar las operaciones indicadas dentro de los signos de agrupación.

fxdddddddddddd006003003003003003003003003003003003003003003003003003003003003003003003003003003003003003003034

$$\left(\frac{3}{2}\div\frac{5}{4}\right)-\left(\frac{7}{3}*\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3*4}{2*5}\right)-\left(\frac{7*1}{3*2}\right)=\frac{6}{5}-\frac{7}{6}$$

$$=\frac{\frac{30}{5}*6}{30}-\frac{\frac{30}{6}*7}{30}=\frac{36}{30}-\frac{35}{30}=\frac{36-35}{30}=\frac{1}{30}$$

Ejercicio

1. **Realice un mapa o esquema para ubicar los diferentes campos numéricos.**
2. **Escriba con sus propias palabras todos los campos numéricos que conforman el campo de los números reales.**
3. **Escriba con sus propias palabras los números o expresiones que no hacen parte de los números reales.**
4. **Realice las siguientes operaciones teniendo en cuenta el orden de las operaciones y los signos de agrupación.**

a) $5-9\{4-4[7+5(9*2-5*4)]\}$

b) $4+7\{9-8-5[4+7+2(6-7*2-4*5)]\}$

5. **Realice las siguientes operaciones con fraccionarios**

a) $\frac{4}{9}-\frac{7}{30}+\frac{1}{45}$

b) $\left(\frac{3}{4}-\frac{11}{8}\right)\div\left(\frac{7}{10}-\frac{3}{5}\div\frac{9}{4}\right)$

c) $3-\cfrac{5}{8+\cfrac{2}{7+\cfrac{3}{9-\cfrac{1}{10}}}}$

2.2. Potenciación radicación y racionalización

2.2.1. Potenciación radicación y racionalización

2.2.1.1 Definiciones Y Conceptos

- **Potenciación:** La definición de potencia está relacionada con la definición de exponente. Potenciar significa multiplicar por sí misma la base las veces que indica el exponente, en 2^5 el

2 es la base y 5 es el exponente y significa multiplicar el 2 por sí mismo 5 veces. $2^5 = 2.2.2.2.2 = 32$.

Observe a continuación el significado de algunas expresiones:

- $x^n = x.x.x.x.......x$ Quiere decir multiplicar a x por sí misma n veces. $3^4 = 3.3.3.3 = 81$

  $\frac{1}{x^n} = \frac{1}{x.x.x.x......x}$, $x \neq \mathbf{0}$

Por ejemplo, $\frac{1}{5^3} = \frac{1}{5.5.5} = \frac{1}{125}$

- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ $\quad y \quad$ $\frac{1}{x^{-n}} = x^n$, $x \neq \mathbf{0}$.

El exponente negativo no significa que la cantidad sea negativa o positiva; lo anterior quiere decir que exponente negativo en el numerador significa que se debe cambiar la base para el denominador y cambiarle de signo al exponente; y el exponente negativo en el denominador, significa que se debe cambiar la base al numerador y cambiando el signo al exponente. (http://www.youtube.com/watch?v=VGyA5VX89Fw&feature=related) (http://www.youtube.com/watch?v=bTRsnEOtgtg)

Resumiendo, exponente negativo significa intercambiar la base entre numerador y denominador y cambiarle el signo al exponente.

$7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{7.7} = \frac{1}{49}$ $\qquad$ $\frac{1}{5^{-6}} = 5^6 = 5.5.5.5.5.5 = 15.625$

$2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

$(2x)^{-3} = \frac{1}{(2x)^3} = \frac{1}{(2x)(2x)(2x)} = \frac{1}{8x^3}$

- $(-x)^n \neq -x^n$.

$-2^2 \neq (-2)^2$

$-2^2 = -(2)(2) = -4 \wedge (-2)^2 = (-2)(-2) = 4$

$\mathrm{Re}\, sultados\;\; diferentes$

- Signo de x^n:

$$x^n \begin{cases} Es\ positivo\ sí\ n\ es\ par,\ sin\ importar\ el\ signo\ de\ la\ base \\ Es\ negativo\ sí\ n\ es\ impar\ y\ la\ base\ es\ negativa \end{cases}$$

Por ejemplo. $(-3)^4$ Sin efectuar la operación se sabe que el resultado es positivo porque el exponente es par. $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$.

No confundir $(-3)^4$ Con -3^4 En el primer caso estamos elevando una base negativa a una potencia par, por lo tanto, el resultado es positivo (81), en el segundo caso estamos elevando una base positiva a un exponente par y luego multiplicamos el resultado por (**-1)**, por lo tanto el resultado es negativo (-81); esta expresión significa. $-1*3^4$. En términos generales $(-x)^n$ no siempre es lo mismo que. $-x^n$. Por ejemplo cual será el resultado de $(-5)^{-3}$. Sin efectuar la operación sabemos que el resultado es negativo porque la base es negativa y el exponente es impar, comprobemos la afirmación anterior efectuando la operación.

$$(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{(-5)(-5)(-5)} = \frac{1}{-125} = -\frac{1}{125}$$

$$x^2 * x^5 = x.x * x.x.x.x.x = x^7$$

$$\frac{x^6}{x^3} = \frac{x.x.x.x.x.x}{x.x.x} = x^3$$

- X°= 1 siempre que X ≠ 0

Dice que toda cantidad **diferente de cero** elevada a potencia cero da como resultado uno. Se entiende potencia cero como una cantidad dividida por sí misma, por eso el resultado es uno.

Por ejemplo $1332^0 = \frac{1332}{1332} = 1$ Y $(-720)^0 = \frac{-720}{-720} = 1$

- **Radicación:** Radicación es una operación contraria a la potenciación, lo que se busca en este caso es encontrar la base. (http://www.youtube.com/watch?v=ZWzhMm5aRHw)

  Sí, $2^3 = 8$ entonces, también es cierto que. $\sqrt[3]{8} = 2$

En términos generales, sí $a^n = x$ Entonces. $a = \sqrt[n]{x}$ .Nos interesa la parte izquierda ($\sqrt[n]{x}$).

La expresión $\sqrt[n]{x}$ se llama radical, la. n Se llama índice o raíz y la x se llama radicando (pero también la podemos llamar base). $n \neq \mathbf{0}$
Signo de $\sqrt[n]{x}$. (Todo lo que vamos a afirmar es sólo para la raíz principal).

$$\sqrt[n]{x} \quad \begin{cases} Positivo \quad sí \quad x \quad es \quad positivo \\ Negativo\, si\, x\, es\, negativo\, y\, n\;\; es\, impar \\ No\;\; existe\, si\, x\;\; es\;\; negativo\, y\;\; n\;\; es\;\; par \end{cases}$$

Ejemplos:

$$\sqrt[4]{81} = 3 \qquad \sqrt[3]{-8} = -2$$
$$\sqrt{-36}\ no\ existe \qquad \sqrt[100]{-45}\ no\ existe$$

En términos generales y para facilitar su manipulación matemática, un radical, se puede convertir en una potencia con exponente fraccionario, donde la base es el radicando (la x) y el exponente es un número fraccionario cuyo numerador es el exponente del radicando y el denominador es el índice.

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n} \vee x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}\ , n \neq \mathbf{0}$$

A sí:

$$\sqrt[7]{x^2} = x^{2/7}$$
$$\sqrt{x} = x^{1/2}$$
$$\sqrt[5]{6x-1} = (6x-1)^{1/5}$$
$$\sqrt[3]{2x} = \sqrt[3]{(2x)^1} = (2x)^{1/3}$$
$$2\sqrt[3]{x} = 2x^{1/3}$$
$$x^{7/4} = \sqrt[4]{x^7}$$
$$\mathbf{5}y^{\mathbf{3/7}} - \mathbf{9} = \mathbf{5}\sqrt[7]{y^{\mathbf{3}}} - \mathbf{9}$$

- **Leyes de potenciación y radicación**

Si hay radicales, para aplicar estas leyes, una buena acción es convertir el radical a potencia con exponente fraccionario, el resultado final se debe dar en raíz.
El resultado final se debe dar con exponentes positivos.

Producto de bases iguales, se escribe la misma base y se suman los exponentes. (http://www.youtube.com/watch?v=ZLEmQNFWuqY)

$$x^n.x^m = x^{n+m}$$

$$\sqrt[n]{x}.\sqrt[m]{x} = x^{1/n}.x^{1/m} = x^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}$$

Ejemplos:

$$3^2 * 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 3*3*3*3*3 = 243$$

$$\sqrt[3]{x^2} * \sqrt[4]{x} = x^{2/3} * x^{1/4} = x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}} = x^{\frac{8+3}{12}} = x^{11/12} = \sqrt[12]{x^{11}}$$

Cociente de bases iguales, se escribe la misma base y se restan los exponentes. (http://www.youtube.com/watch?v=m1wF_YoN1Uc)

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} = \frac{1}{x^{m-n}} \quad sí \quad x \neq 0$$

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[m]{x}} = \frac{x^{1/n}}{x^{1/m}} = x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}} \; sí \; x \neq 0$$

Ejemplos:

$$\frac{5^{16}}{5^{14}} = 5^{16-14} = 5^2 = 5*5 = 25$$

$$\frac{\sqrt[7]{y^5}}{\sqrt{y}} = \frac{y^{\frac{5}{7}}}{y^{\frac{1}{2}}} = y^{\frac{5}{7}-\frac{1}{2}} = y^{\frac{10-7}{14}} = y^{\frac{3}{14}} = \sqrt[14]{y^3}$$

Potencia de potencia. Se escribe la misma base y se multiplican los exponentes. (http://www.youtube.com/watch?v=9QfWuEOystA)

$$\left(x^n\right)^m = x^{n.m}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n.m]{x}$$

Ejemplos:

$$\left(x^2\right)^3 = x^{2*3} = x^6$$

$$\sqrt{\sqrt[5]{x^3}} = \sqrt[2*5]{x^3} = \sqrt[10]{x^3} = x^{3/10}$$

$$\frac{25^3 * 5}{5^n} = \frac{\left(5^2\right)^3 * 5}{5^n} = \frac{5^{2*3} * 5^1}{5^n} = \frac{5^6 * 5^1}{5^n} = \frac{5^{6+1}}{5^n} = \frac{5^7}{5^n} = 5^{7-n}$$

Propiedad distributiva del producto o multiplicación.

$$(x.y)^n = x^n . y^n$$

$$\sqrt[n]{x.y} = \sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{y}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{2*9} = \sqrt{2} * \sqrt{9} = \sqrt{2} * \sqrt{3^2} = \sqrt{2} * 3 = 3 * \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Ejemplos:

$$(3x)^4 = 3^4 * x^4 = 3*3*3*3*x^4 = 81x^4$$

$$\sqrt[5]{x^2 y^3} = \sqrt[5]{x^2} * \sqrt[5]{y^3} = x^{2/5} y^{3/5}$$

Propiedad distributiva del cociente o división.

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad sí \quad y \neq 0$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \quad sí \quad y \neq 0$$

Ejemplos:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{5^3}{3^3} = \frac{5*5*5}{3*3*3} = \frac{125}{27}$$

$$\sqrt[6]{\frac{x}{7}} = \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{7}}$$

$$\frac{\left(2x^3 y^4\right)^3}{\left(6x^2 y\right)^5} = \frac{2^3 (x^3)^3 (y^4)^3}{(2*3)^5 (x^2)^5 y^5} = \frac{2^3 x^9 y^{12}}{2^5 3^5 x^{10} y^5} = \frac{2^{3-5} x^{9-10} y^{12-5}}{3^5}$$

$$= \frac{2^{-2} x^{-1} y^2}{3^5} = \frac{y^2}{2^2 3^5 x}$$

Para profundizar sobre el tema anterior, visite la siguiente página:
http://www.youtube.com/watch?v=7gmZQP4cn1U&feature=related

- **Racionalización**

Racionalizar consiste en eliminar los radicales de una expresión matemática. Dicha eliminación de radicales se puede hacer en el denominador o en el numerador, según se especifique o según sea la necesidad. Para poder eliminar el radical se debe multiplicar toda la expresión que contiene el radical por la unidad expresada de una manera especial (una cantidad dividida por sí misma)

- **Racionalización de monomios**:

Se debe indicar multiplicación y división de la expresión a racionalizar por la misma raíz con la misma base.
Para hallar el exponente de la base, nos hacemos la siguiente pregunta. ¿Cuánto le falta a la base anterior para ser igual a la raíz?
Si racionalizamos numeradores, sólo efectuamos la multiplicación de numeradores.
Si racionalizamos denominadores, solo efectuamos la multiplicación de denominadores. (http://www.youtube.com/watch?v=LVNth46dPfU)

Ejemplos

1) $$\frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} * \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x} * \sqrt[3]{x^2}} = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x * x^2}} = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

2) $$\frac{10}{\sqrt[5]{2x}} = \frac{10}{\sqrt[5]{2x}} * \frac{\sqrt[5]{(2x)^4}}{\sqrt[5]{(2x)^4}} = \frac{10\sqrt[5]{(2x)^4}}{\sqrt[5]{2x * (2x)^4}} = \frac{10\sqrt[5]{(2x)^4}}{\sqrt[5]{(2x)^5}} = \frac{10\sqrt[5]{(2x)^4}}{(2x)^1} = \frac{10\sqrt[5]{2^4 x^4}}{2x} = \frac{5\sqrt[5]{16x^4}}{x}$$

Se puede observar que desapareció la raíz del denominador en cada caso.

1) $$\frac{\sqrt{x}}{z} = \frac{\sqrt{x}}{z} * \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x * x}}{z\sqrt{x}} = \frac{x^1}{\sqrt{x}\ z} = \frac{x}{\sqrt{x}\ z}$$

2) $$\sqrt[7]{x^4} = \sqrt[7]{x^4} * \frac{\sqrt[7]{x^3}}{\sqrt[7]{x^3}} = \frac{\sqrt[7]{x^7}}{\sqrt[7]{x^3}} = \frac{x}{\sqrt[7]{x^3}}$$

Se puede notar que en ambos casos desaparecieron los radicales del numerador.

- **Racionalización de binomios con raíz cuadrada**:

Se debe indicar multiplicación y división de toda la expresión por la conjugada de la expresión a racionalizar. La conjugada de un binomio es el mismo binomio pero con el signo intermedio cambiado. Por ejemplo la con jugada de $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ es $\sqrt{x}-\sqrt{y}$

La conjugada de $\sqrt{3}-z$ es $\sqrt{3}+z$

La conjugada de $5-2\sqrt{5x}\ es\ 5+2\sqrt{5x}$

Cuando se multiplica un binomio por su conjugada, el resultado es igual a la primera cantidad elevada al cuadrado menos la segunda cantidad elevada al cuadrado. En términos generales.

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)*\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2=x-y$$

Se puede ver que cuando se multiplica un binomio por su conjugada desaparecen los radicales. (http://www.youtube.com/watch?v=v5MUqiblORc&feature=related)

Ejemplo 1: Racionalice $\dfrac{5}{3-\sqrt{2}}$

SOLUCIÓN

$$\frac{5}{3-\sqrt{2}}=\frac{5}{3-\sqrt{2}}*\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\frac{5*(3+\sqrt{2})}{\left(3-\sqrt{2}\right)*\left(3+\sqrt{2}\right)}=\frac{5*(3+\sqrt{2})}{(3)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{5*(3+\sqrt{2})}{9-2}=\frac{5*(3+\sqrt{2})}{7}$$

Ejemplo 2: Racionalice $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$

SOLUCIÓN

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}*\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(x-1)*\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)*\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{(x-1)*\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-(1)^2}=\frac{(x-1)*\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1}=\sqrt{x}-1$$

Ejemplo 3: Racionalice $\dfrac{9}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

SOLUCIÓN

$$\frac{9}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{9}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}*\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{9*\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)*\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}=\frac{9*\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=$$

$$\frac{9*\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{2-5}=\frac{9*\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{-3}=-3*\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)=3*\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$$

Se puede ver que en todos los ejemplos desaparecieron los radicales del denominador

Ejercicio

1. **En la expresión:** $(-3)^4$ **identifique: la base, el exponente y diga cuál es el resultado.**
2. **En la expresión** -3^4 **Identifique: La base, el exponente y diga cuál es el resultado. ¿Las expresiones de los numerales 1 y 2 son iguales? Explique**.

3 Utilizando las leyes de potenciación y radicación, resuelva:

a. $\dfrac{\left(10a^3b^{-2}c\right)^{-2}}{\left(15a^{-2}bc^4z^{-2}\right)^3}$

b. $\left(\dfrac{9a^{-1}b^3c}{6a^2b^4c^{-3}}\right)^{-2}$

c. $\sqrt[5]{x^2}*\sqrt{x}*\sqrt[10]{x^3}$

4 Diga el signo de las siguientes potencias:

a. $(-5)^{-20}$

b. 2^{-13}

c. $\dfrac{1}{3^{-21}}$

d. $\left[(-2)^3\right]^4$

5.Racionalice:

a. $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{16}$

b. $\dfrac{x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$

c. $\dfrac{5}{\sqrt{x-1}}$

2.3. Polinomios

2.3.1. Polinomios

2.3.1.1 Conceptos

- Expresión algebraica: Es una cantidad o una expresión compuesta por letras y/o números.
- Término: Son expresiones algebraicas separadas entre sí por signos de suma o de resta.

Ejemplos:
$3x-7$
$4x^2+5x-7+2y$

Partes de un término:
En el término: $-3x^2$ se distinguen las siguientes partes:

Signo:
Se encuentra siempre a la izquierda del término. Indica si el término es positivo o si el término es negativo; para este ejemplo el signo es negativo. En algunos casos cuando el signo es positivo dicho signo no se coloca.

Coeficiente:
Es el número que acompaña a la base. Para este ejemplo el coeficiente es el número 3. El coeficiente indica las veces que se toma la base como sumando. Cuando el coeficiente es el número 1, en la mayoría de las veces no se coloca.

Exponente:
Indica las veces que se toma la base como factor (las veces que se multiplica la base por sí misma). Para este ejemplo el exponente es el número 2. Cuando el exponente es el número 1 no va escrito.

La base:
Para este ejemplo la base es la letra **x**.

En: $4x^3$ el signo es positivo. La base es **x**

El coeficiente es 4. $4x^3 = x^3 + x^3 + x^3 + x^3$. El número 4 nos indica que debemos sumar la base cuatro veces.

Si en el álgebra no existiera $4x^3$ se debería escribir como: $x.x.x + x.x.x + x.x.x + x.x.x$ El exponente es 3: $x^3 = x.x.x$ El número tres como exponente nos dice: Multiplique por sí misma la base 3 veces.

- Clasificación de las expresiones algebraicas.
- Monomios: Es una expresión algebraica que consta de un solo término:

Ejemplos:

$3x^4$

$-10ax^2y^3z$

- **Polinomios**: Son expresiones algebraicas compuestas de dos o más términos. Los polinomios se clasifican a su vez en:

Binomios: Es un polinomio que consta de dos términos:

Ejemplos: $2x-y$

$a+b$

…… $\frac{2x}{3}-y^2z$

Trinomio: Es un polinomio que consta de tres términos.

Ejemplos: x^2-3y^4+5

$x+y+z$

$5x^2-\frac{4y}{5}-\frac{2a}{3}$

- **Términos semejantes**:

Dos o más términos son semejantes cuando tienen la misma parte literal, es decir tienen las mimas letras y la letra tiene los mismos exponentes.

Ejemplos:

$2a \quad y \quad -a$. Son semejantes.

$-2bz \quad y \quad 56bz$. Son semejantes.

$-5a^3b^2 \quad y \quad -8a^2b^3$. No son semejantes aunque tienen las mismas letras estas no tienen los mismos exponentes.

- **Operaciones con polinomios**.

- **Suma de polinomios:**

1. Para sumar dos o más polinomios se procede de la siguiente manera:

Para los términos semejantes se suman los coeficientes. La base pasa al resultado igual; quiere decir que pasa al resultado con el mismo exponente.

2. Términos no semejantes pasan al resultado igual.

3. Algunos veces se recomienda colocar los polinomios uno debajo del otro de manera que los términos semejantes queden en columna permitiendo una mejor visión de los mismos. (http://www.youtube.com/watch?v=oSTi6Mxqj8M)

Ejemplo1:

Sume: $7a-5b+5c-d, \quad -2b+2c-4d \quad y \quad -3a+15b-3c$

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{l} 7a-5b+5c-d \\ \quad\;\; -2b+2c-4d \\ -3a+15b-3c \\ \hline 4a \quad +8b+4c-5d \end{array}$$

Ejemplo2:

Sume: $\frac{1}{4}x^3+3y^3-\frac{2}{15}x^2y-4, \quad -\frac{3}{10}x^2y+\frac{13}{4}xy^2-\frac{1}{7}y^3, \quad -\frac{1}{12}y^3+\frac{1}{18}xy^2-5$

SOLUCIÓN:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{4}x^3-\frac{2}{15}x^2y \qquad\qquad +3y^3-4 \\ \qquad -\frac{3}{10}x^2y+\frac{13}{4}xy^2-\frac{1}{7}y^3 \\ \qquad\qquad\qquad +\frac{1}{18}xy^2-\frac{1}{12}y^3-5 \\ \hline \frac{1}{4}x^3-\frac{13}{30}x^2y+\frac{119}{36}xy^2+\frac{233}{84}y^3-9 \end{array}$$

Resta de polinomios:

Para restar polinomios se debe cambiar el signo a todos los términos del polinomio a restar y luego se procede como en la suma. (http://www.youtube.com/watch?v=V3j9rkFYNfY)

Ejemplo1:

De: $4x-22y+z$ **reste:** $7x+5z-6$

SOLUCIÓN

Se tiene:

$$\begin{array}{r} 4x-22y+z \\ -7x \qquad -5z+6 \\ \hline -3x-22y-4z+6 \end{array}$$

Ejemplo 2

Restar: $-a^2x+6-5ax^2-x^3$ de: $14a^3+8a^2x+7ax^2-4$

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{r} 7ax^2+a^2x+14a^3-4 \\ x^3+5ax^2+8a^2x \qquad -6 \\ \hline x^3+12ax^2+7a^2x+14a^3-10 \end{array}$$

Multiplicación de polinomios:
En la multiplicación de polinomios se presentan tres casos:

MONOMIO MULTIPLICADO POR MONOMIO
Al multiplicar monomio por monomio se deben tener en cuenta las siguientes leyes:

1. Ley de signos. Recuerde producto de signos iguales el resultado es positivo y producto de signos diferentes el resultado es negativo.
2. Se multiplican coeficientes entre sí.
3. Letras comunes, se pone la misma letra y se suman los exponentes.
4. Letras no comunes, pasan al resultado igual.
5. En la respuesta final las letras deben ir en orden alfabético. $2ba=2ab$.

Ejemplo 1:

$$-3x^2y^3*5x^4yz^3=-15x^{2+4}y^{3+1}z^3=-15x^6y^4z^3$$

Ejemplo 2:

$$\frac{5}{4}abc*\frac{2}{3}b^5c^7=\frac{5*2}{4*3}ab^{1+5}c^{1+7}=\frac{5*1}{2*3}ab^6c^8=\frac{5}{6}ab^6c^8$$

MONOMIO MULTIPLICADO POR POLINOMIO O POLINOMIO MULTIPLICADO POR MONOMIO.
El monomio debe multiplicar todos los términos del polinomio siguiendo las leyes anteriores.

Ejemplo 1:

$$7xy^2(5x-6y+7)=7xy^2*5x-7xy^2*6y+7xy^2*7=35x^2y^2-42xy^3+49xy^2$$

Ejemplo 2:

$$(5z-7y+2xyz)*(-2x^3yz^3)=5z*(-2x^3yz^3)-7y*(-2x^3yz^3)+2xyz*(-2x^3yz^3)$$
$$=-10x^3yz^4+14x^3y^2z^3-4x^4y^2z^4$$

POLINOMIO MULTIPLICADO POR POLINOMIO.
Todos los términos de un polinomio deben multiplicar a todos los términos del otro polinomio, siguiendo las leyes del caso monomio multiplicado por monomio.
(http://www.youtube.com/watch?v=ZzbQ6rahZ24&feature=fvst)

Ejemplo 1:

$$(6x-3)(2x+4)=12x^2+24x-6x-12=12x^2+18x-12$$

Ejemplo 2:

$$(3x+7)(5-x)=15x-3x^2+35-7x=-3x^2+8x+35$$

En la multiplicación de polinomio por polinomio se presentan algunos casos particulares, denominados productos notables.

- **PRODUCTOS NOTABLES**

Los productos notables, son fórmulas que permiten efectuar la multiplicación de polinomio por polinomio, por simple inspección. Algunos de los productos notables son:

1. $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$
2. $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$
3. $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$
4. $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
5. $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

Véase los siguientes videos sobre el tema en la dirección:
http://www.youtube.com/watch?v=AEAedJ7Jc8I
http://www.youtube.com/watch?v=_aellSpAMKY

Ejemplo 1:

$$(5x-2)^2 = (5x)^2 - 2(5x)(2) + (2)^2 = 25x^2 - 20x + 4$$

Ejemplo 2:

$$(3-2x)^3 = (3)^3 - 3(3)^2(2x) + 3(3)(2x)^2 - (2x)^3 = 27 - 54x + 36x^2 - 8x^3$$

Ejemplo 3:

$$(3x+4)(3x-4) = (3x)^2 - (4)^2 = 9x^2 - 16$$

Triángulo de pascal

Se utiliza para expandir un binomio elevado a la n: $(a+b)^n \vee (a-b)^n$ donde n es un entero positivo.

E l triangulo en su parte superior empieza con 1 y 1, en los extremos siempre se escribe el número 1, los números centrales se forman sumando dos números seguidos.

La primera fila del triángulo corresponde a la expansión del binomio: $(a \pm b)^1$

La segunda fila corresponde a los coeficientes de la expansión del binomio: $(a \pm b)^2$

La tercera fila a: $(a \pm b)^3$

La cuarta fila a: $(a \pm b)^4$

La quinta a: $(a \pm b)^5$

Y así sucesivamente.

El término a empieza con el exponente n y va disminuyendo hasta cero

El termino b empieza con el exponente cero y va aumentando hasta que el exponente es n.

Si el signo entre ambos términos es positivo, todos los signos del polinomio resultante son positivos. Si el signo entre ambos términos es negativo, los signos se van intercambiando empezando por +

Véase el video en: http://www.youtube.com/watch?v=iQF93rRX9GU

1 1	n = 1
1 2 1	n = 2
1 3 3 1	n = 3
1 4 6 4 1	n = 4
1 5 10 10 5 1	n = 5
1 6 15 20 15 6 1	n = 6
1 7 21 35 35 21 7 1	n = 7

Ejemplos: Expanda los siguientes binomios:

1. $(x-2)^4 = x^4 - 4*x^3*2 + 6*x^2*2^2 - 4*x*2^3 + 2^4$
2. $(5x-3)^5 = (5x)^5 - 5*(5x)^4*3 + 10*(5x)^3*3^2 - 10*(5x)^2*3^3 + 5*(5x)^1*3^4 - 3^5$.
   $3125x^5 - 9375x^4 + 11250x^3 - 6750x^2 + 2025x - 243$

División entre polinomios:
En la división de polinomios se presentan tres casos:

MONOMIO DIVIDIDO MONOMIO:
Para dividir monomio entre monomio, se debe tener en cuenta las siguientes leyes:

1. Ley de signos.
2. Se dividen coeficientes entre sí.
3. Letras comunes. División de letras iguales, se deja la misma letra y se restan los exponentes.
4. Letras no comunes, pasan al resultado igual.

NOTA:
Se acostumbra dar los resultados siempre con exponentes positivos.

Ejemplo 1:

$$(3x^2y) \div (-6xy^4) = \frac{3x^2y}{-6xy^4} = -\frac{3}{6}x^{2-1}y^{1-4} = -\frac{1}{2}x^1y^{-3} = -\frac{x}{2y^3}$$

Ejemplo 2:

$$\left(7ax^3y\right)\div\left(5axz\right)=\frac{7ax^3y}{5axz}=\frac{7a^{1-1}x^{3-1}y}{5z}=\frac{7a^0x^2y}{5z}=\frac{7x^2y}{5z}$$

POLINOMIO DIVIDIDO MONOMIO:
El monomio debe dividir a todos los términos del polinomio siguiendo las leyes del caso anterior.

Ejemplo:

$$\left(30xy-60ax^2+35axy\right)\div\left(-10xz\right)=\frac{30xy-60ax^2+35axy}{-10xz}=\frac{30xy}{-10xz}-\frac{60ax^2}{-10xz}+\frac{35axy}{-10xz}=$$
$$-\frac{3y}{z}+\frac{6ax}{z}-\frac{7ay}{2z}$$

POLINOMIO DIVIDIDO POLINOMIO (MONOMIO DIVIDIDO POLINOMIO):
Se pretende dividir un polinomio P(x) entre un polinomio Q(x). Esta división es posible, siempre que el grado de P(x) sea mayor que el grado de Q(x). El grado de un polinomio se refiere al máximo exponente que tiene la variable.
Para efectuar esta división se presentan varias formas; sólo vamos a estudiar dos de ellas: La división larga (o división tradicional) y la división sintética.
POLINOMIO DIVIDIDO POLINOMIO: MÉTODO DIVISIÓN LARGA (O TRADICIONAL).
(http://www.youtube.com/watch?v=thtodf4hcvE),
(http://www.youtube.com/watch?v=k9R4RVDpoQg&feature=related)

Se explica el método con el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

Efectúe la siguiente división: $\dfrac{2x^3+3x^2+1}{2x+1}$

SOLUCIÓN

PASOS PARA EFECTUAR LA DIVISIÓN $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

1. Se ordena y se completa con ceros el polinomio P(x). $P(x)=2x^3+3x^2+0x+1$
2. Si es necesario también se ordena el polinomio Q(x)
3. Se divide el primer término de P(x) entre el primer término de Q(x), El resultado es el primer término de C(x). $\dfrac{2x^3}{2x}=x^2$

4. Se multiplica el valor anterior por Q(x) y el resultado se resta de P(x) (restar quiere decir, cambie de signo y efectúe la operación indicada). $x^2 * (2x+1) = 2x^3 + x^2$; como hay que cambiarle de signo, queda: $-2x^3 - x^2$ Esto es lo que pusimos en la segunda fila. Debemos efectuar la operación indicada.
5. Al hacer la resta, resulta un nuevo P(x) igual a $(2x^2 + 0x + 1)$, esto es lo que aparece en la tercera fila; dividimos, el primer término del nuevo P(x) entre el primer término de Q(x), el resultado es el segundo término de C(x). $\frac{2x^2}{2x} = x$
6. Se procede como en el paso 4 hasta que el residuo sea cero o hasta que el grado del nuevo P(x) sea menor que le grado de Q(x).
7. La respuesta de la división se debe dar como: $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$
8.

$2x^3 + 3x^2 + 0x + 1$	$2x+1$
$-2x^3 - x^2$	$x^2 + x - \frac{1}{2}$
$+2x^2 + 0x + 1$	
$-2x^2 - x$	
$-x + 1$	
$x + \frac{1}{2}$	
$+\frac{3}{2}$	

$C(x) = x^2 + x - \frac{1}{2}$, $R(x) = \frac{3}{2}$, $Q(x) = 2x+1$

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{2x+1} = x^2 + x - \frac{1}{2} + \frac{3/2}{2x+1}$$

Ejemplo 2:

Efectúe la división: $(x^2 - 6x + 5) \div (x+7)$

SOLUCIÓN

x^2	$-6x$	$+5$	$x+7$
$-x^2$	$-7x$		$x - 13 = C(x)$
	$-13x$	$+5$	
	$13x$	$+91$	
		96	$= R(x)$

La respuesta es: $x - 13 + \frac{96}{x+7}$

Ejemplo 3:

Efectúe la división: $\dfrac{x^3}{5x-2}$

SOLUCIÓN

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +0x^2 & +0x & +0 & 5x-2 \\
\cline{5-5}
-x^3 & +\frac{2}{5}x^2 & & & \frac{x^2}{5}+\frac{2}{25}x+\frac{4}{125}=c(x) \\
\hline
 & \frac{2}{5}x^2 & +0x & & \\
 & -\frac{2}{5}x^2 & +\frac{4}{25}x & & \\
\cline{1-4}
 & & \frac{4}{25}x & +0 & \\
 & & -\frac{4}{25}x & +\frac{8}{125} & \\
\cline{1-4}
 & & & \frac{8}{125} & =R(x)
\end{array}
$$

$$\frac{x^3}{5x-2} = \frac{x^2}{5} + \frac{2x}{25} + \frac{4}{125} + \frac{8/125}{5x-2}$$

POLINOMIO DIVIDIDO POLINOMIO METODO: DIVISIÓN SINTÉTICA.

http://www.youtube.com/watch?v=U1JHC5JCws4
http://www.youtube.com/watch?v=1iB3hqjc8qQ&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=vcGzSwfl26g&feature=related

Es un método abreviado que permite dividir un polinomio P(x) entre un polinomio Q(x); siempre que el polinomio Q(x) sea un binomio lineal. Lineal quiere decir que el exponente de la variable sea 1.

Es decir Q(x) debe presentar la siguiente forma: $Q(x) = bx + a$

El procedimiento es el siguiente.

PASOS PARA EFECTUAR LA DIVISIÓN:

a. Si es necesario completamos y ordenamos el polinomio P(x).

b. Colocamos los coeficientes de P(x) en fila, es decir, uno a continuación del otro en forma horizontal.
c. En la parte izquierda de la fila colocamos el número -**a/b**. Que resulta de resolver la ecuación Q(x)=0, es decir de solucionar $bx+a=0$. Al solucionar, resulta **x = - a / b**
d. Dejamos una fila en blanco y debajo de esta fila trazamos una línea horizontal.
e. Se baja el primer coeficiente a una tercera fila.
f. Se multiplica por – **a / b**, el resultado se coloca en la segunda fila debajo del segundo coeficiente y efectuamos la operación que quede indicada.
g. El resultado anterior lo multiplicamos por – **a / b**, el resultado se coloca en la segunda fila debajo del tercer coeficiente; se efectúa la operación indicada. Se repite el proceso hasta el último coeficiente
h. El último número de la tercera fila corresponde al residuo.
i. Los demás números de la tercera fila son los coeficientes de C(x) que tendrá un grado menor que P(x) y estará ordenado en forma descendente. Todos los términos de C(x) se deben dividir entre **b** (este es el número que acompaña a la x).
j. Debemos dar la respuesta como: $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$

Ejemplo1:

Efectúe por división sintética: $\dfrac{-2x^3-1+3x^5+4x^2}{x+2}$

Ordenando y completando queda: $P(x)=3x^5+0x^4-2x^3+4x^2+0x-1$

El número – **a / b** resulta de solucionar la ecuación:

x + 2 = 0, **x =-2**, es decir, - **a / b = -2**

Los números de la primera fila (Fila #1) corresponden a los coeficientes de P(x). El primer número es el 3, que es el coeficiente de x^5. El segundo número es el cero, que es el coeficiente de x^4. El tercer número es –2, que es el coeficiente de x^3. El cuarto número es el 4, que es el coeficiente de x^2. El quinto número es el cero, que es el coeficiente de x y el quinto número es –1, que es el término independiente.

Los números de la segunda fila (Fila #2) Se obtienen de la siguiente manera:

El número –6 resulta de multiplicar –2 * 3 (3 primer número de la tercera fila).

Al sumar 0 con –6 el resultado es –6 (segundos números de la tercera fila).

El número 12 resulta de multiplicar –2*(-6) (Segundo número de la tercera fila).

Al sumar –2 con 12 el resultado es 10 (tercer número de la tercera fila).

El número –20 resulta de multiplicar –2 *10 (tercer número de la tercera fila).

Al sumar 4 con –20, el resultado es –16 (Cuarto número de la tercera fila).

Y así sucesivamente.

-2	3	0	-2	4	0	-1	$\leftarrow Fila\#1$
		-6	12	-20	32	-64	$\leftarrow Fila\ \#2$
	3	-6	10	-16	32	-65=R(x)	$\leftarrow Fila\ \#3$

El primer número de la tercera fila (el número 3) corresponde al primer coeficiente de C(x), que debe empezar en grado cuatro (debe empezar en x^4). El segundo número de la tercera fila corresponde al segundo coeficiente de C(x) y debe tener grado tres, etc. **Todos los coeficientes de c(x) al dividirlos entre uno quedan iguales.**

$C(x) = 3x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 16x + 32$

El último número de la tercera fila (-65) corresponde al residuo. $R(x) = -65$

Entonces la respuesta se debe dar como:

$$\frac{-2x^3 - 1 + 3x^5 + 4x^2}{x+2} = 3x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 16x + 32 + \frac{-65}{x+2}$$

Ejemplo2:

Efectúe por división sintética: $\left(4x^3 - 2x^2 + 3x + 2\right) \div \left(2x + 1\right)$

Ambos polinomios están ordenados y completos.

- a / b =-1/2 Recuerde que resulta de solucionar la ecuación: 2 x + 1= 0

2x = -1, x = -1/2

-1/2	4	-2	3	2
		-2	2	-5/2
	4	-4	5	-1/2=R(x)
	4/2=2	-4/2=-2	5/2= 5/2	

Los números 4, -4 y -1 son los coeficientes de C(x) y cada uno lo dividimos entre **b**, para este caso los dividimos entre 2, ya que **b = 2**.

Entonces: $C(x) = 2x^2 - 2x + \frac{5}{2}$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 2x^2 - 2x + \frac{5}{2} + \frac{-1/2}{2x+1}$$

Ejemplo3:

Efectúe por división sintética: $\left(3x-5+2x^2\right)\div\left(-5+x\right)$

Ordenando queda: $P(x)=2x^2+3x-5$
$Q(x)=x-5$

El número - **a / b** resulta de solucionar la ecuación: x - 5 = 0, x = 5; es decir - **a / b = 5**

5	2	3	-5
		10	65
	2	13	60=R(x)

C(x)=2x+13

$$\frac{2x^2+3x-5}{x-5}=2x+13+\frac{60}{x-5}$$

Ejemplo4:

Efectúe por división sintética: $\left(3x^2+2x^4-3x+\frac{22}{81}\right)\div\left(3x-2\right)$

Ordenando y completando queda: $P(x)=2x^4+0x^3+3x^2-3x+\frac{22}{81}$

3x-2 = 0, 3x = 2, x =2/3.

2/3	2	0	3	-3	22/81
		4/3	8/9	70/27	-22/81
	2	4/3	35/9	-11/27	0=R(x)
$\div 3$	2/3	(4/3)/3=4/9	(35/9)/3=35/27	(-11/27)/3=-11/81	

$$C(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{9}x^2+\frac{35}{27}x-\frac{11}{81}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{9}x^2+\frac{35}{27}x-\frac{11}{81}+\frac{0}{3x-2}=\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{9}x^2+\frac{35}{27}x-\frac{11}{81}$$

TEOREMA DEL RESIDUO

El teorema del residuo permite determinar el residuo sin necesidad de hacer la división.

El residuo de la división de un polinomio P(x) entre un binomio $Q(x)=bx+a$ siempre corresponde al valor numérico que toma el polinomio P(x) para $x=-\frac{a}{b}$, es decir, R(x) = P (- a

/ b). Siempre que **b** no sea igual a cero. El número – a / b se obtiene de la misma manera que para la división sintética.

Procedimiento:

1. Solucione la ecuación que resulta al hacer Q(x) = 0, Es decir $bx + a = 0$. La solución es $x = -a/b$.
2. Reemplace el valor anterior en el polinomio P(x). Es decir calcule: $P(x = a/b)$
3. El resultado de dicho reemplazo es el residuo, es decir: $R(x) = P(x = -a/b)$

Ejemplo1:

Sin hacer la división halle el residuo que resulta en la siguiente división:

$$(-3x + x^4 - 1) \div (2x + 1)$$

$$P(x) = -3x + x^4 - 1$$

$$Q(x) = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \rightarrow 2x = -1 \rightarrow x = -1/2$$

$$R(x) = P\left(-\frac{1}{2}\right) = -3(-1/2) + (-1/2)^4 - 1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{16} - 1 = \frac{24 + 1 - 16}{16} = \frac{9}{16}$$

$$R(x) = \frac{9}{16}$$

Ejemplo2:

Sin hacer la división halle el residuo que resulta en la siguiente división:

$$(2x^3 + 7x - 5x^2 + 4) \div (x - 3)$$

$$P(x) = 2x^3 + 7x - 5x^2 + 4$$

$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

$$R(x) = P(3) = 2(3)^3 + 7(3) - 5(3)^2 + 4 = 54 + 21 - 45 + 4 = 34$$

$$R(x) = 34$$

Ejemplo3:

Queda como ejercicio comprobar el residuo de los ejemplos hechos de división sintética.

Para profundizar a cerca del teorema del residuo puede consultar las siguientes páginas:
http://www.youtube.com/watch?v=gDas3d6beVU
http://www.youtube.com/watch?v=qd7o3cm0UCo&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=8a4KrNkFR6M&feature=related

TEOREMA DEL FACTOR

El teorema del factor permite determinar cuándo un polinomio $P(x)$ es divisible entre un polinomio $Q(x)$, es decir cundo esta división es exacta.

Esto se presenta cuando el residuo de esta división es igual a cero: $R(x) = 0$

El polinomio $Q(x) = ax + b$ es un factor de un polinomio $P(x)$ si el residuo que resulta de la división $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es igual a cero

Sí $R(x) = 0$, Tenemos que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{0}{Q(x)} \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x)$$

Por lo tanto, podemos decir que:

$$P(x) = C(x) * Q(x)$$

Ejemplo:

Determine si $Q(x) = x + 1$ es un factor de $P(x) = x^4 - 5x^2 + 6x - 1$

Para poder determinar esto, debemos hallar el residuo de la división $\frac{P(x)}{Q(x)}$, si este es igual a cero, es porque $Q(x) = x + 1$ es un factor de $P(x)$

$Q(x) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$R(x) = P(x = -1) = (-1)^4 - 5(-1)^2 + 6(-1) - 1 = -11$

Como $R(x) \neq 0$, $Q(x) = x + 1$ no es factor de $P(x) = x^4 - 5x^2 + 6x - 1$.

NOTA:

El teorema del residuo permite determinar rápidamente cuando un polinomio P(x) es divisible exactamente entre un binomio Q(x)=b x -a. Esto se cumple cuando el residuo es nulo, es decir, si $R(x) = P(a/b) = 0$. En consecuencia Q(x) es un factor de P(x). En este caso el otro factor se obtiene efectuando la división y será C(x).

Ejemplo1:

Determine si el polinomio $x^2 - x - 6$ tiene como factor a x + 3, si es así determine el otro factor.

$R(x) = P(-3) = (-3)^2 - (-3) - 6 = 9 + 3 - 6 = 6$

Como el residuo es diferente de cero x + 3 no es factor de dicho polinomio.

Ejemplo2

Determine si el polinomio $P(x) = 2x^2 + x - 1$ es factorizable por x + 1. Encuentre la factorización.

$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1, \quad R(x) = P(-1) = 2(-1)^2 + (-1) - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$

Como el residuo es cero podemos afirmar que x + 1 es un factor del polinomio P(x), para encontrar el otro factor debemos efectuar la división.

-1	2	1	-1
		-2	1
	2	-1	0 = R(x)

$C(x) = 2x - 1$. Este es el otro factor. Entonces, P(x) factorizado queda:

$2x^2 + x - 1 = (x + 1) * (2x - 1)$

Puede profundizar sobre el teorema del factor en la siguiente página:
http://www.youtube.com/watch?v=4M5TrlmpFjk

Ejercicio

1. **Utilizando sus propias palabras escriba la regla o ley que se debe utilizar para expandir un binomio elevado a la potencia 7.**
2. **Utilizando sus propias palabras explique el método utilizado para dividir por división sintética dos polinomios.**
3. **Expanda los siguientes binomios:**
   a. $(2x - 3)^6$
   b. $(3x - 5)^4 + (3x + 5)^4$
4. **Efectúe las siguientes divisiones utilizando división larga y división sintética:**
   a. $\dfrac{10x^2 - 3x + 7}{x - 3}$
   b. $\dfrac{4x^3 - 8x^2 - 10x + 4}{2x + 1}$
   c. $\dfrac{8x^3 - 27}{2x - 3}$
5. **Utilizando el teorema del residuo, determine el residuo de las divisiones anteriores y compárelos con los obtenidos en cada una de las divisiones.**
6. **Explique con sus propias palabras cuando un polinomio $Q(x)$ es factor de otro polinomio $P(x)$**

2.4. Factorización

2.4.1. Factorización

2.4.1.1 Definición de factorización

Es una transformación de sumas y/o restas en productos equivalentes. La factorización es un proceso inverso a la multiplicación de polinomios. Lo que se busca es que dado un polinomio convertirlo en una expresión equivalente, pero escrita como un producto o multiplicación indicada de sus factores primos. (http://www.youtube.com/watch?v=Mv6kHJE1cHc)

A continuación se describe la forma de factorizar algunas expresiones.

2.4.1.2 Algunos casos de factorización

- AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES:
- FACTOR COMÚN:

Siempre que se factorice se debe evaluar primero este caso.
El factor común es una cantidad que se encuentra presente en todos los términos de la expresión a factorizar. El factor común resulta de tomar letras y números comunes con su menor exponente.
Sé factoriza por factor común cuando se coloca el factor común fuera de un paréntesis y dentro del paréntesis se colocan todos los términos del polinomio divididos previamente entre el factor común. (http://www.youtube.com/watch?v=wJY5qY-xYvk&feature=related)

Factorice las siguientes expresiones:

Ejemplo 1: $a^2 + 5a$

SOLUCIÓN
Se puede ver que **a** se encuentra en ambos términos, se debe tomar con el menor exponente; por lo tanto el factor común es **a**. Debemos colocar a la letra **a** fuera de un paréntesis, y dentro del paréntesis lo que resulta cuando se divide $a^2/a = a$ y lo que resulta cuando se divide $a / a = 1$.
La factorización queda.
$a(a+5)$

Ejemplo 2: $12m^2n + 24m^3n^2 - 36m^4n^3$

SOLUCIÓN
Para determinar el (o los) números comunes, estos se deben escribir en factores primos:
$12 = 2^2*3$, $24 = 2^3*3$, $36 = 2^2*3^2$ Entre los números el factor común es 2^2*3. Entre las letras el factor común es m^2n. La factorización queda:

$$2^2 * 3m^2n\left(1+2mn-3m^2n^2\right)=12m^2n(1+2mn-3m^2n^2)$$

Ejemplo3: Factorice

$$6ax^2-9a^3bx+10a^5b^2z \quad R: a\left(6x^2-9a^2bx+10a^4b^2z\right)$$

- **FACTOR COMÚN POR AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS:**

En este método los términos del polinomio a factorizar se deben agrupar de tal manera que permitan sacar un factor común diferente a cada grupo y posteriormente volver a sacar otro factor común a la expresión resultante (si es posible).
(http://www.youtube.com/watch?v=ARiWxubJRPg&feature=related)
http://www.youtube.com/watch?v=W3sZFxZSEAo&feature=related
Ejemplos: Factorice o factore**:**

Ejemplo 1: Factorice.

$$2x^2-3xy-4x+6y$$

SOLUCIÓN

Como no hay factor común en todos los términos, se pueden agrupar de la siguiente manera: $\left(2x^2-4x\right)+\left(-3xy+6y\right)$. Ahora factorizando cada grupo por separado.

$$2x\left(x-2\right)+(-3y)\left(x-2\right)=2x\left(x-2\right)-3y(x-2)$$

El factor común de la expresión resultante es x-2

Se divide cada término entre el factor común:

$$\frac{\mathbf{2}x(x-\mathbf{2})}{(x-\mathbf{2})}=\mathbf{2}x \qquad \frac{-\mathbf{3}y(x-\mathbf{2})}{(x-\mathbf{2})}=-\mathbf{3}y$$

Entonces queda:

$$\left(x-2\right)\left(2x-3y\right)$$

Ejemplo 2: Factorice

$3ax - 3x + 4y - 4ay$

SOLUCIÓN

Agrupando queda: $(3ax - 3x) + (-4ay + 4y)$
Factor común en cada grupo:

En el primer paréntesis el factor común es $3x$, se divide cada término del paréntesis entre $3x$:

$$\frac{3ax}{3x} = a, \qquad \frac{-3x}{3x} = -1 \Rightarrow 3x(a-1)$$

En el segundo paréntesis el factor común es $-4y$, se divide cada término del paréntesis entre $-4y$:

$$\frac{-4ay}{-4y} = a \qquad \frac{4y}{-4y} = -1 \Rightarrow -4y(a-1)$$

La expresión queda: $3x(a-1) - 4y(a-1)$

El factor común en esta última expresión es: $(a-1)$

Se divide cada término entre $(a-1)$:

$$\frac{3x(a-1)}{(a-1)} = 3x \qquad \frac{-4ay(a-1)}{(a-1)} = -4ay$$

La factorización final queda: $(a-1)(3x-4y)$

- **FACTORIZACIÓN DE BINOMIOS:**

En la factorización de binomios se presentan varias posibilidades

- **DIFERENCIA DE CUADRADOS:**

Una diferencia de cuadrados se identifica de la siguiente manera:

- Hay dos términos.
- Los términos están separados por signo menos.

- Los coeficientes tienen raíz cuadrada.
- Los exponentes son pares.

Regla para factorizar una diferencia de cuadrados:

1. Evalué primero factor común.
2. La diferencia de cuadrados se factoriza como el producto de dos paréntesis (dos factores).
3. En cada paréntesis se coloca la raíz cuadrada del primer término y la raíz cuadrada del segundo término, en un paréntesis separados por el signo + (más) y en el otro paréntesis separados por el signo - (menos). Esto es:

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = (x-y)(x+y)$$

http://www.youtube.com/watch?v=lgWqGDV1qKE

NOTA: SUMA DE CUADRADOS: Una suma de cuadrados no es factorizable en los números enteros por este método.

- Una suma de cuadrados se identifica de la siguiente manera:
- Hay dos términos.
- Los términos están separados por signo más.
- Los coeficientes tienen raíz cuadrada.
- Los exponentes son pares.

Factorice:

Ejemplo 1:

$16x^2 - 25y^4$

SOLUCIÓN

No hay factor común, pero podemos ver que el binomio corresponde a una diferencia de cuadrados: 16 y 25 tienen raíz cuadrada, el exponente de **x** y el exponente de **y** son pares.

$$\sqrt{16x^2} = 4x$$
$$\sqrt{25y^4} = 5y^2$$
$$16x^2 - 25y^4 = \left(4x - 5y^2\right)\left(4x + 5y^2\right).$$

Ejemplo 2:

$$x^4 + y^4$$

SOLUCIÓN

No hay factor común y no se puede factorizar en los números enteros por ser una suma de cuadrados.

Ejemplo 3:

$$100 - x^2 y^6 = \left(10 + xy^3\right)\left(10 - xy^3\right).$$

Ejemplo 4:

$$8x^6 - 50y^{12} = 2\left(4x^6 - 25y^{12}\right) = 2\left(2x^3 + 25y^6\right)\left(2x^3 - 25y^6\right).$$

Ejemplo 5:

$$x^4 - 16 = \left(x^2 + 4\right)\left(x^2 - 4\right) = \left(x^2 + 4\right)\left(x + 2\right)\left(x - 2\right).$$

- **SUMA DE CUBOS:**
- **DIFERENCIA DE CUBOS:**

Una diferencia o una suma de cubos se identifican de la siguiente manera:

- Hay dos términos.
- Los términos están separados por signo más (cuando es suma de cubos) o por signo menos (cuando es diferencia de cubos).
- Los coeficientes tienen raíz cúbica.
- Los exponentes son divisibles entre tres.

Regla para factorizar una diferencia o una suma de cubos:

1. Evalué primero factor común.
2. Se factoriza como el producto de dos paréntesis (dos factores).
3. En el primer paréntesis se coloca la raíz cúbica del primer término y la raíz cúbica del segundo término separadas por el mismo signo. Si es suma de cubos el signo que los separa es más, si es diferencia de cubos el signo que los separa es menos.
4. En el segundo paréntesis se coloca el cuadrado imperfecto del primer paréntesis pero con el signo cambiado.
5. El segundo paréntesis no es factorizable.

$x^3 + y^3 = \left(x + y\right)\left(x^2 - xy + y^2\right)$ SUMA DE CUBOS.

http://www.youtube.com/watch?v=DjW6Az8huBI

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ DIFERENCIA DE CUBOS.
http://www.youtube.com/watch?v=LZE5eWFeAo4&feature=related

Factorice:

Ejemplo 1:

$8x^6 - y^{12}$

SOLUCIÓN

No hay factor común. Este binomio corresponde a una diferencia de cubos: 8 tiene raíz cúbica, el exponente de **x** es divisible entre tres y el exponente de **y** es divisible entre tres.

$$\sqrt[3]{8x^6} = \sqrt[3]{2^3 x^6} = \sqrt[3]{2^3}\,\sqrt[3]{x^6} = 2^{3/3} x^{6/3} = 2x^2$$

$$\sqrt[3]{y^{12}} = y^{12/3} = y^4$$

$$8x^6 - y^{12} = (2x^2 - y^4)\left((2x^2)^2 + (2x^2)(y^4) + (y^4)^2\right) = (2x^2 - y^4)(4x^4 + 2x^2y^4 + y^8)$$

Ejemplo 2:

$$343x^3 + 512y^6$$

SOLUCIÓN

$$\sqrt[3]{343x^3} = \sqrt[3]{7^3 x^3} = 7x$$

$$\sqrt[3]{512y^6} = \sqrt[3]{2^9 y^6} = 2^3 y^2 = 8y^2$$

$$343x^3 + 512y^6 = (7x + 8y^2)\left[(7x)^2 - (7x)(8y^2) + (8y^2)^2\right]$$

$$343x^3 + 512y^6 = (7x + 8y^2)(49x^2 - 56xy^2 + 64y^4)$$

Ejemplo 3:

$x^6 - y^6 = (x+y)(x-y)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$

Ejemplo 4:

$5x^3+135$

SOLUCIÓN

Hay un factor común que es el número 5
Factorizando por factor común, queda:

$5\left(x^3+27\right)$

Factorizando suma de cubos

$5(x+3)\left((x)^2-(x)(3)+(3)^2\right)$

El resultado final es:

$5(x+3)\left(x^2-3x+9\right)$

http://www.youtube.com/watch?v=rpyqqjurQbc

- **FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS:**
- **TRINOMIO DE LA FORMA:** x^2+bx+c **:**

Se puede ver que en este trinomio el coeficiente de x^2 es uno, También que la variable del término del medio es la $\sqrt{\ }$ del primer término, si no es así, este método no se puede utilizar.

Un trinomio de este tipo se factoriza como: $x^2+bx+c=(x+d)(x+e)$
http://www.youtube.com/watch?v=fmPpfc2B9oc

Los pasos para efectuar la factorización son los siguientes:

1. Evalúe primero factor común.
2. Se ordena el trinomio en forma descendente.
3. Si el primer término es negativo, se debe factorizar el signo menos.
4. El trinomio se factoriza como el producto de dos paréntesis.
5. En cada paréntesis se escribe la raíz cuadrada del primer término del trinomio y se buscan dos números que cumplan las siguientes condiciones: Que al multiplicarlos den el tercer término del trinomio (d*e = c) y que al sumarlos den el coeficiente del término del medio (e + d = b).

Factorice.

Ejemplo 1:

$$x^2+5x+6$$

SOLUCIÓN

$$\sqrt{x^2}=x$$

Se debe buscar dos números que al multiplicarlos de cómo resultado el número 6 y que al sumarlos de como resultado el número 5. Dichos números son el número +2 y el número +3, ya que 2*3=6 y 2+3=5, cumplen ambas condiciones. Entonces la factorización queda:

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

Ejemplo 2:

$$x^2-7x+12$$

SOLUCIÓN

$$\sqrt{x^2}=x$$

Se debe buscar dos números que al multiplicarlos de cómo resultado el número 12 y que al sumarlos de como resultado el número - 7. Dichos números son el número - 3 y el número - 4, ya que- 3 * (- 4) = 12 y – 3 + (- 4) = - 7, cumplen ambas condiciones. Entonces la factorización queda:

$$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$$

Ejemplo 3:

$$x^2+2x-15 \quad R:(x+5)(x-3)$$

Ejemplo 4:

$$x^2-5x-14=(x-7)(x+2)$$

Ejemplo 5:

$$x^4 - 5x^2 - 50 = (x^2 + 5)(x^2 - 10)$$

Ejemplo6:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(x + 3)$$

Como (x + 3) (x +3) corresponden al mismo factor, entonces:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2$$

Ejemplo7:

$$x^2 - 14x + 49 = (x - 7)(x - 7) = (x - 7)^2$$

- **TRINOMIO DE LA FORMA:** $ax^2 + bx + c$

Se puede ver que en este trinomio el coeficiente de x^2 es diferente de uno, es un número **a**.
Para factorizar un trinomio de esta forma se debe completar el cuadrado del primer término, esto se logra multiplicando y dividiendo todo el trinomio por **a.**
Pasos para efectuar la factorización:

1. Se debe indicar la multiplicación y la división por el número **a**. No simplifique en este paso.
2. Se efectúa la multiplicación en el primero y en el tercer término, para el segundo término la multiplicación se debe dejar indicada como b (ax). No simplifique en este paso.
3. Se factoriza como en el caso anterior. Todavía no se simplifica.
4. Después de esto se debe factorizar por factor común en uno o en ambos paréntesis. Ahora si se simplifica.

http://www.youtube.com/watch?v=Ltae-ImPBPY&feature=related

Factorice:

Ejemplo 1:

$$6x^2 - 7x - 3$$

SOLUCIÓN

Se debe multiplicar y dividir todo el trinomio por el coeficiente de x^2 en este caso por el número 6.

$$6x^2-7x-3=\frac{6}{6}\left(6x^2-7x-3\right)=\frac{36x^2-7(6x)-18}{6}$$

Recuerde que la multiplicación se efectúa sólo para el primero y para el tercer término, en el segundo se debe dejar indicada como b(a x) por esto quedó indicado –7(6x). Recuerde también que en este paso no se simplifica.

Después de esto se factoriza como en el caso anterior:

$$\frac{36x^2-7(6x)-18}{6}=\frac{(6x-9)(6x+2)}{6}$$

Debe factorizar por factor común, bien sea en uno o en ambos paréntesis.

$$\frac{(6x-9)(6x+2)}{6}=\frac{3(2x-3)2(3x+1)}{6}$$

Ahora si simplificando:

$$\frac{3(2x-3)2(3x+1)}{6}=(2x-3)(3x+1)$$

Entonces:

$$6x^2-7x-3=(2x-3)(3x+1)$$

Ejemplo 2:

$$20z^2+z-1$$

SOLUCIÓN

$$20z^2+z-1=\frac{20}{20}\left(20z^2+1z-1\right)=\frac{400z^2+1(20z)-20}{20}$$

$$=\frac{(20z+5)(20z-4)}{20}=\frac{5(4z+1)4(5z-1)}{20}=(4z+1)(5z-1)$$

Ejemplo 3:

$-3x+20-9x^2$

SOLUCIÓN

$$-9x^2-3x+20=-\left(9x^2+3x-20\right)=-\frac{9}{9}\left(9x^2+3x-20\right)$$
$$=\frac{-\left(81x^2+3(9x)+180\right)}{9}=\frac{-(9x+15)(9x-12)}{9}$$
$$=\frac{-3(3x+5)3(3x-4)}{9}=-(3x+5)(3x-4)=(3x+5)(4-3x)$$

Ejemplo 4:

$4x^2-12x+9 \quad R:(2x-3)^2$

Ejemplo 5:

$10x^8+29x^4+10 \quad R:\left(2x^4+5\right)\left(5x^4+2\right)$

- Factorización por evaluación. Este método utiliza el teorema del residuo y la división entre polinomios.

El teorema del residuo permite determinar el factor Q(x), y la división entre polinomios permite determinar el factor C(x).

El teorema del residuo permite determinar rápidamente cuando un polinomio P(x) es divisible exactamente entre un binomio Q(x) = x - a. Esto se cumple cuando el residuo es nulo, es decir, si $R(x)=P(x=a)=0$. En consecuencia Q(x) es un factor de P(x). En este caso el otro factor se obtiene efectuando la división y será C(x).

Este método es práctico utilizarlo cuando es necesario factorizar polinomios de grado tres o superior y ninguno de los otros métodos conocidos funciona.

Pasos para desarrollar el método:

1. Determinar los posibles valores de **x** que hagan cero el residuo. Estos números se buscan en P(x). Son los factores del término independiente de P(x) (el término o número que no tiene **x**).
2. Evaluamos el residuo con estos números tomando uno a la vez.
3. Sí para x = a, R(x = a) = 0, es porque Q(x) = x - a es un factor de P(x).

4. El otro factor se obtiene efectuando la división y es C(x). De tal manera que P(x) = C(x)*Q(x).
http://www.youtube.com/watch?v=make3btRQ2Q
http://www.youtube.com/watch?v=MbZ4ryVbL2M&feature=related

Ejemplo 1: Factorice $x^3 + 2x^2 - x - 2$ Tomado de (Baldor, 1996).

SOLUCIÓN

Los factores de 2 son +1, -1, +2, -2.
Entonces los posibles factores de P(x) son:
x = 2 para x - 2
x =-2 para x + 2
x = 1 para x - 1
x = -1 para x + 1
Prueba para x - 2 es decir con x = 2

$$R(x) = P(2) = (2)^3 + 2(2)^2 - (2) - 2 = 8 + 8 - 2 - 2 = 12$$

Como el residuo es diferente de cero el polinomio Q(x) = x - 2 no es factor del polinomio P(x).

Prueba para x - 1, es decir con x = 1.
$R(x) = P(1) = (1)^3 + 2(1)^2 - (1) - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$. Como el residuo es cero quiere decir que:
Q(x) = x – 1

Es un factor del polinomio P(x) se efectuar la división para hallar el otro factor.

1	1	2	-1	-2
		1	3	2
	1	3	2	0=R(x)

$$C(x) = x^2 + 3x + 2$$
$$P(x) = (x^2 + 3x + 2) * (x - 1)$$

Factorizando: $x^2 + 3x + 2$ Resulta: $x^2 + 3x + 2 = (x + 2) * (x + 1)$
Y la factorización completa queda:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x + 2) * (x + 1) * (x - 1)$$

Ejemplo2: Factorice: $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

SOLUCIÓN

Los factores de 12 son: $\pm(1,2,3,4,6,12)$
Entonces los posibles factores de P(x) son:
X-1 para x = 1
x+1 para x = -1
x+2 para x = -2
x-2 para x = 2
x+3 para x = -3
x-3 para x = 3
x+4 para x = -4
x-4 para x = 4
x-6 para x = 6
x+6 para x = -6
x+12 para x = -12
x-12 para x = 12
Prueba para x - 1, es decir para x = 1

$$p(1) = (1)^3 - 3(1)^2 - 4(1) + 12 = 1 - 3 - 4 + 12 = 6$$

El residuo es 6, por lo tanto, el polinomio no se anula para x = 1, y no es divisible entre (x-1)

Prueba para x+1, es decir para x = -1

$$p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 4(-1) + 12 = -1 - 3 + 4 + 12 = 12$$

El residuo es 12. (x + 1) no es factor.

Prueba para x –2, es decir para x = 2

$$p(2) = (2)^3 - 3(2)^2 - 4(2) + 12 = 8 - 12 - 8 + 12 = 0$$

Como el residuo es cero, quiere decir que x-2 es un factor. Haciendo la división se encuentra el otro factor.

2	1	-3	-4	12
		2	-2	-12
	1	-1	-6	0=R(x)

El otro factor es $x^2 - x - 6$

Por lo tanto: $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x-2)(x^2 - x - 6) = (x-2)(x-3)(x+2)$

Ejercicio

1. **Con sus propias palabras explique en qué consiste la factorización.**
2. **Con sus propias palabras explique la forma de factorizar utilizando factorización por evaluación.**
3. **Factorice:**
   - **a.** $5x^6 - 15x^4$
   - **b.** $15x^2 + 2xy - 8y^2$
   - **c.** $12wz + 18xz - 8wy - 12yz$
   - **d.** $216x^{12} + 64y^6$
   - **e.** $125 - x^3y^{18}$
   - **f.** $4x^4 + 4x^3 - 81x^2 - x + 20$
   - **g.** $9x^4 - 3x^3 - 386x^2 + 508x - 168$

2.5. Fracciones algebraicas

2.5.1. Fracciones algebraicas

2.5.1.1 Simplificación De Fracciones Algebraicas

Cuando se efectúan operaciones con expresiones racionales, la factorización juega un papel muy importante, ya que le ayuda a simplificar la operación y a economizar pasos para que Las operaciones entre ellos se hagan más fáciles. Observe inicialmente algunas simplificaciones de expresiones algebraicas racionales.
http://www.youtube.com/watch?v=KG12HptTW9w
http://www.youtube.com/watch?v=OHzsVRhvhOY&feature=related

Ejemplo 1: Simplifique

$$\frac{x^2 - 9}{2x - 6}$$

Solución:

Se debe factorizar todo aquello que se pueda factorizar en el numerador y todo aquello que se pueda factorizar en el denominador.

Factorizando.

$$\frac{x^2-9}{2x-6}=\frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)}$$

Simplificando el factor x -3 del numerador con el factor x – 3 del denominador

$$=\frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)}=\frac{x+3}{2}$$

Ejemplo 2: Simplifique

$$\frac{n^2+3n+2}{n^2+6n+8}=\frac{(n+2)(n+1)}{(n+4)(n+2)}=\frac{n+1}{n+4}$$

Observe que se factoriza el numerador y el denominador y luego se cancelaron los términos iguales.

Ejemplo 3: Simplifique

$$(h^2-2h+1)\frac{(h+1)}{(h^3-1)}=\frac{(h-1)^2(h+1)}{(h-1)(h^2+h+1)}=\frac{(h-1)^{2-1}(h+1)}{(h^2+h+1)}=\frac{(h-1)(h+1)}{(h^2+h+1)}=\frac{h^2-1}{h^2+h+1}$$

Se factoriza el numerador y el denominador, se hizo la división de potencias de la misma base. Quedando en el numerador una suma por una diferencia de iguales cantidades que me producen una diferencia de cuadrados, terminando ahí la operación de simplificación.

Enlaces para fracciones algebraicas.
http://www.youtube.com/watch?v=hKklEPscYPY
http://www.youtube.com/watch?v=AzNDxSL2uYs&feature=fvst
http://www.youtube.com/watch?v=a27qaZRyJL0&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=evNxP_OKGos&feature=related

2.5.1.2 Operaciones con fracciones algebraicas

- Suma y resta

Ejemplo1:
Combine y simplifique

$$\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+4x+4}$$ (Zill & M, 1992)

SOLUCIÓN

$$\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+4x+4}=\frac{x}{(x+2)(x-2)}+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{x(x+2)+1(x-2)}{(x-2)(x+2)^2}=\frac{x^2+2x+x-2}{(x-2)(x+2)^2}=\frac{x^2+3x-2}{(x-2)(x+2)^2}$$

Ejemplo2:

Resuelva:

$$\frac{2}{3x-3}-\frac{5x}{x+1}+\frac{x-3}{x-1}$$

Solución

$$\frac{2}{3x-3}-\frac{5x}{x+1}+\frac{x-3}{x-1}=\frac{2}{3(x-1)}-\frac{5x}{x+1}+\frac{x-3}{x-1}=\frac{2(x+1)-5x(3)(x-1)+3(x-3)(x+1)}{3(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{2x+2-15x^2+15x+3x^2-6x-9}{3(x-1)(x+1)}=\frac{-12x^2+11x-7}{3(x+1)(x-1)}$$

- **Multiplicación y división**

Ejemplo1:

Multiplique:

$$\frac{3x-1}{x+2}\cdot\frac{x^2+4x+4}{3x^2-7x+2}$$

Solución

$$\frac{3x-1}{x+2}\cdot\frac{x^2+4x+4}{3x^2-7x+2}=\frac{3x-1}{x+2}*\frac{(x+2)^2}{(3x-1)(x-2)}=\frac{x+2}{x-2}$$

Ejemplo2:

Efectúe:

$$\frac{x^2-16}{x-3}\div\frac{x+4}{x^2-9}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{x^2-16}{x-3}\div\frac{x+4}{x^2-9}=\frac{(x^2-16)(x^2-9)}{(x-3)(x+4)}=\frac{(x+4)(x-4)(x+3)(x-3)}{(x-3)(x+4)}=(x-4)(x+3)$$

Ejercicio

1. **Escriba con sus propias palabras el significado de fracción algebraica.**
2. **Simplifique las siguientes fracciones:**

a. $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x-1}$

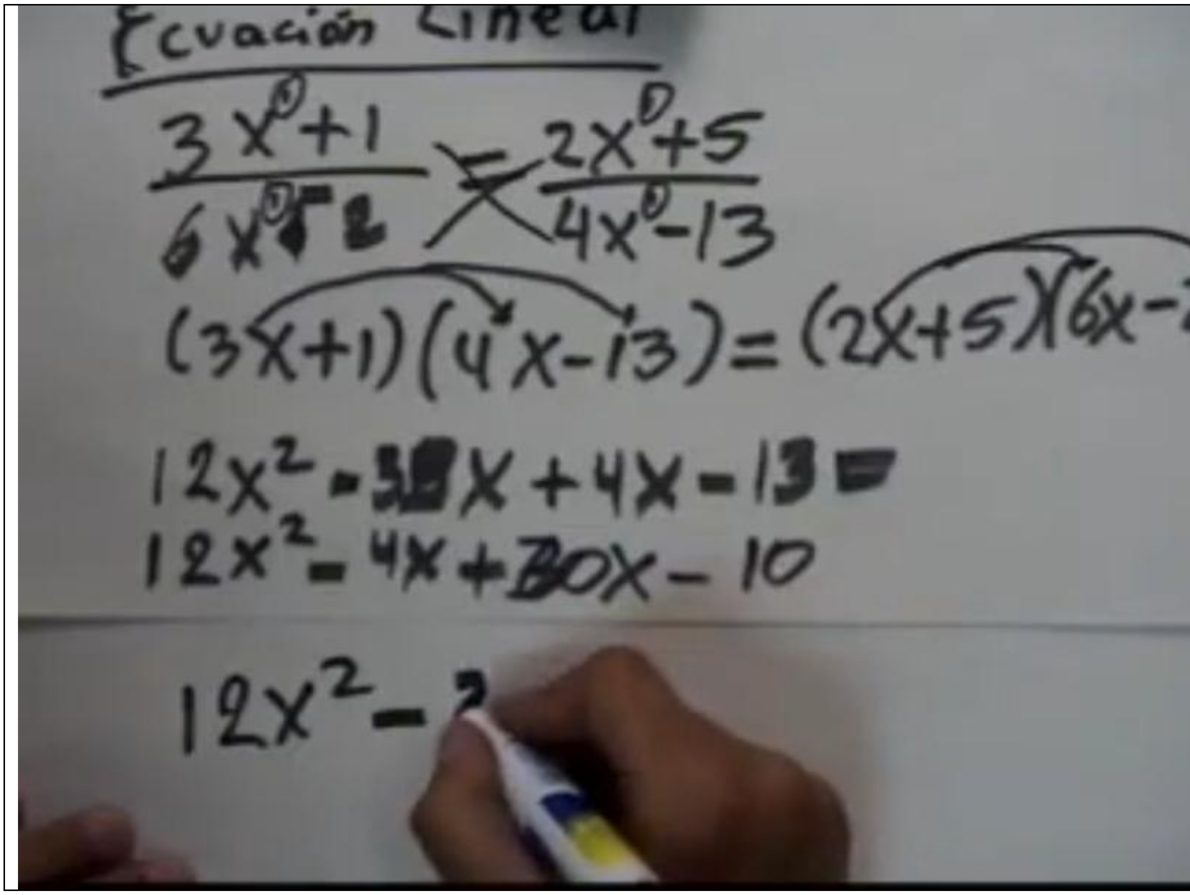
b. $\dfrac{9x^2-30x+25}{9x^2-25}$

3. **Efectúe las siguientes operaciones**

a. $\dfrac{x-5}{x^2-2x+8}+\dfrac{7}{x-4}-\dfrac{x+1}{x+2}$

b. $\dfrac{x^2+5x+4}{x-3}\div\dfrac{x+4}{x^2+2x-15}$

3. SOLUCIÓN DE ECUACIONES E INECUACIONES



http://www.youtube.com/watch?v=OOu74gE2M1I

OBJETIVO GENERAL

Conducir a los estudiantes al manejo de relaciones matemáticas que involucren una o dos variables, permitiendo el análisis y solución de una situación específica dada.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudiar las ecuaciones y desarrollar técnicas para resolver ecuaciones lineales, cuadráticas, racionales e irracionales, moldeando situaciones con las mismas.

- Resolver desigualdades lineales, cuadráticas, racionales y con valor absoluto, conociendo la notación de intervalo.

Prueba Inicial

Solucione:

1. $x-3=8$
2. $3x+4=x+8$
3. $x^2=9$
4. Encuentre tres números consecutivos cuya suma sea 18.
5. Encuentre dos números cuya suma sea a igual a 20 y su producto sea igual a 91.

3.1. Ecuaciones con una incógnita

3.1.1. Ecuaciones con una incógnita

3.1.1.1 Definiciones conceptos.

- **IGUALDAD**: Es una afirmación que indica que dos cantidades tienen el mismo valor.

Ejemplo: 5+12=20-3. Podemos ver que ambas cantidades tienen el mismo valor que es 17.

- **ECUACIÓN:** Es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas o variables. La ecuación sólo es válida o es verdadera para ciertos valores de la incógnita.

Ejemplo:

5x+2=17, es una ecuación, porque es una igualdad en la que hay una incógnita o variable, que es la x, esta igualdad sólo es verdadera para x = 3.
Sí reemplazamos la x por tres en la ecuación resulta una igualdad verdadera.

$$5\,(3) + 2 = 17$$
$$17 = 17$$

Que es verdadero. Sí reemplazamos a x por un valor diferente de tres resulta una igualdad falsa.

Ejemplo:

La igualdad $y^2 - 5y = -6$ es una ecuación, porque es una igualdad con una incógnita sólo se cumple para y = 2 e y = 3
La incógnita ó variable se representa por las últimas letras del alfabeto: x, y, z, u, v, w.

- **IDENTIDAD**: Es una igualdad que se cumple para cualquier valor de las incógnitas.

Ejemplo:

$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$ es una identidad por que se cumple para cualquier valor de x.

- **Grado de una ecuación polinómica**

El grado de una ecuación polinómica lo determina el mayor exponente que tiene la incógnita o variable dentro de la ecuación.

La ecuación $3x - 7 = 8$ es de grado uno o lineal porque el mayor exponente de la variable es uno.

$7x^5$ +Escriba aquí la ecuación. $6x^2 + 8 = 3x$ es de grado cinco.

$x^2 + 1 = 0$ es de grado dos.

- **Raíces o soluciones de una ecuación**

Son los valores de las incógnitas (o variables) que satisfacen la ecuación, es decir, al reemplazar las raíces en la ecuación, el resultado es una igualdad verdadera. Por ejemplo: en la ecuación $5x - 6 = 3x + 8$, la raíz o solución de la ecuación es x = 7 porque si reemplazamos a x por 7 en la ecuación resulta una igualdad verdadera: 5(7) - 6= 3(7) + 8, resulta 29 = 29 que es verdadero.

RESOLVER UNA ECUACIÓN: Consiste en encontrar las raíces o soluciones de la ecuación. Una ecuación tiene como máximo tantas raíces como el grado de la ecuación.

Si en el proceso de solución de una ecuación o de un sistema de ecuaciones se anula la variable y se llega a una igualdad falsa, esto quiere decir que la ecuación no tiene solución.

Ejemplo:

$-\mathbf{3}+\mathbf{5}x-\mathbf{5}x=\mathbf{2}+\mathbf{7}\rightarrow-\mathbf{3}=\mathbf{9}\quad Falso$. La ecuación no tiene solución.

Si en el proceso de solución de una ecuación o de un sistema de ecuaciones se anula la variable y se llega a una igualdad verdadera, en este caso se tiene una identidad, quiere decir que la ecuación cumple para cualquier valor de la variable, esto quiere decir que la ecuación tiene infinitas soluciones.

Ejemplo:

$\mathbf{6}x^2 - \mathbf{7} - \mathbf{6}x^2 = \mathbf{3} - \mathbf{10} \rightarrow -\mathbf{7} = -\mathbf{7} \quad Verdadero$. La ecuación tiene infinitas soluciones.

Propiedades de las ecuaciones

1. Sí se suma o se resta una misma cantidad en ambos lados de la ecuación, la igualdad subsiste.
2. La ecuación 3x + 5 = 2 x + 9 Sólo es válida para x = 4. Sí sumamos o restamos una misma cantidad, obtendremos una igualdad verdadera.
3. Sí se multiplica o se divide en ambos lados de una ecuación por una misma cantidad, diferente de cero, la igualdad subsiste.
4. Sí los dos lados de una ecuación se elevan a una misma potencia o sí a los dos lados se extrae una misma raíz, la igualdad subsiste.

NOTA:
Estas propiedades son las que permiten solucionar o encontrar las raíces de una ecuación, Para ello se deben aplicar apropiadamente dichas propiedades.

Ejemplo: Para la ecuación 3x - 5= x + 3 efectúe las siguientes operaciones (en ambos lados)
Sume 5.

$$3x - 5 + 5 = x + 3 + 5 \Rightarrow 3x = x + 8$$

Al resultado réstele x.

$$3x - x = x + 8 - x \Rightarrow 2x = 8$$

El resultado divídalo entre 2.

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2} \Rightarrow x = 4$$

Se puede ver que resulta x = 4 que es la raíz o solución de la ecuación.

- **Solución de ecuaciones con una incógnita**

- **Solución de ecuaciones lineales con una incógnita**

Una ecuación es lineal cuando el máximo exponente de la variable es uno.
Una ecuación lineal con una incógnita puede tener una solución o ninguna.
Para solucionar ecuaciones lineales se sugieren los siguientes pasos:
(http://www.youtube.com/watch?v=YRleGCexIcs),
(http://www.youtube.com/watch?v=zdeqL0d_Hgs&feature=related)

1. Sí es necesario efectúe previamente operaciones indicadas. Si hay fraccionarios multiplique toda la ecuación por el m.c.m. de los denominadores.
2. Agrupe términos semejantes: Consiste en ubicar en un lado de la ecuación las cantidades que contengan a la variable y en el lado contrario las cantidades que no la contengan. Para ello aplicamos la primera propiedad de las ecuaciones (sume o reste una misma cantidad).
3. Efectúe operaciones.
4. Elimine los coeficientes que acompañen a la variable. Para ello aplicamos la segunda propiedad de las ecuaciones (multiplique o divida por una misma cantidad). El término o lado donde está la variable tiene que quedar positivo.

Ejemplo: Solucione las siguientes ecuaciones lineales.

1. 3x - 2x+ 1 = 7x - 3+ 5x - x + 24.

Efectuamos operaciones en ambos lados: $x+1=11x+21$

Agrupando términos semejantes: $x-11x=21-1 \Leftrightarrow -10x=20$

Dividiendo entre -10 en ambos lados de la ecuación: $\frac{-10x}{-10}=\frac{20}{-10} \Rightarrow x=-2$

2. $\frac{4x}{3}-\frac{5}{2}=\frac{8}{3}x+2$. Para eliminar los denominadores (y así evitar los fraccionarios) multiplique toda la ecuación por el m.c.m. de los denominadores.

$m.c.m=6$

Indicando multiplicando por 6: $6*\frac{4x}{3}-6*\frac{5}{2}=6*\frac{8}{3}x+6*2$

Simplificando: $2*4x-3*5=2*8x+6*2$

Multiplicando: $8x-15=16x+12$

Agrupando términos semejantes: $8x-16=12+15$

Reduciendo términos semejantes: $-8x=27$

Eliminando el – 8 de la x: $x=27/-8 \Leftrightarrow x=-27/8$

3. 3x - 7 = 3x + 5.

Agrupando términos semejantes: $3x-3x=5+7$

Reduciendo términos semejantes: $0=12$

Se anula la variable y resulta una igualdad falsa, quiere decir que la **ecuación no tiene solución**.

4. 5(2x-3) - 8(x- 2) = 3(x - 5) + 6.

$10x-15-8x+16=3x-15+6 \Leftrightarrow 2x+1=3x-9 \Leftrightarrow 2x-3x=-9-1 \Leftrightarrow -x=-10$

Multiplicando por -1, queda: $x=10$

5. 4x-2 = 8x-4.

$$4x-8x=-4+2 \Leftrightarrow -4x=-2 \Leftrightarrow x=-2/-4 \Leftrightarrow x=1/2$$

6. $\frac{5x+4}{3}-\frac{7-2x}{2}=\frac{3-x}{4}-\frac{1+x}{3}$. Multiplique por el m.c.m. de los denominadores.

$$12*\left(\frac{5x+4}{3}\right)-12*\left(\frac{7-2x}{2}\right)=12*\left(\frac{3-x}{4}\right)-12*\left(\frac{1+x}{3}\right) \Rightarrow 4(5x+4)-6(7-2x)=3(3-x)-4(1+x)$$

$$20x+16-42+12x=9-3x-4-4x \Leftrightarrow 32x-26=-7x+5 \Leftrightarrow 32x+7x=5+26 \Leftrightarrow 39x=31$$

$$x=31/39$$

- **Solución de ecuaciones de segundo grado**

  Una ecuación de segundo grado es toda ecuación en la cual, una vez simplificada, el mayor exponente de la incógnita es dos. Es toda ecuación de la forma: $ax^2+bx+c=0$
  Donde a, b y c son constantes con $a \neq 0$.
  Para solucionar una ecuación de este tipo existen varios métodos:

- Método por factorización para solucionar una ecuación de segundo grado. Este método también se utiliza para solucionar ecuaciones de grado tres o superior.

(http://www.youtube.com/watch?v=FTAyKcvWFnY&feature=fvsr)

PASOS PARA DESARROLLAR EL MÉTODO:

1. Se debe igualar la ecuación a cero.
2. Después de efectuar operaciones se debe factorizar la expresión resultante.
3. Cada factor que contenga a la variable se debe igualar a cero. Por cada factor resulta una ecuación lineal.
4. Solucionamos cada ecuación.

Ejemplos: Solucione las siguientes ecuaciones por factorización.

1. $x^2-10x=75$

   Igualando a cero: $x^2-10x-75=0$

   Factorizando: $(x-15)(x+5)=0$

   Igualando cada factor a cero: $x-15=0 \vee x+5=0$

   Solucionando cada ecuación por separado:

   $x-15=0 \Leftrightarrow x=15$

   $x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$

   Las raíces de la ecuación son: $x=15 \vee x=-5$

2. $2x^2=-5x+3$

$$2x^2+5x-3=0 \Rightarrow \frac{2}{2}\left(2x^2+5x-3\right)=0 \Rightarrow \frac{4x^2+5(2x)-6}{2}=0\,\frac{(2x+6)(2x-1)}{2}=0$$

$$\frac{2(x+3)(2x-1)}{2}=0 \Leftrightarrow (x+3)(2x-1)=0$$

$$x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$$

$$2x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=1/2$$

Raíces: $x=-3 \vee x=1/2$

3. $12x^2+15x=18$

$$12x^2+15x-18=0 \Rightarrow 3(4x^2+5x-6)=0 \Leftrightarrow 4x^2+5x-6=0 \Leftrightarrow \frac{4}{4}\left(4x^2+5x-6\right)=0$$

$$\frac{16x^2+5(4x)-24}{4}=0 \Leftrightarrow \frac{(4x+8)(4x-3)}{4}=0 \Leftrightarrow \frac{4(x+2)(4x-3)}{4}=0 \Leftrightarrow (x+2)(4x-3)=0$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \vee 4x-3=0 \Rightarrow 4x=3 \Rightarrow x=3/4$$

Las raíces de la ecuación son: $x=-2 \vee x=3/4$

4. $x^2-18=7$

$$x^2-18-7=0 \Leftrightarrow x^2-25=0 \Leftrightarrow (x-5)(x+5)=0$$

$$x-5=0 \Rightarrow x=5 \vee x+5=0 \Rightarrow x=-5$$

Raíces: $x=-5 \vee x=5$

5. $x^4-13x^2+36=0 \quad R: \quad x=3 \quad x=-3 \quad x=2 \quad x=-2.$

Ecuación de grado 4

$$\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)=0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3)(x+2)(x-2)=0$$

$$x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$$

$$x-3=0 \Leftrightarrow x=3$$

$$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

$$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

6. $15x^2=5x$

$$15x^2-5x=0 \Rightarrow 5x(3x-1)=0 \Leftrightarrow 5x=0 \Rightarrow x=0/5 \Rightarrow x=0 \vee 3x-1=0 \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=1/3$$

Las raíces son: $x=0 \vee x=1/3$

- **Método de completar el cuadrado**

Para desarrollar este método se procede de la siguiente manera:

1. Se debe aislar el término independiente, esto es, el término que no tenga la incógnita se debe dejar a un lado de la ecuación y los términos que la contengan se deben dejar en el lado contrario.
2. Normalizar la ecuación, se debe dividir toda la ecuación entre a, este es el coeficiente de x^2.
3. Se debe sumar a toda la ecuación el número que acompaña a la variable lineal divido entre dos y el resultado elevado al cuadrado. Sólo efectuamos la operación en el lado izquierdo, en el lado derecho de la ecuación no.
4. El lado derecho de la ecuación siempre lo factorizamos como un paréntesis elevado a la dos.
5. Dentro del paréntesis colocamos la raíz cuadrada del primer término y la raíz cuadrada del tercer término separadas por el signo del término del medio.
6. Para eliminar el exponente dos del paréntesis extraemos raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación. Recuerde que cuando extraemos raíz cuadrada esta tiene dos signos uno positivo y otro negativo.
7. Resulta una ecuación lineal y la solucionamos. En la solución debemos utilizar ambos signos, uno a la vez, dando como solución dos valores. (http://www.youtube.com/watch?v=at8YGH8jl8k&feature=fvsr)

Ejemplos: Solucione por completación:

1. $4x^2 + 3x - 22 = 0$

   Aislando el término independiente (el 22): $4x^2 + 3x = 22$

   Dividiendo todos los términos de la ecuación entre 4:

$$x^2 + \frac{3}{4}x = \frac{22}{4} \Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{4}x = \frac{11}{2}$$

El coeficiente de x se divide entre dos y se eleva al cuadrado:

$$\left(\frac{3}{4} \div 2\right)^2 = \left(\frac{3}{4*2}\right)^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

Este valor se suma en ambos lados de la ecuación:

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{11}{2} + \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{11}{2} + \frac{9}{64} \Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{352+9}{64} \Leftrightarrow^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{361}{64}$$

Factorizando el lado izquierdo de la ecuación: $\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{361}{64}$

Raíz cuadrada en ambos lados: $\sqrt{\left(x+\frac{3}{8}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{361}{64}} \Leftrightarrow x+\frac{3}{8}=\pm\frac{19}{8}$

Despejando la x: $x=\pm\frac{19}{8}-\frac{3}{8}$

Con más: $x=\frac{19}{8}-\frac{3}{8} \Rightarrow x=\frac{16}{8} \Rightarrow x=2$

Con menos: $x=-\frac{19}{8}-\frac{3}{8} \Rightarrow x=-\frac{22}{8} \Rightarrow x=-\frac{11}{4}$

Las raíces de la ecuación: $x=2 \vee x=-11/4$

2. $2x^2+7x-4=0$

$$2x^2+7x=4 \Rightarrow x^2+\frac{7}{2}x=2 \Rightarrow x^2+\frac{7}{2}x+\left(\frac{7}{4}\right)^2=2+\left(\frac{7}{4}\right)^2 \Rightarrow \left(x+\frac{7}{4}\right)^2=\frac{81}{16}$$

$$x+\frac{7}{4}=\pm\sqrt{\frac{81}{16}} \Leftrightarrow x=\pm\frac{9}{4}-\frac{7}{4}$$

Con +: $x=\frac{9}{4}-\frac{7}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Con-: $x=-\frac{9}{4}-\frac{7}{4}=-\frac{16}{4}=-4$

Las raíces son: $x=-4 \vee x=1/2$

3. $ax^2+bx+c=0$

SOLUCIÓN

$$ax^2+bx=-c \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \Leftrightarrow \sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}} \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- **Método por fórmula general.**

Una ecuación de la forma: $ax^2+bx+c=0$ Tiene la siguiente solución:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para utilizar este método, se sugiere el siguiente procedimiento:

1. Iguale la ecuación a cero.
2. Identifique los coeficientes. a es el coeficiente o número que acompaña a x^2, b es el coeficiente o número que acompaña a la x y c es el término independiente.
3. Reemplace los valores de a, b, y c en la fórmula general y resuelva. (http://www.youtube.com/watch?v=187VcMixOOY)

Ejemplos: Resuelva por fórmula general:

1. $3x^2 - 2x = 4$

   $3x^2 - 2x - 4 = 0, \quad donde: \quad a = 3,\ b = -2,\ c = -4$

   $$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-4)}}{2(3)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+48}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{2 \pm 7{,}21....}{6}$$

   Con más: $x = \dfrac{2 + 7{,}21}{6} \Rightarrow x = 1{,}535...$

   Con menos: $x = \dfrac{2 - 7{,}21}{6} \Rightarrow x = -0{,}868...$

2. $9x^2 + 16 = 24x$

   $9x^2 - 24x + 16 = 0, \quad con \ \ a = 9,\ b = -24,\ \ c = 16$

   $$x = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(9)(16)}}{2(9)} = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 576}}{18} = \frac{24 \pm \sqrt{0}}{18} = \frac{24}{18} \Leftrightarrow x = 4/3$$

3. $-10x^2 + 20x + 1 = 0$

SOLUCIÓN

Con: $a = -10,\ b = 20,\ \ c = 1$

$$x = \frac{-(20) \pm \sqrt{(20)^2 - 4(-10)(1)}}{2(-10)} = \frac{-20 \pm \sqrt{400+40}}{-20} = \frac{-20 \pm \sqrt{440}}{-20} = \frac{-20 \pm 20{,}976...}{-20}$$

Con más: $x = \dfrac{-24 + 20{,}976...}{-20} = \dfrac{-3{,}023}{-20} \Rightarrow x = 0{,}151...$

Con menos: $x = \dfrac{-24 - 20{,}976...}{-20} = \dfrac{-44{,}976}{-20} \Rightarrow x = 2{,}248...$

3.1.2. Solución de ecuaciones racionales

Una ecuación racional es una ecuación que presenta variable en el denominador. Por ejemplo.

$$\frac{5x}{2x-3}+8=\frac{3}{x}$$

El tipo de ecuaciones racionales que vamos a solucionar nos va a conducir a ecuaciones o lineales o polinómicas.

Para solucionar estas ecuaciones se sugieren los siguientes pasos:

1. Para eliminar los denominadores, se debe multiplicar toda la ecuación por el m.c.m. de los denominadores. Tenga en cuenta que para determinar el m.c.m. de los denominadores, hay que factorizar (si es posible) dichos denominadores previamente.
2. Simplifique. En este paso deben desaparecer los denominadores.
3. Efectúe las operaciones indicadas.
4. Resulta una ecuación lineal o resulta una ecuación cuadrática; la solucionamos por cualquiera de los métodos conocidos.
5. Se debe comprobar que el valor obtenido no de división entre cero. Para ello reemplazamos el (los) valor (es) obtenido en la ecuación original (sólo en los denominadores); si nos da una división entre cero, este valor no es solución de la ecuación. (http://www.youtube.com/watch?v=_dDxLkkLIWc&feature=related), (http://www.youtube.com/watch?v=atuj8bw2Of0)

Ejemplos. Solucione las siguientes ecuaciones:

1. $\frac{5}{x-4}=\frac{6}{x-3}$ (Haeussler, 1997)

SOLUCIÓN

El m.c.m. de los denominadores es: $(x-4)(x-3)$
Indicando multiplicación por: $(x-4)(x-3)$

$$(x-4)(x-3)*\frac{5}{x-4}=(x-4)(x-3)*\frac{6}{x-3}$$

Simplificando: $(x-3)*5=(x-4)*6$
Efectuando operaciones: $5x-15=6x-24$
Resulta una ecuación lineal.
Solucionando la ecuación lineal:

$$5x-6x=-24+15 \Leftrightarrow -x=-9 \Leftrightarrow x=9$$

Prueba:

$$\frac{5}{9-4}=\frac{6}{9-3} \Leftrightarrow \frac{5}{5}=\frac{6}{6} \Leftrightarrow 1=1$$

Como resultó una igualdad verdadera, quiere decir que $x=9$ si es solución de la ecuación.

2. $\frac{3x+4}{x+2}-\frac{3x-5}{x-4}=\frac{12}{x^2-2x-8}$ (Haeussler, 1997)

Factorizando denominadores: $\frac{3x+4}{x+2}-\frac{3x-5}{x-4}=\frac{12}{(x+2)(x-4)}$

El m.c.m. de los denominadores es: $(x+2)(x-4)$
Indicando multiplicación por el m.c.m.:

$$(x+2)(x-4)*\frac{3x+4}{x+2}-(x+2)(x-4)*\frac{3x-5}{x-4}=(x+2)(x-4)*\frac{12}{(x+2)(x-4)}$$

Simplificando: $(x-4)(3x+4)-(x+2)(3x-5)=12$

Efectuando multiplicaciones: $3x^2+4x-12x-16-\left(3x^2-5x+6x-10\right)=12$

Reduciendo términos semejantes:

$$3x^2-8x-16-3x^2+5x-6x+10=12 \Leftrightarrow -9x-6=12$$

Resultó una ecuación lineal.

Solucionando la ecuación: $-9x = 12 + 6 \Leftrightarrow -9x = 18 \Leftrightarrow x = \frac{18}{-2} \Rightarrow x = -2$

Prueba: $\frac{3(-2)+4}{(-2)+2} - \frac{3(-2)-5}{(-2)-4} = \frac{12}{(-2)^2 - 2(-2) - 8} \Rightarrow \frac{-6+4}{0} - \frac{-6-5}{-6} = \frac{12}{4+4-8}$

Como resulto cero en el denominador, la ecuación no tiene solución.

3. $\frac{2}{x-1} - \frac{6}{2x+1} = 5$

SOLUCIÓN

El m.c.m. de los denominadores es: $(x-1)(2x+1)$
Indicando multiplicación por el m.c.m.:

$$(x-1)(2x+1)*\frac{2}{x-1} - (x-1)(2x+1)*\frac{6}{2x+1} = (x-1)(2x+1)*5$$

Simplificando: $(2x+1)*2 - (x-1)*6 = (x-1)(2x+1)*5$

Multiplicando y reduciendo términos semejantes:

$$4x + 2 - 6x + 6 = (x^2 + x - 2x - 1)*5 \Leftrightarrow -2x + 8 = (2x^2 - x - 1)*5 \Leftrightarrow -2x + 8 = 10x^2 - 5x - 5$$

Solucionando la ecuación de segundo grado que resulta:

$$0 = 10x^2 - 5x - 5 + 2x - 8 \Rightarrow 0 = 10x^2 - 3x - 13$$

$$\frac{10}{10}(10x^2 - 3x - 13) \Leftrightarrow 0 = \frac{100x^2 - 3(10x) - 130}{10}$$

$$0 = \frac{(10x-13)(10x+10)}{10} \Leftrightarrow 0 = \frac{(10x-13)10(x+1)}{10}$$

$$0 = (10x-13)(x+1) \Rightarrow 10x - 13 = 0 \vee x + 1 = 0$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$10x - 13 = 0 \Rightarrow 10x = 13 \Rightarrow x = 13/10$$

PRUEBA CON $x=-1$

$$\frac{2}{-1-1}-\frac{6}{2(-1)+1}=5\Leftrightarrow\frac{2}{-2}-\frac{6}{-1}=5$$

$$-1+6=5\Leftrightarrow 5=5\ Verdadero$$

$x=-1$ Es raíz de la ecuación.

PRUEBA CON $x=13/10$

$$\frac{2}{\frac{13}{10}-1}-\frac{6}{2\left(\frac{13}{10}\right)+1}=5\Leftrightarrow\frac{2}{\frac{13-10}{10}}-\frac{6}{\frac{26}{10}+1}=5$$

$$\frac{2}{\frac{3}{10}}-\frac{6}{\frac{26+10}{10}}=5\Leftrightarrow\frac{2}{\frac{3}{10}}-\frac{6}{\frac{36}{10}}=5\Leftrightarrow\frac{2*10}{3}-\frac{6*10}{36}=5$$

$$\frac{20}{3}-\frac{60}{36}=5\Leftrightarrow\frac{240-60}{36}=5\Leftrightarrow\frac{180}{36}=5\Leftrightarrow 5=5$$

$x=13/10$ Es raíz de la ecuación.

La solución de la ecuación es: $x=-1\vee x=13/10$

3.1.3. Solución de ecuaciones irracionales

Una ecuación irracional es una ecuación que presenta variable dentro de una raíz. Por ejemplo: $5x-\sqrt{x}=10$ El tipo de ecuaciones irracionales que vamos a estudiar nos lleva a ecuaciones lineales o a ecuaciones cuadráticas.

Para solucionar este tipo de ecuaciones se sugieren los siguientes paso:

1. Se debe despejar la raíz o una de las raíces.
2. Efectúe operaciones.
3. Para eliminar la raíz, eleve a ambos lados de la ecuación a un exponente igual a la raíz.
4. Efectúe operaciones.
5. Resulta ó una ecuación lineal, ó una ecuación cuadrática, se solucionamos por cualquiera de los métodos conocidos.
6. Se debe comprobar la solución reemplazando en la ecuación original. Sí al reemplazar resulta una igualdad falsa, dicho valor, por el cual se reemplazó, no es solución de la ecuación.(http://www.youtube.com/watch?v=jzlU9VmW06U), (http://www.youtube.com/watch?v=iemP4Dg8Vos)

Ejemplos: Solucione las siguientes ecuaciones.

1. $\sqrt{x-1}+3-x=x-5$

SOLUCIÓN

Despejando la raíz: $\sqrt{x-1}=x-5-3+x \Rightarrow \sqrt{x-1}=2x-8$

Elevando en ambos lados de la ecuación a potencia dos: $\left(\sqrt{x-1}\right)^2=(2x-8)^2$

Simplificando y resolviendo el producto notable:

$$x-1=(2x)^2-2(2x)(8)+(8)^2 \Leftrightarrow x-1=4x^2-32x+64$$

Solucionando la ecuación cuadrática que resulta:

$$0=4x^2-32x+64-x+1 \Leftrightarrow 0=4x^2-33x+65$$

$$0=\frac{4}{4}\left(4x^2-33x+65\right) \Leftrightarrow 0=\frac{16x^2-33(4x)+260}{4} \Leftrightarrow 0=\frac{(4x-20)(4x-13)}{4}$$

$$0=\frac{4(x-5)(4x-13)}{4} \Leftrightarrow 0=(x-5)(4x-13)$$

$$x-5=0 \Rightarrow x=5$$

$$4x-13=0 \Rightarrow 4x=13 \Rightarrow x=13/4$$

PRUEBA CON $x=13/4$

$$\sqrt{\frac{13}{4}-1}+3-\frac{13}{4}=\frac{13}{4}-5 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{13-4}{4}}+\frac{12-13}{4}=\frac{13-20}{4}$$

$$\sqrt{\frac{9}{4}}-\frac{1}{4}=-\frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{6-1}{4}=-\frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{5}{4}=-\frac{7}{4}\ \textit{Falso}$$

Como la igualdad es falsa, quiere decir que $x=13/4$ no es solución de la ecuación.

PRUEBA CON $x=5$

$$\sqrt{5-1}+3-5=5-5 \Leftrightarrow \sqrt{4}-2=0 \Leftrightarrow 2-2=0 \Leftrightarrow 0=0\ \textit{Verdadero}$$

Como la igualdad es verdadero, quiere decir que $x = 5$ si es solución de la ecuación.

La única solución de la ecuación es $x = 5$

2. $\sqrt{y-3} - \sqrt{y} = -3$ (Haeussler, 1997)

SOLUCIÓN

Despejando la raíz más compleja: $\sqrt{y-3} = \sqrt{y} - 3$

Elevando al cuadrado: $\left(\sqrt{y-3}\right)^2 = \left(\sqrt{y} - 3\right)^2$

Resulta: $y - 3 = \left(\sqrt{y}\right)^2 - 2\left(\sqrt{y}\right)(3) + (3)^2 \Leftrightarrow y - 3 = y - 6\sqrt{y} + 9$

Despejando el radical: $6\sqrt{y} = y + 9 - y + 3 \Leftrightarrow 6\sqrt{y} = 12$

Elevando al cuadrado: $\left(6\sqrt{y}\right)^2 = (12)^2 \Leftrightarrow (6)^2\left(\sqrt{y}\right)^2 = 144 \Leftrightarrow 36y = 144$

Solucionando la ecuación lineal: $y = 144/36 \Leftrightarrow y = 4$

PRUEBA

$$\sqrt{4-3} - \sqrt{4} = -3 \Leftrightarrow \sqrt{1} - 2 = -3 \Leftrightarrow 1 - 2 = -3 \Rightarrow -1 = -3 \ \mathit{Falso}$$

La ecuación no tiene solución.

3. $3\sqrt{x+4} = x - 6$

SOLUCIÓN

Elevando al cuadrado en ambos lados de la ecuación

$$\left(3\sqrt{x+4}\right)^2 = (x-6)^2$$

Resolviendo cada cuadrado:

$$9(x+4) = x^2 - 12x + 36$$

$$9x + 36 = x^2 - 12x + 36$$

$$0 = x^2 - 12x + 36 - 36 - 9x$$

$$0 = x^2 - 21x$$

Resolviendo la ecuación cuadrática que resulta:

$$0 = x(x-21)$$

$$x = 0 \vee x - 21 = 0$$

$$x = 0 \vee x = 21$$

Dando la prueba:

Con $x = 0$

$$3\sqrt{x+4} = x - 6 \Rightarrow 3\sqrt{(0)+4} = (0) - 6$$
$$3\sqrt{4} = -6 \Rightarrow 3(2) = -6$$
$$6 = -6$$
$$Falso$$

$x = 0$ No es solución

Con $x = 21$

$$3\sqrt{x+4} = x - 6 \Rightarrow 3\sqrt{(21)+4} = (21) - 6$$
$$3\sqrt{25} = 15 \Rightarrow 3(5) = 15$$
$$15 = 15$$
$$Verdadero$$

$x = 21$ Si es solución.

La solución de la ecuación: $3\sqrt{x+4} = x - 6$ es $x = 21$

3.1.4. Solución de ecuaciones con valor absoluto

Recuerde que valor absoluto significa la distancia que hay desde un número hasta el cero, es por esto que el valor absoluto de un número es siempre positivo.

Recuerde también que el valor absoluto de un número x, *se simboliza por* $|x|$, y está definido como:

$$|x| = \begin{cases} x, & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Aplicando la definición tenemos que:

$$|3| = 3, \quad |-8| = -(-8) = 8$$

Al solucionar ecuaciones con valor absoluto, se debe tener en cuenta su definición. (http://www.youtube.com/watch?v=-UjvG5_aijs&feature=related)
(http://www.youtube.com/watch?v=jEknI2qdvyY)

Ejemplos Solucione:

1. $|x - 3| = 2$

   Esta ecuación establece que $x - 3$ es un número que se encuentra a 2 unidades del cero. Por lo tanto se debe plantear y solucionar las dos ecuaciones siguientes:

$$x-3=2 \vee x-3=-2$$

Entonces se resuelve cada ecuación por separado.

$$x-3=2 \Leftrightarrow x=2+3 \Rightarrow x=5$$

$$x-3=-2 \Leftrightarrow x=-2+3 \Rightarrow x=1$$

Prueba:

Con $x=5 \Rightarrow |3-5|=2 \Leftrightarrow |-2|=2 \Rightarrow 2=2$

Con $x=1 \Rightarrow |3-1|=2 \Leftrightarrow |2|=2 \Rightarrow 2=2$.

Como ambas raíces cumplen, la solución de la ecuación es: $x=5 \vee x=1$

2. $|7-3x|=5$

   Hay que plantear solucionar dos ecuaciones: $7-3x=5 \vee 7-3x=-5$

   $7-3x=5 \Leftrightarrow -3x=5-7 \Leftrightarrow -3x=-2 \Leftrightarrow x=\dfrac{-2}{-3} \Rightarrow x=\dfrac{2}{3}$

   $7-3x=-5 \Leftrightarrow -3x=-5-7 \Leftrightarrow x=\dfrac{-12}{-3} \Rightarrow x=4$. No olvide dar la prueba.

3. $|x-4|=-13$

Esta ecuación no tiene solución, ya que el valor absoluto nunca es negativo.

Aplicaciones.

Para solucionar problemas se sugiere la siguiente metodología:

Sugerencias para solucionar problemas de palabras

1. Lea el problema cuidadosamente.
2. Relea el problema e identifique una cantidad desconocida que se necesita encontrar.
3. Si es posible, haga un diagrama.
4. Asigne una variable, digamos *x*, que represente la cantidad desconocida. (¡Escriba la definición de esta variable en su hoja¡)
5. Si es posible, represente cualquier otra cantidad que haya en el problema en términos de *x*. (¡Escriba cada una de estas cantidades en su hoja¡)
6. Escriba una ecuación (o inecuación) que exprese con precisión la relación descrita en el problema.
7. Solucione la ecuación (o inecuación).

8. Verifique que su respuesta concuerde con todas las condiciones planteadas en el problema. (Zill & Dewar, 1992)

PROBLEMA NÚMERO 1
Una malla de alambre será colocada alrededor de un terreno rectangular de modo que el área cercada sea de 800 pies^2. Se sabe que el largo del terreno es el doble de su ancho. ¿Cuántos pies de malla serán utilizados? (Haeussler, 1997).

Solución.
Sea x el ancho del terreno.
Sea y su largo sabemos qué y = 2x
Véase la figura 1.

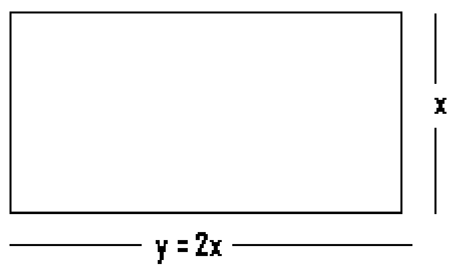


Figura 1. Figura para el problema 1.
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

De la figura 1 se puede ver qué área es igual a base (2x) por altura (x)
Entonces:

$$2x * x = 800 \rightarrow 2x^2 = 800$$

Solucionando la ecuación se tiene que:

$$2x^2 = 800 \Rightarrow 2x^2 - 800 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 400) = 0 \Rightarrow 2(x-20)(x+20) = 0 \Rightarrow x+20 = 0 \vee x-20 = 0$$
$$x = 20 \quad \vee \quad x = -20$$

El valor negativo se descarta porque no se puede hablar de distancia negativa.

El total de malla a utilizar será de x + 2x+ 2x+ x = 6x

El total es 6*20 = 120 pies.

PROBLEMA NÚMERO 2:
Se compra un artículo en cierta cantidad de dinero y se vende ganando el 25% del precio de compra. Si el artículo fue vendido en $40.775.

1. Determine el precio de compra.

SOLUCIÓN

Sea **x** el precio de compra.

La ganancia será: $\frac{25}{100} * x = 0,25x$

El precio de venta será igual al precio de compra más la ganancia. Y se sabe que el precio de compra es igual a $40.775. Resulta la siguiente ecuación:

$$x + 0,25x = 40.775$$

$$1,25x = 40.775 \rightarrow x = \frac{40.775}{1,25} \rightarrow x = 32.620$$

Quiere decir que el precio de compra es de $32.620

Se deja para que el estudiante de la prueba.

1. Determine la ganancia.

SOLUCIÓN

La ganancia es de $0,25x = 0,25 * 32.620 = 8.156$

Ganancia: $8.156.

Prueba: 32.620+8.156=40.775

40.775=40.775

PROBLEMA NÚMERO 3:

Hace dos años John tenía cinco veces la edad de Bill. Ahora es 8 años mayor que Bill. Encuentre la edad actual de John.

Solución: La cantidad desconocida que va a ser determinada es la edad actual de John, entonces asignamos

$x =$ Edad actual de John

Luego podemos representar las otras cantidades del problema en términos de x:

$x - 8 =$ Edad actual de Bill.

$x - 2 =$ Edad de John hace dos años

$(x-8)-2 = x-10 =$ Edad de Bill hace dos años

Puede encontrar útil enumerar la información en forma tabular, como se muestra a continuación:

	EDAD ACTUAL	EDAD HACE DOS AÑOS
John	x	$x-2$
Bill	$x-8$	$x-10$

Una ecuación que expresa la relación de sus edades hace dos años es

$$x-2=5(x-10)$$

Resolvamos esta ecuación

$$x-2=5x-50$$

$$48=4x$$

$$x=12$$

Entonces, la edad actual de John es 12.
Prueba: Si John tiene ahora 12 años, Bill debe tener 4. Hace dos años John tenía 10 y Bill 2.
Puesto que $10=5(2)$, la respuesta es correcta. (Zill & Dewar, 1992)

PROBLEMA NÚMERO 4:
Una compañía de dulces fabrica una chocolatina de forma rectangular de 12 cm de largo, por 6 cm de ancho y 3 cm de grosor. Debido a un incremento en los costos, la compañía ha decidido reducir el volumen de la chocolatina en un 25%. El grosor será el mismo, pero el largo y el ancho se reducirán en una misma cantidad. Determine el nuevo largo y el nuevo ancho de la chocolatina.

SOLUCIÓN:

El volumen de la chocolatina era: 12 cm* 6cm * 3cm =216 cm^3.
A este volumen se le reducirá un 25%: 25/100*216 =54 cm^3.
El nuevo volumen será: 216 – 54 = 162 cm^3.
Sea **x** la cantidad a quitar al largo y al ancho; entonces:
Nuevo largo = 12 – x.
Nuevo ancho = 6 – x.
Nuevo grosor = 3
El modelo matemático para el nuevo volumen será:(12-x)*(6-x)*3 y sabemos que el nuevo volumen es de 162, resulta la siguiente ecuación:

$$(12-x)(6-x)3=162$$

$$(12-x)(6-x)=\frac{162}{3}\rightarrow(12-x)(6-x)=54\rightarrow 72-18x+x^2=54$$

$$x^2-18x+72-54=0\rightarrow x^2-18x+18=0$$

Solucionando la ecuación resulta:

x = 16,94 cm no se puede. o x = 1,063 cm

La cantidad a quitar es de 1,063 cm.
Nuevo largo: 12 – 1,.63 = 10,937 cm.
Nuevo ancho: 6 – 1,063 = 4,937 cm.
Prueba: 10,937*4,937*3 = 162
161,987907 = 162.

El resultado no es exacto debido que no es posible utilizar todos los decimales.

PROBLEMA NÚMERO 5:
Se desea construir una caja sin tapa. Para ello se tomará una lámina cuadrada de cartón y se cortarán en las cuatro esquinas cuadrados idénticos de 5 cm de lado y se doblarán hacia arriba. Si la caja será hecha para contener un volumen de 2000 cm^3. Determine las dimensiones de la lámina de cartón a utilizar.

SOLUCIÓN:

Un cuadrado es un rectángulo que tiene los cuatro lados iguales.
Sea **x** el lado del cuadrado; se va a quitar en las cuatro esquinas 5 cm a cada lado de la esquina. Véase la figura 2

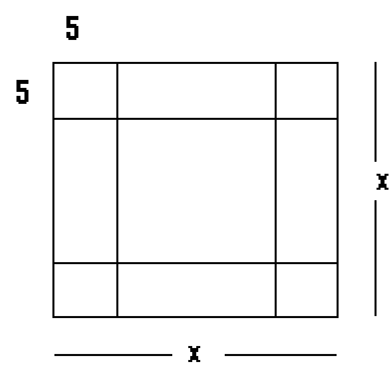


Figura 2. Figura para el problema número 5
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

Quitando 5 cm en cada esquina el lado de la caja será x – 5 – 5 =x – 10. La figura 4 ilustra esta situación:

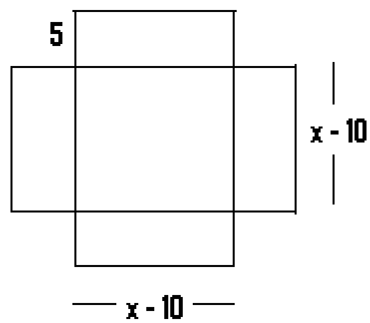


Figura 3. Figura para el problema número 5
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

Doblando los lados hacia arriba la caja queda como la mostrada en la figura 4

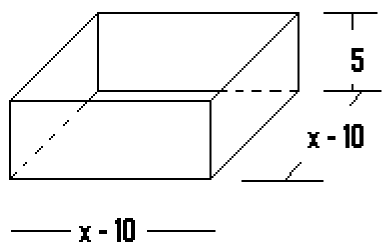


Figura 4. Figura para el ejemplo 5
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

Se debe encontrar un modelo para el volumen:

Volumen es igual a alto (5), por ancho (x-10), por largo(x-10)El volumen tiene un valor de 2000 cm^3; entonces queda: $5(x-10)(x-10)=2000$

Simplificando la ecuación queda:

$$5(x^2 - 20x + 100) = 2000$$
$$x^2 - 20x + 100 = \frac{2000}{5} \rightarrow x^2 - 20x + 100 = 400$$
$$x^2 - 20x + 100 - 400 = 0$$
$$x^2 - 20x - 300 = 0$$
$$(x + 10)(x - 30) = 0$$
$$x + 10 = 0 \quad \vee \quad x - 30 = 0$$
$$x = -10 \; NO \quad \vee \quad x = 30$$

El lado de la lámina debe ser de 30 cm

PROBLEMA NÚMERO 6.

Se desea construir una caja de forma rectangular sin tapa a partir de una lámina de cartón de 20 cm por 15 cm. Para ello se cortarán cuadrados idénticos en las cuatro esquinas y se doblarán los lados hacia arriba. Determine las dimensiones de la caja de tal manera que su volumen sea de 378 cm^3. De su respuesta con una precisión de tres decimales. Determine también la cantidad de material utilizado.

SOLUCIÓN:

Sea x: El lado del cuadrado a quitar.
El largo de la caja es: 15 – 2x
El ancho de la caja es: 20 – 2x
El volumen de la caja es:

$$(15 - 2x)(20 - 2x)x = 378 \Rightarrow 4x^3 - 70x^2 + 300x - 378 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son:

$$x = 3 \vee x = \frac{29 + \sqrt{377}}{4} = 11.8393... \vee x = \frac{29 - \sqrt{377}}{4} = 2.66061..$$

Queda descartado $x = \frac{29 + \sqrt{377}}{4} = 11.8393...$ ya que produce dimensiones negativas.

Se deja al estudiante para que termine el problema.

PROBLEMA NÚMERO 7:

Un piloto realiza un vuelo de 600 millas. Si aumenta su velocidad en 40 milla, por hora él podría recorrer esa distancia en 1/2 hora menos. ¿Cuál es su velocidad?

Solución:

Sean $v = velocidad\ \ en\ \ mll/hr$.

$\frac{600}{v} =$ Tiempo para volar 600 millas a una velocidad $v\ \ mll/h.$

$\frac{600}{v+40} =$ Tiempo para volar 600 millas a una velocidad $(v+40)\ mll/h$.

La diferencia entre estos dos tiempos es 1/2 hora, por tanto, $\frac{600}{v} - \frac{600}{v-40} = \frac{1}{2}$.

Esta ecuación es equivalente a $v^2 + 40v - 48.000 = 0.$ Resolviendo encontramos $v = 200\ \ mll/h.$ (Verifica¡¡). (Diez, 2002).

Enlaces para problemas resueltos.

http://www.youtube.com/watch?v=ZhAy51ouZlU&feature=relmfu
http://www.youtube.com/watch?v=wg44YjtS_1M
http://www.youtube.com/watch?v=YDbM9hBPvBg&feature=fvwrel
http://www.youtube.com/watch?v=9veNjGofq7I
http://www.youtube.com/watch?v=C-MIecfEJ8Q&feature=related

Ejercicio

1. **Solucione la ecuación** $\frac{3x-1}{8} - \frac{2x+7}{6} = \frac{5x}{9}$ **No olvide comprobar el resultado.**
2. **Solucione la siguiente ecuación cuadrática utilizando los tres métodos vistos; no olvide comprobar el resultado.** $15x^2 = x + 2$
3. **Tres cestos contienen 575 manzanas. El primer cesto tiene 10 manzanas más que el segundo y 15 más que el tercero. ¿Cuántas manzanas hay en cada cesto? (Baldor, 1996)**
4. **Vereda de un jardín. Un terreno rectangular, de 4 X 8 m, es usado como jardín. Se decide poner una vereda en toda la orilla interior de modo que 12 m^2 del terreno se dejen para flores. ¿Cuál debe ser el ancho de la vereda? (Haeussler, 1997)**
5. **Un fabricante de pequeños aparatos domésticos determina que la utilidad P en dólares generada por la producción de x hornos de microondas por semana está dada por la fórmula** $P = \frac{1}{10}x(300 - x)$ **siempre y cuando** $0 \le x \le 200.$ **¿Cuántos hornos deben ser fabricados en una semana para obtener una utilidad de $ 1250? (Stewar, Lothar, & Watson, 2001).**

3.2. Desigualdades e inecuaciones

3.2.1. Desigualdades e inecuaciones.

3.2.1.1 Definiciones y conceptos.

- Desigualdad: Es una expresión que indica que una cantidad es mayor o menor que otra cantidad, Los signos de desigualdad son:

$\geq$: Se lee mayor o igual que, si incluye el extremo y en notación de intervalo se representa por corchete. $[$

>: Se lee mayor que, no incluye el extremo, en notación de intervalo se representa por un paréntesis. (

$\leq$: Se lee menor o igual que, si incluye el extremo, en intervalo se representa por un corchete. $]$

<: Se lee menor que, no incluye el extremo, en notación de intervalo se representa por un paréntesis.)

El infinito se representa por: ∞ y en intervalo siempre se representa por un paréntesis.)
El menos infinito: $-\infty$ En intervalo se representa por un paréntesis. (

- Iinecuaciones: una inecuación es una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas) que sólo se verifica para determinados valores de las incógnitas.

- Propiedades de las inecuaciones: En las inecuaciones se cumplen las mismas propiedades que en las ecuaciones, pero se deben tener en cuenta las siguientes restricciones. (http://www.youtube.com/watch?v=f8etboOqMMg), (http://www.youtube.com/watch?v=y8pr0SYTCi4&feature=related)

1. Cuando todos los términos de una inecuación se multiplican por una cantidad negativa, se debe cambiar el sentido de la desigualdad.
2. En una inecuación no se puede multiplicar o dividir por una cantidad que contenga a la variable.

- **Solución de inecuaciones**: Solucionar una inecuación consiste en encontrar todos los valores de la incógnita que cumplen con el sentido de la desigualdad.

En la inecuación: $3x - 5 < x + 3$, $x = 0$ es solución de la inecuación. $X = 20$, no es solución de la inecuación.

Cuando en el proceso de solución de una inecuación se llega a una desigualada falsa, quiere decir que la inecuación no tiene solución.
Cuando en el proceso de solución de una inecuación se llega a una desigualada verdadera, quiere decir que la solución de la inecuación son todos los reales.

- Solución de inecuaciones lineales e inecuaciones cuadráticas.
- Enlaces para solución de inecuaciones.

http://www.youtube.com/watch?v=CSPk_iUkc-Q
http://www.youtube.com/watch?v=jSZWvCh2PqI&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=CiCp1-3n3sU&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=VphT7BaFAOw&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=CqcneRwCZi4&feature=related

Se explica los pasos con el siguiente ejemplo:
Ejemplo 1:
Solucione la inecuación: $x^2 + 2x > 15$
PASOS:

1. Deje un lado de la inecuación en cero.
   Para el ejemplo:
   $$x^2 + 2x - 15 > 0$$
   Esta expresión se llama inecuación objetivo.

2. Encuentre las raíces de la inecuación objetivo. Esto es igual a cero y resuelva la ecuación resultante, los valores obtenidos son las raíces de la inecuación objetivo. En estas raíces la inecuación objetivo se hace cero, es decir, donde posiblemente hay cambio de signo en la expresión.

Para el ejemplo:
$$x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x+5)(x-3) = 0 \Rightarrow x+5 = 0 \vee x-3 = 0 \Rightarrow x = -5 \vee x = 3$$

Estas son las raíces de la inecuación objetivo.

3 .Cada raíz ubíquela en la recta numérica.

4. Evalúe el signo que tiene la inecuación objetivo en cada raíz. Para ello se toma un número que se encuentre a la izquierda y otro número que encuentre a la derecha de cada raíz. Estos números se reemplazan en la inecuación objetivo y el signo del resultado se coloca encima de la recta numérica.

5. La respuesta o solución de la inecuación, resulta tomando los intervalos que cumplan con el sentido de la desigualdad. Para ello nos fijamos en el sentido de la desigualdad de la inecuación objetivo y en la recta numérica de la siguiente manera:

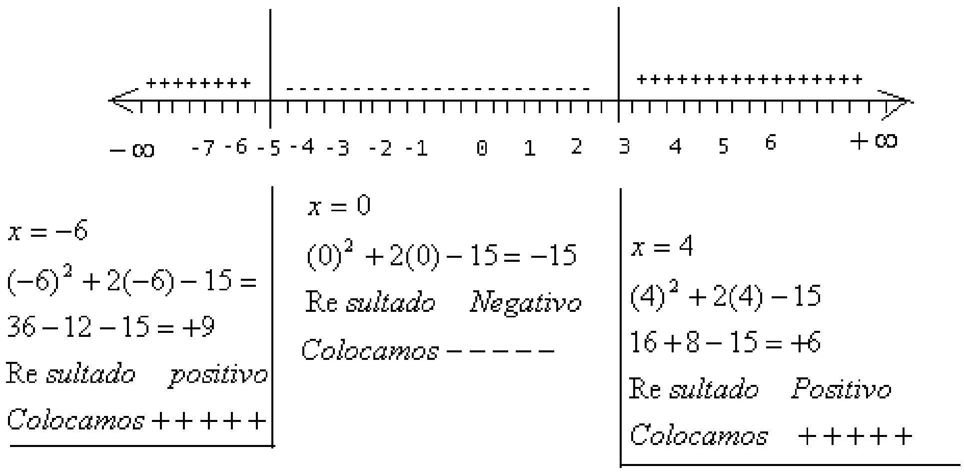


Figura 5. Recta numérica para solucionar $x^2+2x>15$
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

Sí en la inecuación objetivo se tiene: >0 Se toman los ++++, sin incluir las raíces.
Sí en la inecuación objetivo se tiene: ≥ 0 Se toman los ++++, incluyendo las raíces.
Sí en la inecuación objetivo se tiene: <0 Se toman los- - - - -- -, sin incluir las raíces.
Sí en la inecuación objetivo se tiene: ≤ 0 Se toman los - - - - - -, incluyendo las raíces.

6. **Nota:** Este método también se utiliza para solucionar inecuaciones de grado tres o superior.
La solución del ejemplo es: $x\in(-\infty,-5)\cup(3,\infty)$

Ejemplo 2:

Solucione: $7-\frac{x}{2}>\frac{5x}{3}-6$

SOLUCIÓN

Se debe multiplicar toda la inecuación por el m.c.m. de los denominadores, en este caso por 6

$$6*\left(7-\frac{x}{2}\right)>6*\left(\frac{5x}{3}-6\right)\Rightarrow 42-3x>10x-36\Rightarrow -13x+78>0$$

Dejando un lado en cero, queda: $-13x+78>0$ Esta es la inecuación objetivo.

Se resuelve como una ecuación:

$-13x+78=0 \Leftrightarrow -13x=-78 \Leftrightarrow x=-78/-13$

$x=6$.Esta raíz se debe ubicar en la recta numérica:

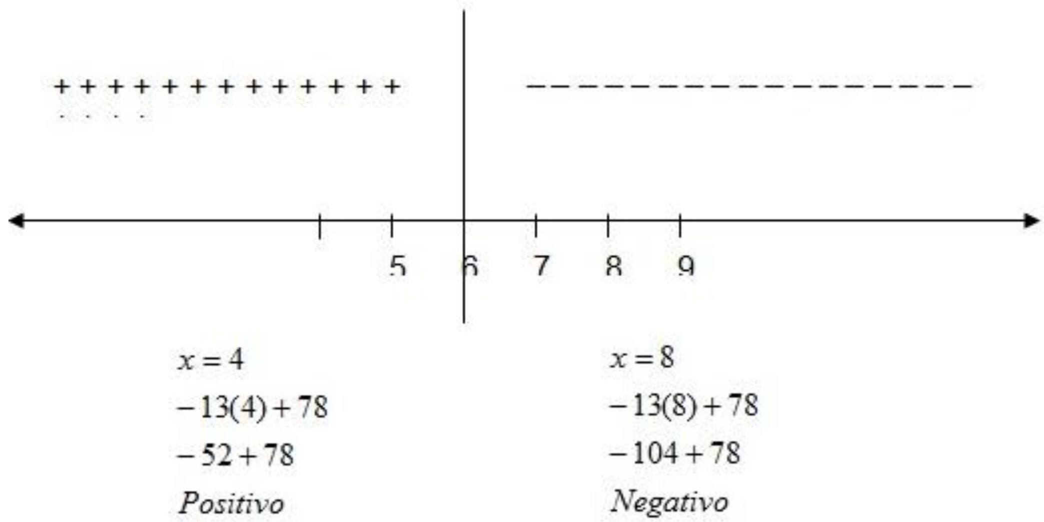


Figura 6. Recta numérica para solucionar $7-\frac{x}{2}>\frac{5x}{3}-6$

(Autor Elkin Ceballos Gómez)

Como la inecuación objetivo dice >0. Entonces se toman los signos más, sin incluir extremos. La solución de la inecuación es: $x \in (-\infty,6)$

Ejemplo3:

Solucione: $2x-10>0$

SOLUCIÓN

$$2x-10=0 \Rightarrow 2x=10 \Rightarrow x=10/2 \Rightarrow x=5$$

Ubicando en la recta numérica

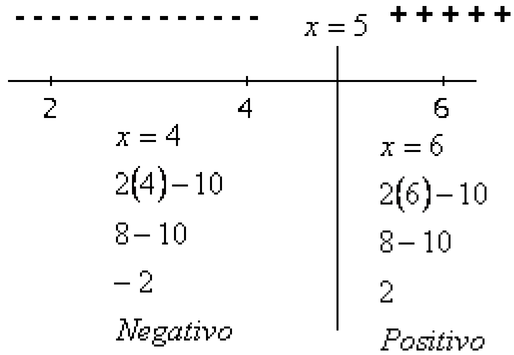


Figura 7. Recta numérica para solucionar $2x-10>0$
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

$x \in (5, \infty)$

Ejemplo 4

Solucione:

$x^2+6x+\leq 0$

Solución:

$$x^2+6x+5=0$$
$$(x+1)(x+5)=0$$
$$x+1=0 \vee x+5=0$$
$$x=-1 \vee x=-5$$

Ubicando en la recta numérica

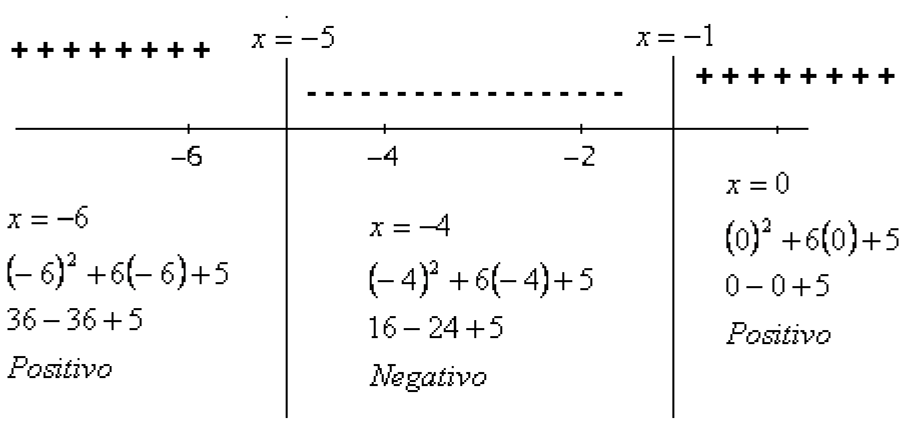


Figura 8. Recta numérica para solucionar $x^2+6x+5\leq 0$
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

La solución queda.

$$x \in [-5,-1]$$

Se toma los negativos, ya que la desigualdad dice menor o igual.

Ejemplo5

Solucione:

$6x^2 - 7x - 3 \geq 0$

Solución

Se debe resolver la ecuación:

$$6x^2 - 7x - 3 = 0$$

$$\frac{6}{6}\left(6x^2 - 7x - 3\right) = 0 \Rightarrow \frac{36x^2 - 7(6x) - 18}{6} = 0 \Rightarrow \frac{(6x-9)(6x+2)}{6} = 0$$

$$\frac{3(2x-3)2(3x+1)}{6} = 0 \Rightarrow (2x-3)\,(3x+1) = 0 \Rightarrow 2x-3=0 \vee 3x+1=0$$

$$2x-3=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \vee 3x+1=0 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$$

La solución de la ecuación es:

$$x=\frac{3}{2} \vee x=-\frac{1}{3}$$

Ubique estos dos números en la recta numérica y determine el signo a la izquierda y a la derecha de cada uno de ellos.

	$x=-\frac{1}{3}$		$x=\frac{3}{2}$	
++++++++++++		- - - - - - - - - - - -		++++++++++++
$x=-1$ $6(-1)^2-7(-1)-3$ $6+7-3$ *Positivo*		$x=0$ $6(0)^2-7(0)-3$ -3 *Negativo*		$x=2$ $6(2)^2-7(2)-3$ $24-14-3$ *Positivo*

Figura 9. Recta numérica para solucionar desigualdad
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

La solución es:

$$x \in= \left(-\infty,-\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2},\infty\right)$$

2. SOLUCIÓN DE INECUACIONES RACIONALES.
Son racionales porque hay variable en el denominador

PROCEDIMIENTO:

1. Deje un lado de la inecuación en cero
2. Deje la inecuación con una sola fracción (Reduzca términos semejantes)
3. La inecuación anterior se llama inecuación objetivo. Encuentre todas las raíces de la inecuación objetivo. Para ello iguale a cero tanto el numerador como el denominador.
4. Coloque las raíces en la recta numérica y determine el signo de la inecuación objetivo a la izquierda y a la derecha de cada raíz.
5. Tenga en cuenta que los intervalos donde se incluyan las raíces del denominador siempre son abiertos (con paréntesis).

Enlaces para solución de inecuaciones racionales.
http://www.youtube.com/watch?v=V5Y92aeEQos
http://www.youtube.com/watch?v=O75Nsbws_CQ&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=_9LMFSWecY0&feature=related

Ejemplos: Resuelva la siguiente $\frac{5}{x+2}+\frac{3x}{x-2}\leq 3$

SOLUCIÓN

$$\frac{5}{x+2}+\frac{3x}{x-2}-3\leq 0 \Leftrightarrow \frac{5(x-2)+3x(x+2)-3(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)}\leq 0$$

$$\frac{5x-10+3x^2+6x-3(x^2-4)}{(x+2)(x-2)}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{5x-10+3x^2+6x-3x^2+12}{(x+2)(x-2)}\leq 0$$

$\frac{11x+2}{(x+2)(x-2)}\leq 0$ Esta es la inecuación objetivo

Cada factor, tanto del numerador como del denominador se debe igualar a cero:

$$11x+2=0 \Leftrightarrow x=-2/11$$

$$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

$$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

Estas tres raíces se ubican en la recta numérica:

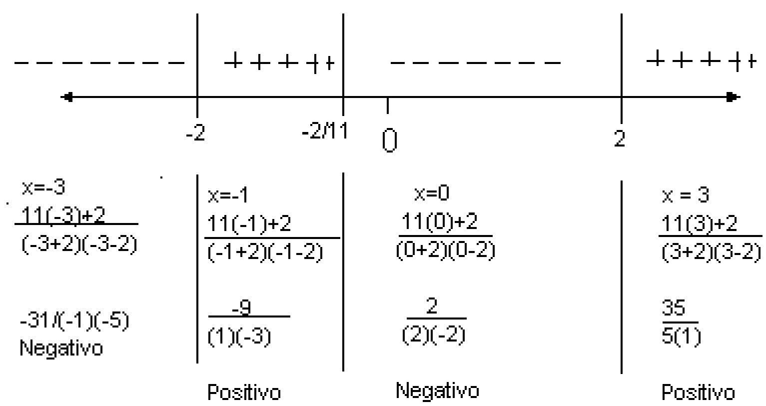


Figura 10. Recta numérica para solucionar desigualdad
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

La respuesta se toma con los signos negativos, ya que en la inecuación objetivo dice ≤ 0.

La respuesta es: $x\in(-\infty,\,-2)\cup[-2/11,\,2)$ En dos y en menos dos el intervalo es abierto, ya que estos números hacen cero el denominador.

Ejemplo 2: Resuelva: $\dfrac{3x}{x+5} \geq 7$

SOLUCIÓN

$$\frac{3x}{x+5} - 7 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x - 7(x+5)}{x+5} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x - 7x - 35}{x+5} \geq 0$$

$\dfrac{-4x-35}{x+5} \geq 0$. Esta es la inecuación objetivo.

Se iguala tanto el denominador como el numerador a cero:

$$x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$$

$$-4x - 35 = 0 \Leftrightarrow x = -35/4(-8.75)$$

Se Ubica estas raíces en la recta numérica.

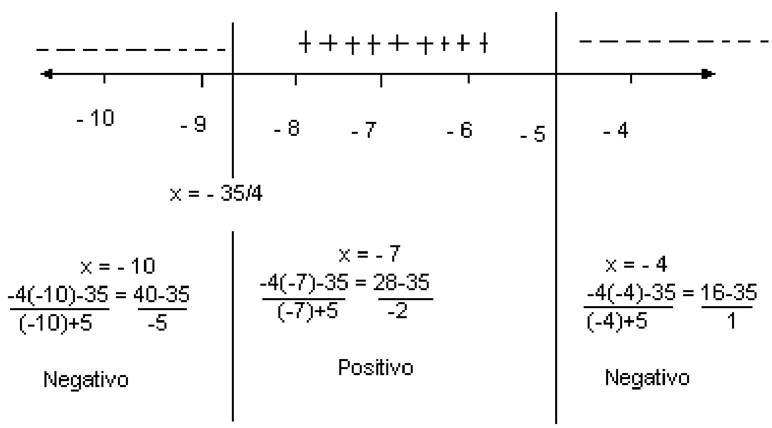


Figura 11. Recta numérica para solucionar desigualdad
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

La solución se da tomando los signos positivos, ya que en la inecuación objetivo dice ≥ 0

La solución es: $x \in [-35/4, -5)$

En menos cinco el intervalo es abierto porque en él se hace cero el denominador.

Ejemplo 3:

Solucione

$$\frac{2x-3}{x^2-25} \geq 0$$

SOLUCIÓN

Para hallar el dominio, se debe cumplir que:

$$2x-3\geq 0 \wedge x^2-25>0$$

$$2x-3=0\Rightarrow 2x=3\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$x^2-25=0\Rightarrow (x+5)(x-5)=0\Rightarrow x+5=\vee x-5=0\Rightarrow x=-5\vee x=5$$

A continuación se ubica estos puntos en la recta numérica y luego determinamos el signo de la expresión irracional a la izquierda y a la derecha de cada uno de estos números.

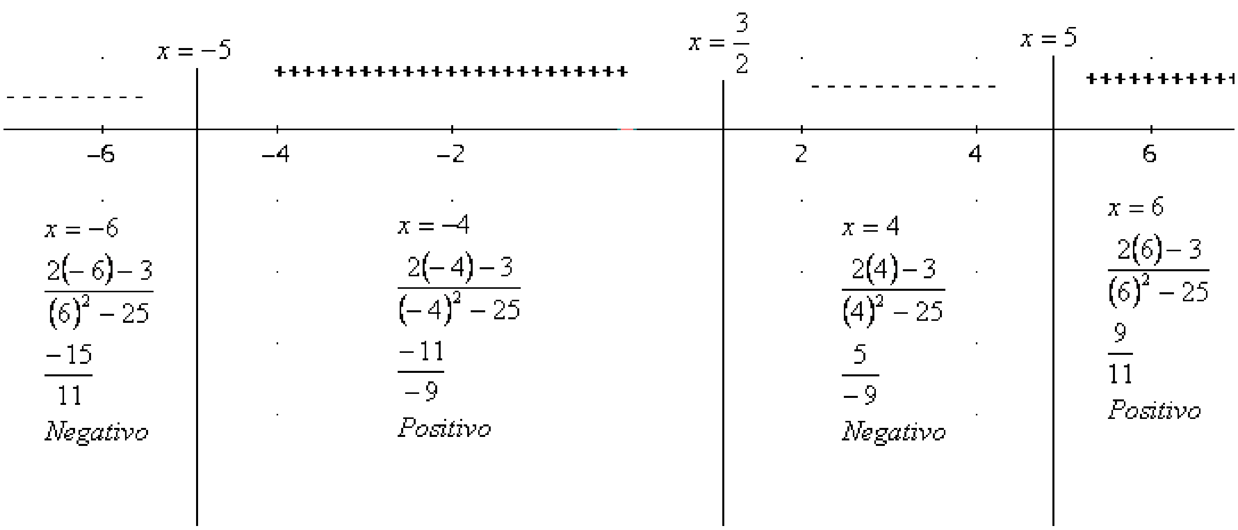


Figura 12. Recta numérica para solucionar desigualdad
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

La solución es:

$$x\in\left(-5,\frac{3}{2}\right]\cup(5,\infty)$$

2. SOLUCIÓN DE INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO.

El valor absoluto se refiere a una cantidad que siempre es positiva. El símbolo de valor absoluto es: $|\ |$

$|3|=3$ $\quad|-2|=2$ $\quad|-5|=5$ $\quad|0|=0$ $\quad|-3/5|=3/5$

$|x| \leq 5$ Quiere decir que x debe estar entre menos cinco y cinco: $-5 \leq x \leq 5 \vee x \in [-5,\ 5]$

En Términos generales $|x| \leq b \Rightarrow -b \leq x \leq b \vee x \in [-b,\ b]$

Así mismo: $|x| \leq b \Rightarrow -b \leq x \leq b \vee x \in [-b,\ b]$

También: $|x| \geq b \Leftrightarrow x \geq b \vee x \leq -b$

Y también: $|x| > b \Leftrightarrow x > b \vee x < -b$

Por ejemplo $|x| > 10$ quiere decir que $x > 10 \vee -10 > x$

Cuando se tiene una inecuación de este tipo, se deben plantear estas desigualdades.
Enlaces para solución de desigualdades con valor absoluto.
http://www.youtube.com/watch?v=Ogxr5wwVMAw
http://www.youtube.com/watch?v=HA3Vgrb3U-c&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=8OjhQ7z48qM&feature=related

Ejemplo 1: Resuelva la desigualdad $|2x-3| < 2$

SOLUCIÓN
Se debe cumplir que: $-2 < 2x-3 < 2$

Entonces se debe solucionar estas desigualdades simultáneamente:
Sumando 3 en todos los términos de la expresión queda: $-2+3 < 2x-3+3 < 2+3$

$1 < 2x < 5$

Dividiendo entre 2 queda: $1/2 < 2x/2 < 5/2$

Simplificando queda:

$1/2 < x < 5/2$, Que equivale a: $x \in (1/2,\ \ 5/2)$

Ejemplo 2: Resuelva $|7-3x| \geq 8$

SOLUCIÓN

$|7-3x| \geq 8$ Significa que:

$$7-3x \geq 8 \qquad \vee \qquad 7-3x \leq -8$$

Se debe resolver cada inecuación por separado y la solución es la unión de ambas soluciones:

$7-3x \geq 8 \Leftrightarrow 7-3x-8 \geq \Leftrightarrow \mathbf{-3x-1 \geq 0}$ Es la inecuación objetivo uno

Su raíz es: $x = -1/3$

Ubicando en la recta numérica:

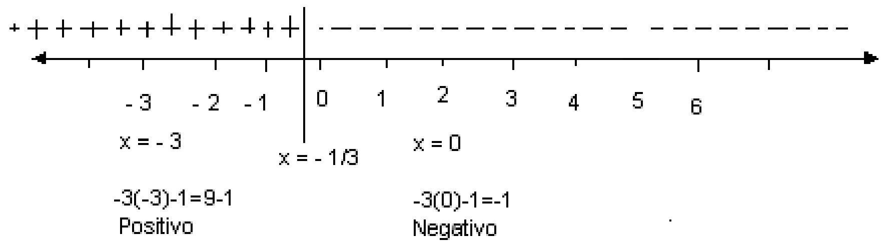


Figura 13. Recta numérica para solucionar desigualdad con valor absoluto.
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

Como en la inecuación objetivo uno dice ≥ 0, se deben tomar los signos de suma. La solución de esta inecuación es: $x \in (-\infty, -1/3]$

$7-3x \leq -8 \Leftrightarrow -3x+8+7 \leq 0 \Leftrightarrow \mathbf{-3x+15 \leq 0}$ Es la inecuación objetivo dos

Su raíz es: $x = 5$

Ubicando en la recta numérica:

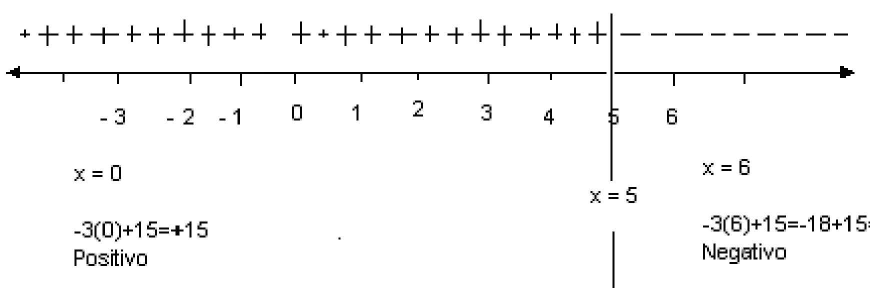


Figura 14. Recta numérica para solucionar desigualdad
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

Como el sentido de la inecuación que estamos resolviendo es ≤ 0, se deben tomar los signos menos:

Para esta inecuación la solución es: $x \in [5, \infty)$

La solución final es la unión de las dos soluciones:

Solución: $x \in (-\infty, -1/3] \cup [5, \infty)$

Ejemplo 3: Resuelva $\left|4-\frac{1}{2}x\right| \le 7$

SOLUCIÓN

$$-7 \le 4-\frac{1}{2}x \le 7 \Leftrightarrow -7-4 \le 4-\frac{1}{2}x-4 \le 7-4 \Leftrightarrow -11 \le -\frac{1}{2}x \le 3$$

Multiplicando por 2: $2(-11) \le 2\left(-\frac{1}{2}x\right) \le 2(3) \Leftrightarrow -22 \le -x \le 6$

Multiplicando por menos uno y cambiando el sentido de las inecuaciones:

$$-1(-22) \ge -1(-x) \ge -1(6) \Leftrightarrow 22 \ge x \ge -6 \Leftrightarrow x \in [-6,\ 22].$$

Ejemplo 4: $|5x-9| \ge -10$

SOLUCIÓN

Esta inecuación no tiene solución, ya que el valor absoluto nunca da negativo.

NOTA:

Cuando las raíces de una inecuación son complejas, o lo que es lo mismo al tratar de solucionar la ecuación resultante, esta no tiene solución, quiere decir, que la inecuación se cumple para todos los números reales o para ninguno. Por lo tanto es suficiente con evaluar para un solo valor de “x”.
Ejemplos de lo anterior: Solucione las inecuaciones

1. $x^2+4>0$
   $x^2+4=0 \quad a=1,\ b=0 \wedge c=4$
   $$x=\frac{-(0)\pm\sqrt{(0)^2-4(1)(4)}}{2(1)}=\frac{\pm\sqrt{-16}}{2}$$ No existe, por lo tanto la ecuación no tiene solución.

Debemos determinar el signo de x^2+4 para cualquier valor de x

$Si\ x=-2,\ tenemos: (-2)^2+4=8\ positivo$, quiere decir que x^2+4 siempre es positivo ó mayor que cero. Por lo tanto, la solución de la inecuación es: $x \in lR$

2. $-x^2+6x \ge 10$
   $-x^2+6x-10 \ge 0$
   $-x^2+6x-10=0$

$a = -1,\ b = 6 \wedge c = -10$

$x = \dfrac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(-1)(-10)}}{2(-1)} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-40}}{-2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{-4}}{-2}$ No existe, es decir, la ecuación no tiene solución.

Se debe determinar el signo de $-x^2 + 6x - 10$.

Sí $x = 3 \Rightarrow -(3)^2 - 6(-3) - 10 = -9 - 18 - 10$ $Negativo$. Quiere decir que $-x^2 + 6x - 10$ siempre es negativo, nunca es cero y la inecuación dice ≥ 0, por lo tanto, la inecuación no tienen solución en los reales.

Ejercicio

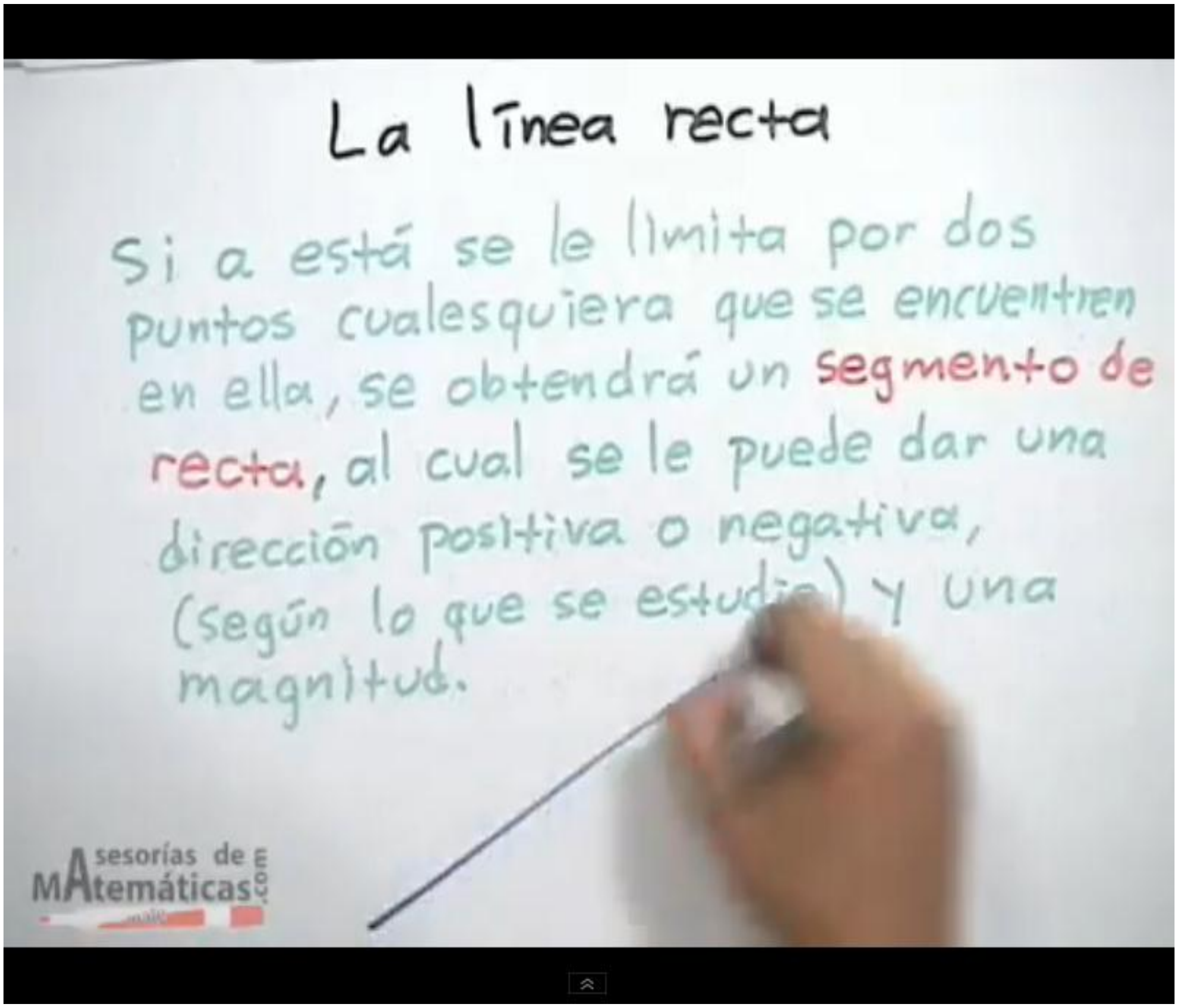
Solucione las siguientes inecuaciones:

1. $\dfrac{5x-3}{4} - \dfrac{7x-1}{12} \geq \dfrac{11x-1}{8}$

2. $5x^2 - 18x + 9 \leq 0$

3. $\dfrac{3}{x+2} - \dfrac{5}{x+9} \geq -1$

4. CONCEPTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA



http://www.youtube.com/watch?v=ZRp1OYm746s&feature=fvsr

OBJETIVO GENERAL

En esta unidad se pretende estudiar el modelo lineal, de gran aplicación en todas las áreas del conocimiento. Los modelos matemáticos permiten la representación de situaciones problémicas mediante el lenguaje matemático, facilitando de esta manera la manipulación matemática, soluciones generales y no particulares y su representación gráfica.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desarrollar el concepto de pendiente.
- Identificar las diferentes formas de ecuaciones de una recta.
- Determinar las diferentes formas de la ecuación de una recta.
- Plante solucionar situaciones problema mediante la utilización de model

Prueba Inicial

Identifique la pendiente en cada una de las siguientes expresiones lineales

1. $y = 3x - 2$
2. $5x - 3y = 4$
3. $y - 6x + 5 = 4$
4. $4y + 2x - 9 = 0$
5. $11x - 6y + 7 = 2x - y + 3$

4.1. Definición de línea recta o modelo lineal o ecuación de la línea recta

Es una ecuación que relaciona dos variables, una de las variables se asume como variable independiente y se le asigna la letra x ó la letra t ó la letra q; la otra variable se asume como variable dependiente y se le asigna la letra y.

Una ecuación lineal cumple con las siguientes características:

1. El máximo exponente de la variable **x** es uno, esta es la variable independiente y otras letras que se utilizan para la variable independiente son: **q, t, z.**
2. El máximo exponente de la variable **y** es uno, esta es la variable dependiente.
3. Su gráfica es una línea recta.
4. No hay variable en el denominador.
5. No hay producto entre las variables.
6. Para hacer la gráfica es suficiente con conocer dos puntos sobre la línea recta.
   Enlaces para línea recta.

http://www.youtube.com/watch?v=ZRp1OYm746s

- Ecuaciones de la línea recta.

La línea recta tiene diferentes presentaciones, todas equivalentes. Veamos algunas de ellas.

- **Ecuación punto pendiente de la línea recta**. Presenta la siguiente forma:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Donde:

(x_0, y_0) : Son las coordenadas de un punto conocido sobre la línea recta.
m : Es la pendiente de la línea recta.

- **Ecuación intersección pendiente de la línea recta**. Esta ecuación resulta de despejar y de la ecuación anterior. Presenta la siguiente forma:

$$y = mx + b$$

Dónde:
m : Es la pendiente de la línea recta.
b :Es la intercepto de la línea recta con el eje y. Es el punto donde la recta corta el eje y.

Ejemplo:

$$y = 2x + 5. \quad m = 2, \quad b = 5.$$

- **Ecuación general de la línea recta**. Es una ecuación igualada a cero. Presenta la siguiente forma:

$$Ax + By + C = 0$$

Donde: A, B, C son números cualquiera. (**http://www.youtube.com/watch?v=4W6_g-KdEHE&feature=related)**

Ejemplo:

$$5x - 6y + 7 = 0$$
$$8x + 6y = 0$$
$$-3x + 7 = 0$$

- Pendiente de una línea recta:

La pendiente es un valor constante para cualquier línea recta.
La pendiente da información acerca del ángulo de inclinación de la línea recta con respecto al eje **x**.
$m > 0$. El ángulo de inclinación es menor de 90 grados. En este caso se dice que la recta es creciente.

$m < 0$. El ángulo de inclinación es mayor de 90 grados. En este caso se dice que la recta es decreciente.
$m = 0$. El ángulo de inclinación es de 180 grados. En este caso se tiene una recta horizontal cuya ecuación es: y = b.
m No existe. El ángulo de inclinación es de 90 grados. En este caso se tiene una recta vertical cuya ecuación es x = c.

- Rectas paralelas:

Son rectas que por más que se prolonguen, nunca se tocan ni se cortan, tienen la característica que sus pendientes son iguales.
Dos rectas L1 y L2 son paralelas si se cumple que sus pendientes $m_1 \wedge m_2$, son iguales, es decir si $m_1 = m_2$ las rectas son paralelas, o viceversa.

- rectas perpendiculares o rectas normales.

Se dice que dos rectas son perpendiculares o normales cuando se cortan formando entre si un ángulo de 90^0.
Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a menos uno.

Rectas perpendiculares: $m_1 * m_2 = -1$

- GRÁFICA: Para graficar un modelo lineal es suficiente con dos puntos, los paso a seguir son:
  1. Lleve el modelo a la forma intercepto pendiente.
  2. Se seleccionan dos valores de **x** arbitrariamente
  3. Cada valor de **x** seleccionado se reemplaza en el modelo para obtener la respectiva **y**.
  4. Las parejas obtenidas se ubican en el plano cartesiano.
  5. Una los dos puntos obtenidos mediante una línea recta.

Enlaces para gráfica de la línea recta:
http://www.youtube.com/watch?v=itezG3RQd0w&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=dLNxF4SlxIw&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=1V8drS0gt_Q&feature=related

Ejemplos: Grafique cada una de las siguientes ecuaciones lineales.

Ejemplo1:

$$2y - 6x + 10 = 0.$$

SOLUCIÓN

Seleccionando dos valores de x (los que cada quien deseé) por ejemplo x = 0 y x = 4, con estos valores se obtiene la respectiva **y** reemplazando en la ecuación.

Para $x = 0, \quad y = 3(0) - 5 = -5$.
Este punto tiene coordenadas (0, -5).

Para $x = 4, \quad y = 3(4) - 5 = 12 - 5 = 7$.
Este punto tiene coordenadas (4,7).

Haciendo una tabla de valores queda.

X	0	4
Y	-5	7

Ubicando estos dos puntos en el plano cartesiano y uniéndolos mediante una línea recta. La gráfica se muestra en la figura 15.

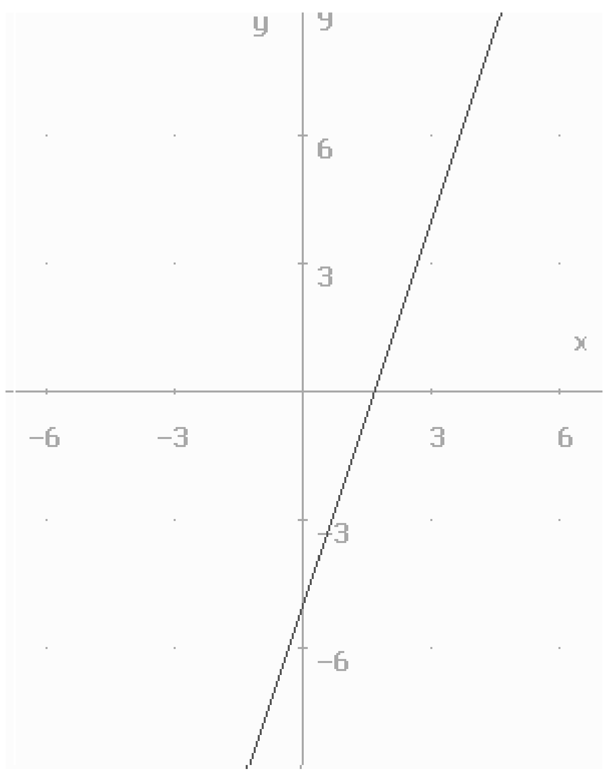


FIGURA 15. Gráfica de $y = f(x) = 3x - 5$
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

Ejemplo2:
Grafique la recta

$$y = -4x + 10$$

SOLUCIÓN

Sí $x = 2$ $\quad y = -4(2) + 10 = -8 + 10 = 2$.
Sí $x = 5$ $\quad y = -4(5) + 10 = -20 + 10 = -10$.

x	2	5
y	2	-10

La gráfica se muestra en la figura 16

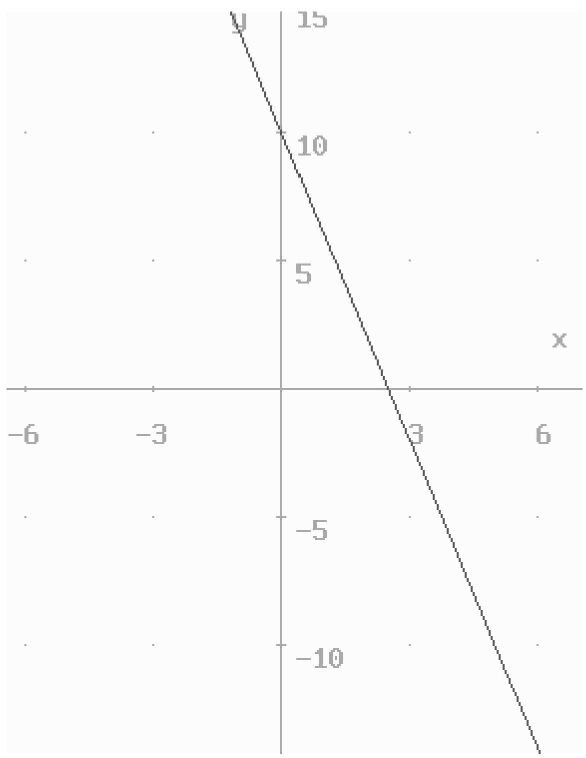


FIGURA 16. Gráfica de $y = f(x) = -4x + 10$
(Autor Elkin Ceballos Gómez)

Ejemplo3: Grafique la recta

$$y = g(x) = 2$$

SOLUCIÓN
Se puede ver que para cualquier valor de **x** la **y** siempre tendrá el mismo valor. La gráfica se ve en la figura 17

X	-8	8
y	2	2

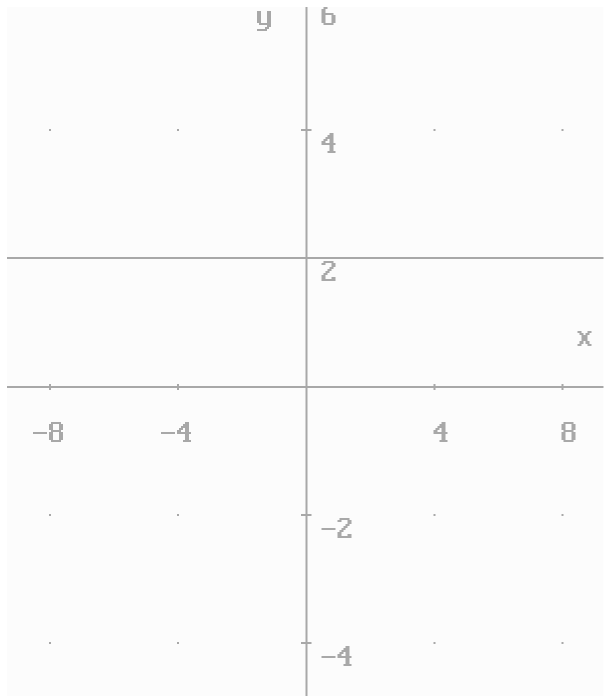


FIGURA 17 Gráfica de $y = g(x) = 2$

(Autor Elkin Ceballos Gómez)

Ejercicio

1. Para cada una de las siguientes rectas, determine la pendiente:

a. $5x - 3y = 12$

b. $2x = -4y$

c. $2y = 6$

d. $5x - 9 = x - 1$

e. $2y - 4x = 12$

2. Represente gráficamente las siguientes rectas:

a. $y = x$

b. $y = 4x + 3$

c. $y = 2x - 5$

d. $5x - 2y = 8$

e. $4y - 6x + 1 = 13$

- Determinación de la ecuación de la línea recta o modelo lineal

Algunas veces el modelo lineal no es conocido, por lo tanto se debe hallar, naturalmente se debe dar la información suficiente para ello. Una de las formas de construirlo es utilizando la ecuación punto pendiente de la línea recta, dicha ecuación es la siguiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Dónde:
m : es la pendiente de la línea recta.
(x_0, y_0): Son las coordenadas de un punto sobre la línea recta; Dichos valores son conocidos.

- **Determinación de la ecuación de la línea recta**

CONOCIDOS UN PUNTO DE COORDENADAS (x_0, y_0) SOBRE LA LÍNEA RECTA Y LA PENDIENTE m DE LA LÍNEA RECTA (**http://www.youtube.com/watch?v=W3wRESJsc9Q&feature=related**

- Reemplace el punto y la pendiente en la ecuación punto pendiente.
- Efectúe operaciones.
- Despeje la variable dependiente (que por lo general le asignamos la letra y).

Ejemplos:
Encuentre el modelo matemático lineal que cumple con las siguientes características, (lo que es lo mismo encuentre la ecuación de la línea recta):

Ejemplo1:
Pasa por el punto de coordenadas (1,3) y tiene pendiente igual a –2.
Los datos del ejemplo son:

$x_0 = 1, \quad y_0 = 3, \quad m = -2$. El primer valor del punto siempre corresponde a la variable independiente (en este caso a la **x**) y el segundo valor corresponde a la variable dependiente (en este caso a la **y**).

Con estos datos y con la ecuación punto pendiente se determina el modelo lineal pedido.

$$y - 3 = -2(x - 1) \rightarrow y - 3 = -2x + 2 \rightarrow y = -2x + 2 + 3$$

$$y = -2x + 5$$

Que es el modelo pedido. Queda como ejercicio efectuar la gráfica del modelo.

Ejemplo2:
Pasa por el punto de coordenadas (-2,5) y tiene pendiente igual a 3/2.
Los datos son:

$$x_0 = -2, \quad y_0 = 5, \quad m = 3/2$$

$$y - 5 = 3/2\left[x - (-2)\right] \rightarrow y - 5 = \frac{3}{2}x + 3$$

$$y = \frac{3}{2}x + 3 + 5 \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 8$$

Queda como ejercicio efectuar la gráfica.

- Determinación de la ecuación de la línea recta

CONOCIDOS DOS PUNTOS DE COORDENADAS: $(x_0, y_0) \wedge (x_1, y_1)$.SOBRE LA LÍNEA RECTA.
(http://www.youtube.com/watch?v=Igdn4G1rbfU)
(http://www.youtube.com/watch?v=KUKKJMbC6m8&feature=related)
Se Halla la pendiente de la recta, utilizando la ecuación de la pendiente:

$$m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \quad o \quad m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Con la pendiente y cualquiera de los dos puntos anteriores se determina el modelo lineal, utilizando la ecuación punto pendiente de la línea recta.

Ejemplo1:
Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos de coordenadas (3,2) y (5,1).

Solución

Los datos para determinar la pendiente son:
$x_0 = 3, \quad y_0 = 2, \quad x_1 = 5, \quad y_1 = 1$ ó también $x_0 = 5, \quad y_0 = 1, \quad x_1 = 3, \quad y_1 = 2$

$$m = \frac{2-1}{3-5} = \frac{1}{-2} \rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Los datos para determinar el modelo lineal son:

$m = -\frac{1}{2}, \quad x_0 = 3, \quad y_0 = 2$

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x-3) \rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 2$$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ Que es el modelo matemático o ecuación lineal pedida.

- **Determinación de la ecuación de la línea recta**

CONOCIDO UN PUNTO DE COORDENADAS (x_0, y_0) SOBRE LA LÍNEA RECTA Y LA CONDICIÓN QUE LA RECTA CUYO MODELO SE DESEA BUSCAR O ES PARALELA O ES PERPENDICULAR A UNA RECTA CUYO MODELO ES CONOCIDO:

Se encuentra la pendiente de la recta cuyo modelo es conocido. Para ello se lleva el modelo a la forma intercepto pendiente; esto se despeja la **y,** el número que acompañe a la **x** es la pendiente.

Dos o más rectas son paralelas si se cumple que tienen la misma pendiente.

$$\boxed{\text{Rectas paralelas: } m_1 = m_2 = m}$$

Sí las rectas son paralelas se toma la misma pendiente.
(http://www.youtube.com/watch?v=8gEyd4oekz0&feature=related)

Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a menos uno.

$$\boxed{\text{Rectas perpendiculares: } m_1 * m_2 = -1}$$

La pendiente que se busca se obtiene como menos uno dividido la pendiente conocida.

Utilice la ecuación punto pendiente para determinar la ecuación de la línea recta. (http://www.youtube.com/watch?v=bfZ57ESvFok&feature=relmfu)
(http://www.youtube.com/watch?v=ee90DBguSR8&feature=related)

Ejemplo1:

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto de coordenadas (-1,5) y que es perpendicular a la recta de ecuación es 2y-4x=6.

Solo se conoce las coordenadas del punto, se debe encontrar la pendiente, La información que se tiene es que la recta pedida es perpendicular a la recta cuya ecuación o modelo es conocido.

Para encontrar la pendiente de la recta perpendicular se debe despejar la **y** en la ecuación conocida y el número que acompañe a la **x** es la pendiente:

$$2y - 4x = 6 \rightarrow 2y = 4x + 6 \rightarrow y = \frac{4x+6}{2} \rightarrow y = \frac{4x}{2} + \frac{6}{2}$$
$$y = 2x + 3 \rightarrow m_1 = 2$$

Para hallar la pendiente de la recta cuya ecuación se desea buscar se aprovecha la condición que si dos rectas son perpendiculares el producto de sus pendientes es igual a menos uno y se despeja la pendiente buscada.

Sea m_2 la pendiente de la recta buscada, se sabe qué $m_1 = 2$, entonces:

$$2 * m_2 = -1 \rightarrow m_2 = -\frac{1}{2}$$

Se halla la ecuación de la recta:

$$x_0 = -1, \quad y_0 = 5, \quad m = -\frac{1}{2}$$

$$y - 5 = -\frac{1}{2}[x - (-1)]$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$ Ecuación o modelo lineal pedido.

$$y = 2x + 3 \quad \wedge \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

Queda como ejercicio efectuar las gráficas.

Ejemplo2:
Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto de coordenadas (3,3) y es paralela a la recta cuya ecuación es y = 5x+2. Grafique.

Solución
Como son rectas paralelas tienen la misma pendiente. La pendiente de la recta dada es el número que acompaña a la **x** después de haber despejado la **y**; como ya la **y** está despejada podemos ver que la pendiente es 5.

Los datos para hallar la ecuación son:

$x_0 = 3, \quad y_0 = 3, \quad m = 5$

$y - 3 = 5(x - 3)$

$y = 5x - 12$ Es la ecuación pedida.

Queda como ejercicio efectuar las gráficas en un mismo plano cartesiano.

Ejercicio

Halle la ecuación de cada recta:

1. **Pasa por los puntos (- 2, 5) y (6, 7)**
2. **Pasa por el punto (9, -6) y su pendiente es -4.**
3. **Pasa por el origen y por el punto de coordenadas (2/3, 1/2).**
4. **Pasa por el punto de coordenadas (-4, 7) y su pendiente es -2.**
5. **Pasa por el punto (-4 ,1) es paralela a la recta** $2x-4y=16$
6. **Pasa por el punto (2, 1) es perpendicular a la recta** $3y-2x=5$
7. **Es perpendicular a la recta** $y=\frac{1}{5}x-9$ **pasa por el punto (-1, 7).**
8. **Es paralela a la recta** $y=-3x+1$ **pasa por el punto (-3, 8)**

4.1.1. Aplicaciones del modelo lineal

Al enfrentarse a un problema se sugieren los siguientes pasos:

- Identifique las variables que interviene en el problema
- Identifique variable independiente y asígnele una letra.
- Identifique la variable dependiente y asígnele una letra.
- Identifique los datos del problema.
- Cuando sea necesario utilice las condiciones del problema para buscar más datos.
- De acuerdo a los datos encuentre el modelo lineal pedido.
- Con el modelo responda a las preguntas planteadas.
- Enlaces para aplicaciones de la línea recta.

http://www.youtube.com/watch?v=gCqprj3jTzQ

Ejemplo1:

Suponga que la demanda por semana de un producto es de 100 unidades cuando el precio es de $ 58 por unidad, y de 200 unidades si son a $ 51 cada una. Determinar La ecuación de demanda, suponiendo que es lineal.

Solución:

Estrategia: Ya que la ecuación de demanda es lineal, la curva de la demanda debe ser una línea recta. Tenemos que la cantidad *q* y el precio *p* están relacionados linealmente de tal modo que *p* = 58 cuando *q* = 100, y *p* =51 cuando *q* = 200. Con estos puntos podemos encontrar una ecuación de la recta, esto es, la ecuación de demanda.

La pendiente de la recta que pasa por (100, 58) y (200, 51) es:

$$m = \frac{51-58}{200-100} = -\frac{7}{100}$$

Una ecuación de la recta (forma punto – pendiente) es

$$p - p_1 = m(q - q_1)$$

$$p - 58 = -\frac{7}{100}(q - 100).$$

Simplificando, da la ecuación de demanda

$$p = -\frac{7}{100}q + 65.$$ (Haeussler, 1997)

Ejemplo2:

Suponga que el valor de una maquinaria en cierta empresa disminuye cada año un 10% de su valor original. Si el valor original es de $ 200 millones.

Encuentre un modelo matemático que exprese el valor de la maquinaria en cualquier año.

SOLUCIÓN

Sea t número de años desde que se compró la maquinaria.

Sea $y = c(t)$ el costo de la maquinaria para cualquier año t.

Se sabe que la maquinaria tuvo un costo inicial de $ 200 millones. Esto quiere decir que en $t_0 = 0,\ y_0 = 200$

También se sabe que el precio de la maquinaria disminuye cada año en un 10% de su valor inicial, quiere decir que cada año el valor de la maquinaria disminuye el 10% de 200,es decir, 200*10%=20 millones de pesos, esta es la pendiente, y como es una disminución constante, el signo es negativo. $m = -20$

Para hallar el modelo lineal se dispone de la siguiente información:

$$m = -20, \quad t_0 = 0, \quad y_0 = 200$$

$$y - 200 = -20(t - 0)$$
$$y = c(t) = -20t + 200$$

Nota:

Cuando se tiene un valor constante que aumenta o disminuye, este valor corresponde a la pendiente.

Cuando aumenta, quiere decir que la pendiente es positiva.

Cuando disminuye, quiere decir que la pendiente es negativa.

Ejemplo3:
Una compañía fabrica y vende cierto tipo de artículo bajo las siguientes condiciones: Costo de fabricación de una unidad es de 25 dólares, cada unidad se vende a 40 dólares y la compañía tiene costos fijos mensuales de 350 dólares. Determine:

a. Un modelo para los costos totales mensuales de la compañía.

SOLUCIÓN
Sea q el número de unidades producidas y vendidas mensualmente, sea y = c(q), el costo total mensual cuando se producen q unidades.
Sabemos que si no hay producción, se tienen costos de US$ 350, esto quiere decir: $q_0=0$, $y_0=350$.
También sabemos que la pendiente para el costo es 25 dólares

$$m = 25\frac{US\$}{unidad}$$

Como la pendiente es positiva, quiere decir que por cada unidad que se aumente la producción, los costos aumentarán US$ 25; es decir, la pendiente significa en este caso el costo de producir una sola unidad.
Con la pendiente, el punto y utilizando la ecuación punto pendiente encontramos el modelo lineal para los costos totales mensuales.

Datos: $m = 25 \quad q_0 = 0 \quad y_0 = 350$

$$y - 350 = 25(q - 0) \rightarrow y = 25q + 350$$

Que es modelo de costo pedido.

b. Modelo para el ingreso.
SOLUCIÓN
Sea **r** el ingreso y q el número de unidades producidas y vendidas. Se tiene la siguiente información:
Si no se vende nada, no habrá ingreso, esto nos da el siguiente punto: $q_0=0$, $r_0=0$.
La pendiente para el ingreso es 40

$$m = 40\frac{US\$}{unidad}.$$

Como la pendiente es positiva quiere decir que por cada unidad que se aumenten las ventas, los ingresos se aumentan en 40 dólares, es decir, la pendiente se interpreta en este caso como el precio de venta de cada unidad.
El modelo lineal para el ingreso se obtiene con la pendiente y el punto:

Datos: $m = 40 \quad q_0 = 0 \quad r_0 = 0$

$$r - 0 = 40(q - 0)$$

$r = 40q$ US$ Modelo lineal para el ingreso.

c. Un modelo para la utilidad o ganancia.

Utilidad es igual a ingresos menos costos.

Sea u la utilidad.

$$u = r - c(q)$$

$$u = 40q - (25q + 350)$$
$$u = 15q - 350 \quad US\$$$

d. El punto de equilibrio. Punto de equilibrio quiere decir utilidad igual a cero.

$$u = 0 \rightarrow 15q - 350 = 0 \rightarrow 15q = 350 \rightarrow q = \frac{350}{15}$$

$$q = 23.333 \approx 24 \quad Unidades$$

Quiere decir que para no obtener utilidades se deben producir 24 unidades.

Ejemplo4:

"El costo total para un fabricante está conformado por costos indirectos fijos de US$ 200 anuales más costos de producción de US$ 50 por unidad". (Hoffman & Bradley, 1995, p.29).

Encuentre un modelo para los costos totales anuales del fabricante en términos del número de unidades producidas.

Solución

Sea q el número de unidades producidas anualmente y sea $y = c(q)$ el costo cundo se producen q unidades.

Sabemos que si no hay producción se tienen costos de US$ 200, esto quiere decir: $q_0 = 0, \quad y_0 = 200$

En estos casos el costo por unidad representa la pendiente. $m = 50$

Reemplazando en la ecuación punto pendiente:

$$y - 200 = 50(q - 0)$$

$y = 50q + 200$ Este es el modelo lineal pedido.

Ejercicio

1. **"El costo total para un fabricante consta de costos indirectos fijos de US$5,000 más costos de producción de US$60 por unidad. Exprese el costo total como una función de la cantidad de unidades producidas y elabore la gráfica." (Hoffmann & Bradley, 1995, p.40).**
2. **"ECUACIÓN DE DEMANDA Suponga que los clientes demandarán 40 unidades de un producto cuando el precio es de $ 12 por unidad, y 25 unidades cuándo el precio es de $ 18 cada unidad. Encontrar la ecuación de la demanda, suponiendo que es lineal, y el precio por unidad cuando 30 unidades son requeridas." (Haeussler, 1997, p.138).**
3. **"Un fabricante compra maquinaria por valor de US$20,000. Ésta se deprecia linealmente, de manera que después de 10 años su valor comercial será US$1,000.**
    a. **Exprese el valor de la maquinaria como una función de su antigüedad y dibuje la gráfica.**
    b. **Calcule el valor de la maquinaria después de 4 años." (Hoffmann & Bradley, 1995, p.41).**
4. **"Desde el principio del mes, una represa local ha perdido ha perdido agua a una tasa constante. El día 12, la represa tenía 200 millones de galones de agua; el 21, 164 millones.**
    a. **Exprese la cantidad de agua en la represa como una función del tiempo y elabore la gráfica.**
    b. **El día 8, ¿cuánta agua había en la represa?" (Hoffmann & Bradley, 1995, p.41).**
5. **"Dieta para cerdos En pruebas de una dieta para cerdos, se determinó que el peso (promedio) w (en kilogramos) de un cerdo estadísticamente era una función lineal del número de días d después de iniciada la dieta, donde $0 \leq d \leq 100$. Si el peso de un cerdo al inicio de la dieta fue de 20 kg y después gano 6.6 kg cada 10 días, determine w como una función de d ; y** calcule el peso de un cerdo para 50 días después de iniciada la dieta." (Haeussler, 1997, p.139).

4.2. Pistas de Aprendizaje

No olvide que para sumar fraccionarios heterogéneos se debe llevar cada fraccionario a un denominador común, que es el m.c.m. de los denominadores.

Traer a la memoria Para sumar expresiones algebraicas, se debe sumar el coeficiente de los términos semejantes, el exponente de las letras no cambia, debe ser el mismo.

Traer a la memoria La división entre cero no está definida en ningún campo numérico. Cuando en el numerador hay un número diferente de cero y en el denominador está el cero se dice que el resultado no existe; si en el numerador y en el denominador está el cero, se dice que el resultado es indefinido.

Tener en cuenta El signo de un número fraccionario puede ir en el numerador, en el denominador o en el vínculo. Se acostumbra escribirlo en el numerador o en el vínculo.

Tener en cuenta Para expandir un polinomio elevado a una potencia n, no se distribuye la potencia para cada término del binomio, esto es, $(5x-9)^4$ no es igual a $(5x)^4-(9)^4$. Para expandir $(5x-9)^4$, una forma es utilizando el triángulo de Pascal.

Tenga Presente La raíz par de los números negativos no pertenece a los números reales.

Traer a la memoria Cuando se suma dos números, si los signos son iguales, se suma los números y se conserva el signo que tienen; si los signos son contrarios, se restan y se conserva el signo del número mayor.

Traer a la memoria Si m_1 es la pendiente de una recta y m_2 es la pendiente de una recta perpendicular a la primera, se cumple que $m_1.m_2 = -1$.

Traer a la memoria Una suma de cuadrados no es factorizable en los enteros.

Tenga presente El orden en que se efectúan operaciones es: Primero potencias o raíces, luego multiplicaciones o divisiones y por último sumas y restas.

4.3. Glosario

Mínimo común múltiplo. Símbolo m.c.m. Es el menor de todos los números posibles que contiene exactamente a dos o más números.

Factorizar. "**FACTORIZACION**. El proceso de escribir un polinomio como el producto de polinomios (o factores) irreducibles se llama **Factorización o descomposición en factores irreducibles**." Díez, 2002, p.8).

Igualdad. Una igualdad es una expresión que indica que dos o más cantidades tienen el mismo valor.

Ecuación. "Una **ecuación** es una proposición que indica que dos expresiones son iguales." (Haeussler & Richard, 1977, p.33).
Identidad. "Una ecuación se llama **identidad** si todos los números del dominio de la variable la satisfacen." (Zill & Dewar, 1995, p.62).

Desigualdad. Una desigualdad es un enunciado que indica que un número es mayor que otro; o que un número es mayor o igual que otro; o que un número es menor que otro; o que un número es menor o igual que otro.

Inecuación. Es una desigualdad con incógnitas.

Racionalizar. Consiste en: Utilizando un proceso matemático cambiar una raíz que está en el numerador para el denominador o viceversa.

Expresión algebraica. "Si números representados por símbolos, se combinan mediante operaciones de suma, resta, multiplicación, división o extracción de raíces, entonces la expresión resultante es llamada expresión algebraica." (Haeussler & Richard, 1977, p.17).

Productos notables. Son fórmulas que permiten multiplicar polinomios por simple inspección.

Raíz de una ecuación. "Una solució*n* o **raíz,** de una ecuación es cualquier número que, sustituido en la ecuación, la convierte en una proposición verdadera." (Zill & Dewar, 1995, p.62).

4.4. Bibliografía

Baldor, A. (1996). Álgebra. Madrid: Ediciones y Publicaciones Preludio.

Dávila, A., Navarro, P., & Carvajal, J. (1996). INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO. Caracas: McGraw-Hill.

Diez, l. H. (2002). Matemáticas operativas. Primer año de universidad, Preuniversitarios y semilleros. Medellín: Zona Dinámica.

Haeussler, E. &. (1997). Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. México: Prentice hall.

Hoffmann, L. D., & Bradley, G. L. (1995). CÁLCULO Aplicado a Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales. Santafé de Bogotá: McGRAW-HILL.

Purcell, E., & Varverg, D. (1993). Cálculo con geometría analítica. México: Prentice Hall.

S.T.Tan. (1998). Matemáticas para administración y economía. México: International Thompson editores, S.A.

Stewar, J., Lothar, R., & Watson, S. (2001). Precálculo. Madrid: International Thomson Editores, S.A.

Swokowski, E. (1986). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Uribe, J. (1999). Teoría de conjuntos y temas afines. Medellín.: Serie Schaum.

Zill, D. G., & Dewar, J. (1992). Algebra y trigonometría. Santafé de Bogotá: Mcgraw-Hill/Interamericana S.A.